Міністерство освіти і науки України
Відкритий міжнародний університет розвитку людини
Україна

Інститут комп'ютерних технологій
Кафедра комп'ютерної інженерії

Бескровний О.І.

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ: вища математика

Курс лекцій

Затверджено на засіданні кафедри КІ
Протокол № ___ від
"___"______________2019 р.
Схвалено навчально-методичною
радою ІКТ. Протокол № ___ від "___"
_____________2019 р.

Київ
2019

УДК 311.1
ББК 60.6я73
Б

Рецензенти:

С.О. Тернов, канд. техн. наук, доцент,
В.І. Павленко, канд. фіз.-мат.. наук, доцент.

Бескровний О.І.
Б Математика для економістів: Вища математика [Текст]: конспект лекцій для студентів економічних спеціальностей / О.І. Бескровний; М-во освіти і науки України, Університет Україна, каф. КІ. – К: УУ, 2019 . – 192 с.

Основна мета навчального видання – надати допомогу студентам економічних спеціальностей денної і заочної форм навчання у вивченні курсу вищої математики. Кожна лекція супроводжується теоретичним матеріалом та прикладами розв'язання задач за відповідними темами розділів робочої програми.
В кінці навчального видання подано список рекомендованої літератури.
Цей навчально-методичний посібник можуть використовувати також студенти інших спеціальностей.

УДК 311.1
ББК

Лекція 1а.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАТРИЦЬ. ВИЗНАЧНИКИ

План

1. *Поняття матриці.*
2. *Дії над матрицями: лінійні операції над матрицями, добуток матриць, транспонування матриць.*
3. *Визначники квадратних матриць та їх властивості.*
4. *Мінор. Алгебраїчне доповнення. Обернена матриця.*

1.*Поняття матриці.*

Поняття матриці та алгебра матриць мають дуже важливе значення для економістів: багато математичних моделей економічних об'єктів і процесів подаються в простій, а головне – в компактній матричній формі.

Означення. Прямокутну таблицю чисел, що складається з m рядків і n стовпців, називають **матрицею** розмірності $(m \times n)$. Числа, з яких складається матриця, називають ***елементами матриці***.

Позначають матриці великими літерами латинського алфавіту, а їх елементи – малими літерами з подвійним індексом. Наприклад, a_{ij}- позначення елемента матриці А, який розміщений на перетині i – го рядка і j – го стовпця цієї матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості її стовпців, тобто розмірність матриці $(n \times n)$, то матриця називається ***квадратною матрицею*** n –го порядку.

У квадратній матриці n – го порядку елементи з однаковими індексами a_{11}, a_{22}, a_{33},..., a_{nn} утворюють ***головну діагональ*** матриці.

Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то її називають ***нульовою*** матрицею і позначають літерою О. Якщо тільки елементи головної діагоналі відмінні від нуля, то матриця називається ***діагональною.***

Якщо в квадратній матриці n – го порядку всі елементи, що утворюють головну діагональ, дорівнюють одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю, то таку матрицю називають ***одиничною матрицею*** n – го порядку і позначають літерою *Е*. Вона виконує роль одиниці при множенні матриць.

Наприклад,

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$ - одинична матриця третього порядку.

1. *Дії над матрицями: лінійні операції над матрицями, добуток матриць, транспонування матриць.*

Якщо в деякій матриці А, розмірності $(m\times n)$ записати всі її рядки стовпцями, зберігаючи порядок, тобто, перший порядок записати першим стовпцем, другий рядок – другим стовпцем і т.д., то отриману матрицю розмірності $(n\times m)$, позначають A^T і називають ***транспонованою*** до матриці А. Наприклад, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1&-3\\-7&0\\8&5\end{pmatrix},\quad \textit{то}\ A^T=\begin{pmatrix}1&-7&8\\-3&0&5\end{pmatrix}$$

Дві матриці вважаються ***рівними***, якщо в них однакові кількості рядків і стовпців, а також рівні між собою відповідні елементи.

Лінійними операціями над матрицями називають операції додавання, віднімання (лише однакового розміру) та множення їх на число.

Сумою (різницею) двох матриць А та В, однакової розмірності, називають матрицю С, тієї ж розмірності, кожен елемент якої є сумою (різницею) відповідних елементів матриць А та В: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $\left(c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}\right)$.

Приклад 1. Обчислити суму і різницю матриць А та В, якщо: $A=\begin{pmatrix}3&-5&8\\-4&2&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-10&-1&4\\8&0&3\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Матриці А та В мають однакові розмірності (2×3), тому їх можна додавати і віднімати. В результаті отримаємо матриці, розмірність яких теж (2×3). Отже,

$$C=A+B=\begin{pmatrix}3+(-10)&-5+(-1)&8+4\\-4+8&2+0&9+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-6&12\\4&2&12\end{pmatrix}.$$

$$D=A-B=\begin{pmatrix}3-(-10)&-5-(-1)&8-4\\-4-8&2-0&9-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&4&4\\-12&2&6\end{pmatrix}.$$

Добутком числа b на матрицю А, розмірності $(m \times n)$, називають матрицю bA, тієї ж розмірності, кожен елемент якої є добутком числа b на відповідний елемент матриці А. Матрицю (-1)А називають ***протилежною*** матриці А та позначають –А.

Приклад 2. Знайти матрицю $(-2A)$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

Розв'язання. Матриця А має розмірність (2×3), тому матриця $(-2A)$ теж має розмірність (2×3):

$$-2A = \begin{pmatrix} -2 \cdot 4 & -2 \cdot (-1) & -2 \cdot 5 \\ -2 \cdot (-3) & -2 \cdot 2 & -2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -10 \\ 6 & -4 & -14 \end{pmatrix}.$$

Добутком матриці А, розмірності $(m \times n)$***, на матрицю В, розмірності*** $(n \times k)$, називають таку матрицю С, розмірності $(m \times k)$, кожен елемент c_{ij} якої дорівнює сумі попарних добутків відповідних елементів i – го рядка матриці А і j – го стовпця матриці В, тобто $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$.

Операція множення вводиться лише для узгоджених матриць. Матрицю А називають ***узгодженою з матрицею*** В, коли кількість стовпців матриці А дорівнює кількості рядків матриці В. Розмірність узгоджених матриць така: перша матриця має розмірність ($m \times n$), друга - ($n \times k$).

Для добутку матриць не завжди виконується комутативний закон, тобто *AB≠BA*. Якщо *AB=BA* , то матриці називаються ***переставними*** або ***комутативними.*** Одинична матриця переставна зі всіма матрицями її розмірності.

Приклад 3. Знайти добуток матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є ці матриці узгодженими. Кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, тому матриці можна перемножити, причому розмірність добутку AB буде (2×2). Отже,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}.$$

Кількість стовпців матриці B дорівнює кількості рядків матриці A, тому матриці можна перемножити, причому розмірність добутку BA буде (3×3). Отже,

$$BA = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 & (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -9 \\ 14 & 12 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Властивості операцій над матрицями

Якщо *a, b* – числа; *A, B, C* – матриці, то:

1) $(A^T)^T = A$; 2) $O + A = A + O = A$;
3) $A + B = B + A$; 4) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
5) $a \cdot (A + B) = aA + aB$; 6) $(a + b) \cdot A = aA + bA$;
7) $0 \cdot A = A \cdot 0 = O$; 8) $E \cdot A = A \cdot E = A$;
9) $a \cdot O = O$; 10) $a \cdot (AB) = (aA) \cdot B$;
11) $b \cdot A = A \cdot b$; 12) $A(BC) = (AB)C$;
13) $(A + B) \cdot C = AC + BC$; 14) $A(B + C) = AB + AC$;
15) $(A + B)^T = A^T + B^T$; 16) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;

3.Визначники квадратних матриць та їх властивості.

Розглянемо квадратну матрицю другого порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Визначником другого порядку називають число, яке позначається одним із символів: $\det A$; ΔA; $|A|$ і обчислюється як різниця добутків елементів головної діагоналі a_{11} a_{22} і елементів допоміжної діагоналі a_{12} a_{21} :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Приклад 4. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

Розв'язання. За означенням матимемо:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-5) - 2 \cdot (-1) = -20 + 2 = -18.$$

Нехай дано матрицю третього порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Визначником третього порядку називається число, яке позначають одним із символів:

$$\det A; \ \Delta A; \ |A|; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

і обчислюється за формулою:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для запам'ятовування формули користуються **правилом трикутників**:

а) перемножують між собою кожні три елементи, які з'єднані однією прямою чи замкненою ламаною лінією(див. схему);

б) додають між собою добутки, отримані з однієї схеми;

в) від, числа отриманого за першою схемою, віднімають число, отримане за другою схемою.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для обчислення визначника третього порядку можна використовувати ще і таке мнемонічне правило:

1) приписують два перших стовпця за визначником;

2) знаходять суму добутків елементів, які стоять на головних та допоміжних діагоналях визначника;

3) добутки елементів, що стоять на головних діагоналях утвореного визначника, записують із знаком "+";

4) добутки елементів, що стоять на допоміжних діагоналях утвореного визначника, записують із знаком "–".

Приклад 5. Обчислити визначник

$$|B| = \begin{vmatrix} 7 & 12 & -9 \\ 7 & 0 & 4 \\ 6 & -7 & 10 \end{vmatrix}$$

Розв'язання. Обчислюємо визначник матриці B, дописавши два перших стовпця

$$|B| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 7 & 12 & -9 & 7 & 12 \\ 7 & 0 & 4 & 7 & 0 \\ 6 & -7 & 10 & 6 & -7 \end{array}\right. =$$

$$= 7 \cdot 0 \cdot 10 + 12 \cdot 4 \cdot 6 + -9 \cdot 7 \cdot (-7) -$$
$$-(-9) \cdot 0 \cdot 6 - 7 \cdot 4 \cdot (-7) - 12 \cdot 7 \cdot 10 = 85$$

Приклад 6. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. За правилом трикутника матимемо:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) \cdot 2 -$$

$$-3 \cdot 5 \cdot 3 - (-2) \cdot (-4) \cdot (-1) - 1 \cdot 4 \cdot 2 = -98$$

Властивості визначників

1) У разі транспонування матриці її визначник не змінюється $\det A = \det A^T$.

Звідси випливає, що будь-яка властивість, що справедлива для рядків визначника, справедлива і для його стовпців.

2) Якщо визначник містить рядок, всі елементи якого дорівнюють нулю, то його значення дорівнює нулю.

3) Визначник, що має два пропорційних рядки, дорівнює нулю.

4) Якщо поміняти місцями будь-які два рядки, то знак визначника зміниться на протилежний.

5) Спільний множник усіх елементів одного рядка можна винести за знак визначника.

6) Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на довільне однакове число.

7) Визначник добутку матриць дорівнює добуткові визначників цих матриць.

4.Мінор. Алгебраїчне доповнення. Обернена матриця.

Мінором M_{ij}.елемента a_{ij} квадратної матриці A n – го порядку називають визначник квадратної матриці $(n-1)$–го порядку, яку отримують з матриці А викреслюванням i – го рядка і j – го стовпця (рядка і стовпця, на перетині яких розміщений елемент a_{ij}).

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} квадратної матриці A називають мінор цього елемента, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Приклад 7. Обчислити мінор M_{23} і алгебраїчне доповнення A_{23} матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Знайдемо квадратну матрицю *В,* другого порядку, викресливши другий рядок і третій стовпець в матриці *А*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник матриці В, це і буде шуканий мінор:

$$M_{23} = \det B = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) - (-4) \cdot 3 = 7.$$

За означенням алгебраїчного доповнення

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1) \cdot 7 = -7$$

Теорема розкладання. Визначник квадратної матриці дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого його рядка (або стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

Приклад 8. Обчислити визначник $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами 3-го стовпця.

Розв'язання. За теоремою розкладання маємо:

$$\det A = 3 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23} + (-1) \cdot A_{33}$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 2 - 5 \cdot 3 = -23;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 - (-2) \cdot 3) = -8;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-2) \cdot (-4) = -3.$$

Підставивши отримані значення, одержимо

$$\det A = 3 \cdot (-23) + 4 \cdot (-8) + (-1) \cdot (-3) = -69 - 32 + 3 = -98.$$

Теорема розкладання дає можливість **обчислювати визначники будь-якого порядку**. Дійсно, визначник n – го порядку за цією теоремою можна подати через алгебраїчні доповнення його елементів, тобто через визначники *(n-1)* –го порядку, а кожен з них, в свою чергу, - через визначники $(n-2)$–го порядку і т.д., аж до визначників третього порядку, правила обчислення яких розглянуто вище.

Оберненою матрицею A^{-1} до квадратної матриці A називають таку матрицю, для якої виконується рівність

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

Квадратну матрицю називають ***невиродженою*** або ***неособливою***, якщо її визначник не дорівнює нулю $\det A \neq 0$; в противному разі $\det A = 0$ матрицю називають ***виродженою*** або ***особливою***,

Обернена матриця A^{-1} існує й єдина тоді і лише тоді, коли матриця A не вироджена.

Квадратну матрицю C, кожен елемент якої є алгебраїчним доповненням відповідного елемента матриці A, називають ***сполучною*** або ***доповняльною*** матрицею матриці A.

Матрицю A^{-1}, **обернену до матриці** А, знаходять за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} - алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці А.

Формулу для визначення оберненої матриці можна записати так:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (C)^T,$$

де C - доповняльна матриця матриці А.

Властивості оберненої матриці:

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|};\ (c\cdot A)^{-1} = \frac{1}{c}\cdot A^{-1}\ ,\quad \text{де } c \neq 0,\ (\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1};\ \left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}.$$

Алгоритм знаходження оберненої матриці

1. Обчислити визначник матриці *А*. Якщо $|A| \neq 0$, то матриця є не виродженою, і в цьому випадку існує обернена матриця.

2. Обчислюються алгебраїчні доповнення кожного елемента a_{ij} матриці *А* і записуються у вигляді матриці *С*.

3. Матриця алгебраїчних доповнень *С* транспонується .

4. Обчислюється обернена матриця за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^{T}$$

5. Виконується перевірка $A^{-1}\cdot A = E.$

Приклад 9. Знайти обернену матрицю для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1. Обчислюємо визначник матриці *А*, розкладаючи його за першим рядком:

$$|A| = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 2+4-9 = -3.$$

$|A| \neq 0$, тому обернена матриця існує.

2. Обчислюємо алгебраїчні доповнення всіх елементів.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 2;\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 2;\quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3;,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 4;\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = -11;\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6;\ ,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3;\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6;\quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Запишемо матрицю алгебраїчних доповнень

$$C=\begin{pmatrix}2 & 2 & -3\\ 4 & -11 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}.$$

3. Транспонуємо сполучну матрицю С.

$$C^T=\begin{pmatrix}2 & 4 & -3\\ 2 & -11 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}.$$

4. Обернена матриця

$$A^{-1}=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}2 & 4 & -3\\ 2 & -11 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}.$$

Порада. Зручно обернену матрицю залишати у вигляді добутку числа $\frac{1}{|A|}$ на матрицю C^T.

5. Перевірка правильності обчислень.

$$A^{-1}\cdot A=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}2 & 4 & -3\\ 2 & -11 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 10\end{pmatrix}=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Лекція 1б.

ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

План

1. *Системи лінійних рівнянь.*
2. *Методи розв'язування систем лінійних рівнянь:*
   А) матричний метод;
   Б) формули Крамера;
   В) метод Гаусса;
3. *Система m лінійних рівнянь з n невідомими. Теорема Кронекера - Капелі.*

1.Системи лінійних рівнянь.

Системою n лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають систему рівнянь виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_{1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_{2,} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Числа a_{ij} називають ***коефіцієнтами***, а числа b_i - ***вільними членами*** системи (1). Лінійну систему називають ***однорідною***, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю. Якщо серед вільних членів є ненульові, то систему називають ***неоднорідною***. Розв’язати систему (1) означає знайти такі значення невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які перетворюють в тотожності одночасно всі рівняння системи.

Систему (1) називають ***сумісною***, якщо вона має принаймні один розв'язок. Якщо система (1) не має розв'язків, то її називають ***несумісною***. Сумісну систему, яка має тільки один розв'язок, називають ***визначеною***. Якщо сумісна система має нескінченну кількість розв'язків, то її називають ***невизначеною***.

Дві системи вважають ***еквівалентними***, якщо множини їхніх розв'язків однакові. Зокрема, дві несумісні системи еквівалентні.

2. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь.

Матричний метод

Систему (1) можна записати у вигляді ***матричної*** рівності

$$A \cdot X = B, \tag{2}$$

де A – квадратна матриця n – го порядку, складена з коефіцієнтів при невідомих (її називають матрицею системи або основною матрицею); X – матриця розмірності $(n \times 1)$, складена з невідомих; B – матриця розмірності $(n \times 1)$, складена з вільних членів. Тобто:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Розв’язати систему (1) означає знайти невідому матрицю *X*, яка перетворює в істинну рівність матричне рівняння.

Систему лінійних рівнянь називають ***невиродженою***, якщо матриця системи невироджена, тобто $\det A \neq 0$. Невироджена система лінійних рівнянь ***має єдиний розв'язок***.

Розв'язок невиродженої системи лінійних рівнянь (1), записаної у вигляді матричного рівняння (2), знаходять за формулою

$$X = A^{-1} \cdot B, \tag{3}$$

де A^{-1} - матриця, обернена до матриці A.

Приклад 1. Записати в матричній формі і розв'язати за допомогою метода оберненої матриці систему лінійних рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + 8x_2 + 11x_3 = 1, \\ 3x_1 + 15x_2 + 7x_3 = 42. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему рівнянь у вигляді матричної рівності $A \cdot X = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 15 & 7 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 42 \end{pmatrix}.$$

За правилом обчислення визначників третього порядку знайдемо визначник матриці А:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 15 & 7 \end{vmatrix} = 56 + 150 + 132 - 120 - 165 - 56 = -3 \neq 0.$$

Визначник матриці системи A не дорівнює нулю, тому задана система рівнянь не вироджена і має єдиний розв'язок. Знайдемо матрицю A^{-1}, обернену до матриці A. Для цього обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

Тоді матрицею, оберненою до матриці A буде:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^T = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -109 & 47 & 4 \\ 19 & -8 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Підставивши A^{-1} і В в формулу (3), отримаємо:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -109 & 47 & 4 \\ 19 & -8 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 42 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} (-109)\cdot 2 + 47\cdot 1 + 4\cdot 42 \\ 19\cdot 2 + (-8)\cdot 1 + (-1)\cdot 42 \\ 6\cdot 2 + (-3)\cdot 1 + 0\cdot 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Отже, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ *або* $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = -3. \end{cases}$.

Перевірка. Підставимо знайдені значення в усі рівняння системи:

$$\begin{cases} 1\cdot 1 + 4\cdot 4 + 5\cdot(-3) = 2, \\ 2\cdot 1 + 8\cdot 4 + 11\cdot(-3) = 1, \\ 3\cdot 1 + 15\cdot 4 + 7\cdot(-3) = 42. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2, \\ 1 = 1, \\ 42 = 42. \end{cases}$$

Оскільки отримані рівності очевидно істинні, то систему розв'язано вірно.

Формули Крамера

Формули Крамера для розв'язування системи (1) використовуються лише тоді, коли основна матриця квадратна й не вироджена.

Нехай систему лінійних рівнянь (1) записано у вигляді матричної рівності (2). Позначимо:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots\ddots & \vdots \\ a_n & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Утворимо визначник Δ_1, замінивши у визначнику Δ перший стовпець стовпцем вільних членів (матрицею В), тобто :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots\ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Аналогічно, замінюючи на стовпець вільних членів послідовно 2 –й, 3 –й,..., n –й стовпець визначника Δ, утворимо визначники $\Delta_2, \Delta_3, \dots \Delta_n$. Тоді, якщо

$\Delta = \det A \neq 0$, то система лінійних рівнянь (1) має єдиний розв'язок, який знаходимо за формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \ldots; \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{4}$$

які називають ***формулами Крамера.***

Зауваження. Коли $\Delta = 0$, а серед Δ_i є ненульові визначники, то система рівнянь несумісна. У разі однорідної системи і $\Delta \neq 0$, вона має лише нульовий розв'язок; якщо ж $\Delta = 0$, то система крім нульового має й інші розв'язки.

Приклад 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x + y - 5z = 5, \\ x - 3y + 3z = 4, \\ -2x + y + z = -5. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначник матриці цієї системи рівнянь:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 6 - 5 + 30 - 6 - 1 = 6 \neq 0.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то система рівнянь не вироджена і її можна розв'язувати за формулами Крамера. Замінюючи послідовно стовпці визначника Δ на стовпець вільних членів, обчислимо такі визначники:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 4 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15 - 15 - 20 + 75 - 15 - 4 = 6;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 30 + 25 - 40 + 30 - 5 = -12;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 30 - 8 + 5 - 30 - 8 = -6.$$

За формулами Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{6}{6}=1;\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-12}{6}=-2;\qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-6}{6}=-1.$$

Отже, шуканий розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x=1, \\ y=-2, \\ z=-1. \end{cases}$$

Перевірка. Підставимо знайдені значення в усіх рівняннях системи:

$$\begin{cases} 2\cdot 1-2-5\cdot(-1)=5, \\ 1-3\cdot(-2)+3\cdot(-1)=4, \\ \quad -2\cdot 1-2-1=-5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5=5, \\ 4=4, \\ -5=-5. \end{cases}$$

Метод Гаусса

Метод Гаусса – метод послідовного виключення невідомих – полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень система рівнянь зводиться до рівносильної системи, з якої послідовно, починаючи з останніх (за номером) змінних, знаходять усі інші змінні.

До ***елементарних перетворень системи лінійних рівнянь*** належать:

- множення рівняння системи на число, відмінне від нуля;
- додавання до одного рівняння системи іншого, помноженого на будь-яке число;
- переставляння місцями двох рівнянь системи.

Після застосування елементарних перетворень завжди дістають систему, еквівалентну початковій.

Систему лінійних рівнянь (1) можна записувати у вигляді ***розширеної матриці:***

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \tag{5}$$

Нехай систему лінійних рівнянь (1) записано у вигляді розширеної матриці (5). Розв'язування цієї системи рівнянь методом Гаусса складається з двох частин:

1) *прямий хід*: розширену матрицю шляхом послідовного виконання лінійних операцій над її рядками (тобто послідовного виконання операції додавання до

одного рядка матриці іншого рядка, помноженого на певне число) приводять до вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \mathrm{a}'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \ldots & a'_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b'_n \end{array}\right) \qquad (6)$$

2) *зворотній хід:* від розширеної матриці (6) переходять до відповідної системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = b'_n \end{cases} \qquad (7)$$

Останнє рівняння системи (7) дає значення змінної x_n; підставляючи це значення в передостаннє рівняння, знаходять x_{n-1}; продовжуючи цей процес, поступово знаходять значення всіх невідомих.

Приклад 3. Розв’язати приклад 2 методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x + y - 5z = 5, \\ x - 3y + 3z = 4, \\ -2x + y + z = -5. \end{cases}$$

Розв’язання. Складемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right).$$

Зробимо так, щоб на місці елемента a_{11} знаходилась одиниця, для чого поміняємо місцями перший і другий рядки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right).$$

Для того, щоб одержати нулі на місці елементів a_{21} та $a_{31.}$, помножимо перший рядок на (-2) і додамо його до другого рядка; помножимо перший рядок на 2 і додамо його до третього рядка. Утворимо одиницю на місті елемента a_{22}. Для цього помножимо другий рядок на (-2), а третій рядок – на (-3) і додамо їх. Отриману суму запишемо на місці другого рядка, а третій запишемо без змін:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -11 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right).$$

Утворимо нуль на місці елемента a_{32}. Для цього помножимо другий рядок на 5 і додамо його до третього рядка. Помноживши третій рядок на $\frac{1}{12}$, утворимо одиницю на місці елемента a_{33}:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Прямий хід метода Гаусса завершено. Запишемо систему рівнянь, яка відповідає отриманій розширеній матриці:

$$\begin{cases} x - 3y + 3z = 4, \\ \qquad y + z = -3, \\ \qquad\quad z = -1. \end{cases}$$

З третього рівняння маємо z = - 1. Підставимо це значення в друге рівняння і знайдемо у: $y = -2$. Підставимо знайдені значення z та у в перше рівняння і знайдемо х: $x - 3\cdot(-2) + 3\cdot(-1) = 4, \quad x = 1$. Отже шуканий розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -2, \\ z = -1. \end{cases}$$

Перевірка. *Див. приклад 2*

1. Система m лінійних рівнянь з n невідомими. Теорема Кронекера-Капеллі

Нехай задана система m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (9)$$

Відповідь на питання про сумісність цієї системи дає теорема ***Кронекера-Капеллі***.

Теорема. Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг r основної матриці системи дорівнює рангу r' розширеної матриці системи.

Відповідно до цієї теореми, якщо $r \neq r'$, то система несумісна.

Для сумісних систем, коли $r = r'$, можливі такі випадки: ранг сумісної системи менший числа невідомих або ранг сумісної системи дорівнює числу невідомих.

1. Якщо ранг основної матриці системи r дорівнює числу невідомих n, то система (9) має єдиний розв'язок.

Якщо $m = n$, то основна матриця системи представляє собою квадратну матрицю порядку *n* визначник, якої відмінний від нуля, і таким чином, відповідно до теореми Крамера система (1.15) буде визначеною. В цьому випадку розв'язок шукається одним із методів, що розглядалися вище.

Якщо $m > n$, то в цьому випадку не обмежуючи загального випадку, можна припустити, що базисний мінор основної матриці системи (9), знаходиться в правому верхньому куті цієї матриці. В загальному випадку це може бути досягнуто перестановкою місцями рядків. Тоді перші $r = n$ рядків, як основної, так і розширеної матриці системи є базисними. Це означає, що всі решта рядків починаючи з $(r+1)$-го рядка цієї матриці є лінійними комбінаціями перших $r = n$ рядків цієї матриці.

Іншими словами, це означає, що всі рівняння системи (1.15) починаючи з $(r+1)$ лінійними комбінаціями (тобто наслідками) перших $r = n$ рядків цієї системи (тобто всякий розв'язок перших $r = n$ рівнянь системи (1.15) перетворює в тотожності і всі інші рівняння цієї системи). Це означає, що розв'язуючи систему , можна відкинути всі рівняння починаючи з $(r+1)$, і шукати розв'язок системи $r = n$ рівнянь з n невідомим одним із відомих способів.

2. Якщо ранг основної матриці системи $r = r' < n$, то система невизначена, тобто має нескінченну кількість розв'язків.

Розглянемо як шукаються розв'язки системи в такому випадку. В цій ситуації весь набір невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ ділиться на основні або базисні змінні і неосновні або вільні змінні. Число базисних змінних дорівнює r. Змінні $x_1, x_2, ..., x_r$ називаються ***базисними***, якщо визначник матриці з коефіцієнтів при цих змінних відмінний від нуля. Решта $n - r$ називаються ***вільними змінними***. Базисні змінні завжди можна виразити через вільні змінні. Вільні змінні можуть приймати довільні значення.

Сформулюємо алгоритм розв'язання довільної системи рівнянь.

1. Знайти ранги основної і розширеної матриці системи. Якщо $r \neq r'$, то система несумісна.

2. Якщо $r = r'$, то система сумісна. Щоб розв'язати систему, необхідно знайти який-небудь базисний мінор порядку r. Нагадаємо, що мінор який визначає ранг основної матриці системи називається базисним. Взяти r рівнянь із коефіцієнтів яких складений базисний мінор, решту $m - r$ рівнянь відкинути. Невідомі, коефіцієнти при яких утворюють базисний мінор, є базисними, їх необхідно залишити в рівняннях зліва, а решту $n - r$ невідомих, які називають вільними, перенести в праву частину рівнянь.

3. Виразити базисні змінні через вільні змінні і таким чином отримати розв'язок, який називається загальним розв'язком системи.

4. Надаючи вільним змінним довільних значень можна отримати відповідні конкретні значення базисних змінних. Таким чином можна отримати частинний розв'язок системи.

***П р и к л а д* 5.** Розв'язати систему.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \qquad\quad + \ x_4 = -3, \\ 3x_1 - \ x_2 - 2x_3 \qquad\quad = \ 1, \\ 2x_1 + \ x_2 - 2x_3 - \ x_4 = \ 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -7. \end{cases}$$

Розв'язання. Щоб знайти базисний мінор залишимо розширену матрицю коефіцієнтів і приведемо її до трикутного вигляду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right).$$

При переході від першої розширеної матриці до другої виконали такі тотожні перетворення, які, як відомо не міняють ранг матриці: замість четвертого рядка записали різницю четвертого і першого рядків; замість третього – різницю третього і першого помноженого на два; замість другого різницю другого і першого помноженого на три.

При переході від другої розширеної матриці до третьої виконали такі тотожні перетворення: замість третього рівняння записали різницю третього і другого; замість четвертого рівняння записали різницю четвертого і другого.

Таким чином виявилось, що третє і четверте рівняння можна виключити із системи, та як очевидно, що коефіцієнти із цих рівнянь не можуть входити в базисний мінор. Це означає, що третє і четверте рівняння є лінійними комбінаціями перших двох рівнянь. Тоді задана система еквівалентна системі:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \qquad + \; x_4 = -3, \\ \qquad 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 10. \end{cases} \qquad (*)$$

З останнього перетворення розширеної матриці системи робимо висновок, що $r = r' = 2$, так як на головній діагоналі є два відмінні від нуля елементи. За базисні змінні можна взяти довільну пару змінних $(x_1; x_2), (x_1; x_3), (x_1; x_4), (x_2; x_3), (x_2; x_4), (x_3; x_4)$. В цьому неважко переконатися обчисленням значень відповідних мінорів, складених із коефіцієнтів системи (*).

Нехай базисні змінні $(x_1; x_2)$. Виразимо базисні змінні через вільні змінні. Для цього з першого рівняння виключимо x_2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right)\begin{matrix} \cdot 5 \\ \cdot 2 \end{matrix}\Bigg] \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 0 & -1 & +5 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right),$$

або

$$\begin{cases} 5x_1 \qquad\qquad - \; x_4 = 5, \\ \qquad 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 10. \end{cases}$$

Тобто $x_1 = \frac{1}{5}(5 + x_4)$, $x_2 = \frac{1}{5}(2x_3 + 3x_4 + 10)$ – загальний розв'язок системи.

Поклавши, наприклад $x_3 = x_4 = 0$, отримаємо один із частинних розв'язків: $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Лекція 2а.

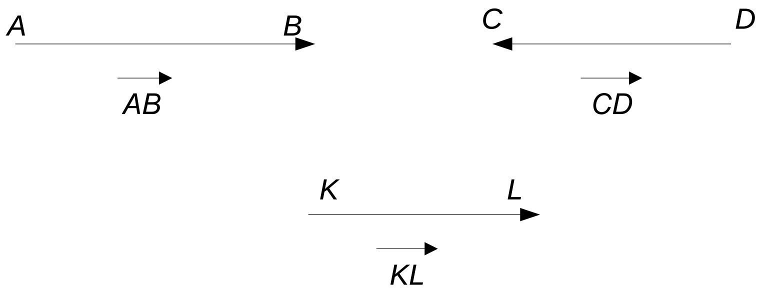
ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

План лекції

1. *Поняття вектора. Операції над векторами.*
2. *Скалярний добуток векторів.*
3. *Векторний добуток векторів.*
4. *Мішаний добуток векторів.*

1.Поняття вектора. Операції над векторами.

Вектором називається направлений відрізок. Позначають вектори одним із символів $\overrightarrow{AB}$, CD, $\bar{a}$, b. Якщо точка *A* є початком вектора, а точка *B* – його кінцем, то такий вектор позначають $\overrightarrow{AB}$ або AB.



Довжину напрямленого відрізка (відстань між початком вектора та його кінцем) називають ***довжиною вектора*** або ***модулем вектора*** і позначають одним із символів $\left|\overrightarrow{AB}\right|,\ |CD|, |\overline{a}|,\ |b|$.

Два вектора $\overline{a}$ і $\overline{b}$ ***рівні*** між собою тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову довжину і однаковий напрям. В такому випадку записують $\overline{a} = \overline{b}$.

Вектор, початок і кінець якого співпадають, називають ***нульовим вектором*** і позначають $\overline{0}$. Очевидно, що $\left|\overline{0}\right| = 0$.

Якщо два вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ мають однаковий напрям, то їх називають ***спів напрямленими*** і позначають цей факт так $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$. Кут між спів напрямленими векторами дорівнює 0°. Вважають, що нульовий вектор спів направлений будь-якому іншому вектору.

Якщо два вектора $\overline{a}, \overline{b}$ мають протилежний напрям, їх називають ***протилежно напрямленими*** і позначають цей факт так $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$. Кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180°.

Вектори, що розміщені на одній прямій або на паралельних прямих, називають ***колінеарними*** і позначають $\overline{a} \parallel \overline{b}$. Очевидно, що $\overline{a} \parallel \overline{b}$ тоді і тільки тоді, коли вони спів напрямлені $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ або протилежно напрямлені $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

Вектори, що розміщені на одній площині або на паралельних площинах, називаються ***компланарними***. Очевидно, що ***будь-які два вектори – компланарні.***

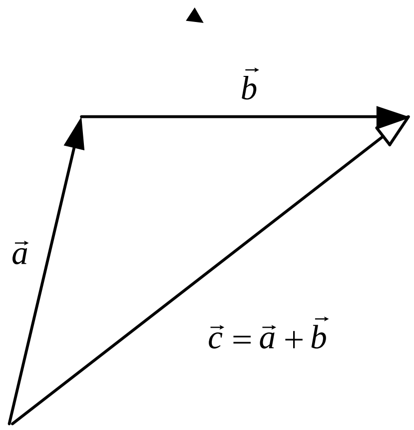
Добутком вектора $\overline{a}$ ***на число*** α називають вектор $\overline{b} = \alpha \cdot \overline{a}$, що має довжину $\left|\overline{b}\right| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$, і напрям якого збігається з напрямом вектора $\overline{a}$, якщо $\alpha > 0$, і протилежний йому, якщо $\alpha < 0$.

Вектор $-\overline{a} = -1 \cdot \vec{a}$ називають **протилежним** вектору $\overline{a}$. Очевидно, що $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

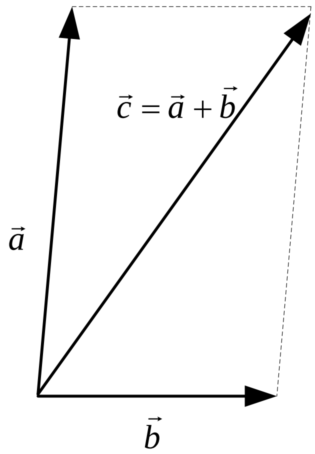
Сумою векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називають вектор $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, який знаходять одним із таких методів:

1) метод трикутника полягає в тому, що вектор $\overline{b}$ відкладають від кінця вектора $\overline{a}$, тоді початок вектора $\overline{c}$ співпадає з початком вектора $\overline{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\overline{b}$;

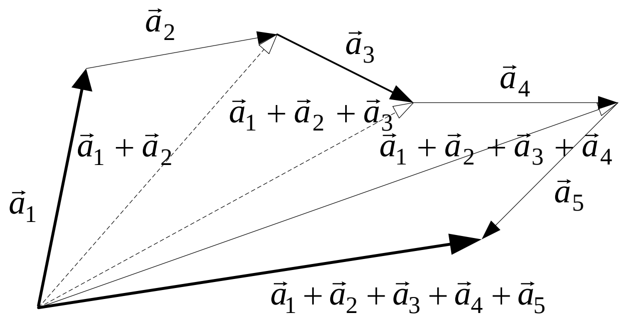
2) метод паралелограма полягає в тому, що вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ відкладають від однієї точки, тоді вектор $\overline{c}$ починається в тій же точці і співпадає з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$, як на сторонах.



а)



б)



в)

Сумою кількох векторів є вектор, що сполучає початок першого вектора й кінець останнього за умови, що початок кожного наступного вектора збігається з кінцем попереднього (**правило многокутника**).

Різницею векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називають вектор $\overline{c} = \overline{a} + (-\overline{b}) = \overline{a} - \overline{b}.$ Метод побудови якого полягає в тому, що вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ відкладають від однієї точки, тоді початок вектора $\overline{c}$ співпадає з кінцем вектором $\overline{b}$, а його кінець – з кінцем вектора $\overline{a}$.

Якщо $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ - вектори, а $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ - довільні скалярні величини (числа), то вектор $\overline{k} = \alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + ... + \alpha_n \overline{a}_n$ називають ***лінійною комбінацією векторів*** $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$.

Систему векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називають ***лінійно незалежною***, якщо їх лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору $\overline{0}$ **лише** за умовами

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

Систему векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називають ***лінійно залежною***, якщо існує така їх лінійна комбінація, яка дорівнює $\overline{0}$ і при цьому **хоча б одне** із чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$

не рівне нулю. Два вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні. Три вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.

Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли хоча б один із них є лінійною комбінацією інших.

Базисом системи векторів називають таку лінійно незалежну множину векторів, що будь-який вектор системи можна подати й причому єдиним способом у вигляді лінійної комбінації векторів цієї множини.

Розкласти вектор за векторами базису означає подати його у вигляді лінійної комбінації векторів базису. Кожен вектор системи можна розкласти за векторами базису **єдиним** способом.

Якщо вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ утворюють базис деякої системи векторів і $\overline{a} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + \ldots + a_n\overline{e}_n$, то впорядковану множину чисел $a_1; a_2; \ldots; a_n$ називають ***координатами*** вектора $\overline{a}$ в цьому базисі та позначають $\overline{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$.

Базисом множини всіх векторів, що лежать **на одній прямій**, може бути будь-який ненульовий вектор, що лежить на цій прямій.

Базисом множини всіх векторів **площини**, може бути будь-яка пара не колінеарних векторів цієї площини. Надалі ми користуватимемось ***прямокутним декартовим базисом***, який утворюють два взаємно перпендикулярні одиничні вектори $(\vec{i}, \vec{j})$. Вектори $\overline{i}$ та $\overline{j}$ називають ***ортами,*** а утворений ними базис – ***ортонормованим базисом векторів площини.***

Базисом множини всіх векторів **тривимірного простору** може бути будь-яка трійка не компланарних векторів цього простору. Надалі ми користуватимемось ***прямокутним декартовим базисом***, який утворюють три взаємно перпендикулярні одиничні вектори $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$. Вектори $\overline{i}, \overline{j}$ та $\overline{k}$ називають ***ортами***, а утворений ними базис – ***ортонормованим базисом векторів тривимірного простору.***

Якщо $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, то впорядковану трійку чисел $(x; y; z)$ називають ***координатами вектора*** $\overline{a}$ в ортонормованому базисі і записують $\overline{a} = (x; y; z)$.

Якщо вектор заданий точками $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$ то його можна записати так:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Кути α, β, γ вектора $\overline{AB}$ з осями координат називаються ***напрямними***, а ***напрямні косинуси*** визначаються як:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overline{AB}|}, \cos\beta = \frac{y}{|\overline{AB}|}, \cos\gamma = \frac{z}{|\overline{AB}|}$$

і відповідають умові $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Модуль вектора $\overline{a} = (x, y, z)$ дорівнює кореню квадратному зі суми квадратів його координат:

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь OX називається довжина відрізку A_1B_1 цієї осі між проекціями A_1 та B_1 точок A та B, узята зі знаком "+", якщо напрямок відрізку A_1B_1 співпадає з напрямком осі OX, та зі знаком "-", якщо напрямок відрізку A_1B_1 протилежний напрямку осі OX. Проекція дорівнює добутку модуля вектора на косинус кута між віссю та вектором:

$$пр_{OX}\ \overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cdot \cos\varphi.$$

Координати вектора це проекції вектора на осі координат $x = пр_x \overline{a}$, $y = пр_y \overline{a}$, $z = пр_z \overline{a}$.

Вектори x_1, x_2, x_3 утворюють тримірний базис, якщо визначник третього порядку, укладений із проекцій вказаних векторів, відмінний від нуля. Координатами вектора y в базисі векторів x_1, x_2, x_3 є корені системи трьох лінійних рівнянь з коефіцієнтами, що дорівнюють проекціям заданих векторів x_1, x_2, x_3 і вільними коефіцієнтами, що дорівнюють проекціям заданого вектора y.

Приклад 1.

Показати, що вектори $x_1 = \{1;0;0\}, x_2 = \{1;1;0\}, x_3 = \{1;1;1\}$ утворюють тримірний базис і знайти координати вектора $y = \{1;3;1\}$ в цьому базисі.

Розв'язання. Укладемо визначник із проекцій векторів x_1, x_2, x_3 і обчислимо його; $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Тому, що $\Delta \neq 0$, то вектори x_1, x_2, x_3 утворюють тримірний базис. Для обчислення координат вектора y в цьому базисі укладемо відповідну систему лінійний рівнянь $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_2 + z_3 = 3 \\ z_3 = 1 \end{cases}$

Її розв'язок $z_1 = -2, z_2 = 2, z_3 = 1$ утворює сукупність координат вектора y в базисі x_1, x_2, x_3, тобто в цьому базисі $y = \{-2;2;1\}$ або $y = -2x_1 + 2x_2 + x_3$.

Приклад 2. Знайти вектор, який має одиничний модуль і такий напрямок, що і вектор $\overline{a} = \{2; 1; -2\}$.

Розв'язання. Одиничний вектор знайдемо за формулою: $\overline{a^0} = \frac{1}{\left|\overline{a}\right|} \cdot \overline{a}$, $\left|\overline{a}\right|$ - довжина вектора $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$. Отже,

$$\overline{a^0} = \left\{\frac{1}{3} \cdot 2; \frac{1}{3} \cdot 1; \frac{1}{3} \cdot (-2)\right\} = \left\{\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right\}.$$

Приклад 3. Знайти напрямні косинуси вектора $\overline{a} = \{2; 1; -2\}$.

Розв'язання.

Маємо $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; $\cos\beta = \frac{1}{3}$; $\cos\gamma = \frac{-2}{3}$.

Одиничний вектор має модуль, що дорівнює одиниці, тому відповіді, що отримані в прикладах 1 і 2, повинні співпадати.

Якщо вектори $\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)$ *і* $\overline{b} = (x_2; y_2; z_2)$, ***колінеарні,*** то їх координати відповідають умовам:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Якщо $\overline{a} = (x_{\overline{a}}; y_{\overline{a}}; z_{\overline{a}})$ *і* $\overline{b} = (x_{\overline{b}}; y_{\overline{b}}; z_{\overline{b}})$, то $\overline{a} \pm \overline{b} = (x_{\overline{a}} \pm x_{\overline{b}};\ y_{\overline{a}} \pm y_{\overline{b}};\ z_{\overline{a}} \pm z_{\overline{b}})$

.

Приклад 4. Дано координати точок
$A(3;-1;2)$, $B(2;1;4)$, $C(-1;3;-2)$, $D(1;-1;-6)$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$ та їх модулі;

б) координати векторів $-3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD}$.

в) встановити чи колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$

Розв'язання.

а) Знаходимо координати векторів $\overrightarrow{AB} = (2-3, 1+1, 4-2) = (-1, 2, 2)$,
$\overrightarrow{AC} = (-1-3, 3+1, -2-2) = (-4, 4, -4)$,
$\overrightarrow{CD} = (1+1, -1-3, -6+2) = (2, -4, -4)$. Тому

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2_{\overrightarrow{AB}} + y^2_{\overrightarrow{AB}} + z^2_{\overrightarrow{AB}}} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{3}, \quad \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = 6$$

б) Знаходимо:

$$-3\overrightarrow{AB} = -\left(-3x_{\overrightarrow{AB}}; -3y_{\overrightarrow{AB}}; -3z\overrightarrow{AB}\right) = \left(-3\cdot(-1); -3\cdot 2; -3\cdot 2\right) = (3; -6, -6)$$

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD} = \left(x_{\overrightarrow{AC}} - x_{\overrightarrow{CD}}; y_{\overrightarrow{AC}} - y_{\overrightarrow{DC}}; z_{\overrightarrow{AC}} - z_{\overrightarrow{CD}}\right) = \left(-4-2; 4-(-4); -4-(-4)\right) = (-6; 8; 0)$$

в) Координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ пропорційні

$$\frac{x_{\overrightarrow{CD}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = -\frac{2}{-1} = \frac{y_{\overrightarrow{CD}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{-4}{2} = \frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{-4}{2} = -2,$$ тому ці вектори колінеарні.

2.Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називають, число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними :

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\overline{a},\overline{b}\right).$$

Скалярний добуток двох векторів $\overline{a}\cdot\overline{b}$ можна представити як добуток модуля одного з векторів на проекцію другого вектора на перший вектор:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot np_{\overline{a}}\overline{b}=\left|\overline{b}\right|\cdot np_{\overline{b}}\overline{a}\,.$$

Фізичний зміст скалярного добутку. Якщо $\overline{f}$ - вектор сили, а $\overline{s}$ - вектор переміщення, то скалярний добуток $\overline{f}\cdot\overline{s}$ дорівнює роботі сили $\overline{f}$ при переміщенні на вектор $\overline{s}$.

Властивості скалярного добутку векторів:

1) $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a};$ 2) $\overline{a}\cdot\vec{0}=0;$

3) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c};$ 4) $\left(\overline{a}-\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}-\overline{b}\cdot\overline{c};$

5) $\left(\alpha\overline{a}\right)\cdot\overline{b}=\alpha\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right);$ 6) $\overline{a}\cdot\overline{a}=\left(\left|\overline{a}\right|\right)^{2};$

Ознака перпендикулярності векторів. Два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю. Тобто, якщо, $\overline{a}\neq 0$ *і* $\overline{b}\neq 0,$ то

$$\overline{a}\perp\overline{b}\quad\Leftrightarrow\quad\overline{a}\cdot\overline{b}=0.$$

Проекцією вектора $\overline{a}$ ***на вектор*** $\overline{b}$ називають число яке дорівнює добутку модуля вектора $\overline{a}$ на косинус кута між векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$:

$$np_{\overline{b}}\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\angle\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

Кут між векторами $\overline{a}$ ***та*** $\overline{b}$ визначають за формулою:

$$\cos\angle\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}.$$

Якщо вектори задані координатами $\overline{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right),\overline{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right),$ то

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2\,.$$

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{d}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{d}\right|}=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{\left(x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+,z_1^{\,2}\right)\left(x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}\right)}}$$

Приклад 5. Знайти роботу, яку виконує сила $\overline{F}$, яка задана вектором $\overline{F}=\{-4;-2;3\}$ та прикладена до матеріальної точки, що проходить шлях від точки B(1;0;1) до точки C(-2;1;0).

Розв'язання.

Робота A обчислюється як скалярний добуток вектора сили на вектор шляху, пройденого матеріальною точкою, за формулою

$$A = \overline{F} \cdot \overline{S} ,$$

де

$$\overline{S} = \overline{BC} = \{(x_b - x_c);\ (y_b - y_c);\ (z_b - z_c)\} = \{(-2-1);\ (1-0);(0-1)\} = \{-3; 1; -1\}.$$

Підставивши $\overline{F}$ й $\overline{S}$ у зазначену формулу, одержимо

$$A = (-4)\cdot(-3) + (-2)\cdot 1 + 3\cdot(-1) = 7 .$$

Приклад 6. Визначити координати вектора $\overline{x} = \{x; y; z\}$, колінеарного вектору $\overline{a}$, знаючи, що $|\overline{x}| = 3$ і він спрямований у тому ж напряму, що і вектор $\overline{a} = \{2;0;0\}$.

Розв'язання. Так як вектори колінеарні $\overline{x} \| \overline{a}$, то виконується співвідношення $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$. Підставивши координати вектора $\overline{a}$, одержимо

$$\frac{2}{x} = \frac{0}{y} = \frac{0}{z} = \lambda \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{\lambda}, \quad y = 0, \quad z = 0 .$$

За умовою задачі

$$|\overline{x}| = \sqrt{\frac{4}{\lambda^2} + 0 + 0} = \sqrt{\frac{4}{\lambda^2}} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{9} = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{2}{3}$$

Оскільки вектори $\overline{a}$ і $\overline{x}$ співнапрямлені, то $\lambda = \dfrac{2}{3}$. Отже, $\overline{x} = \{3;0;0\}$.

Приклад 7. Знайти $пр_{\overline{a}+\overline{k}}(2\overline{a} - \overline{i} + \overline{j})$, якщо $\overline{a} = \{2;0;0\}, \overline{k} = \{0;0;1\}$.

Розв'язання. Для розв'язку цієї задачі скористаємося формулою:

$$пр_{\overline{m}}\overline{n} = \frac{\overline{m}\cdot\overline{n}}{|\overline{m}|} .$$

Знайдемо $\overline{m}$ і $\overline{n}$, враховуючи, що $\overline{i} = \{1;0;0\}$, $\overline{j} = \{0;1;0\}$, $\overline{k} = \{0;0;1\}$:

$$\overline{m} = \overline{a} + \overline{k} = \{2;0;0\} + \{0;0;1\} = \{2;0;1\} , \quad \overline{n} = 2\cdot\{2;0;0\} - \{1;0;0\} + \{0;1;0\} = \{3;1;0\} .$$

Тоді

$$пр_{\overline{a}+\overline{k}}(2\overline{a} - \overline{i} + \overline{j}) = \frac{2\cdot 3 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0}{\sqrt{4+0+1}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Приклад 8. При якому значенні *a* будуть перпендикулярними вектори $\overline{a} = (-2; 3; a)$ *і* $\overline{b} = (4; a; -7)$?

Розв'язання. Знайдемо скалярний добуток даних векторів:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = x_{\bar{a}}\cdot x_{\bar{b}} + y_{\bar{a}}\cdot y_{\bar{b}} + z_{\bar{a}}\cdot z_{\bar{b}} = (-2)\cdot 4 + 3a - 7a = -4a - 8.$$

За ознакою перпендикулярності векторів

$$\bar{a}\perp\bar{b} \quad\Leftrightarrow\quad \bar{a}\cdot\bar{b} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4a + 8 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4a = -8 \quad\Leftrightarrow\quad a = -2.$$

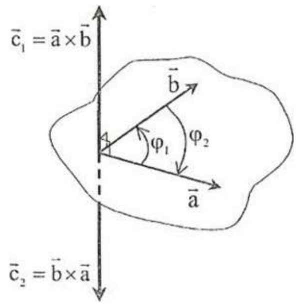
Отже, задані вектори будуть перпендикулярними при *a*= - 2.

3. Векторний добуток векторів

Векторним добутком векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ (позначають $\bar{a}\times\bar{b}$) називають вектор c, який задовольняє такі чотири умови:

1) $\bar{c}\perp\bar{a}$ і $\bar{c}\perp\bar{b}$;

2) $|\bar{c}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\angle(\bar{a},\bar{b})$;



3) вектор $\bar{c}$ має такий напрям, що коли відкласти вектори $\bar{a},\bar{b}$ та $\bar{c}$ від однієї точки і дивиться з кінця вектора $\bar{c}$, то найкоротший поворот від вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{b}$ буде виконуватись проти годинкової стрілки (це означає, що трійка векторів $\bar{a},\bar{b}$, $\bar{c}$ є правою).

4) Модуль вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ чисельно дорівнює ***площі паралелограма,*** побудованого на $\bar{a}$ і $\bar{b}$, як на сторонах.

Ознака колінеарності векторів. Два вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нульовому вектору

$$\bar{a}\parallel\bar{b} \quad\Leftrightarrow\quad \bar{a}\times\bar{b} = \bar{0}$$

Властивості векторного добутку

1) $\bar{a}\times\bar{b} = -(\bar{b}\times\bar{a})$; 4) $(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c} = \bar{a}\times\bar{c} + \bar{b}\times\bar{c}$;

2) $\bar{a}\times\bar{0} = \bar{0}$; 5) $(\bar{a}-\bar{b})\times\bar{c} = \bar{a}\times\bar{c} - \bar{b}\times\bar{c}$;

3) $(\alpha\bar{a})\times(\beta\bar{b}) = \alpha\beta(\bar{a}\times\bar{b})$; 6) $\bar{a}\times\bar{a} = \bar{0}$.

Для векторів прямокутного декартового базису виконуються рівності:

$$\bar{i}\times\bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j}\times\bar{k} = \bar{i}, \quad \bar{k}\times\bar{i} = \bar{j}.$$

Якщо вектори задані в координатах $\bar{a} = (x_{\bar{a}}; y_{\bar{a}}; z_{\bar{a}})$ і $\bar{b} = (x_{\bar{b}}; y_{\bar{b}}; z_{\bar{b}})$, то векторний добуток обчислюється за формулою

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_{\bar{a}} & y_{\bar{a}} & z_{\bar{a}} \\ x_{\bar{b}} & y_{\bar{b}} & z_{\bar{b}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{\bar{a}} & z_{\bar{a}} \\ y_{\bar{b}} & z_{\bar{b}} \end{vmatrix}\cdot\bar{i} - \begin{vmatrix} x_{\bar{a}} & z_{\bar{a}} \\ x_{\bar{b}} & z_{\bar{b}} \end{vmatrix}\cdot\bar{j} + \begin{vmatrix} x_{\bar{a}} & y_{\bar{a}} \\ x_{\bar{b}} & y_{\bar{b}} \end{vmatrix}\cdot\bar{k}.$$

Приклад 9. Знайти площу трикутника АВС, якщо

$$\overrightarrow{AB} = (2;-1;3),\ \overrightarrow{AC} = (1;2;-2).$$

Розв'язання. Площа трикутника дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ як на сторонах, тобто

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|.$$

Обчислимо векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AB}} & z_{\overrightarrow{AB}} \\ x_{\overrightarrow{Ac}} & y_{\overrightarrow{AC}} & z_{\overrightarrow{AC}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \cdot \bar{\mathrm{i}} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} =$$

$$= -4\bar{i} + 7\bar{j} + 5\bar{k}.$$

Знайдемо модуль отриманого вектора

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 7^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 49 + 25} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

Отже, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{10} = 1.5 \cdot \sqrt{10}.$

4. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ називають число, яке дорівнює векторному добутку двох перших векторів, помноженому скалярно на третій вектор:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\bar{a} \times \vec{b}) \cdot \bar{c}.$$

Ознака компланарності векторів. Три вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Модуль мішаного добутку векторів чисельно дорівнює ***об'єму паралелепіпеда***, побудованого на векторах як на ребрах.

Об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ як на ребрах, знаходять за формулою: $V = \dfrac{\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|}{6}.$

Властивості мішаного добутку векторів:

1) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = \overline{c}\overline{a}\overline{b} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c} = -\overline{a}\overline{c}\overline{b} = -\overline{c}\overline{b}\overline{a};$

2) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c});$

3) $(\alpha\bar{a})(\beta\bar{b})(\gamma\bar{c}) = \alpha\beta\gamma\,(\overline{a}\overline{b}\overline{c});$

4) $(\bar{a} \pm \bar{b})\overline{c}\overline{d} = \overline{a}\overline{c}\overline{d} \pm \overline{b}\overline{c}\overline{d}.$

Якщо вектори задані в координатах $\bar{a}=\left(x_{\bar{a}};y_{\bar{a}};z_{\bar{a}}\right)$, $\bar{b}=\left(x_{\bar{b}};y_{\bar{b}};z_{\bar{b}}\right)$, $\bar{c}=\left(x_{\bar{c}};y_{\bar{c}};z_{\bar{c}}\right)$, то мішаний обчислюється за формулою

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\begin{vmatrix} x_{\bar{a}} & y_{\bar{a}} & z_{\bar{a}} \\ x_{\bar{b}} & y_{\bar{b}} & z_{\bar{b}} \\ x_{\bar{c}} & y_{\bar{c}} & z_{\bar{c}} \end{vmatrix}.$$

Приклад 10. Знайти об'єм трикутної піраміди ABCD, якщо відомо, що $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;1)$, $\overrightarrow{AC}=(3;1;1)$, $\overrightarrow{AD}=(2;-1;0)$.

Розв'язання. Знайдемо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$. Отримаємо:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0-4-3-2-2-0=-11.$$

Таким чином, шуканий об'єм піраміди $ABCD$ дорівнює:

$$V=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|}{6}=\frac{|-11|}{6}=\frac{11}{6}\ \text{куб.од.}$$

Лекція 2б.

ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

План лекції

1. *Поділ відрізка в даному відношенні.*
2. *Рівняння прямої на площині. Взаємне розміщення прямих на площині.*

1. Поділ відрізка в даному відношенні.

Розглянемо відрізок AB. Нехай відомі координати точок $A(x_A;y_A;z_A)$ і $B(x_B;y_B;z_B)$. Виберемо на відрізку AB точку C, що ділить відрізок у відношенні

λ, тобто $\dfrac{AC}{CB}=\lambda$, де AC і CB – направлені відрізки. Якщо точка C не лежить на відрізку, а лежить на його продовженні, то $\lambda<0$. Знайдемо координати точки $C(x_C;y_C;z_C)$. Оскільки вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CB}$ колінеарні, то $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$; $\vec{r}_A=\overrightarrow{OA}$, $\vec{r}_C=\overrightarrow{OC}$, $\vec{r}_B=\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{r}_C-\vec{r}_A$ і $\overrightarrow{CB}=\vec{r}_B-\vec{r}_C$, тоді $\vec{r}_C-\vec{r}_A=\lambda(\vec{r}_B-\vec{r}_C)$ або $\vec{r}_C=\dfrac{\vec{r}_A+\lambda\vec{r}_B}{1+\lambda}$. Звідси отримаємо:

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\, y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda},\ z_C=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}. \qquad (1)$$

Ці співвідношення називаються ***формулами ділення відрізка*** **у** ***даному відношенні*** λ **і** мають сенс при будь-якому $\lambda\neq-1$. Зокрема, координати середини відрізка ($\lambda=1$) визначаються за формулами:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2},\ y_C=\frac{y_A+y_B}{2},\ z_C=\frac{z_A+z_B}{2}.$$

Рівняння $F(x,y)=0$ називається ***рівнянням лінії на площині***, якщо йому задовольняють координати довільної точки, що лежить на даній лінії, і не задовольняють координати жодної точки, що не належить даній лінії.

З означення рівняння лінії знаходиться розв'язок простої задачі: з'ясувати, чи лежить дана точка на заданій лінії. Якщо при підстановці координат точки в рівняння лінії одержуємо числову рівність (тотожність), то точка лежить на даній лінії; якщо тотожність не виходить, то точка не належить лінії.

Лінії першого порядку описуються на площині рівнянням першого степеня

$$Ax+By+C=0,$$

де A і B – числа, які одночасно не дорівнюють нулю, тобто $A^2+B^2\neq0$. Лініями першого порядку є прямі.

Розглянемо різні форми запису рівняння прямої в декартовій прямокутній системі координат на площині Oxy.

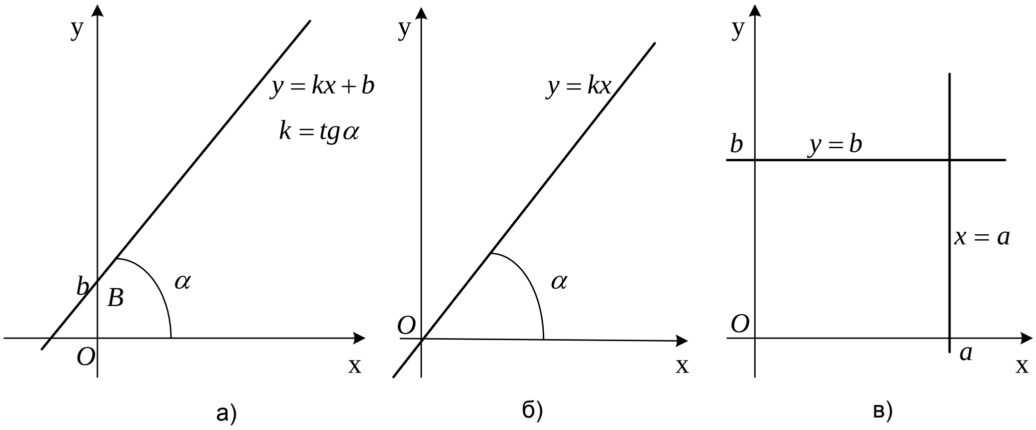
2. *Рівняння прямої на площині. Взаємне розміщення прямих на площині*

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом – це рівняння виду

$$y=kx+b, \qquad (2)$$

де k – кутовий коефіцієнт, який визначається як $k=tg\alpha$, де α – кут між прямою і додатним напрямом осі Ox. Якщо $\alpha\neq90^\circ$ (або $k\neq0$), то $b=y_B$ – координата точки B (точки перетину прямої з віссю Oy). Значення b дорівнює величині відрізку, що відсікається прямою на осі Oy.

Якщо $b=0$ і $k=0$ (тобто $\alpha=0$ і $tg\alpha=0$), то отримаємо рівняння прямої $y=0$, яка збігається з віссю абсцис Ox; якщо $k=0$, то $y=b$ – рівняння прямої паралельної осі абсцис, що проходить через точку $(0;b)$. А також, $x=0$ – рівняння прямої, яка збігається з віссю ординат Oy; $x=a$ – рівняння прямої, яка паралельна осі Oy і проходить через точку $(a;0)$.



Пряма на площині: а) $y=kx+b$, $k\neq 0$ і $b\neq 0$; б) $y=kx$, де $k\neq 0$ і $b=0$; в) $y=b$, коли $k=0$ і $x=a$, коли $k\to\infty$

Рівняння прямої, що проходить через дану точку $M_1(x_1;y_1)$ ***в заданому напрямі*** (який визначається кутовим коефіцієнтом *k*), має вигляд

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{3}$$

Якщо *k* довільне, то рівняння (3) називається ***рівнянням пучка прямих***.

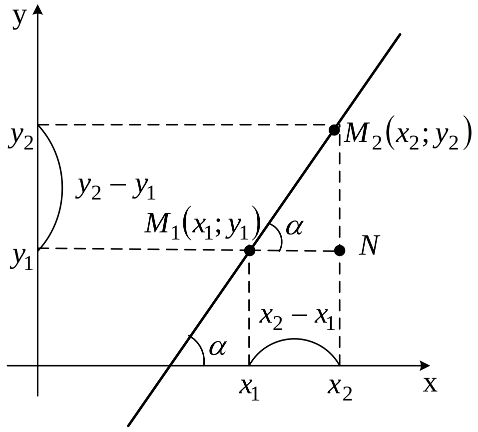
Запишемоьрівняння пучка прямих (3), що проходить через точку $M_1(x_1;y_1)$. На цій прямій візьмемо довільну точку $M_2(x_2;y_2)$, одержимо $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$, звідки знайдемо кутовий коефіцієнт

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{4}$$

Знайдене значення k , підставимо в (3) одержимо р***івняння прямої, що проходить через дві точки*** $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{5}$$

Напрямним вектором прямої називається будь-який ненульовий вектор, що лежить на прямій або паралельний їй.



Пряма, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$

Нехай напрямний вектор прямої $\vec{q} = (l;m)$. Якщо $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ – точки цієї прямої, то побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, який лежить на прямій і напрямок якого співпадає з вектором $\vec{q}$. Вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\vec{q}$ колінеарні, тому $x_2 - x_1 = \lambda l$ і $y_2 - y_1 = \lambda m$. Звідси одержимо ***канонічне рівняння прямої***

$$\frac{y - y_1}{m} = \frac{x - x_1}{l}. \tag{6}$$

Позначимо відношення t і отримаємо

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = t \;\to\; \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\cdot t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\cdot t, \end{cases} \tag{7}$$

де t – параметр, що змінюється в межах $(-\infty;\infty)$. Змінюючи параметр t, одержуємо всі точки прямої. Ці рівняння називаються ***параметричними рівняннями прямої***.

При $t = 0$ одержуємо координати точки $M_1(x_1;y_1)$, а при $t = 1$ – координати точки $M_2(x_2;y_2)$. Тому ***параметричне рівняння відрізка*** M_1M_2 визначається $t \in [0;1]$.

Якщо пряма не проходить через початок координат, то вона перетинає осі координат в точках $M_1(a;0)$ і $M_2(0;b)$. ***Рівняння прямої у відрізках***

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1, \tag{8}$$

де a – величина відрізка, що відсікається прямою від осі Ox, а b – від осі Oy. Якщо пряма проходить через початок координат, то рівняння у відрізках побудувати не можна.

Приклад 1. Побудувати пряму, задану в загальному вигляді рівнянням: а) $2x - 3y - 6 = 0$; б) $x + 4y = 0$. Знайти її кутовий коефіцієнт і отримати рівняння прямої у відрізках.

Розв'язання. а) Пряму можна побудувати як пряму лінію, що проходить через дві точки. Знайдемо ці точки.

Нехай $x=0$, тоді $2\cdot 0-3y-6=0 \rightarrow -3y-6=0 \rightarrow y=-2$. Таким чином, перша точка, що розміщена на прямій це $A(0;-2)$. Нехай $y=0$, тоді $2x-3\cdot 0-6=0 \rightarrow 2x-6=0 \rightarrow x=3$. Таким чином, друга точка на прямій $B(3;0)$. Побудуємо точки $A(0;-2)$ і $B(3;0)$ і проведемо через них пряму.

Знайдемо кутовий коефіцієнт k прямої $2x-3y-6=0 \rightarrow -3y=-2x+6 \rightarrow$ $y=\dfrac{2}{3}x-2 \rightarrow k=\dfrac{2}{3}$. Отримаємо рівняння прямої у відрізках, розділивши вихідне рівняння на 6: $2x-3y-6=0 \rightarrow \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}=1$. Пряма перетинає осі координат Oy і Ox відповідно в точках $A(0;-2)$ і $B(3;0)$.

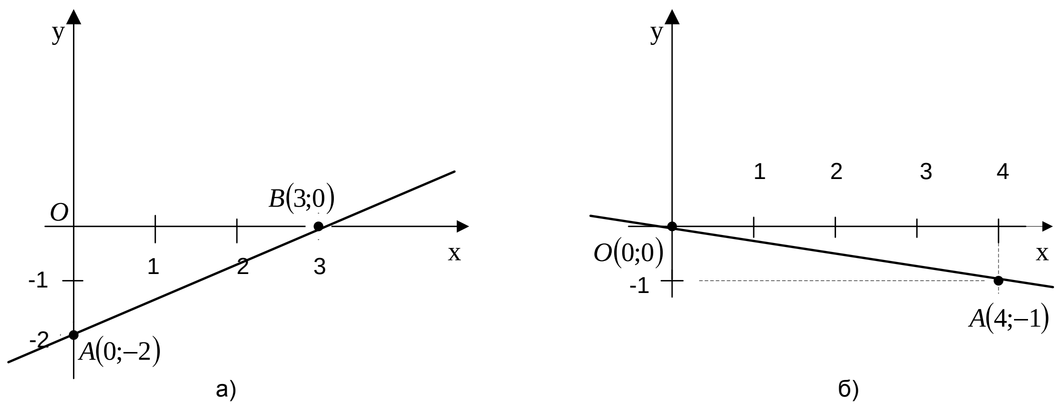


Рисунок – До прикладу 1

б) Так як у рівнянні вільний член дорівнює нулю, то ця пряма проходить через початок координат $O(0;0)$. Знайдемо другу точку, через яку проходить пряма. Нехай $x=4$, тоді $4+4y=0 \rightarrow y=-1$. Побудуємо точку $A(4;-1)$ і проведемо через неї пряму. Знайдемо кутовий коефіцієнт k прямої $x+4y=0 \rightarrow y=-\dfrac{1}{4}x$ $\rightarrow k=-\dfrac{1}{4}$. Так як пряма проходить через початок координат, то побудувати рівняння у відрізках не можна.

Приклад 2. Знайти рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(1;2)$ і $B(3;5)$. Визначити її кутовий коефіцієнт.

Розв'язання. Підставимо координати точок в рівняння (5): $\dfrac{y-2}{5-2}=\dfrac{x-1}{3-1} \rightarrow$ $\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{x-1}{2}$ та знайдемо кутовий коефіцієнт цього рівняння $2y-4=3x-3 \rightarrow$ $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2} \rightarrow k=\dfrac{3}{2}$.

Приклад 3. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $A(1;3)$ і має заданий напрямний вектор $\vec{q}=(2;1)$. Знайти рівняння прямої у відрізках.

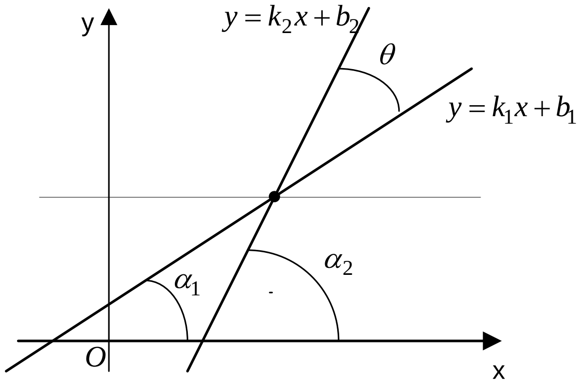
Розв'язання . За формулою (8): $\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{x-1}{2}$ знайдемо рівняння цієї прямої у відрізках: $2y-6=x-1 \ \rightarrow\ 2y-x=5 \rightarrow \dfrac{y}{5/2}+\dfrac{x}{-5}=1$. Таким чином, пряма перетинає вісь Oy у точці $\left(0;\dfrac{5}{2}\right)$ і вісь Ox у точці $(-5;0)$.

Кут між двома прямими на площині. Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Нехай задано дві прямі $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$, кутовими коефіцієнтами $k_1=tg\alpha_1$ і $k_2=tg\alpha_2$, $\alpha_1\neq 90^\circ$ і $\alpha_2\neq 90^\circ$. Позначимо кут між прямими через θ, як показано на рисунку. Тоді

$$tg\theta=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2} \quad \text{або} \quad tg\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}, \tag{9}$$

де θ – кут, на який потрібно повернути першу пряму ***проти годинникової*** стрілки, щоб вона збіглася з другою прямою.



Визначення кута θ між двома прямими $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$

Прямі паралельні, якщо кут $\theta=0^\circ$, тому ***умова паралельності прямих***

$$k_2=k_1. \tag{10}$$

Прямі перпендикулярні, якщо кут $\theta=90^\circ$, тому ***умова перпендикулярності прямих***

$$k_2=-\frac{1}{k_1}. \tag{11}$$

Якщо прямі задано у загальному вигляді $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$, ***умова паралельності прямих заданих в загальному вигляді***

$$\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_1}{B_1} \text{ або } A_1B_2-B_1A_2=0. \tag{12}$$

а ***умова перпендикулярності прямих заданих в загальному вигляді***

$$\frac{A_2}{B_2}=-\frac{B_1}{A_1} \text{ або } A_1A_2+B_1B_2=0. \tag{13}$$

Якщо дві прямі задано канонічними рівняннями $\dfrac{y-y_1}{a_2}=\dfrac{x-x_1}{a_1}$ і $\dfrac{y-y_2}{b_2}=\dfrac{x-x_2}{b_1}$, то кут між прямими дорівнює куту між направляючими векторами $\vec{a}=(a_1;a_2)$ і $\vec{b}=(b_1;b_2)$:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}. \tag{14}$$

Отже, умова перпендикулярності прямих $\varphi=90^\circ$ приймає вигляд

$$a_1b_1+a_2b_2=0. \tag{15}$$

Якщо прямі паралельні, то їх напрямні вектори $\vec{a}=(a_1;a_2)$ і $\vec{b}=(b_1;b_2)$ колінеарні, тобто $b_1=\lambda a_1$ $b_2=\lambda a_2$:

$$\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_1}{a_1}.$$

Відстань d ***від точки*** $M_0(x_0;y_0)$ ***до прямої*** $Ax+By+C=0$ визначається формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{16}$$

Приклад 4. Відомі координати вершин трикутника ABC: $A(1;1)$, $B(5;2)$, $C(3;4)$. Знайти: а) рівняння прямої, що проходить через висоту, опущену з вершини A; б) рівняння прямої, що проходить через точки B і D. Точка D ділить сторону AC трикутника у відношенні $2:3$; в) рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно стороні AB; г) знайти довжини висот трикутника, опущених з вершин A і C

Розв'язання. а) Висота, що опущена з вершини A, перпендикулярна стороні BC трикутника. Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точки B і C:

$\frac{y-2}{4-2}=\frac{x-5}{3-5} \to \frac{y-2}{2}=\frac{x-5}{-2} \to y=-x+7 \to k_1=-1.$

Висота перпендикулярна цій прямій, а значить кутовий коефіцієнт висоти $k_2=-\frac{1}{k_1}=1$. Оскільки висота проходить через точку $A(1;1)$, то $(y-1)=1\cdot(x-1) \to$ $y=x$.

б) Знайдемо координати точки D. За умовою $\frac{AD}{DC}=\frac{2}{3}$, тобто $\lambda=\frac{2}{3}$. Тоді за формулою ділення відрізка в заданому відношенні одержимо

$$x_D=\frac{x_A+\lambda x_C}{1+\lambda}=\frac{1+\frac{2}{3}\cdot 3}{1+\frac{2}{3}}=\frac{9}{5};\ y_D=\frac{y_A+\lambda y_C}{1+\lambda}=\frac{1+\frac{2}{3}\cdot 4}{1+\frac{2}{3}}=\frac{11}{5}.$$

Таким чином, координати точки такі $D\left(\frac{9}{5};\frac{11}{5}\right)$. Побудуємо рівняння прямої, що проходить через точки B і D:

$$\frac{y-2}{\frac{11}{5}-2}=\frac{x-5}{\frac{9}{5}-5} \to \frac{y-2}{1}=\frac{x-5}{-16} \to x+16y-37=0.$$

в) Побудуємо рівняння прямої, що проходить через точки A і B: $\frac{y-1}{2-1}=\frac{x-1}{5-1}$ $\to -x+4y-3=0 \to y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4} \to k_1=\frac{1}{4}$. Оскільки пряма, що проходить через точку C, паралельна прямій AB, то $k_2=k_1=\frac{1}{4}$. Запишемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k_2=\frac{1}{4}$, яка проходить через точку $C(3;4)$:

$$(y-4)=\frac{1}{4}\cdot(x-3) \to y=\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}.$$

г) Знайти довжину висоти, опущеної з вершини A на сторону BC трикутника – це значить знайти відстань від точки A до прямої BC.

Так як координати точки $A(1;1)$, а пряма BC описується рівнянням $y+x-7=0$, то за формулою (16) отримаємо

$$h_{A;BC}=\frac{|1\cdot 1+1\cdot 1-7|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Аналогічно, враховуючи, що координати точки $C(3;4)$, і пряма AB описується рівнянням $4y-x-3=0$, маємо

$$h_{C;AB}=\frac{\left|4\cdot 4-1\cdot 3-3\right|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{17}}.$$

Приклад 5. Знайти кут між прямими: а) $y=2x+8$ і $\frac{y-1}{3}=x-2$; б) $2x+3y+4=0$ і $-3x+2y+1=0$.

Розв'язання. а) За умовою $k_1=2$. Перетворимо друге рівняння $\frac{y-1}{3}=x-2$ $\to y=3x-5$. Звідси $k_2=3$. Отже за формулою (9), $tg\theta=\frac{3-2}{1+3\cdot 2}=\frac{1}{7}$ $\to$ $\theta=arctg\frac{1}{7}$.

б) Перетворимо рівняння:

$$2x+3y+4=0 \to y=-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3} \to k_1=-\frac{2}{3},$$

$$-3x+2y+1=0 \to y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2} \to k_2=\frac{3}{2}.$$

Так як $k_2=-\frac{1}{k_1}=\frac{3}{2}$, то ці прямі перпендикулярні, а значить $\theta=90^\circ$.

Приклад 6. Дано координати вершин чотирикутника $ABCD$: $A(-3;-1)$, $B(2;5)$, $C(7;4)$, $D(4;-1)$.Знайти точку перетину його діагоналей.

Розв'язання. Складемо рівняння прямих *AC і BD*. Для цього підставимо координати відповідних точок в рівняння (5):

$$\frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A}, \qquad \frac{x-x_B}{x_D-x_B}=\frac{y-y_B}{y_D-y_B},$$

$$\frac{x-(-3)}{7-(-3)}=\frac{y-(-1)}{4-(-1)}, \qquad \frac{x-2}{4-2}=\frac{y-5}{-1-5},$$

$$\frac{x+3}{2}=y+1, \qquad x-2=\frac{y-5}{-3},$$

$$x+3=2y+2, \qquad -3x+6=y-5,$$

$$x-2y+1=0. \qquad 3x+y-11=0.$$

Отже, $x-2y=1=0$ – рівняння діагоналі AC; $3x+y-11=0.$ – рівняння діагоналі *BD*. Точка *P*, точка перетину діагоналей чотирикутника, лежить на обох цих прямих, тому її координати задовольняють обом знайденим рівнянням. Координати точки будуть розв'язком системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x-2y+1=0, \\ 3x+y-11=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2y-1, \\ 3\cdot(2y-1)+y-11=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2y-1=4-1=3, \\ y=2; \end{cases}$$

Отже, $P(3;2)-$ точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$.

Лекція 3.

ГРАНИЦІ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ.

План лекції

1. *Означення послідовності, обмежені та необмежені послідовності, границя послідовності.*
2. *Означення границі функції. Теореми про границі.*
3. *Однобічні границі функцій.*
4. *Нескінченно велика і нескінченно мала функції.*
5. *Перша визначна границя.*
6. *Друга визначна границя.*
7. *Порівняння нескінченно малих.*
8. *Систематизація способів обчислення границь функцій.*
9. *Класифікація точок розриву функції.*

1. *Означення послідовності, обмежені та необмежені послідовності, границя послідовності.*

Якщо область визначення функції є множина всіх натуральних чисел, то множина значень функції $f(n)$, взятих в порядку зростання їх аргументу n, $f(1), f(2),\ldots, f(n)$, утворює ***числову послідовність***. Числа $f(n)$ називаються ***членами послідовності.*** Якщо вираз для $f(n)$ заданий, то можливе відтворення будь-якого члена послідовності.

Якщо $\{x_n\}=\dfrac{n-1}{n}$, то з ростом n члени послідовності зростають.

Якщо $\{x_n\}=\sin n\pi$, то члени послідовності рівні між собою.

Обмежені та необмежені послідовності

Послідовність $\{x_n\}$ називають ***обмеженою***, якщо значення кожного її члена по абсолютній величині менше значення деякого додатного числа k, тобто, якщо $|x_n|<k$. Члени обмеженої послідовності розташовані на інтервалі $(-k;k)$.

Якщо ж для будь-якого додатного числа k знайдуться члени послідовності, значення кожного з яких по абсолютній величині більше значення k, то послідовність називається ***необмеженою.***

Наприклад, якщо $\{x_n\} = 2\sin 5n$, то $|x_n| = 2|\sin 5n| < 2$ для всіх значень n. Тому послідовність обмежена ($k = 2$).

Послідовність $\{x_n\} = 2n$ необмежена, бо для будь-якого числа k при $n > \frac{k}{2}$ $x_n = 2n > k$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається ***обмеженою зверху***, якщо значення кожного її члена менше деякого числа M.

Якщо ж для будь-якого числа M знайдуться члени послідовності, значення кожного із яких більше значення числа M, то послідовність називається ***необмеженою зверху***.

Послідовність називається ***обмеженою знизу***, якщо значення кожного її члена більше значення деякого числа N.

Якщо ж для будь-якого числа N знайдуться члени послідовності, значення кожного із яких менше N, то послідовність називається ***необмеженою знизу***.

Монотонні послідовності

Якщо в послідовності $\{x_n\} = f(n)$ значення кожного попереднього члена менше значення наступного ($x_n < x_{n+1}$, n – будь-яке), то послідовність називається ***зростаючою***.

Якщо в послідовності $\{x_n\} = f(n)$ значення кожного попереднього члена більше значення наступного ($x_n > x_{n+1}$, n – будь-яке), то послідовність називається ***спадною.***

Послідовність з загальним членом $x_n = \frac{2n-1}{n}$ є зростаючою, бо для будь-якого n $x_n < x_{n+1}$. Послідовність з загальним членом $x_n = \frac{n+2}{n}$ є спадною, бо для будь-якого n $x_n > x_{n+1}$.

Існують послідовності, які є ні зростаючими, ні спадними. Наприклад, якщо $x_n = (-1)^n \cdot 7 - 5$, тобто послідовність $-12; 2; -12; 2; \ldots$.

Арифметичні дії над послідовностями

Над послідовностями, які є функціями, визначеними на множині всіх натуральних чисел, можуть виконуватись дії додавання (віднімання), множення і ділення.

1. Сумою послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ називається послідовність $\{z_n\}$, де $z_n = x_n + y_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, тобто $\{z_n\} = \{x_n + y_n\}$.

2. Добутком послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ називається послідовність $\{z_n\}$, де $z_n = x_n \cdot y_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, тобто $\{z_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$.

3. Часткою послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ називається послідовність $\{z_n\}$, де $z_n = \dfrac{x_n}{y_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$, тобто $\{z_n\} = \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$.

Очевидно, сума, різниця і добуток двох послідовностей завжди існують, а частка існує лише в тому випадку, коли жодний із членів послідовності $\{y_n\}$ не дорівнює нулю.

Послідовність $\{x_n\}$ називається ***обмеженою зверху***, якщо значення кожного її члена менше деякого числа M .

Якщо ж для будь-якого числа M знайдуться члени послідовності, значення кожного із яких більше значення числа M , то послідовність називається ***необмеженою зверху***.

Послідовність називається ***обмеженою знизу***, якщо значення кожного її члена більше значення деякого числа N .

Якщо ж для будь-якого числа N знайдуться члени послідовності, значення кожного із яких менше N , то послідовність називається ***необмеженою знизу***.

Монотонні послідовності

Якщо в послідовності $\{x_n\} = f(n)$ значення кожного попереднього члена менше значення наступного ($x_n < x_{n+1}$, n – будь-яке), то послідовність називається ***зростаючою***.

Якщо в послідовності $\{x_n\} = f(n)$ значення кожного попереднього члена більше значення наступного ($x_n > x_{n+1}$, n – будь-яке), то послідовність називається ***спадною.***

Послідовність з загальним членом $x_n = \dfrac{2n-1}{n}$ є зростаючою, бо для будь-якого n $x_n < x_{n+1}$. Послідовність з загальним членом $x_n = \dfrac{n+2}{n}$ є спадною, бо для будь-якого n $x_n > x_{n+1}$.

Існують послідовності, які є ні зростаючими, ні спадними. Наприклад, якщо $x_n = (-1)^n \cdot 7 - 5$, тобто послідовність $-12; 2; -12; 2; \ldots$.

Арифметичні дії над послідовностями

Над послідовностями, які є функціями натурального числа, визначеними на множині всіх натуральних чисел, можуть виконуватись дії додавання (віднімання), множення і ділення.

1. Сумою послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ називається послідовність $\{z_n\}$, де $z_n = x_n + y_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$, тобто $\{z_n\} = \{x_n + y_n\}$.

2. Добутком послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ називається послідовність $\{z_n\}$, де $z_n = x_n \cdot y_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$, тобто $\{z_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$.

3. Часткою послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ називається послідовність $\{z_n\}$, де $z_n = \dfrac{x_n}{y_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\dots)$, тобто $\{z_n\} = \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$.

Очевидно, сума, різниця і добуток двох послідовностей завжди існують, а частка існує лише в тому випадку, коли жодний із членів послідовності $\{y_n\}$ не дорівнює нулю.

Означення границі послідовності

Число a називається ***границею послідовності*** $\{x_n\} = f(n)$, якщо для будь-якого додатного числа ε можна знайти таке натуральне число N, що для всіх членів з номерами $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Записується: $\lim x_n = a$ або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; говорять: x_n прямує до a при $n \to \infty$.

Послідовності з різними загальними членами x_n можуть мати одну і ту ж границю.

Послідовність, якам має границю називається *збіжною*; якщо не має границі, то ***розбіжною***.

Будь-який інтервал числової прямої з центром в точці a, $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, називається ***околом точки*** a. Для однієї і тієї ж точки a можна вказати безліч околів.

1. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності та їх властивості.

Послідовність $\{x_n\}$ називається ***нескінченно малою***, якщо для будь-якого додатного числа ε, розпочинаючи з деякого значення n, буде виконуватись нерівність $|x_n| < \varepsilon$.

Будь-яка нескінченно мала послідовність збігається до нуля і, навпаки, послідовність, яка збігається до нуля, є нескінченно мала.

Властивості нескінченно малих послідовностей

1. Сума двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.
2. Добуток обмеженої послідовності на нескінченно малу послідовність є нескінченно мала послідовність.
3. Добуток збіжної послідовності на нескінченно малу послідовність є нескінченно мала послідовність.
4. Добуток двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

2. Означення границі функції. Теореми про границі

Поняття границі функції важливе не тільки для послідовностей (функцій натурального аргументу), але і для функцій неперервного аргументу, який суцільно заповнює інтервал визначення $f(x)$. Це пов'язано, по-перше, із значною поширеністю функцій неперервного аргументу, як апарата математичного аналізу, як в самій математиці, так і в суміжних з нею наукових областях.

Стале число a називається границею змінної величини x, якщо для будь якого наперед заданого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке значення змінної x, що всі наступні значення змінної будуть задовольняти нерівності

$$|x-a| < \varepsilon .$$

Якщо число a є границею змінної величини x, то говорять, що x прямує до границі a і пишуть $x \to a$ або $\lim x = a$.

Із означення границі змінної випливає, що змінна величина не може мати двох границь, це число єдине.

Не кожна змінна величина має границю. Є змінні величини, які не прямують до границі.

Границею функції $y = f(x)$ при x, що прямує до a, називається таке число A, якщо для будь якого наперед заданого $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число $\delta > 0$,що для всіх x, які входять у область визначення функції, відмінних від a та задовольняють нерівність $|x-a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Якщо A є границя функції $f(x)$ при $x \to a$, то пишуть

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Слід зауважити, що означення границі функції не вимагає, щоб функція $f(x)$ була визначена у точці a. Для того щоб функція $f(x)$ прямувала до границі при $x \to a$, необхідно лише, щоб у області її визначення були точки як завгодно близькі до a та відмінні від a.

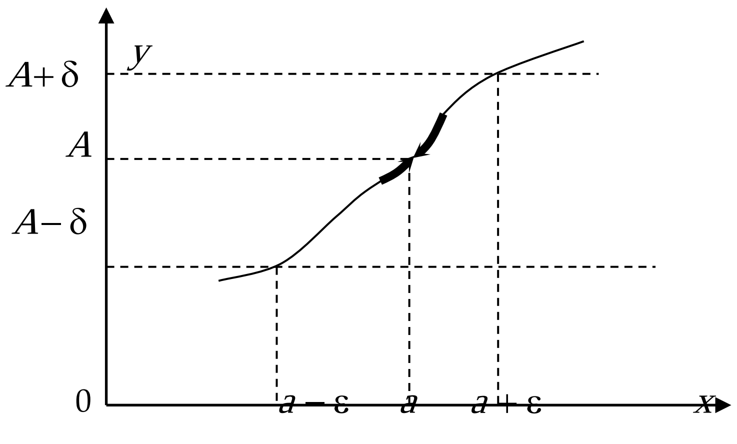


Рисунок 4.1. – Границя функції

Даному означенню можна дати графічну інтерпретацію: так як із нерівності $|x-a| < \delta$ слідує нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, то це означає, що для всіх точок x, які віддалені від точки a не далі ніж на δ, точки графіка функції $y = f(x)$ всередині смуги шириною 2ε, що обмежена прямими $y = A - \varepsilon$ та $y = A + \varepsilon$.

Якщо незалежна змінна x функції $y = f(x)$ необмежено зростає, тобто x приймає значення, які більші будь-якого наперед заданого додатного числа, то говорять, що x прямує до додатної нескінченності $x \to +\infty$. Якщо x необмежено спадає, то говорять, що x прямує до від'ємної нескінченності $x \to -\infty$.

Число A називається *границею функції* $y = f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для будь-якого наперед заданого $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число N, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| > N$, має місце нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначається: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Графічна інтерпретація цього випадку: точки графіку $y = f(x)$ лежать всередині смуги шириною 2ε, що обмежена прямими $y = A - \varepsilon$ та $y = A + \varepsilon$, якщо точки x достатньо віддалені від точки $x = 0$.

Теореми про границі для функцій неперервного аргументу при $x \to a$

Ці теореми є основними властивостями границь функцій неперервного аргументу.

- Функція $f(x)$ не може мати двох різних границь при $x \to a$.

- Функція $f(x)$, що має границю при $x \to a$, обмежена в деякому околі точки a.

- Границя сталої дорівнює самій сталій.

- Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають границі при $x \to a$, то їх алгебраїчна сума має границю при $x \to a$, що дорівнює сумі границь доданків, отже
$$\lim_{x \to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim_{x \to a} f_1(x) \pm \lim_{x \to a} f_2(x).$$

Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають границі при $x \to a$, то їх добуток має при $\to a$ границю, що дорівнює добуткові границь співмножників, отже
$$\lim_{x \to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x).$$

Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають при $x \to a$ границі і крім того $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) \neq 0$

:і значення $f_2(x) \neq 0$, то функція $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ має при $x \to a$ границю, рівну

тці границь $f_1(x)$ і $f_2(x)$, тобто
$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)}.$$

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=b_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=b_2$ і $f_1(x)\le f_2(x)$ при $x\to a$, то $b_1\le b_2$.

Якщо в деякому околі точки $x=a$ (крім, можливо, точки *a*) виконана умова $f(x)=\varphi(x)$ і якщо границя однієї із цих функцій в точці *a* існує, то

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

Якщо існує $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ і $f(x)$ – одна із елементарних функцій, то

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x))= f\left[\lim_{x\to a}\varphi(x)\right].$$

Наприклад, $\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)]^k=\left[\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\right]^k$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ – існує, а k – стале число; $\lim\limits_{x\to a}(\log_c\varphi(x))=\log_c\left(\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\right)$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)>0$.

3. Однобічні границі функцій

Якщо $x\to a$ і в той же час $x<a$, то кажуть, що x прямує до a ***зліва***, і позначають $x\to a-0$, а відповідна границя називається ***лівобічною (лівою)*** і позначається:

$$\lim_{x\to a-0} f(x),\quad \text{або} \quad \lim_{\substack{x\to a-\varepsilon,\\ \varepsilon\to 0}} f(x).$$

Якщо $x\to a$ і $x>a$, то кажуть, що x прямує до a ***справа***, і позначають $x\to a+0$, а відповідна границя називається ***правобічною (правою)*** і позначається:

$$\lim_{x\to a+0} f(x),\quad \text{або} \quad \lim_{\substack{x\to a+\varepsilon,\\ \varepsilon\to 0}} f(x).$$

Право- і лівобічна границі називаються ***однобічними границями***

Приклад 1. Обчислити однобічні границі $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{(x-2)^3}$.

Розв'язання.

Лівобічна: $\lim\limits_{\substack{x\to 2-\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\dfrac{4}{(x-2)^3}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{4}{(2-\varepsilon-2)^3}=4\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{1}{-\varepsilon^3}=-\infty$.

Правобічна: $\lim\limits_{\substack{x\to 2+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0}}\dfrac{4}{(x-2)^3}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{4}{(2+\varepsilon-2)^3}=4\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{1}{\varepsilon^3}=+\infty$.

Приклад 2. Знайти у точці x=-5 однобічні границі функції

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+5}, & x<-5\\[2mm] \dfrac{x^2+11x+30}{x+5}, & x\ge -5\end{cases}$$

Розв'язання.

а) Лівобічну границю заданої функції шукаємо, виходячи з умови $x < -5$

$$\lim_{x\to -5-0} f(x) = \lim_{x\to -5-0} \frac{1}{x+5} = -\infty .$$

б) Правобічну границю заданої функції шукаємо, виходячи з умови $x > -5$

$$\lim_{x\to -5+0} f(x) = \lim_{x\to -5+0} \frac{x^2 + 11x + 30}{x+5} = \lim_{x\to -5+0} \frac{(x+5)(x+6)}{x+5} =$$

$$= \lim_{x\to -5+0} (x+6) = \lim_{x\to -5} (x+6) = -5 + 6 = 1.$$

4. Нескінченно велика і нескінченно мала функції

Функція $y = a(x)$ називається ***нескінченно малою*** при $x \to a$, якщо для будь-якого додатного числа ε, розпочинаючи з деякого значення *x*, буде виконуватись нерівність $|\alpha(x)| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Функція $f(x)$ називається ***додатною (від'ємною) нескінченно великою*** при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty\right)$.

Функція $f(x)$ називається ***нескінченно великою*** при $x \to a$, якщо $|f(x)|$ – нескінченно велика величина; записується: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Якщо функція $f(x)$ при $x \to a$ є нескінченно великою, то обернена їй по значенню функція $\dfrac{1}{f(x)}$ буде при $x \to a$ нескінченно малою, тобто якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Якщо функція $f(x)$ при $x \to a$ не обертається в нуль і є нескінченно малою, то обернена їй за значенням функція $\dfrac{1}{f(x)}$ буде при $x \to a$ нескінченно великою, тобто, коли $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

5. Перша визначна границя

При обчисленні границь виразів з тригонометричними функціями, часто використовують границю

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}, \tag{2}$$

тобто границя відношення синуса до його аргументу дорівнює одиниці, якщо аргумент прямує до нуля. Дану границю називають ***першою визначною границею.***

Доведемо рівність (2).

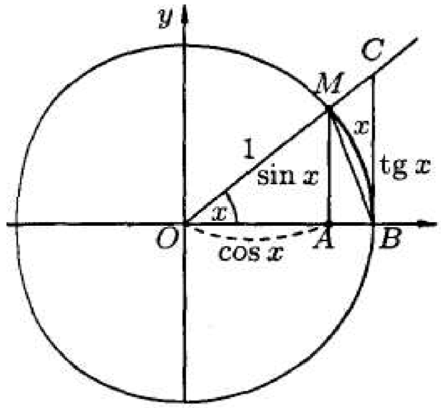


Рисунок 2. – Перша визначна границя

Візьмемо круг радіуса $R=1$. Позначимо $\angle AOM = x$. Нехай $0<x<\frac{\pi}{2}$. На рисунку 2 $OA=\cos x$, $AM=\sin x$, $BC=tgx$, дуга MB чисельно дорівнює куту x, $OM=R=1$. Розглянемо ΔOMB, ΔOCB, сектор OMB. Очевидно, що

$$S_{\Delta OMB}<S_{\text{сектора } OMB}<S_{\Delta OCB}.$$

Також очевидно, що

$$S_{\Delta OMB}=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot AM=\frac{1}{2}\cdot R\cdot R\sin x=\frac{1}{2}\sin x$$

$$S_{\text{сектора } OMB}=\frac{1}{2}R^2x=\frac{1}{2}x,$$

$$S_{\Delta OCB}=\frac{1}{2}OB\cdot CB=\frac{1}{2}tgx.$$

Таким чином, при $x>0$

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}tgx$$

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

або

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Так як $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ і $\lim\limits_{x\to 0}1=1$, то відповідно до теореми про границю проміжної функції

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Нехай $x<0$, тоді $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin(-x)}{-x}$, де $-x>0$. Тому $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x<0)}}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Таким чином, формулу (2) доведено.

Підкреслимо, що нескінченно малий аргумент синуса може приймати інші аналітичні вирази: якщо $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}=1$; якщо $x\to 3$, то $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x-3}=1$; якщо $x\to\dfrac{\pi}{2}$, то $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\cos x}{\cos x}=1$, бо у всіх цих випадках "ефективний" аргумент синуса прямує до нуля.

Перша визначна границя застосовується при обчисленні границь тригонометричних виразів.

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{nx}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\sin mx}{mx}\right)=\frac{m}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}=\frac{m}{n}\cdot 1=\frac{m}{n}.$$

Приклад 4. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2\cdot 1\cdot 1=2.$$

6. Друга визначна границя

Як відомо границя числової послідовності $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n\in N$, має границю, що дорівнює e.

Доведено, що до числа e прямує і функція $x=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, $x\in R$ при $x\to\pm\infty$:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}. \qquad (3)$$

Якщо в формулі (3) зробити заміну $\dfrac{1}{x}=\alpha$ ($\alpha\to 0$ при $x\to\infty$), вона запишеться у вигляді

$$\boxed{\lim_{\alpha\to\infty}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e}. \qquad (4)$$

Рівності (3) і (4) називаються *другою визначною границею*. Вони широко використовуються при обчисленні границь.

В прикладних дослідженнях велику роль відіграє показникова функція з основою e.

Функція $y=e^x$ називається *експоненційною*, вживається також запис $e^x=\exp(x)$

Легко можна довести справедливість записів:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k, \quad \lim_{\alpha\to 0}(1+k\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e^k, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{kx}\right)^x=\sqrt[k]{e},$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(1+\frac{\alpha}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\sqrt[k]{e}.$$

Очевидно, що при $x\to\infty$ $\dfrac{ax+b}{ax+c}\to 1$. Тому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+c+b-c}{ax+c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{ax+c}{b-c}}\right)^{\frac{ax+c}{b-c}\cdot\frac{b-c}{ax+c}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b-c}{ax+c}\cdot x}=e^{\frac{b-c}{a}}$$

7. Порівняння нескінченно малих

Швидкості прямування до нуля при $x\to a$ двох нескінченно малих функцій можна порівняти шляхом обчислення границі їх відношення.

Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ – нескінченно малі при $x\to a$, тоді:

1) якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$, то нескінченно мала функція $\varphi(x)$ має ***більш високий порядок малості*** порівняно з нескінченно малою функцією $f(x)$.

2) якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=A\neq 0$, існує і не дорівнює нулю, то ці функції мають при $x\to a$ ***однаковий порядок малості.***

3) у випадку, коли $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, ***більш високий порядок малості*** при $x\to a$ має функція в чисельнику, тобто $f(x)$.

4) якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, не існує, то ці функції називаються ***непорівнюваними***

нескінченно малими. Наприклад, якщо $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$, а $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$, то вони при $x\to\infty$ нескінченно малі, але тому що $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ – не існує, то ці функції непорівнювані.

5) якщо для нескінченно малих при $x\to a$ функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=1$, то вони називаються ***еквівалентними***, що позначається: $f(x)\sim\varphi(x)$ при $x\to a$. При $x\to 0$ еквівалентними є такі фукнкції

$$\sin x \sim x;\ tgx \sim x;\ e^x-1 \sim x;\ \arcsin x \sim x;\ arctgx \sim x;\ \sqrt[\beta]{1+x}\sim 1+\frac{x}{\beta};$$

$$\frac{a^x-1}{\ln a}\sim x;\ \ln(1+x)\sim x;\ (1+x)^{\alpha}\sim 1+\alpha x,$$

Це дає можливість в добутках і частках заміняти одні функції іншими, якщо вони еквівалентні між собою.

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{nx}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}.$$

Приклад 6. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{\ln(1+x)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x-1\right)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x x\ln\frac{3}{2}}{x}=\ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 7. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)}{\sin^2 6x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)}{\sin^2 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{36x^2}=\frac{1}{36}.$$

8. Систематизація способів обчислення границь функцій

1) Обчислення границь за формулою $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Цей випадок реалізується для всіх основних елементарних функцій в точках їх визначення, для цілих раціональних функцій та дробово-раціональних функцій при умові, що знаменник останніх в граничній точці не обертається в нуль.

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{x\to 1/2} \arccos x$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 1/2} \arccos x = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3};$$

Приклад 9. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}(x^3 - 4x + 5)$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 2}(x^3 - 4x + 5) = 2^3 - 4\cdot 2 + 5$.

Тут – $f(x) = x^3 - 4x + 5$ є ціла раціональна функція, яка визначена на всій числовій осі, отже, і в точці $x = 2$.

2) Обчислення границь на основі теорем про нескінченно малі та нескінченно великі функції та зв'язок між ними. Границі при $x \to \pm\infty$.

Приклад 10. Знайти $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{1-x}{x-2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{1-x}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2-\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} \frac{1-x}{x-2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-2+\varepsilon}{-\varepsilon} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{1-x}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} \frac{1-x}{x-2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-2-\varepsilon}{2+\varepsilon-2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{\varepsilon} = -\infty.$$

3) ***Розкриття невизначеностей видів $\left[\frac{0}{0}\right]$ і $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.***

а) Розкриття невизначеностей виду $\left[\frac{0}{0}\right]$

Для розкриття цієї невизначеності, яка виникає при $x \to a$ необхідно спочатку чисельник і знаменник виразу розкласти на множники. Після необхідних спрощень здійснюють обчислення границі. Процедуру розкладу чисельника і знаменника дробу здійснюють шляхом ділення чисельника і знаменника на $x - a$.

Приклад 12. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - 12x + 20}$.

Розв'язання.

Згідно з теоремою Вієта корені тричлена $x^2 - 12x + 20$ дорівнюють 2 і 10. Тому $x^2 - 12x + 20 = (x-2)(x-10)$.

$$\begin{array}{l|l}
-\;x^3 - 3x^2 - 4x + 12 & x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{\;x^3 - 2x^2\;} & x^2 - x - 6 \\
\quad -\; -x^2 - 4x & \\
\quad\;\; \underline{-x^2 + 2x} & \\
\qquad -\;\; -6x + 12 & \\
\qquad\;\;\; \underline{-6x + 12} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Таким чином,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2-4x+12}{x^2-12x+20}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-x-6)}{(x-2)(x-10)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-6}{x-10}=\frac{4-2-6}{2-10}=\frac{-4}{-8}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 13. Знайти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-8x+16}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-8x+16}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-1)}{(x-4)^2}=\lim_{x\to 4}\frac{x-1}{x-4}=\lim_{\substack{x\to 4\pm\varepsilon,\\ \varepsilon\to 0}}\frac{x-1}{x-4}=$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{4+\varepsilon-1}{4+\varepsilon-4}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{3}{\varepsilon}=+\infty,\\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{4-\varepsilon-1}{4-\varepsilon-4}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{3}{-\varepsilon}=-\infty.\end{cases}$$

Отже, при розкритті невизначеностей цього виду можна одержати:

- число, яке не дорівнює нулю і одиниці, коли нескінченно малі функції мають однаковий порядок малості;
- нуль, коли функція, що є чисельником дробу, має більш високий порядок малості;
- нескінченність, коли функція, що є знаменником дробу, має більш високий порядок малості;
- одиницю, коли нескінченно малі функції в чисельнику і в знаменнику дробу є еквівалентними нескінченно малими функціями.

Якщо в чисельнику і/або знаменнику дробу міститься ірраціональність, то для розкриття невизначеності в цьому випадку застосовують переміщення ірраціональності із однієї в іншу частину дробу шляхом помноження і чисельника і знаменника на спряжений до ірраціонального виразу.

Приклад 14. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{1}{2}.$$

Інколи, при обчисленні границі доцільно виконати заміну змінної. .

Приклад 15. Знайти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[7]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$.

Розв'язання.

При $x\to -1$ чисельник і знаменник дробу мають границі рівні нулю. Тому, для того, щоб можна було застосувати теорему Безу, зробимо підстановку $x=t^{35}$, де показник 35-найменше кратне показників коренів. Тоді $\sqrt[7]{x}=t^5$, $\sqrt[5]{x}=t^7$, причому нова змінна t прямує до -1 при $x\to -1$. Маємо

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[7]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}=\lim_{x\to -1}\frac{1+t^5}{1+t^7}=\lim_{x\to -1}\frac{(1+t)\left(t^4-t^3+t^2-t+1\right)}{(1+t)\left(t^6-t^5+t^4-t^3+t^2-t+1\right)}=\frac{5}{7}.$$

б) Розкриття невизначеностей виду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Ця процедура здійснюється при знаходженні границі дробово-раціональної функції у випадку, коли при $x\to\infty$ і чисельник і знаменник дробу є нескінченно великими функціями. Для знаходження цієї границі необхідно чисельник і знаменник дробу поділити на x у найвищому у всьому дробі степені і після цього здійснити граничний перехід.

При розкритті невизначеності цього виду можливі три наступні випадки.

Приклад 16. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^3-1}{10x^3+2x^2}$.

Розв'язання. При $x\to\infty$ і чисельник і знаменник дробу є нескінченно великими функціями, тому поділимо і чисельник і знаменник на x у найвищому степені, тобто на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^3-1}{100x^3+2x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^4}}{\frac{100}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{100}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\infty .$$

Правило: *Якщо найвищий показник степеня x в чисельнику більший найвищого показника степеня x в знаменнику, то границя дробу дорівнює ∞.*

Приклад 17. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+8}{-5x^3+2x^2+x}$.

Розв'язання.

При $x\to\infty$ і чисельник і знаменник дробу є нескінченно великими функціями, тому поділимо і чисельник і знаменник на x^3 і потім здійснимо граничний перехід при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+8}{-5x^3+2x^2+x}=\left[\frac{\infty}{-\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3\left(1-\frac{4}{x}+\frac{8}{x^3}\right)}{-5\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=-\frac{3}{5}.$$

Правило: *Якщо найвищі показники степеня x в чисельнику і знаменнику дробу рівні, то границя дробу дорівнює відношенню коефіцієнтів при x в найвищих степенях.*

Приклад 18. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^3+3x+7}$.

Розв'язання. При $x\to\infty$ дріб являє собою відношення двох нескінченно великих функцій; тому поділимо чисельник і знаменник дробу на x^3 і здійснимо граничний перехід при $x\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+5}{x^3+3x+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=0.$$

Правило: *Якщо найвищий показник степеня x в чисельнику менше найвищого показника степеня x в знаменнику, то границя дробу дорівнює нулю.*

4) Розкриття невизначеностей видів $[\infty-\infty]$ і $[\infty\cdot 0]$.

а) Розкриття невизначеностей виду $[\infty-\infty]$

До невизначеностей цього виду приходять при спробі обчислити границю при $x\to a$ двох нескінченно великих при цьому граничному переході функцій, які мають однаковий знак. Якщо ж знаки нескінченно великих функцій протилежні, то їх різниця має вид $[+\infty+\infty]$ або $[-\infty-\infty]$ і тому не являє собою невизначеності.

Способи розкриття невизначеності цього виду залежать від аналітичної форми виразу під знаком границі.

Якщо цей вираз являє собою різницю двох алгебраїчних дробів, то з метою переходу до відомих невизначеностей видів $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ застосовується зведення до спільного знаменника, винесення спільного знаменника або спільного множника знаменників за дужки і подальші перетворення.

Приклад 19. Знайти $\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{9-x^2}\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to-3}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{9-x^2}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to-3}\frac{3-x-6}{9-x^2}=\lim_{x\to-3}\frac{-x-3}{9-x^2}=\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{(x+3)(x-3)}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-3}\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{6}.$$

Приклад 20. Знайти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx-\dfrac{1}{\cos x}\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx-\frac{1}{\cos x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+\varepsilon\\ \varepsilon=0}}\left(tg\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)-\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon=0}\left(-\frac{1}{tg\varepsilon}+\frac{1}{\sin\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\sin\varepsilon}(1-\cos\varepsilon)=\lim_{\varepsilon=0}\frac{2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2}}=\lim_{\varepsilon=0}tg\frac{\varepsilon}{2}=0.$$

Якщо вирази під знаком границі містять ірраціональності, то в таких випадках застосовується перенесення ірраціональності (множенням на спряжений множник чисельника і знаменника) із чисельника в знаменник або навпаки; можна застосувати також і еквівалентну заміну.

Приклад 21. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right)$.

Розв'язання.

Необхідно розв'язувати в двох варіантах: $x\to\pm\infty$.

а) Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+10x}+x\right)}{\sqrt{x^2+10x}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+10x}\right)^2-(-x)^2}{\sqrt{x^2+10x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+10x-x^2}{\sqrt{x^2+10x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x}{x\left[\left(1+\frac{10}{2x}\right)+1\right]}=\frac{10}{2}=5.$$

б) Знайти $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right)=+\infty$, бо $\sqrt{x^2+10x}\to+\infty$, $(-x)\to+\infty$ при $x\to-\infty$. За другим способом. Застосуємо еквівалентну заміну:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\left(\sqrt{1+\frac{10}{x}}-x\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\left(1+\frac{5}{x}\right)-x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(-x-x-5)=\lim_{x\to-\infty}(-2x-5)=+\infty.$$

б) Розкриття невизначеностей виду $[\infty\cdot 0]$

За допомогою тотожних перетворень вираз під знаком границі перетворюється до виду, який дає невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, що розкриваються стандартним способом.

Приклад 22. Знайти $\lim\limits_{x\to0}(\sin 8x\cdot ctg 9x)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to0}(\sin 8x\cdot ctg9x)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to0}\frac{\sin 8x}{tg9x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 8x\cdot\cos 9x}{\sin 9x}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{9x}{9x \cdot \sin 9x} \cdot \frac{8x \cdot \sin 8x \cdot \cos 9x}{8x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{8x}{9x} \cdot \lim_{x\to 0} \cos 9x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 8x}{8x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{9x}{\sin 9x} = \frac{8}{9} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{8}{9}.$$

5) Розкриття невизначеності виду $\left[1^{\infty}\right]$. Застосування другої визначної границі.

Приклад 23. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-7}\right)^{x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-7}\right)^{x} = \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{ax+b}{ax+c}\right)^{x} = e^{\frac{b-c}{a}} \\ a = 3,\ b = 2,\ c = -7 \end{array} \right| = e^{\frac{2+7}{3}} = e^{3}.$$

Приклад 24. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} (x-3)\left[\ln(8x+2) - \ln(8x+4)\right]$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty} (x-3)\left[\ln(8x+2) - \ln(8x+4)\right] =$$

$$= \ln \lim_{x\to\infty} \left(\frac{8x+2}{8x+4}\right)^{x-3} = \left| \begin{array}{l} a = 8 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{array} \right| = \ln e^{\frac{2-4}{8}} = \ln e^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}.$$

9.Класифікація точок розриву

Точку $x = x_0$, що належить області визначення функції f(x) або є граничною для цієї області, називають ***точкою розриву функції*** f(x), якщо в цій точці порушується хоча б одна з умов неперервності функції.

Якщо існують скінченні односторонні границі функції f(x) в точці $x = x_0$, але ці границі не рівні між собою $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$, то в точці $x = x_0$ функція f(x) має ***неусувний розрив першого роду (скінчений стрибок).***

Якщо хоча б одна з односторонніх границь функції f(x) в точці $x = x_0$ нескінченна або не існує, то в точці $x = x_0$ функція f(x) має ***розрив другого роду.***

Якщо для функції f(x) в точці $x = x_0$ існує скінчена границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, але вона не дорівнює значенню функції в цій точці

$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$, в точці $x=x_0$ функція f(x)має ***усувний розрив першого роду.***

Так у розглянутих вище прикладах маємо такі точки розриву.

У прикладах 24 та 25 функції мають розрив другого роду. У прикладі 26 у точці $x = 0$ функція має неусувний розрив першого роду. У прикладі 27 у точці $x = 0$ функція має усувний розрив першого роду.

Лекція 4а.

ПОХІДНА ФУНКЦІЇ. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ.

План лекції

1. *Поняття похідної.*
2. *Задачі, що приводять до поняття похідної. Геометричний та економічний зміст. Застосування похідної в економічних розрахунках.*
3. *Правила диференціювання.*
4. *Похідні вищих порядків.*
5. *Диференціал функції.*
6. *Наближені обчислення за допомогою диференціала.*

1. *Поняття похідної.*

Основною задачею економічного аналізу є вивчення економічних зв'язків, які записуються у вигляді функцій. Відповісти на запитання: зросте чи зменшиться прибуток фірми внаслідок збільшення ціни на її продукцію; як зміниться доход держави у разі введення імпортного мита та інші можна за допомогою методів диференціального числення.

Нехай $y=f(x)$ – деяка функція, задана на інтервалі (a,b). Візьмемо довільну точку x з цього інтервалу. Обчислимо значення функції в цій точці $y(x)$. Додамо аргументу приріст Δx такий, що точка $x+\Delta x\in(a,b)$, й обчислимо нове значення функції $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$.

Обчислимо приріст функції $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(\Delta x)}{\Delta x}.$$

називають ***диференціальним відношенням.***

Похідною функції $y = f(x)$ ***в точці*** x називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу при умові, що приріст аргументу прямує до нуля:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{або} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1}$$

Якщо похідна функції $y = f(x)$ існує в кожній точці деякого проміжку (a, b) і кожній точці $x \in (a, b)$ поставлено у відповідність похідну функції $y = f(x)$ в цій точці, то отриману таким чином функцію називають ***похідною функцією,*** або просто, похідною функції $y = f(x)$ і позначають одним із символів:

$$y', \quad f'(x), \quad y'_x, \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}.$$

Якщо границя диференціального відношення в точці x_0 не існує, то функція не має похідної в точці x_0.

Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x скінчену похідну, то кажуть, що ***функція диференційована в цій точці.***

Якщо функція диференційована в точці x, *то вона й неперервна в цій точці.* Обернене твердження невірне: функція $y = f(x)$, неперервна в точці, може не мати похідної в цій точці. Наприклад, $y = |\ x\ |$ неперервна в точці $x = 0$, але не має похідної в цій точці.

Таким чином, неперервність функції – необхідна, але не достатня умова диференційованості функції.

Функція ***диференційована на деякому проміжку***, якщо вона диференційована в кожній точці цього проміжку.

Похідна неперервної функції не обов'язково неперервна. Якщо функція має неперервну похідну на деякому проміжку, то функція називається ***гладкою*** на цьому проміжку.

Операція знаходження похідної деякої функції називається ***диференціюванням цієї функції***.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = x^3$, користуючись означенням похідної.

Розв'язання. Надамо аргументу приріст Δx: $x + \Delta x$. Тоді задана функція отримає приріст $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3$. Знайдемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\frac{x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=$$
$$=\frac{\Delta x\cdot\left(3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)}{\Delta x}=3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Знайдемо границю цього відношення за умови, що $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)=3x^2+3x\cdot 0+0^2=3x^2.$$

За означенням похідної матимемо:

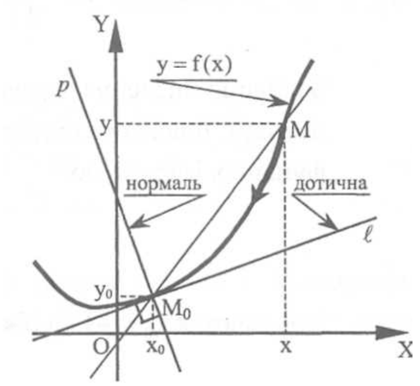
$$y'=\left(x^3\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2.$$

2. *Задачі, що приводять до поняття похідної. Геометричний та економічний зміст. Застосування похідної в економічних розрахунках.*

Задача про дотичну. Нехай пряма M_0M – січна, що перетинає графік функції $y=f(x)$ у двох точках $M_0(x_0,y_0)$ та $M(x,y)$. Нехай точка $M(x,y)$ прямує до точки $M_0(x_0,y_0)$ вздовж кривої $y=f(x)$.

Пряму l, яка займає граничне положення січної при $M\to M_0$, називають ***дотичною до кривої*** $y=f(x)$ в точці M_0. Точку M_0 називають ***точкою дотику.***

Пряму *p*, яка перпендикулярна дотичній до кривої $y=f(x)$ в точці M_0 і проходить через точку дотику, називають ***нормаллю до кривої*** $y=f(x)$ в точці M_0.



Геометричний зміст похідної. Похідна y' функції $y=f(x)$ в точці x_0 дорівнює ***кутовому коефіцієнту (тангенсу кута нахилу) дотичної*** до графіка цієї функції в точці з абсцисою x_0.

Рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці з абсцисою x_0 має вигляд:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0). \qquad (2)$$

Рівняння нормалі до графіка функції $y=f(x)$ в точці з абсцисою x_0 має вигляд:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0). \qquad \textbf{(3)}$$

Кутом між кривими $y = f_1(x)$ **та** $y = f_2(x)$, **що перетинаються в точці** M_0, **називають кут між дотичними до цих кривих, проведеними в точці** M_0 **і обчислюють за формулою**

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)\, f_2'(x_0)}.$$

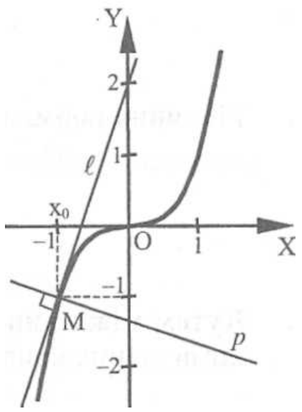
Приклад 2. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^3$ в точці з абсцисою x_0 = -1. Виконати малюнок.

Розв'язання. Похідну заданої функції було знайдено у прикладі 1 $y' = \left(x^3\right)' = 3x^2$. Знайдемо значення цієї похідної в точці з абсцисою x_0= -1, матимемо:

$$f'(x_0) = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3 \cdot 1 = 3.$$

Знайдемо значення функції в точці з абсцисою x_0 = - 1 (ординату точки дотику). Для цього підставимо x_0 = -1 у вираз, що задає функцію. Матимемо: $f(x_0) = f(-1) = (-1)^3 = -1$.В результаті отримаємо шукані рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої:

$3x - y + 2 = 0$ - рівняння дотичної l; $x + 3y + 4 = 0$ - рівняння нормалі p



Задача про миттєву швидкість. Розглянемо нерівномірний прямолінійний рух тіла. Функція $s = s(t)$ визначає залежність шляху s, пройденого матеріальною точкою, від часу t її руху. Тоді за інтервал часу $[t_0, t_0 + \Delta t]$ точка пройде шлях рівний $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ із середньою швидкістю

$$v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Але оскільки рух матеріальної точки нерівномірний, то середня швидкість дає лише наближене уявлення про рух в окремий момент часу. Тому вводять у розгляд миттєву швидкість руху $v(t_0)$ в момент часу t_0

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0)$$

Похідна функції $s = s(t)$ **в точці** t_0 **дорівнює** *миттєвій швидкості* **цієї матеріальної точки в момент часу** t_0**. Друга похідна функції** $s = s(t)$ **в точці** t_0 **дорівнює** *миттєвому прискоренню* **матеріальної точки в момент часу** t_0**.**

Задача про витрати виробництва. Розглянемо витрати виробництва $C = C(x)$ як функцію обсягу продукції x, що випускається. Позначимо Δx - приріст обсягу продукції, ΔC - приріст витрат виробництва, тоді ***середній приріст витрат виробництва на одиницю продукції*** становить

$$C_c = \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_0 + \Delta x) - s(x_0)}{\Delta x}.$$

Похідна

$$C'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x_0 + \Delta x) - s(x_0)}{\Delta x}$$

називається ***граничними витратами виробництва*** і характеризує додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

Економічний зміст похідної. Похідна характеризує швидкість зміни деякої економічної величини (чи процесу) відносно часу або іншої досліджуваної змінної.

Наприклад, якщо розглядати *функцію попиту* $q = q(p)$ - залежність попиту q на деякий товар від його ціни p, то похідна $q'(p)$ характеризує швидкість зміни попиту зі зміною ціни на одиницю продукції.

3. *Правила диференціювання.*

Як видно з розглянутого прикладу 1, диференціювання функцій за означенням похідної є дуже громіздким. Тому на практиці користуються правилами диференціювання і таблицею похідних основних елементарних функцій.

Диференціювання суми, добутку, частки функцій. Нехай функції $u = u(x),\ v = v(x)$ – диференційовані в точці x_0, тоді їх алгебраїчна сума, добуток та частка також диференційовані в цій точці, причому мають місце формули:

1) $(Cu)' = C \cdot u' \quad (C = \text{const})$; 2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3) $(uv)' = u'v + uv'$; 4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \ (v \neq 0)$;

Диференціювання складної функції. Нехай функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці x_0, а функція $y = f(u)$ - похідну у точці $u_0 = \varphi(x_0)$, тоді складна функція $y = f(\varphi(x))$ має похідну в точці x_0, яка обчислюється за формулою

$$y'_x(\varphi(x_0)) = f'_u(u_0) \cdot \varphi'_x(x_0)$$

Диференційованість елементарних функцій. Всі елементарні функції диференційовані в своїх областях визначення.

Таблиця похідних

Нехай $u = u(x)$ – диференційована функція, C, n та a – сталі (a>0, a≠1), тоді:

1) $C' = 0$; 2) $x' = 1$;

3) $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$; 3*) $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;

4) $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$; 4*) $\left(a^u\right)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$;

5) $\left(e^x\right)' = e^x$; 5*) $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$;

6) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$; 6*) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$;

7) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$; 7*) $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$;

8) $\left(\sin x\right)' = \cos x$; 8*) $\left(\sin u\right)' = u' \cdot \cos u$;

9) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$; 9*) $\left(\cos u\right)' = -u' \cdot \sin u$;

10) $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 10*) $\left(tgu\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

11) $\left(ctgx\right)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$; 11*) $\left(ctgu\right)' = \dfrac{-u'}{\sin^2 u}$;

12) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 12*) $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

13) $\left(\arccos x\right)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; 13*) $\left(\arccos u\right)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

14) $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; 14*) $\left(arctgu\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

15) $\left(arcctgx\right)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$; 15*) $\left(arcctgu\right)' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$.

Приклад 3. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y', заданих функцій:

а) $y = \left(\dfrac{4x \cdot \sqrt[4]{x}}{9} - \dfrac{6}{\sqrt[12]{x^5}} + 5\right)^6$; б) $y = \ln \sqrt[8]{\left(\dfrac{8x-1}{x^8+3}\right)^5}$;

Розв'язання. а) Перепишемо вираз, що задає функцію, ввівши від'ємні та дробові показники:

$$y = \left(\frac{4}{9} \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{4}} - 6 \cdot x^{-\frac{5}{12}} + 5\right)^6 = \left(\frac{4}{9} \cdot x^{\frac{5}{4}} - 6 \cdot x^{\frac{5}{12}} + 5\right)^6.$$

Для знаходження похідної цієї функції скористаємося формулою 3*), поклавши n=6 і $u = \dfrac{4}{9} \cdot x^{\frac{5}{4}} - 6 \cdot x^{-\frac{5}{12}} + 5$:

$$y' = \left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' =$$

$$= 6 \cdot \left(\frac{4}{9} \cdot x^{\frac{5}{4}} - 6 \cdot x^{-\frac{5}{12}} + 5 \right)^{6-1} \cdot \left(\frac{4}{9} \cdot x^{\frac{5}{4}} - 6 \cdot x^{-\frac{5}{12}} + 5 \right)' =$$

$$= 6 \cdot \left(\frac{4x \cdot \sqrt[4]{x}}{9} - \frac{6}{\sqrt[12]{x^5}} + 5 \right)^{5} \cdot \left(\frac{4}{9} \cdot x^{\frac{5}{4}} - 6 \cdot x^{-\frac{5}{12}} + 5 \right)'.$$

Далі, за формулою 2), матимемо:

$$\left(\frac{4}{9} \cdot x^{\frac{5}{4}} - 6 \cdot x^{-\frac{5}{12}} + 5 \right)' = \left(\frac{4}{9} \cdot x^{\frac{5}{4}} \right)' - \left(6 \cdot x^{-\frac{5}{12}} \right)' + 5'.$$

Оскільки коефіцієнти $C_1 = \frac{4}{9}$, $C_2 = 6$ та $C_3 = 5$ – сталі, то скориставшись формулою 1) маємо

$$\left(\frac{4}{9} \cdot x^{\frac{5}{4}} - 6 \cdot x^{-\frac{5}{12}} + 5 \right)' = \left(\frac{4}{9} \cdot x^{\frac{5}{4}} \right)' - \left(6 \cdot x^{-\frac{5}{12}} \right)' + 5' =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \left(x^{\frac{5}{4}} \right)' - 6 \cdot \left(x^{-\frac{5}{12}} \right)' + 0 = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{4} \cdot \sqrt[4]{x} - 6 \cdot \frac{-5}{12x \cdot \sqrt[12]{x^5}} = \frac{5 \cdot \sqrt[4]{x}}{9} + \frac{5}{2x \cdot \sqrt[12]{x^5}}.$$

В результаті отримаємо шукану похідну:

$$y' = 6 \cdot \left(\frac{4x \cdot \sqrt[4]{x}}{9} - \frac{6}{\sqrt[12]{x^5}} + 5 \right)^{5} \cdot \left(\frac{4}{9} \cdot x^{\frac{5}{4}} - 6 \cdot x^{-\frac{5}{12}} + 5 \right)' =$$

$$= 6 \cdot \left(\frac{4x \cdot \sqrt[4]{x}}{9} - \frac{6}{\sqrt[12]{x^5}} + 5 \right)^{5} \cdot \left(\frac{5 \cdot \sqrt[4]{x}}{9} + \frac{5}{2x \cdot \sqrt[12]{x^5}} \right) =$$

$$= \left(\frac{4x \cdot \sqrt[4]{x}}{9} - \frac{6}{\sqrt[12]{x^5}} + 5 \right)^{5} \cdot \left(\frac{10 \cdot \sqrt[4]{x}}{3} + \frac{15}{x \cdot \sqrt[12]{x^5}} \right).$$

б) Спростимо функцію. Прологарифмуємо вираз, що задає функцію, врахувавши, що: $\ln a^n = n \cdot \ln a$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

Матимемо:

$$y = \ln \sqrt[8]{\left(\frac{8x-1}{x^8+3} \right)^5} = \ln \left(\frac{8x-1}{x^8+3} \right)^{\frac{5}{8}} = \frac{5}{8} \cdot \ln \frac{8x-1}{x^8+3} = \frac{5}{8} \cdot \left(\ln(8x-1) - \ln\left(x^8+3\right) \right).$$

Оскільки $C = \frac{5}{8}$ - стала, то за формулами 1) і 2) отримаємо:

$$y' = \frac{5}{8} \cdot \left(\ln(8x-1) - \ln\left(x^8+3\right) \right)' = \frac{5}{8} \cdot \left(\left(\ln(8x-1) \right)' - \left(\ln\left(x^8+3\right) \right)' \right).$$

За формулою 7*), поклавши $u = 8x - 1$, матимемо:

$$(\ln(8x-1))' = (\ln u)' = \frac{u'}{u} = \frac{(8x-1)'}{8x-1}.$$

а, поклавши $u = x^8 + 3$, отримаємо:

$$\left(\ln\left(x^8+3\right)\right)' = (\ln u)' = \frac{u'}{u} = \frac{\left(x^8+3\right)'}{x^8+3}.$$

Врахувавши, що $(8x-1)' = (8x)' - 1' = 8 \cdot x' - 0 = 8 \cdot x' = 8 \cdot 1 = 8$,

$\left(x^8+3\right)' = \left(x^8\right)' + 3' = \left(x^8\right)' + 0 = \left(x^8\right)' = 8\mathrm{x}^7$.

отримаємо:

$$y' = \frac{5}{8} \cdot \left((\ln(8x-1))' - \left(\ln\left(x^8+3\right)\right)' \right) = \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{8}{8x-1} - \frac{8x^7}{x^8+3} \right) = \frac{5}{8x-1} - \frac{5x^7}{x^8+3}.$$

Логарифмічне диференціювання (похідна показникові - степеневої функції). Для знаходження похідної від показникові-степеневої функції $y = u^v$, де u, v функції диференційовані по x, необхідно спочатку функцію прологарифмувати, а потім продиференціювати, вважаючи y складною функцією. Отримане рівняння розв'язують відносно y'. Така операція називається ***логарифмічним диференціюванням***.

Приклад 4. Обчислити похідну y' функції $y = \left(x^2+1\right)^{\cos 2x}$.

Розв'язання. Розглядувану функцію задано у вигляді степеня. Ні основа, ні показник цього степеня не є сталими, тому не можна скористатися формулами 3*) або 4*).

Про логарифмуємо при натуральній основі обидві частини рівності, яка задає функцію, враховуючи формул $\ln a^b = b \cdot \ln a$. Матимемо:

$$\ln y = \ln\left(x^2+1\right)^{\cos 2x} = \cos 2x \cdot \ln\left(x^2+1\right)$$

Диференціюємо по x обидві частини рівності, пам'ятаючи, y – функція від x. Матимемо:

$$(\ln y)' = \left(\cos 2x \cdot \ln\left(x^2+1\right)\right)'.$$

За формулою 7*) отримаємо: $(\ln y)' = (\ln u)' = \dfrac{u'}{u} = \dfrac{y'}{y}$.

За формулою 3) $\left(\cos 2x \cdot \ln\left(x^2+1\right)\right)' = (\cos 2x)' \cdot \ln\left(x^2+1\right) + \cos 2x \cdot \left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'$.

Врахувавши, що

$$(\cos 2x)' = (\cos u)' = -u' \cdot \sin u = -(2x)' \cdot \sin 2x$$

$$\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)' = (\ln u)' = \frac{u'}{u} = \frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}$$

отримаємо

$$\frac{y'}{y}=\left(\cos 2x\cdot\ln\left(x^2+1\right)\right)'=-\left(2x\right)'\cdot\sin 2x\cdot\ln\left(x^2+1\right)+\frac{\cos 2x\cdot\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}=$$

$$=\frac{2x\cdot\cos 2x}{x^2+1}-2\sin 2x\cdot\ln\left(x^2+1\right).$$

Звідки

$$y'=\left(\frac{2x\cdot\cos 2x}{x^2+1}-2\sin 2x\cdot\ln\left(x^2+1\right)\right)\cdot y.$$

За умовою задачі $y=\left(x^2+1\right)^{\cos 2x}$, тому шукана похідна:

$$y'=\left(\frac{2x\cdot\cos 2x}{x^2+1}-2\sin 2x\cdot\ln\left(x^2+1\right)\right)\cdot\left(x^2+1\right)^{\cos 2x}.$$

Логарифмічне диференціювання доцільно застосовувати до функції, що містить операції, які логарифмуються: множення, ділення, піднесення до степеня.

Приклад 5. Знайти похідну функції $y=\dfrac{\sqrt[5]{x^2+1}(1-x)^2}{\sqrt[3]{(1+x)^2}\cdot\sqrt[7]{x^5}}$.

Розв'язання. Використання звичайних формул і правил диференціювання в даному випадку приведе до громіздких викладок. Тут доцільно застосувати логарифмічне диференціювання. Логарифмуємо ***обидві*** частини даної рівності:

$$\ln y=\frac{1}{5}\ln\left(x^2+1\right)+2\ln\left(1-x^2\right)-\frac{2}{3}\ln\left(x+1\right)-\frac{5}{7}\ln x$$

Диференціюємо обидві частини рівності, з огляду на те, що ln *y* є складною функцією від *x*, та *y* залежить від *x:*

$$\frac{y'}{y}=\frac{2x}{5\left(x^2+1\right)}-\frac{2x}{\left(1-x^2\right)}-\frac{2}{3\left(x+1\right)}-\frac{5}{7x}$$

Звідси знаходимо:

$$y'=\frac{\sqrt[5]{x^2+1}(1-x)^2}{\sqrt[3]{(1+x)^2}\cdot\sqrt[7]{x^5}}\cdot\left(\frac{2x}{5\left(x^2+1\right)}-\frac{2x}{\left(1-x^2\right)}-\frac{2}{3\left(x+1\right)}-\frac{5}{7x}\right)$$

Похідна неявної функції. Якщо функція $y=\mathrm{f(x)}$ і аргумент x зв'язані рівнянням $F(x,y)=F(x,f(x))=0$, нерозв'язаним відносно *y*, то таке рівняння визначає ***неявну функцію y(x).***

Похідну функції, заданої неявно, можна знайти з рівняння

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}F(x,y)=0,$$

де $F(x,y)$ розглядається як складна функція аргументу x.

Приклад 6. Знайти похідну функції $y^3+\sin xy=2x-5y$.

Розв′язання. Функція задана неявно. Диференціюємо по x обидві частини заданої рівності, пам′ятаючи, що y – функція від x. Матимемо:

$$\left(y^3+\sin xy\right)'=\left(2x-5y\right)'.$$

Так як

$$\left(y^3+\sin xy\right)'=3y^2\cdot y'+\left(xy\right)'\cdot\cos xy=3y^2\cdot y'+\left(x'y+xy'\right)\cdot\cos xy=$$
$$=3y^2\cdot y'+\left(y+xy'\right)\cdot\cos xy,$$
$$\left(2x-5y\right)'=\left(2x\right)'-\left(5y\right)'=2\cdot x'-5\cdot y'=2\cdot 1-5y'=2-5y',$$

то отримаємо:

$$3y^2\cdot y'+\left(y+xy'\right)\cdot\cos xy=2-5y'.$$

Розв′язавши рівняння відносно y', отримаємо шукану похідну:

$$y'=\frac{2-y\cdot\cos xy}{3y^2+x\cdot\cos xy+5}.$$

Приклад 7. Знайти $y'(x)$ функції заданої неявно $\sin y+x^3=e^y$.

Розв′язання. Диференціюємо по x обидві частини рівняння, пам′ятаючи, що y є функцією аргументу x:

$$\cos y\cdot y'+3x^2=e^y\cdot y'$$

Розв′язуємо рівняння відносно y';

$$\cos y\cdot y'-e^y\cdot y'=-3x^2;\quad \left(\cos y+e^y\right)\cdot y'=3x^2,\qquad y'=\frac{3x^2}{e^y-\cos y}.$$

Похідна функції, заданої параметрично. Нехай функцію $y=\mathrm{f}(\mathrm{x})$ задано параметрично $\mathrm{x}=\varphi(\mathrm{t}),\ \mathrm{y}=\psi(t),\ t\in T$. Якщо виконуються такі умови:

1) функції $\mathrm{x}=\varphi(\mathrm{t}),\ \mathrm{y}=\psi(\mathrm{t})$ визначені та неперервні на заданому проміжку Т і диференційовані в точці $t_0\in T$;

2) функція $\mathrm{x}=\varphi(\mathrm{t})$ строго монотонна на Т і $\varphi'(\mathrm{t})\neq 0$;

3) функція $\mathrm{t}=\alpha(\mathrm{x})$ обернена до функції $\mathrm{x}=\varphi(\mathrm{t})$,

то функція $\mathrm{y}=\psi(\alpha(\mathrm{x}))$ диференційована в точці $\mathrm{x}_0=\varphi(\mathrm{t}_0)$ і справедлива формула

$$y'(x_0)=\frac{\psi'(\alpha(x_0))}{\varphi'(\alpha(x_0))}=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}=\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Приклад 8. Знайти похідну функції, заданої параметрично $\mathrm{x}=\mathrm{a}\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t,\quad t\in[0,\pi]$.

Розв'язання. Обчислимо похідні $x'_t = -3a\cos^2 t\sin t,\quad y'_t = 3a\sin^2 t\cos t$.

В результаті маємо $$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -tg\ t.$$

4. Похідні вищих порядків

Нехай $y' = f'(x)$ - похідна функції $y = f(x)$. Якщо похідна $y' = f'(x)$ є диференційованою , то похідну цієї похідної називають ***похідною другого порядку*** або ***другою похідною функції*** і позначають одним із символів:

$$y'',\quad f''(x),\quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Похідну другої похідної $(y'')' = (f''(x))'$ називають ***третьою похідною функції*** $y = f(x)$ і позначають одним із символів:

$$y''',\quad f'''(x),\quad \frac{d^3y}{dx^3}.$$

В загальному випадку ***похідною*** n***- го порядку функції*** $y = f(x)$ називають похідну (n-1)-ї похідної цієї функції і позначають одним із символів:

$$y^{(n)},\quad f^{(n)}(x),\quad \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Приклад 9. Обчислити $y^{(4)}$, якщо $y = x^5 - 7x^2 - 6{,}5 + \sin x$.

Розв'язання. За правилами диференціювання і таблицею похідних основних елементарних функцій послідовно знаходимо:

$$y' = \left(x^5 - 7x^2 - 6{,}5 + \sin x\right)' = \left(x^5\right)' - 7\cdot\left(x^2\right)' - (6{,}5)' + (\sin x)' =$$
$$= 5\cdot x^{5-1} - 7\cdot 2\cdot x^{2-1} - 0 + \cos x = 5x^4 - 14x + \cos x;$$
$$y'' = (y')' = \left(5x^4 - 14x + \cos x\right)' = 5\cdot\left(x^4\right)' - 14\cdot x' + (\cos x)' =$$
$$= 5\cdot 4\cdot x^{4-1} - 14\cdot 1 - \sin x = 20x^3 - 14 - \sin x;$$
$$y''' = (y'')' = \left(20x^3 - 14 - \sin x\right)' = 20\cdot\left(x^3\right)' - (14)' - (\sin x)' =$$
$$= 20\cdot 3\cdot x^{3-1} - 0 - \cos x = 60x^2 - \cos x;$$
$$y^{(4)} = (y''')' = \left(60x^2 - \cos x\right)' = 60\cdot\left(x^2\right)' - (\cos x)' =$$
$$= 60\cdot 2\cdot x^{2-1} - (-\sin x) = 120x + \sin x.$$

5. *Диференціал функції*

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, то в цій точці має місце рівність $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, де α - нескінченно мала при $\Delta x \to 0$. Звідси випливає, що **приріст функції** $y = f(x)$, диференційованої в точці x_0, має вид:

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x .$$

Головну, лінійну відносно Δx, частину приросту Δy функції $y = f(x)$ в цій точці називають *диференціалом функції*

$$dy = y' \cdot \Delta x .$$

Диференціалом dx *незалежної змінної* називається приріст цієї змінної Δx

$$dx = \Delta x .$$

Тому

$$dy = y' \cdot dx .$$

Отже, щоб знайти диференціал функції $y = f(x)$, слід знайти похідну y' цієї функції і помножити цю похідну на диференціал аргументу dx.

Для складної функції $y = f(\varphi(x))$, де $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ диференційовані функції

$$dy = f'_x(\varphi(x))dx = f'_u(u)\varphi'_x(x)dx = f'_u(u)du$$

зовнішній вигляд диференціала функції $y = f(u)$ зберігається у випадку, коли u є функцією, а не незалежною змінною. Цю властивість диференціала називають *інваріантністю його форми*.

Геометричний зміст диференціалу. Диференціал функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює приросту ординати дотичної ℓ , проведеної до графіка цієї функції в точці $M(x_0; f(x_0))$.

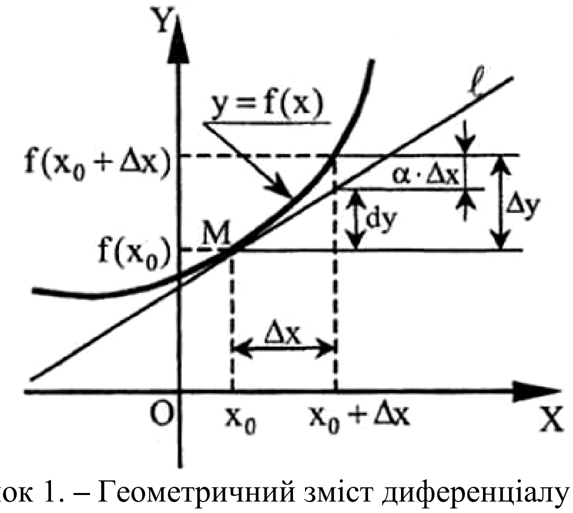


Рисунок 1. – Геометричний зміст диференціалу

Якщо приріст аргументу Δx малий за абсолютною величиною, то $dy \approx \Delta y$.

Приклад 10. Знайти диференціал функції: $y = (\ln(x + \operatorname{tg}\sin 2x))^2$.

Розв'язання. Знаходимо похідну функції $y = (\ln(x + \operatorname{tg}\sin 2x))^2$:

$$y' = \left(\left(\ln\left(x + \operatorname{tg}\sin 2x\right)\right)^2\right)' = 2\ln\left(x + \operatorname{tg}\sin 2x\right)\left(\ln\left(x + \operatorname{tg}\sin 2x\right)\right)' =$$

$$\frac{2\ln\left(x + \operatorname{tg}\sin 2x\right)}{x + \operatorname{tg}\sin 2x}\left(x + \operatorname{tg}\sin 2x\right)' = \frac{2\ln\left(x + \operatorname{tg}\sin 2x\right)}{x + \operatorname{tg}\sin 2x}\left(1 + \frac{2\cos 2x}{\cos^2 2x}\right).$$

Дістанемо

$$dy = y'dx = \frac{2\ln\left(x + \operatorname{tg}\sin 2x\right)}{x + \operatorname{tg}\sin 2x}\left(1 + \frac{2}{\cos 2x}\right)dx.$$

*6.**Наближені обчислення за допомогою диференціала**.*

Звідси випливає рівність:

$$f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right) \cdot \Delta x$$

яку часто використовують для ***наближених обчислень***.

Приклад 11. Обчислити наближене значення $\sqrt[3]{62}$ **.**

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Легко можна обчислити $\sqrt[3]{64} = 4$. Покладемо $x_0 = 64,$ а $x_0 + \Delta x = 62$, тоді матимемо:

$$\Delta x = 62 - x_0 = 62 - 64 = -2;$$

$$f\left(x_0 + \Delta x\right) = \sqrt[3]{62};\ f\left(x_0\right) = f(64) = \sqrt[3]{64} = 4;$$

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}};$$

$$f'\left(x_0\right) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{x_0^2}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{3 \cdot 4^2}\frac{1}{3 \cdot 16} = \frac{1}{48}.$$

Таким чином, шукане наближене значення:

$$\sqrt[3]{62} \approx 4 + \frac{1}{48} \cdot (-2) = 4 - \frac{1}{24} = \frac{96-1}{24} = \frac{95}{24} \approx 3{,}958.$$

Лекція 4б.

ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІСТЬ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

План лекції

1. *Основні поняття.*
2. *Границя і неперервність.*
3. *Частинні похідні.*
4. *Диференціал функції.*

5. *Похідна за напрямком. Градієнт.*
6. *Екстремум функції декількох змінних.*

1. *Основні поняття*

У попередніх розділах ми вивчали функції однієї змінної. Проте багатьом явищам, зокрема економічним, властива залежність багатофакторна. Дослідження таких залежностей зажадало вдосконалення математичного апарату, зокрема, введення поняття функції декількох змінних.

Означення 1. Нехай *кожній точці* M з множини $\{M\}$ по якому-небудь закону ставиться у відповідність деяке *число* u з деякої числової множини U. Тоді говоритимемо, що на множині $\{M\}$ *задана функція* $u = f(M)$. При цьому множини $\{M\}$ і U називаються відповідно *областю визначення* і *областю значень* функції $u = f(M)$. Як і у разі функції однієї змінної, область визначення функції декількох змінних або задається апріорі, або визначається з формули функціональної залежності $u = f(M)$ шляхом дотримання коректності виконання відповідних математичних операцій.

Як відомо, функція однієї змінної $y = f(x)$ зображується на площині у вигляді лінії. У разі двох змінних область визначення $\{M\}$ функції $z = f(x, y)$ є деякою множиною точок на координатній площині *Oxy.* Тоді сама функція зображується у вигляді деякої поверхні.

Розглянемо деякі приклади функцій декількох змінних.

1. Функція $z = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b$, де $a_1, a_2,..., a_n, b$ - постійні числа, називається *лінійною*. Її можна розглядати як суму n лінійних функцій від змінних $x_1, x_2,..., x_n$.

2. Функція $z = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j$ (b_{ij} - постійні числа) називається квадратичною. На відміну від попереднього прикладу квадратична функція не є сепарабельною, тобто не розкладається в суму функцій однієї змінної.

Приклад 1. Розглянемо функцію $z = x^2 + y^2$. *Областю визначення* цієї функції є вся координатна площина *Oxy*. Областю значень – проміжок $[0, \infty)$. Дана функція є *параболоїдом*. У вертикальних перетинах цієї поверхні площинами *Oxz* і *Oyz* виходять відповідно *параболи* $z = x^2$ і $z = y^2$.

Означення 2. *Лінією рівня* функції двох змінних $z = f(x, y)$ називається множина точок на площині, таких, що у всіх цих точках значення функції одне і те ж і дорівнює *C*.

2. *Границя і неперервність*

Велика частина понять аналізу, визначених раніше для функції однієї змінної, може бути перенесена на випадок двох змінних.

Означення 3. Число b називається *граничним значенням функції* $u = f(M)$ в точці *A* (або *границею функції* при *M*→*A*), якщо для будь-якої послідовності точок $\{M_n\}$ з множини $\{M\}$, що збігається до *A* ($M_n \neq A$), відповідна послідовність значень функції збігається до b.

Означення 4. Число b називається *границею функції* $u = f(M)$ в точці *A*, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $M \in \{M\}$ з δ-окіл точки *A*, задовольняючих нерівності $\rho(M, A) < \delta$, виконується нерівність $\left| f(M) - b \right| < \varepsilon$.

Для функцій декількох змінних, що мають границю в даній точці, справедлива наступна теорема про арифметичні операції над ними.

Теорема 1. Нехай функції $f(M)$ і, визначені *на одній і тій же множині*, мають відповідно границі *B* і *З* в точці *A*. *Тоді* функції, $f(M) \times g(M)$ і $f(M) / g(M)$ (при $C \neq 0$) *мають* в точці *A границі*, які дорівнюють відповідно, $B \times C$ і B / C

Дане вище означення границі функції декількох змінних легко поширюється на випадок, коли точка *M* прямує до нескінченності.

Задача про знаходження границі функції декількох змінних є дещо складніша, ніж для функції однієї змінної, особливо у разі невизначеності типу $0/0$. Розглянемо приклади.

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln\left(1 + x^2 + y^2\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Розв'язання. Покладемо $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, тоді $\rho \to 0$ при $x \to 0$ і $y \to 0$.

Підстановка в початкову границю дає

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\ln\left(1 + x^2 + y^2\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\ln\left(1 + \rho^2\right)}{\rho} \approx \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2}{\rho} = 0 .$$

Приклад 3. Довести, що границя $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ не існує.

Розв'язання. Дана функція визначена усюди на координатній площині *Oxy*, окрім точки (0,0). Наближатимемося до точки (0;0) по прямих $y = kx$. Якщо $y = kx$, то

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2x(kx)}{x^2 + (kx)^2} = \frac{2k}{1 + k^2} .$$

Виходить, що значення границі залежить від кутового коефіцієнта прямої. Але оскільки границя функції не повинна залежати від способу наближення точки (*x; y*) (наприклад, по прямій $y = 2x$ або $y = 5x$), то дана границя не існує.

Нехай функція $u = f(M)$ визначена на множині $\{M\}$. Візьмемо точку $A \in \{M\}$, будь-який ε-окіл якої містить точки множини $\{M\}$.

Означення 5. Функція $u = f(M)$ називається *неперервною* в точці *A*, якщо границя функції в цій точці існує і дорівнює значенню функції в цій точці: $\lim\limits_{M \to A} f(M) = f(A)$.

Дане означення можна сформулювати як на «мові послідовностей», так і на «мові ε–δ», відповідно до означень 1 і 2 границі функції декількох змінних. Слід лише замінити в згаданих формулюваннях число b на значення функції в точці *A*: $f(A)$.

Означення 6. Функція $u = f(M)$ називається *неперервною* на множині $\{M\}$, якщо вона неперервна в будь-якій точці цієї множини.

Точки, в яких функція не має властивості неперервності, називаються *точками розриву*.

3. Частинні похідні

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$. Дамо аргументу x приріст Δx, а аргументу y - приріст Δy, тоді функція z прийме значення $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Величина $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ називається повним приростом функції в точці $M(x, y)$.

Означення 6. *Частинній похідні* функції декількох змінних по одній з цих змінних називається *границя відношення* відповідного частинного приросту функції до приросту даної незалежної змінної при прямуванні останнього до нуля (якщо ця границя існує).

Позначається частинна похідна так: z'_x, z'_y, або $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$.

Отже, згідно означення,

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \qquad (1)$$

Таким чином, частинна похідна функції $z = f(x, y)$ по якій-небудь змінній є звичайна похідніа функції цієї однієї змінної при фіксованих значеннях інших змінних. Частинна похідна функції декількох змінних характеризує швидкість її зміни по даній координаті при фіксованому значенні інших координат.

Приклад 3. Знайти частинні похідні функції а) $z = x^2 - 2xy + y^3$, б) $z = x^y$.

Розв'язання.

а) $z'_x = 2x - 2y$, $z'_y = -2x - 3y^2$, б) $z'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = x^y \ln x$.

Приклад 4. Потік пасажирів z виражається функцією $z = \dfrac{x^2}{y}$, де x - число жителів, а y - відстань між містами. Знайти частинні похідні і пояснити їх значення.

Розв'язання. Похідна $z'_x = \dfrac{2x}{y}$ показує, що при одній і тій же відстані між містами збільшення потоку пасажирів пропорційно подвоєному числу жителів.

Похідна $z'_y = -\dfrac{x^2}{y^2}$ показує, що при одній і тій же чисельності жителів збільшення потоку пасажирів *обернено пропорційно до* квадрата відстані між містами.

Частинною похідною n-го порядку функції багатьох змінних по одній змінній називають першу похідну від $n-1$-ї похідної.

Приклад 5. Знайти частинні похідні другого порядку функції

$$z = x^5y^2 - 2xy^3 + 3x - 5y + 11.$$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого порядку по кожній змінній:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = 5x^4y^2 - 2y^3 + 3, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = 2x^5y - 6xy^2 - 5.$$

Від кожної частинної похідної першого порядку z'_x та z'_y знайдемо першу похідну по кожній змінній. Це будуть частинні похідні другого порядку і їх буде чотири:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{x^2} = 20x^3y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = 10x^4y - 6y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = 10x^4y - 6y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^5 - 12xy.$$

Мішані похідні, які відрізняються порядком диференціювання, $z''_{xy} = z''_{yx}$, рівні між собою. Ця умова виконується у випадку їх неперервності.

4. Диференціал функції

Означення 7. *Диференціалом* функції називається сума добутків частинних похідних цієї функції на прирости відповідних незалежних змінних, тобто

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y, \tag{2}$$

або, враховуючи, що $dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y$ (16.4.2) можна записати у вигляді

$$dz = z'_x dx + z'_y dy. \tag{3}$$

Означення 8. Функція $z = f(x, y)$ називається *диференційованою* в точці, якщо її повний приріст може бути представлений у вигляді

$$\Delta z = dz + \alpha \Delta x + \beta \Delta y \tag{4}$$

де dz - диференціал функції, $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y), \beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ - нескінченно малі при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Таким чином, *диференціал* функції декількох змінних, як і у разі однієї змінної, *представляє головну, лінійну частину* щодо приростів, частина повного приросту функції.

Слід відмітити, що для функції декількох змінних існування частинних похідних є необхідною, але недостатньою умовою диференційованості функції. Приведена нижче теорема виражає достатню умову диференційованості.

Теорема. Якщо частинні похідні функції z'_x, z'_y існують в околі точки (x, y) і неперервні в самій точці, то функція $z = f(x, y)$ диференційована в цій точці.

5. Похідна за напрямком. Градієнт

Нехай функція двох змінних $u = f(M)$ задана в деякій околі точки $M(x, y)$. Розглянемо деякий напрям, який визначається одиничним вектором $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$, де $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$. На прямій, що проходить по цьому напряму через точку M, візьмемо точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$, так що довжина відрізка MM_1 дорівнює $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Приріст функції $f(M)$ визначається формулою:

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

де Δx і Δy зв'язані співвідношеннями $\Delta x = \Delta l \cos\alpha$ і $\Delta y = \Delta l \cos\beta$.

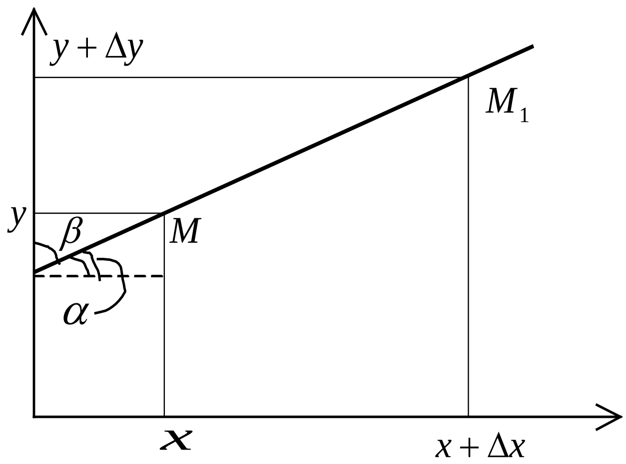


Рисунок 1

Означення 9. Границя відношення $\Delta u / \Delta l$ при $\Delta l \to 0$ називається *похідною функції за напрямком* $\vec{l}$ і позначається символом $\partial u/\partial l$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}.$$

Якщо функція $f(M)$ диференційована в точці, то її приріст в цій точці, з урахуванням співвідношень для Δx і, може бути записана у формі

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(\Delta l) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta l \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta l \cos\beta + o(\Delta l).$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на Δl Δl і переходячи до границі при, одержуємо формулу для похідної функції по напряму:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\,. \tag{5}$$

Розглянемо функцію трьох змінних, що диференціюється в точці $M(x, y, z)$.

Означення 10. *Градієнтом* функції $u = f(x, y, z)$ в точці М називається *вектор*, координати якого дорівнюють відповідно частинним похідним $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ в цій точці.

Для позначення градієнта функції використовується позначення gradu:

$$\text{grad u} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}. \tag{6}$$

Оскільки одиничний вектор $\vec{l}$ має координати $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, то похідна за напрямком для випадку функції трьох змінних запишеться у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \vec{l}\ \text{grad u}, \tag{7}$$

тобто має форму *скалярного добутку* векторів $\vec{l}$ і gradu.

Таким чином, *градієнт* функції характеризує *напрям* і *величину* максимальної швидкості зростання цієї функції в точці.

Приклад 6. Для функції $z(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$ знайти: а) похідну функції за напрямом вектора $\vec{l_0} = \{-3; 4\}$ в точці $M_0(2; -1)$, б) напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(2; -1)$, в) найбільше та найменше значення похідних за напрямом в точці $M_0(2; -1)$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні (при цьому, коли шукаємо, наприклад, похідну по x, усі інші змінні вважаються постійними): $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 36y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 36x$. Таким чином, 6згідно (6) градієнт $grad\, z = \left(6x^2 - 36y\right)\vec{i} + \left(6y^2 - 36x\right)\vec{j} = \left\{6x^2 - 36y; 6y^2 - 36x\right\}$.

а) Знаходимо значення градієнта в точці $M_0(2; -1)$:

$$grad\, z\left(M_0\right) = \left\{6\cdot 2^2 - 36\cdot(-1); 6\cdot(-1)^2 - 36\cdot 2\right\} = \left\{24 + 36; 6 - 72\right\} = \left\{60; -66\right\}.$$

Довжина вектора напряму $\vec{l_0} = \{-3; 4\}$ дорівнює $\left|\vec{l_0}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, одиничний вектор напряму : $\frac{\vec{l_0}}{|\vec{l_0}|} = \left\{-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right\}$.

Похідна функції за напрямом згідно формули (7):

$$\frac{\partial Z}{\partial l_0}\left(M_0\right) = 60\cdot\frac{-3}{5} + (-66)\cdot\frac{4}{5} = \frac{-180}{5} + \frac{-264}{5} = -\frac{444}{5} = -88{,}8\,.$$

б) напрям найшвидшого зростання функції в точці M_0 співпадає з напрямом градієнта в цій точці $\vec{l_1} = grad\, z(M_0) = \{60; -66\}$.

Довжина градієнта та одиничний вектор напряму найшвидшого зростання функції в точці M_0: $\left|\vec{l_1}\right| = \left|grad\, z(M_0)\right| = \sqrt{60^2 + (-66)^2} =$
$= \sqrt{6^2 \cdot \left(10^2 + (-11)^2\right)} = 6\sqrt{221}$, $\quad \dfrac{\vec{l_1}}{|\vec{l_1}|} = \left\{\dfrac{60}{6\sqrt{221}}; -\dfrac{66}{6\sqrt{221}}\right\} = \left\{\dfrac{10}{\sqrt{221}}; -\dfrac{11}{\sqrt{221}}\right\}$.

Відповідно у напрямі $\dfrac{-\vec{l_1}}{|\vec{l_1}|} = \left\{-\dfrac{10}{\sqrt{221}}; \dfrac{11}{\sqrt{221}}\right\}$ (протилежному до напряму градієнта) функція найшвидше спадає.

в) Згідно (2.5.5) серед усіх похідних за напрямом найбільшою є похідна за напрямом градієнта:

$$\max\left(\frac{\partial z}{\partial l}(M_0)\right) = \frac{\partial z}{\partial l_1}(M_0) = \left|grad\, z(M_0)\right| = 6\sqrt{221} \approx 89,2.$$

Найменшою - похідна за напрямом, протилежним до напряму градієнта:

$$\min\left(\frac{\partial z}{\partial l}(M_0)\right) = -\frac{\partial z}{\partial l_1}(M_0) = -\left|grad\, z(M_0)\right| = -6\sqrt{221} \approx -89,2.$$

6. Екстремум функції декількох змінних

Як і у разі однієї змінної, функція $z = f(x, y)$ має вузлові, що визначають структуру графіка точки. В першу чергу це точки екстремуму.

Означення 11. Точка $M(x_0, y_0)$ називається точкою *локального максимуму* (*мінімуму*) функції, якщо існує окіл точки, така, що для всіх точок (x, y) з цієї околу виконується нерівність

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$
$$(f(x_0, y_0) \leq f(x, y).$$

Необхідно звернути увагу на локальний характер екстремуму функції, оскільки йдеться про максимальне і мінімальне значення лише в достатньо малому околі точки (x_0, y_0).

Сформулюємо необхідну умову екстремуму – багатовимірний аналог теореми Ферма.

Теорема 2. **(Необхідна умова екстремуму.)** Нехай точка (x_0, y_0) - є точка екстремуму функції, що диференціюється $z = f(x, y)$. Тоді *частинні похідні* $f'_x(x_0, y_0)$ і $f'_y(x_0, y_0)$ в цій точці дорівнюють *нулю*.

Рівність нулю частинних похідних в точці екстремуму є необхідною, але не достатньою умовою. Це видно на прикладі функції $z = x^2 - y^2$ і точки $O(0,0)$ (Рис. 2).

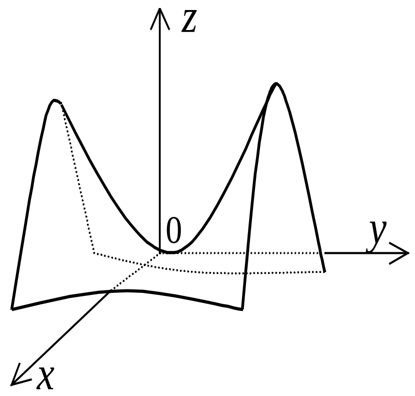


Рисунок 2

Частинні похідні функції в цій точці дорівнюють нулю, проте функція, яка є гіперболічним параболоїдом, в нулі не має екстремуму: $f(0,0)=0$. У будь-якому околі точки O є як додатні значення функції, так і від'ємні. Такі точки називаються *сідловими* і є двовимірним аналогом точок *перегину* функцій однієї змінної.

Точки, в яких виконані необхідні умови екстремуму називають *критичними* або *стаціонарними*.

Якщо частинні похідні $z'_x = f'_x(x,y)$ і $z'_y = f'_y(x,y)$ самі є функціями, що диференціюються, то можна знайти також і їх частинні похідні, які називають частинними похідними другого порядку: $z''_{xx} = f''_{xx}(x,y)$, $z''_{yx} = f''_{yx}(x,y)$, $z''_{xy} = f''_{xy}(x,y)$, $z''_{yy} = f''_{yy}(x,y)$. Можна довести, що якщо частинні похідні функції $z = f(x,y)$ неперервні в точці (x_0, y_0), то в цій точці $f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$.

Теорема 3. **(Достатня умова екстремуму функції двох змінних.)**
Нехай функція $z = f(x,y)$:

а) визначена в деякому околі точки (x_0, y_0), в якій $f'_x(x_0, y_0) = 0$ і $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

б) має в цій точці неперервні частинні похідні другого порядку $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$; $f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$.

Тоді якщо $\Delta = AC - B^2 > 0$, то в точці (x_0, y_0) функція $z = f(x,y)$ має *екстремум*, причому якщо $A < 0$ - *мінімум*, якщо $A > 0$ - *максимум*. У випадку $\Delta = AC - B^2 < 0$, функція $z = f(x,y)$ екстремуму не має. Якщо $\Delta = AC - B^2 = 0$, то питання про наявність екстремуму залишається відкритим.

Дослідження функції двох змінних на екстремум

1. Знайти частинні похідні функції z'_x і z'_y.
2. Вирішити систему рівнянь і знайти критичні точки функції.

3. Знайти частинні похідні другого порядку, обчислити їх значення в кожній критичній точці і за допомогою достатньої умови зробити висновок про наявність екстремумів.
4. Знайти екстремуми (екстремальні значення) функції.

Приклад 7. Знайти екстремуми функції $z = \dfrac{2(x+y)(1+xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

Розв'язання.

1. Знайдемо частинні похідні $z'_x = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $z'_y = \dfrac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2}$.

2. Знайдемо критичні точки функції з системи рівнянь $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$. Система має розв'язки: (1; 1), (1; -1), (-1; 1) і (-1; -1).

3. Знайдемо частинні похідні другого порядку: $z'_{xx} = -\dfrac{8x}{(1+x^2)^2}$, $z'_{yy} = -\dfrac{8y}{(1+y^2)^2}$, $z'_{xy} = z'_{yx} = 0$.

4. Обчислимо їх значення в кожній критичній точці і перевіряємо в ній виконання достатньої умови *екстремуму*. Наприклад, в точці (1; 1): A=C=-2, B=0. Оскільки $\Delta = A^2 - BC = (-2)^2 - 0 = 4 > 0$ і $A = -2 < 0$, то точка (1; 1) є точкою *максимуму*. Аналогічно встановлюємо, що точка (-1; -1) – точка *мінімуму*, а точки (1; -1) і (-1; 1), в яких $\Delta = A^2 - BC < 0$. – *екстремуму немає*. Ці точки є *сідловими*.

Лекція 4в.

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

План лекції

1. *Основні теореми диференціального числення.*
2. *Умови монотонності функції.*
3. *Асимптоти графіка функції.*
4. *Екстремуми функції.*
5. *Умови опуклості і точки перегину графіка функції.*
6. *Загальна схема дослідження функції.*
7. *Застосування методів дослідження функції в економіці*
8. *Правило Лопіталя. Розкриття невизначеностей.*
9. *Найбільше та найменше значення функції на відрізку.*

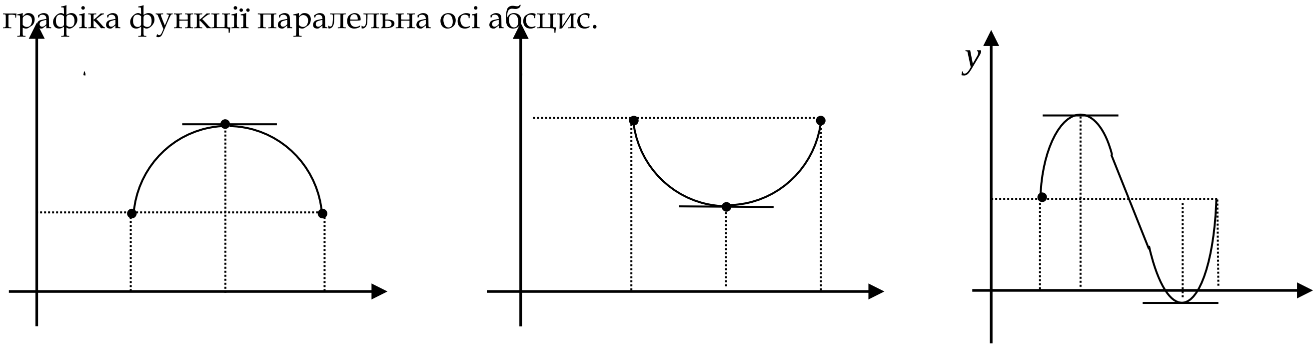
1.Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. Якщо диференційована на проміжку (a,b) функція $f(x)$ досягає свого найменшого або найбільшого значення у внутрішній точці $c \in (a,b)$ цього проміжку, то похідна в цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(c)=0$.

Геометричний зміст теореми Ферма. В точці, в якій функція набуває свого найбільшого або найменшого значення, що досягається всередині проміжку (a,b), дотична до графіка функції паралельна осі абсцис.

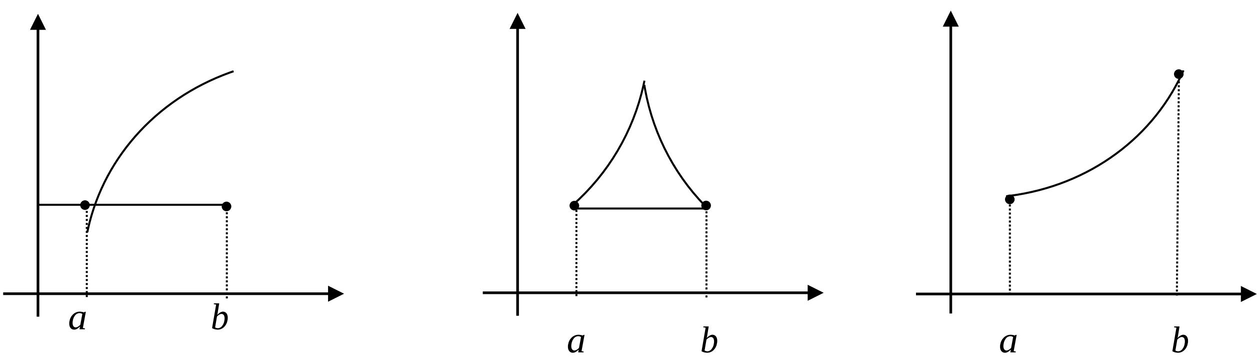
Теорема Ролля. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, диференційовна на проміжку (a,b) та приймає на кінцях відрізку рівні значення $f(a)=f(b)$, то існує принаймні одна точка c на інтервалі (a,b), для якої $f'(c)=0$

Геометричний зміст теореми Ролля. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, диференційована в кожній точці (a,b) і на кінцях відрізку набуває однакових значень $f(a)=f(b)$, то хоча б в одній внутрішній точці c відрізка дотична до графіка функції паралельна осі абсцис.



Геометрична інтерпретація теореми Ролля

Зауважимо, що всі умови теореми Роля суттєві: якщо хоча б одна з умов порушується, то висновки теореми можуть стати несправедливими. Наприклад, для функцій, наведених на рисунках порушується тільки одна умова – на першому – неперервність на відрізку $[a,b]$; а другому – диференційовність на інтервалі (a,b); на третьому – рівність значень $f(a)=f(b)$. В результаті немає такої точки $c \in (a,b)$, в якій $f'(c)=0$.



а) б) в)

Рис.1 Графіки функцій, які не задовольняють умовам теореми Роля

Теорема Лагранжа. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, диференційовна на проміжку (a,b), тоді існує принаймні одна точка c на інтервалі (a,b) така, що

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Ця формула називається ***формулою скінчених приростів***.

Геометричний зміст теореми Лагранжа. Серед усіх дотичних до графіка функції $f(x)$ найдеться принаймні одна паралельна січній AB, що сполучає кінці відрізку. Дійсно, $f'(c)$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної в точці c, з іншого боку відношення $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$ дорівнює тангенсу кута нахилу січної AB.

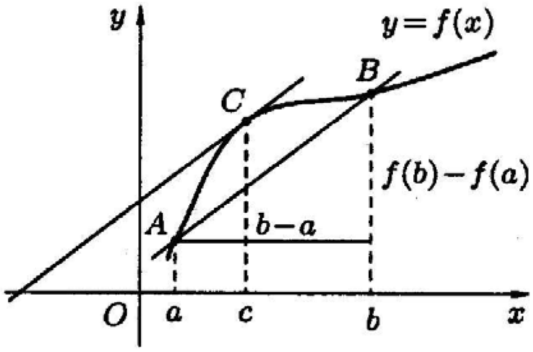


Рис.2 Геометрична інтерпретація теореми Лагранжа

Теорема Коші. Нехай функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$, диференційовані на інтервалі (a,b), причому $\varphi'(x)\neq 0$ в усіх точках $x\in(a,b)$, тоді існує принаймні одна точка $c\in(a,b)$ така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

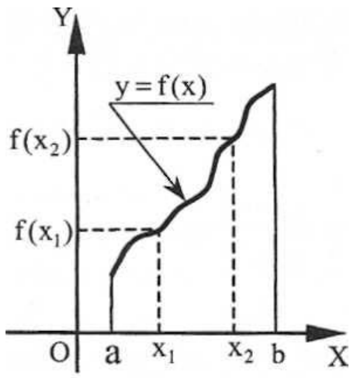
Ця формула називається ***узагальненою формулою скінчених приростів***.

2. *Умови монотонності функції*

Функцію $y=f(x)$ називають ***зростаючою*** на деякому проміжку $(a;b)$, якщо для будь-яких x_1 та x_2, що належать цьому проміжку, з нерівності $x_1< x_2$ випливає $f(x_1)< f(x_2)$.

Функцію $y=f(x)$ називають ***спадною*** на деякому проміжку $(a;b)$, якщо для будь-яких x_1 та x_2, що належать цьому проміжку, з нерівності $x_1 < x_2$ випливає $f(x_1)> f(x_2)$ *(Рис. 28)*.

Проміжки, на яких задана функція зростає або спадає називають *проміжками монотонності* **цієї функції.**



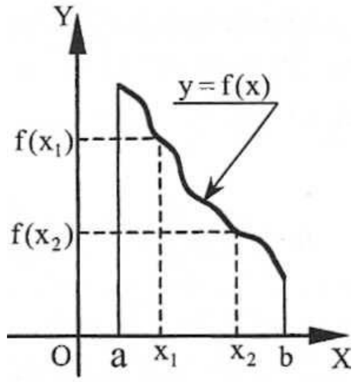


Рис. 3 Монотонні функції

Диференційована функція $y = f(x)$ *зростає на проміжку* $(a;b)$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $x \in (a,b)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$.

Диференційована функція $y = f(x)$ *спадає на проміжку* $(a;b)$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $x \in (a,b)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$.

Приклад 1. Знайти інтервали монотонності функції

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$$

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій прямій, $D(x) = (-\infty;+\infty)$. Знайдемо похідну заданої функції:

$$y' = \left(x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right)' = \left(x^3\right)' - 6\cdot\left(x^2\right)' + 9\cdot x' + 1' =$$
$$= 3x^2 - 6\cdot 2x + 9\cdot 1 - 0 = 3x^2 - 12x + 9.$$

Знайдена похідна існує на всій числовій прямій. Прирівняємо її до нуля і розв'яжемо отримане рівняння за теоремою Вієтта:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 1,\quad x_2 = 3.$$

Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів, на які розбивають область визначення функції точки $x_1 = 1$ та $x_2 = 3$.

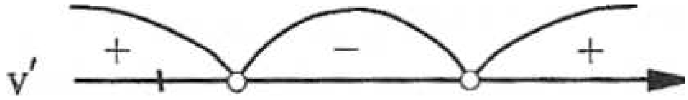


Рис.4 До прикладу 1

Звідси випливає :

а) якщо $x \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$, то $y' > 0$і функція зростає ;

б) якщо $x \in (1;3)$, то $y' < 0$ і функція спадає .

3. Асимптоти графіка функції

Якщо точка, рухаючись у нескінченність вдовж деякої кривої, необмежено наближається до певної прямої, то кажуть, що ця пряма є ***асимптотою цієї кривої*** .

Необмеженість наближення графіка функції до асимптоти означає, що відстань від графіка до цієї прямої (довжина перпендикуляра, опущеного з довільної точки графіка на пряму) прямує до нуля.

Асимптоти бувають ***горизонтальні, вертикальні та похилі.***

Якщо $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ або $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$,то

пряма $y=A$ називається *горизонтальною асимптотою* графіка функції $y=f(x)$.

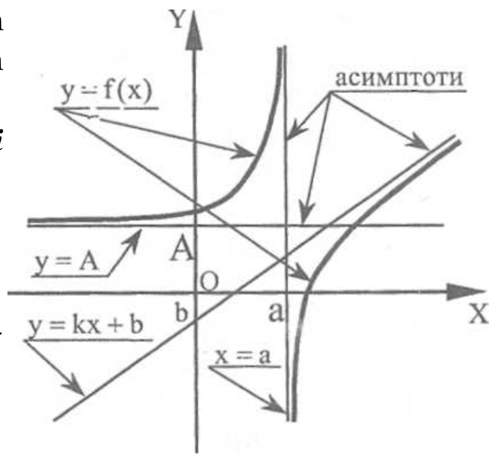


Рис.5 - Асимптоти

Якщо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$, то пряма $x=a$ називається ***вертикальною асимптотою*** графіка функції $y=f(x)$.

Якщо існують скінченні границі $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ та $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$, то пряма $y=kx+b$ називається ***похилою асимптотою*** графіка функції $y=f(x)$.

Границі треба обчислювати окремо для випадків $x\to+\infty$, та $x\to-\infty$, але часто ці границі збігаються.

Зауваження. Якщо хоча б одна з цих границь $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}$ не існує, похилих асимптот не існує.

Зауважимо, що горизонтальні асимптоти є окремим випадком похилих асимптот при $k=0$.

Приклад 2. Знайти асимптоти до графіка функції $y=\dfrac{5x}{1-x}$.

Розв'язання. При $x\to1$ функція y не існує і має розрив в точці x=1. Визначимо вид розриву, для чого знаходимо лівобічну та правобічну границі:

$$\lim\limits_{\substack{x\to1-\Delta\\ \Delta\to0}}\frac{5x}{1-x}=\lim\limits_{\Delta\to0}\frac{5(1-\Delta)}{1-(1-\Delta)}=\lim\limits_{\Delta\to0}\frac{5}{\Delta}=+\infty .$$

$$\lim\limits_{\substack{x\to1+\Delta\\ \Delta\to0}}\frac{5x}{1-x}=\lim\limits_{\Delta\to0}\frac{5(1+\Delta)}{1-(1+\Delta)}=\lim\limits_{\Delta\to0}\frac{5}{-\Delta}=-\infty .$$

В точці $x=1$ функція має розрив другого роду, тому пряма $x=1$ є вертикальна асимптота.

Похилі асимптоти шукаємо у виді $y=kx+b$. Визначаємо спочатку k

$$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{x(1-x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{1-x}=0$$

Похила асимптота відсутня.

Знаходимо горизонтальні асимптоти:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\frac{5x}{1-x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \frac{5}{-1} = -5.\quad \lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{1-x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \frac{5}{-1} = -5.$$

Рівняння горизонтальної асимптоти $y = -5$.

Приклад 3. Знайти асимптоти графіка функції $y = \frac{x^2-2}{x-1}$. Виконати малюнок.

Розв’язання. З’ясуємо питання про існування горизонтальних асимптот графіка заданої функції. Матимемо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{1-0}{0-0} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Так як знайдена границя нескінченна, то горизонтальних асимптот графік заданої функції не має. З'ясуємо питання про існування вертикальних асимптот графіка заданої функції . Очевидно, що задана функція має розрив у точці x = 1. Знайдемо односторонні границі функції в цій точці . Матимемо:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-2}{x-1} = \lim_{x\to 1-0}\frac{-1}{x-1} = +\infty;\qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-2}{x-1} = \lim_{x\to 1+0}\frac{-1}{x-1} = -\infty.$$

Оскільки обидві односторонні границі нескінченні, то пряма x = 1 буде вертикальною асимптотою графіка заданої функції, причому вказаний графік наближається до цієї асимптоти з обох боків .

З'ясуємо питання про існування похилих асимптот графіка заданої функції. Будемо шукати ці асимптоти у вигляді $y = kx + b$. Знайдемо коефіцієнти k та b:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{(x-1)\cdot x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x^2-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1-0}{1-0} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{x-1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2-x\cdot(x-1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1-0}{1-0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Шукані коефіцієнти існують і скінченні: $k=1$, $b=1$. Тому пряма $y=kx+b$, тобто $y=x+1$ буде похилою асимптотою графіка заданої функції .

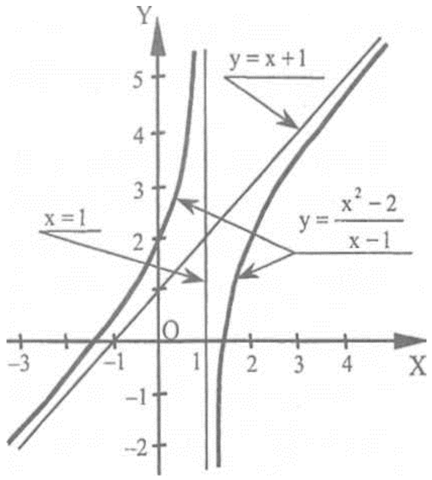


Рис.6 – До прикладу 3

4. Екстремуми функції

Якщо існує такий достатньо малий ε - окіл точки x_0, що для будь-якого x з цього околу виконується нерівність $f(x)< f(x_0)$, то точка x_0 називається *точкою максимуму функції* $y=f(x)$. **Значення** $f(x_0)$ **називають** *локальним максимумом функції* $y=f(x)$.

Якщо існує такий достатньо малий ε - окіл точки x_0, що для будь-якого x з цього околу виконується нерівність $f(x)> f(x_0)$, то точка x_0 називається *точкою мінімуму функції* $y=f(x)$. Значення $f(x_0)$ називають *локальним мінімумом* $y=f(x)$.

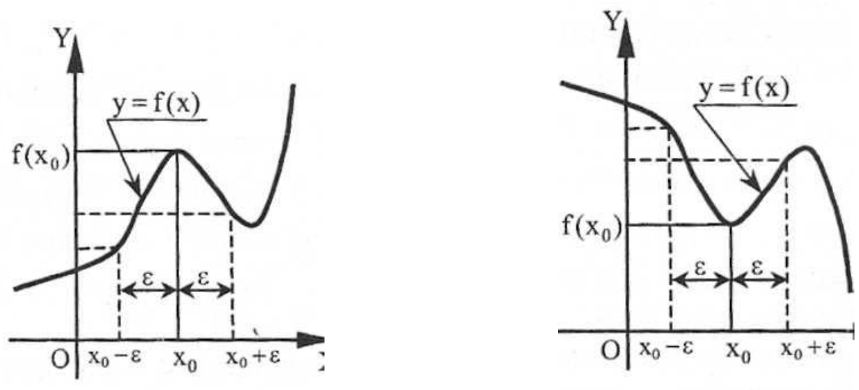


Рис. 7 – Екстремуми функції

Локальні максимуми і мінімуми функції називають *екстремумами функції*. Точки максимуму або мінімуму функції називають *точками її екстремуму*.

Точки, в яких функція $y = f(x)$ визначена, а похідна дорівнює нулю $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує, називають *критичними точками першого роду.*

Необхідна умова екстремуму. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0 і має в цій точці локальний екстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Геометричний зміст: У точках локального екстремуму дотичні до графіка $y = f(x)$ паралельні осі абсцис.

Не кожна критична точка функції є точкою її екстремуму. Наприклад, для функції $y = x^3$ маємо $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, але $x_0 = 0$ не є точкою локального екстремуму.

Достатні умови екстремуму першого типу. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0, диференційована в цьому околі, за винятком, можливо, самої точки x_0. Тоді:

1) Якщо в точці x_0 похідна $f'(x)$ змінює свій знак з «+» на «-», то x_0 є точкою локального максимуму функції $y = f(x)$;

2) Якщо в точці x_0 похідна $f'(x)$ змінює свій знак з «-» на «+», то x_0 є точкою локального мінімуму функції $y = f(x)$;

3) Якщо похідна $f'(x)$ не змінює свій знак в околі точки x_0, то функція $y = f(x)$ в точці x_0 не має локального екстремуму.

Достатні умови екстремуму другого типу.

Якщо x_0 - критична точка функції $y = f(x)$, а $f''(x_0) \neq 0$, то в точці x_0 буде локальний мінімум при $f''(x_0) > 0$ і локальний максимум при $f''(x_0) < 0$. У разі $f''(x_0) = 0$ необхідне додаткове дослідження.

Приклад 4 . Знайти екстремуми функції $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Розв'язання. У прикладі 1 було знайдено похідну заданої функції $y' = 3x^2 - 12x + 9$ і її критичні точки $x_1 = 1$ та $x_2 = 3$. Там же було встановлено знак похідної на кожному з інтервалів, на які розбивають область визначення функції її критичні точки.

I спосіб. Із знайденого вище випливає:

а) при переході через критичну точку $x_1 = 1$ похідна y' змінює свій знак з «+» на «-», тому точка $x_1 = 1$ є точкою максимуму заданої функції;

б) при переході через критичну точку $x_2 = 3$ похідна y' змінює свій знак з «-» на «+», тому $x_2 = 3$ є точкою мінімуму заданої функції ;

в) задана функція не має інших критичних точок, тому вона не має й інших точок екстремуму .

II спосіб. Обчислимо другу похідну заданої функції:

$$y'' = (y')' = (3x^2 - 12x + 9)' = 3 \cdot (x^2)' - 12 \cdot x' + 9' =$$
$$= 3 \cdot 2x - 12 \cdot 1 + 0 = 6x - 12.$$

Із знайденого вище випливає:

а) в критичній точці $x_1 = 1$ друга похідна від'ємна

$$y'' = (x_1)' = y''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = 6 - 12 = -6 \prec 0,$$

тому $x_1 = 1$ є точкою максимуму заданої функції;

б) в критичній точці $x_2 = 3$ друга похідна додатна

$$y'' = (x_2)' = y''(3) = 6 \cdot 1 - 12 = 18 - 12 = 6 \succ 0,$$

тому $x_2 = 3$ є точкою максимуму заданої функції;

в) задана функція не має інших критичних точок, тому вона не має й інших точок екстремуму.

Таким чином ми встановили всі точки екстремумів заданої функції. Знайдемо екстремуми цієї функції:

а) $y(x_1) = y(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$ - локальний максимум, якого функція досягає в точці $A(1;5)$;

б) $y(x_2) = y(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$ - локальний мінімум, якого задана функція досягає в точці $B(3;1)$.

5. Умови опуклості і точки перегину графіка функції.

Графік функції $y = f(x)$ називають ***опуклим*** (***опуклим угору)*** в точці x_0, якщо існує такий ε - окіл цієї точки, в якому графік функції $y = f(x)$ лежить нижче, ніж дотична до нього, проведена в точці x_0. При цьому функція $y = f(x)$ може бути як зростаючою (рис. 32) у вказаному околі, так і спадною (*рис. 33*).

Достатня умова опуклості графіка функції. **Якщо $f'' \le 0$, то графік функції $y = f(x)$ опуклий в точці x_0 .**

Графік функції $y = f(x)$ називають ***вгнутим (опуклим униз)*** в точці x_0, якщо існує такий ε - окіл цієї точки, в якому графік функції $y = f(x)$ лежить вище, ніж дотична до нього, проведена в точці x_0 . При цьому функція $y = f(x)$ може бути як зростаючою (рис. 34) у вказаному околі точки x_0, так і спадною (*рис. 35*).

Достатня умова вгнутості графіка функції. Якщо $f'' \ge 0$, то графік функції $y = f(x)$ вгнутий в точці x_0.

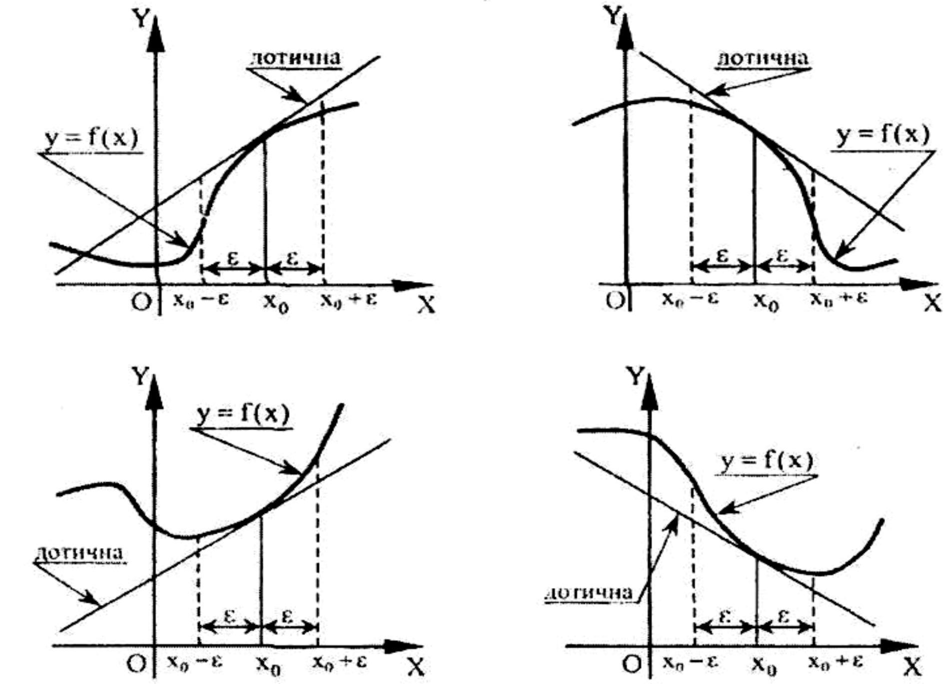


Рис.8 – Опуклість функції

Графік функції *опуклий (вгнутий) на інтервалі* (a,b), якщо він опуклий (вгнутий) в кожній точці цього інтервалу.

Точки, в яких $f''(x_0)=0$ або $f''(x_0)$ не існує, називаються *критичними точками другого порядку.*

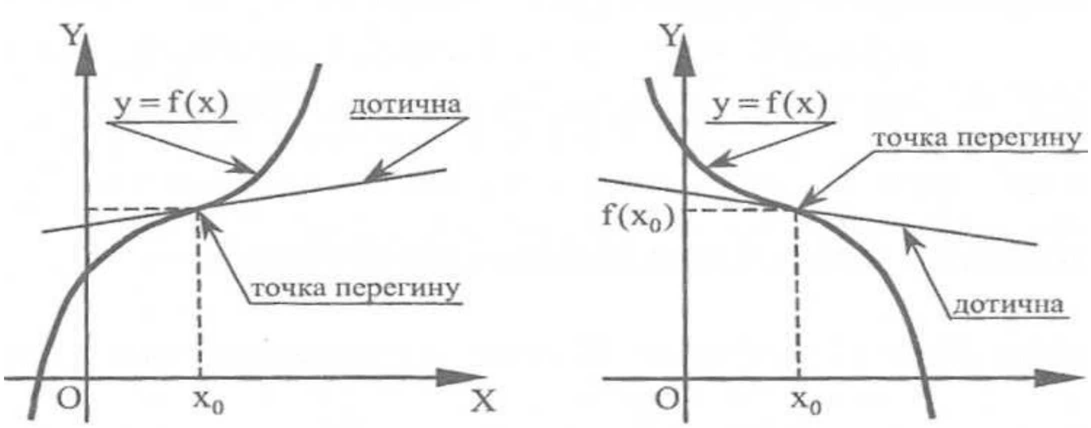


Рис.9 Точки перегину функції

Не кожна критична точка другого порядку є точкою перегину.

Точка $M_0(x_0,\ f(x_0))$ називається точкою *перегину графіка функції* $y=f(x)$, якщо в цій точці функція неперервна і при переході через точку x_0 напрям опуклості графіка функції змінюється.

У точці перегину дотична перетинає графік функції, оскільки він переходить з

одного боку дотичної на інший.

Необхідна умова точки перегину графіка функції. Якщо точка $M_0(x_0,\ f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$, яка має в точці x_0 неперервну другу похідну, то $f''(x_0) = 0$.

Достатня умова точки перегину графіка функції. Якщо x_0 - критична точка другого роду функції $y = f(x)$ і при переході через цю точку друга похідна змінює свій знак, то $M_0(x_0,\ f(x_0))$ є точкою перегину графіка цієї функції. Якщо ж $f''(x)$ не змінює свого знаку, то $M_0(x_0,\ f(x_0))$ не є очкою перегину.

Приклад 5. Знайти інтервали опуклості та точки перегину функції $y = x(x-1)^3$

Розв 'язання. Знайдемо другу похідну $y''(x)$:

$$y'(x) = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (4x-1)(x-1)^2,$$

$$y''(x) = 2(x-1)(4x-1) + 4(x-1)^2 = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1).$$

Ця похідна існує на всій числовій прямій. Прирівняємо її до нуля $y''(x) = 0$ і, розв'язавши отримане рівняння, знайдемо критичні точки другого порядку

$$x_1 = \frac{1}{2},\quad x_2 = 1.$$

Визначимо знак другої похідної на кожному з інтервалів, на які розбивають область визначення функції критичні точки.

x	$\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$	1	$(1;\ \infty)$
$y''(x)$	+		–		+
Графік $y(x)$	вгнутий	Точка перегину	Опуклий	Точка перегину	вгнутий

Таким чином, $y''(x) > 0$ при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ та $x \in (1;\infty)$; $y''(x) < 0$ при $x \in \left(\frac{1}{2};1\right)$, тобто функція $y(x)$ опукла униз на інтервалах $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ та $(1;\infty)$, і опукла угору на інтервалі $\left(\frac{1}{2};1\right)$. Графік $y(x)$ має перегини при $x = \frac{1}{2}$ і $x = 1$. Точки перегину мають координати $\left(\frac{1}{2}; y\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{16}\right)$, $\quad (1; y(1)) = (1;0)$.

Зауваження. Якщо функція $y(x)$ має розриви, то необхідно також аналізувати знаки другої похідної $y''(x)$ зліва і справа їх абсцисс.

6. Загальна схема дослідження функції

Дослідження функції і побудову її графіка рекомендується проводити за такою схемою:

1) знайти область визначення функції;
2) з'ясувати питання про періодичність, парність, неперервність функції;
3) знайти границі функції на кінцях області визначення і односторонні границі в точках розриву, якщо вони є;
4) знайти асимптоти графіка функції або довести їх відсутність;
5) знайти похідну функції і за її допомогою визначити інтервали монотонності та знайти екстремуми функції;
6) знайти другу похідну функції і за її допомогою визначити інтервали опуклості та вгнутості графіка функції, знайти точки перегину;
7) знайти точки перетину графіка функції з осями координат, якщо це не потребує великих зусиль;
8) використовуючи результати дослідження, побудувати графік функції; в разі потреби можна додатково знаходити точки графіка надаючи аргументу x ряд значень і обчислюючи відповідні значення функції.

Приклад 6. Дослідити методами диференціального числення функцію $y = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Функція визначена на всій числовій осі за виключенням точок $x = 2;\ \ x = -2$, тобто $D(y) = (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;\infty)$.

2. Функція неперіодична. Задана функція непарна

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{4-(-x)^2} = -\frac{x^3}{4-x^2} = -f(x).$$

Це значить, що її графік симетричний відносно початку координат і можна досліджувати поведінку функції тільки при $x \ge 0$.

В точках $x = 2;\ \ x = -2$ функція має розриви, при всіх інших значеннях аргументу вона неперервна.

3. Знайдемо границі функції на нескінченності та односторонні границі функції в точках розриву:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{4-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{4-x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-2-0} \frac{x^3}{4-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to-2+0} \frac{x^3}{4-x^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to2-0} \frac{x^3}{4-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to2+0} \frac{x^3}{4-x^2} = -\infty.$$

Точки розриву $x = 2;\ \ x = -2$ є точками розриву другого роду.

4. Границя функції на нескінченності не існує (п.3), то тому графік даної функції горизонтальних асимптот не має.

Точки $x=2;\ x=-2$ є вертикальними асимптотами даної функції. Знайдемо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4-x^2}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^3}{4-x^2}+x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{4-x^2}=0,$$

тобто пряма $y=-x$ є похилою асимптотою при $x\to+\infty$. В силу симетрії ця пряма буде асимптотою і при $x\to-\infty$.

5. Обчислимо похідну функції

$$f'(x)=(\frac{x^3}{4-x^2})'=\frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2}=\frac{x^2(2\sqrt{3}-x)(2\sqrt{3}+x)}{(4-x^2)^2}.$$

Знайдена похідна існує на всій числовій прямій, крім точок $x=2;\ x=-2$, в яких знаменник дробу дорівнює нулю. Але в точках $x=2;\ x=-2$ функція не визначена, то ці точки не є критичними точками заданої функції. Із умови $f'(x)=0$ знаходимо критичні точки $x_1=0,\ \ x_2=2\sqrt{3},\ x_3=-2\sqrt{3}$.

Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів, на які розбивають область визначення функції критичні точки. При визначенні інтервалів монотонності необхідно враховувати точки розриву та визначати знак похідної $f'(x)$ зліва та справа від них.

x	$\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)$	$-2\sqrt{3}$	$\left(-2\sqrt{3};\ -2\right)$	-2	$\left(-2;\ 0\right)$
$f'(x)$	–	0	+	не існує	+
$f(x)$	↘	мінімум	↗	розрив	↗

x	0	(0; 2)	2	$\left(2;\ 2\sqrt{3}\right)$	$2\sqrt{3}$	$\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$
$f'(x)$	0	+	не існує	+	0	–
$f(x)$	екстремуму нема	↗	розрив	↗	максимум	↘

Функція зростає на інтервалах $\left(0;\ 2\right)$ і $\left(2;\ 2\sqrt{3}\right)$ та симетрично на інтервалах $\left(-2\sqrt{3};\ -2\right)$ і $\left(-2;\ 0\right)$; функція спадає на інтервалі $\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$ та симетрично на інтервалі $\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)$.

Екстремуми функції: 1) локальний максимум $f_{\max}=f(2\sqrt{3})=-3\sqrt{3}$; 2) локальний мінімум $f_{\min}=f(-2\sqrt{3})=3\sqrt{3}$.

6. Обчислимо другу похідну: $f''(x)=\dfrac{8x(12+x^2)}{(4-x^2)^3}$.

Знайдена похідна існує на всій числовій прямій, крім точок $x=2;\ x=-2$, в яких знаменник дробу обертається в нуль. Але в точках $x=2;\ x=-2$ функція невизначена, то тому ці точки не є критичними точками другого роду.

Із умови $f''(x)=0$ знаходимо критичну точку другого роду $x_1=0$. Дослідимо знак другої похідної функції зліва і справа від критичної точки та точок розриву.

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f''(x)$	+	не існує	–	0	+	не існує	–
$f(x)$	вгнута	розрив	опукла	перегин	вгнута	розрив	опукла

Таким чином, функція $y=\dfrac{x^3}{4-x^2}$ опукла угору на інтервалах $x\in(-2;0)\cup(2;\infty)$; опукла униз при $x\in(-\infty;-2)\cup(0;2)$. Точка $x=0$ – точка перегину. В точках $x=\pm2$ функція має розрив, тому вони не можуть бути точками перегину. Графік функції має вид.

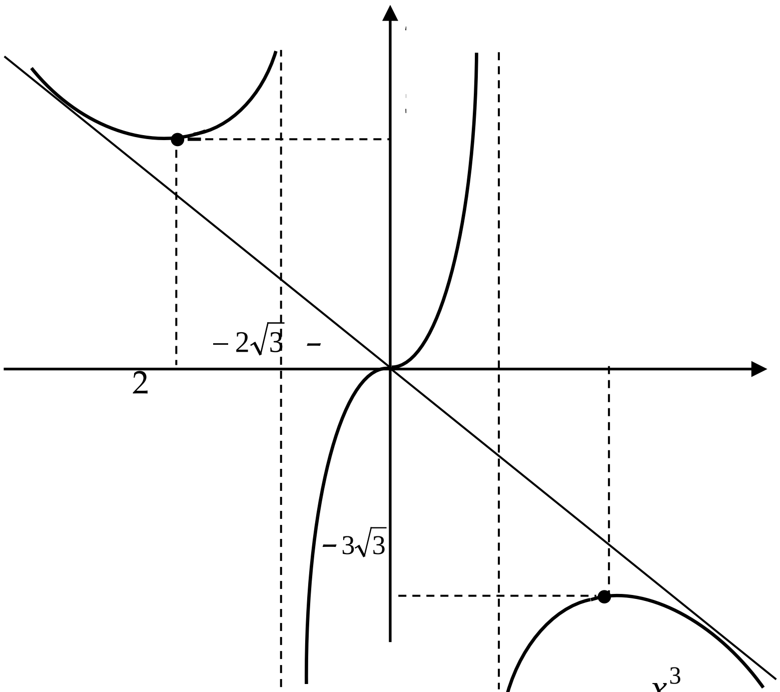


Рис. 10 - Графік функції $y=\dfrac{x^3}{4-x^2}$

7. Застосування методів дослідження функції в економіці

Нехай ціна p продукції залежить від обсягів виробництва за формулою

$$p(q)=a-bq\,,$$

де a, b деякі додатні сталі. Тобто із збільшенням обсягів виробництва ціна на продукцію зменшується.

Функція витрат на випуск продукції також відома і має вигляд

$$C(q)=-dq+cq^2+l\,,$$

де d, c, l деякі додатні сталі. Тобто функція витрат має вигляд параболи вітки якої направлені вверх, що означає, що при збільшенні (зменшенні) обсягів виробництва понад (менше) певний критичний рівень сукупні витрати зростають.

Нехай підприємство сплачує податок R, який є акцизом зі ставкою r, тобто з кожної проданої одиниці продукції держава одержує податок r і, таким чином податкові надходження $R(r)$ складають

$$R(q) = rq .$$

Тоді підприємство отримує прибуток

$$P(q) = p(q)q - C(q) - R(q),$$

$$P(q) = (a - bq)q + dq - cq^2 - l - rq . \qquad (*)$$

Знайдемо оптимальний обсяг випуску продукції q^*, який забезпечить підприємству максимальний прибуток. Дослідимо функцію $P(q)$ на екстремум. Знайдемо критичну точку q^*:

$$P'(q) = a - 2bq + d - 2cd - r = 0 ,$$

$$q^* = \frac{a + d - r}{2(b + c)} \text{ – критична точка.} \qquad (**)$$

Перевіримо чи виконуються достатні умови екстремуму. Знайдемо $P''(q)$:

$$P''(q) = -2b - 2c < 0 ,$$

що означає, що в знайденій критичній точці q^* функція $P(q)$ має максимум. Отже q^* – оптимальний випуск продукції, оскільки відхилення від q^* в будь-який бік веде до зменшення прибутку підприємства. Аналізуючи формулу (**) бачимо, що збільшення акцизу веде до зменшення оптимального випуску продукції q^*. Таким чином може статися, що уряду вигідніше зменшити акцизну ставку r, що приведе до збільшення випуску продукції і разом з тим до збільшення податкових надходжень. Дослідимо функцію податку $R(r; q) = rq^*$ на екстремум, вважаючи r аргументом, а q^* фіксованою величиною

$$R(r; q^*) = r\frac{a + d - r}{2(b + c)} .$$

Знайдемо критичні точки

$$R'(r; q^*) = \frac{a + d - r}{2(b + c)} = 0 ,$$

$$r^* = \frac{a + d}{2} \text{ – критична точка.} \qquad (***)$$

Перевіримо чи виконуються достатні умови екстремуму. Знайдемо другу похідну

$$R''(r;\,q) = -\frac{1}{b+c} < 0.$$

Отже в знайденій критичній точці функція $R(r;\,q)$ досягає максимуму. Таким чином оптимальна ставка акцизу r^* (***), а максимальний податковий збір

$$R(r^*;\,q^*) = r^*\,\frac{a+d-r^*}{2(b+c)} = \frac{(a+d)^2}{8(b+c)}.$$

Знайдемо доход підприємства $P(r^*;\,q^*)$. Використовуючи формули (*), (**), (***) отримаємо

$$P(r^*;\,q^*) = \frac{(a+d)^2}{16(b+c)} - l.$$

8. Правило Лопіталя. Розкриття невизначеностей

Приклади застосування правила Лопіталя при розкритті невизначеностей видів $\left[0^0\right]$ *і* $\left[\infty^0\right]$

Основним апаратом розкриття всіх існуючих видів невизначеностей служить правило Лопіталя, реалізація якого можлива лише при вмінні диференціювати функції. Слід відзначити, що ряд невизначеностей $\left(\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty-\infty], [\infty\cdot 0] \text{ з } \left[1^\infty\right]\right)$ можуть бути розкриті і без застосування правила Лопіталя, що і було показано в попередніх леціях. Розкриття невизначеностей видів $\left[0^0\right]$ і $\left[\infty^0\right]$ без застосування правила Лопіталя досить громіздке. Тому доцільно навести основні положення, що стосуються правила Лопіталя.

Правило Лопіталя. Якщо дві функцій, $f(x)$ і $\varphi(x)$:

1) нескінченно малі при $x \to a$ $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0\right)$, або нескінченно великі при $x \to a$ $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty\right)$;

2) диференційовані в околі точки $x = a$ (в деякому інтервалі $(a-\delta,\ a+\delta,\ \delta > 0)$;

3) $\varphi'(x) \neq 0$ в околі точки $x = a$, за винятком, можливо, самої точки $x = a$;

4) існує скінчена або нескінченна границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = h$, то границя відношення цих функцій дорівнює границі відношення похідних, тобто $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = h$.

Зауваження. Якщо границя відношення похідних даних функцій не існує, то це не значить, що обов'язково не існує і границя відношення функцій.

Якщо границя відношення похідних знову являє собою невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то зазначене правило може бути застосоване повторно.

Прикла 7. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$.

Точка $\mathrm{M}_0(x_0,\ f(x_0))$ називається точкою *перегину графіка функції* $y=f(x)$, якщо в цій точці функція неперервна і при переході через точку x_0 напрям опуклості графіка функції змінюється**.**

У точці перегину дотична перетинає графік функції, оскільки він переходить з одного боку дотичної на інший.

Необхідна умова точки перегину графіка функції. Якщо точка $\mathrm{M}_0(x_0,\ f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції $y=f(x)$, яка має в точці x_0 неперервну другу похідну, то $f''(x_0)=0$.

. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Тому можливе застосування правила Лопіталя.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Тому необхідне повторне застосування правила Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

До невизначеностей видів $\left[\infty^0\right]$ і $\left[0^0\right]$ приводить спроба знайти $\lim\limits_{x\to a}\left(u^v\right)$, де у випадку невизначеності $\left[\infty^0\right]$: $\lim\limits_{x\to a}u=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}v=0$, а у випадку невизначеності $\left[0^0\right]$: $\lim\limits_{x\to a}u=\lim\limits_{x\to a}v=0$. Невизначеності $\left[\infty^0\right]$ і $\left[0^0\right]$ зводяться до невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ (у випадку яких застосовується правило Лопіталя) використанням тотожності $u^v=e^{v\ln u}$ або попереднім логарифмуванням функції u^v і подальшим знаходженням $\lim\limits_{x\to a}\left[\ln\left(u^v\right)\right]$.

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Розв'язання.

$\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x=\left[0^0\right]=$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\ln(\sin x)^x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}}=e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln\sin x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\right)}=e^0=1.$$

Приклад 9. Знайти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{\cos x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{\cos x}=\left[\infty^0\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\ln(tgx)^{\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x\cdot\ln tgx)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln tgx}{\frac{1}{\cos x}}}=e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\ln tgx)'}{\left(\frac{1}{\cos x}\right)'}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{tgx\cos^2 x}\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}}e^0=1.$$

Приклад 10. Знайти (за правилом Лопіталя) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\left[\frac{0}{0}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'}{\left[\frac{1}{x}\right]'}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)}}}=e^1$$

Тобто $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Приклад 11. Знайти (за правилом Лопіталя) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Розв'язання.

Безпосередня підстановка граничного значення $x=1$ приводить до невизначеності виду $\langle\infty-\infty\rangle$. Дійсно:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{\ln1}-\frac{1}{1-1}=\langle\infty-\infty\rangle.$$

Зведемо дроби до спільного знаменника. Отримаємо:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\cdot\ln x}.$$

Безпосередня підстановка граничного значення $x=1$ приводить цього разу до невизначеності виду $\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle$. Дійсно:

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\cdot\ln x}=\frac{1-1-\ln1}{(1-1)\cdot\ln1}=\frac{1-1-0}{0\cdot0}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle.$$

Скористаємось правилом Лопіталя і таблицею похідних:

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\cdot\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\cdot\ln x)'}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-0-\frac{1}{x}}{(x-1)'\cdot\ln x+(x-1)\cdot(\ln x)'}=\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{(1-0)\cdot\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\cdot\ln x+x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\cdot\ln x+x-1}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)'}{(x\cdot\ln x+x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{1-0}{x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'+1-0}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{2+\ln x}=\frac{1}{2+\ln 1}=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

Таким чином, маємо : $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{2}.$

9. *Найбільше та найменше значення функції на відрізку*

Якщо для функції $y=f(x)$ існує така точка $x_0\in[a,b]$, що для будь-якого $x\in[a,b]$ виконується нерівність $f(x)\le f(x_0)$, то кажуть, що функція y = f(x) має на відрізку $[a;b]$ *найбільше значення* $f(x_0)$ і позначають цей факт так:

$$\max_{[a;b]} f(x)=f(x_0).$$

Якщо для функції $y=f(x)$ існує така точка $x_0\in[a,b]$, що для будь-якого $x\in[a,b]$ виконується нерівність $f(x)\ge f(x_0)$, то кажуть, що функція $y=f(x)$ має на відрізку $[a;b]$ *найменше значення* $f(x_0)$ і позначають цей факт так:

$$\min_{[a;b]} f(x)=f(x_0)$$

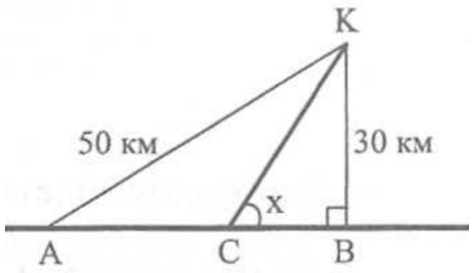
Якщо функція $y=f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона має на цьому відрізку *найбільше і найменше значення.*

З*находження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку* $[a;b]$ виконують за таким алгоритмом:

1) знайти похідну функції;
2) знайти ті критичні точки функції, які належать заданому відрізку $[a;b]$;
3) знайти значення функції в критичних точках, що належать відрізку $[a;b]$, і на кінцях цього відрізка;
4) з отриманих значень функції вибрати найбільше і найменше.

Значна кількість виробничих та господарських задач зводиться до знаходження найбільшого чи найменшого значення певної функції на певному відрізку. Зокрема, це стосується прикладних виробничих задач з професійної діяльності спеціаліста економічного профілю.

Приклад 12. Відстань від центральної садиби КСП, яка розміщена в пункті К, до райцентру А дорівнює 50 км, а до автомагістралі АВ, що проходить через райцентр - 30км. Під яким кутом x до автомагістралі слід побудувати під'їзну дорогу СК, щоб вартість перевезення вантажів між А та К була найменшою, якщо відомо, що перевезення по автомагістралі коштує вдвічі дешевше, ніж по під'їзній дорозі.



Розв'язання. Складемо функцію $P = f(x)$, яка показує залежність вартості Р перевезень між А та К від кута x. Очевидно, що перевезення будуть відбуватися по ламаній КСА.

Нехай вартість перевезення вантажу на 1км по автомагістралі (по відрізку АС) дорівнює р, тоді, за умовою задачі, вартість такого ж перевезення по під'їзній дорозі СК становитиме 2р. Тому загальна вартість перевезення вантажу між А та К, тобто по всій ламаній КСА становитиме:

$$P = 2p \cdot CK + p \cdot AC.$$

Виразимо відстані СК та АС через кут x. З прямокутного трикутника СКВ знаходимо:

$$CK = \frac{KB}{\sin x} = \frac{30}{\sin x}, \quad CB = KB \cdot ctgx = 30 \cdot ctgx$$

З прямокутного трикутника АКВ за теоремою Піфагора знаходимо:

$$AB = \sqrt{AK^2 - KB^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = \sqrt{2500 - 900} = 40$$

Так як $AC = AB - CB = 40 - 30 \cdot ctgx$, то матимемо шукану функцію:

$$P = 2p\frac{30}{\sin x} + p\,(40 - 30\,ctgx)$$

Очевидно, що точка С може займати будь-яке положення на відрізку АВ . Якщо вона співпаде з точкою А, то $x = \angle KAB$. А якщо С співпаде з точкою В, то $x = 90^0 = 0{,}5\pi$. З прямокутного трикутника КАВ знаходимо

$$\angle KAB = \arccos\frac{AB}{AK} = \arccos\frac{40}{50} = \arccos 0{,}8$$

Отже, кут x може приймати будь-яке значення з відрізка $[\arccos 0{,}8; 0{,}5\pi]$.

Щоб розв'язати поставлене в умові задачі завдання, необхідно знайти найменше значення функції на відрізку $[\arccos 0{,}8; 0{,}5\pi]$.

Діємо за алгоритмом:

1) Знайдемо похідну функції $P = 2p\,\dfrac{30}{\sin x} + p\,(40 - 30\,ctgx)$:

$$P' = \left(\frac{60p}{\sin x} + 40p - 30p \cdot ctgx\right)' = 60p \cdot \left((\sin x)^{-1}\right)' + (40p)' - 30p \cdot (ctgx)' =$$

$$= 60p \cdot (-1) \cdot (\sin x)^{-2} \cdot (\sin x)' + 0 - 30p \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} = -60p \cdot (\sin x)^{-2} \cdot \cos x + \frac{30p}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-60p \cdot \cos x}{\sin^2 x} + \frac{30p}{\sin^2 x} = \frac{30p - 60p \cdot \cos x}{\sin^2 x}.$$

2) Знайдемо критичні точки функції $P = \mathrm{f(x)}$, які належать відрізку $[\arccos 0{,}8; 0{,}5\pi]$.

Похідна функції не існує в усіх точках, в яких $\sin^2 x = 0$, але ці точки не входять в область визначення функції. Прирівняємо похідну до нуля і, розв'язавши отримане рівняння, знайдемо інші критичні точки:

$$\begin{cases} 30p - 60p \cdot \cos x = 0, \\ \sin^2 x \neq 0, \end{cases}$$

$$1 - 2\cos x = 0, \quad \cos x = \frac{1}{2}, \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \text{ де } n \in Z.$$

З усіх знайдених критичних точок лише одна $x = \dfrac{\pi}{3}$ належить відрізку $[\arccos 0{,}8; 0{,}5\pi]$.

3) Знайдемо значення функції в критичній точці $x = \dfrac{\pi}{3}$ і на кінцях відрізка $[\arccos 0{,}8; 0{,}5\pi]$:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{60p}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 40p - \frac{30p}{\sqrt{3}} = 40p + \frac{90p}{\sqrt{3}};$$

$$f(\arccos 0{,}8) = \frac{60p}{\sqrt{1 - 0{,}8^2}} + 40p - \frac{30p \cdot 0{,}8}{\sqrt{1 - 0{,}8^2}} = \frac{60p - 24p}{\sqrt{1 - 0{,}8^2}} + 40p =$$

$$= \frac{36p}{\sqrt{0{,}36}} + 40p = \frac{36p}{0{,}6} + 40p = 60p + 40p = 100p;$$

$$f(0{,}5\pi) = \frac{60p}{1} + 40p - 30p \cdot 0 = 60p + 40p = 100p.$$

4) Легко бачити, що $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \prec f(\arccos 0{,}8) = f(0{,}5\pi)$. Тому

$\min\limits_{[\arccos 0{,}8;\ 0{,}5\pi]} P = \min\limits_{[\arccos 0{,}8;\ 0{,}5\pi]} f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 40p + \dfrac{90p}{\sqrt{3}}$. Отже, вартість перевезень між А та К буде найменшою при $\mathrm{x} = \dfrac{\pi}{3} = 60^\circ$.

Лекція 5.

ПЕРВІСНА. НЕВИЗНАЧЕНИЙ І ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛИ.

План лекції

1. *Первісна та невизначений інтеграл. Геометричний зміст невизначеного інтегралу.*
2. *Теорема про існування невизначеного інтеграла та його основні властивості.*
3. *Таблиця інтегралів і табличне інтегрування.*
4 *Безпосереднє інтегрування.*
5. *Метод заміни змінної (підстановки).*
7. *Метод інтегрування частинами.*

1.Первісна та невизначений інтеграл. Геометричний зміст невизначеного інтеграла

В багатьох теоретичних та практичних питаннях математичного аналізу розв'язується задача, обернена диференціюванню, а саме: за заданою похідною $F'(x) = f(x)$, або, що те ж саме, за заданим диференціалом $dF(x) = f(x)dx$, знайти вихідну функцію, так звану первісну функцію $F(x)$. Дія знаходження первісних функцій називається ***інтегруванням функцій.***

Функція $F(x)$ називається ***первісною для даної функції*** $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$, або, що те ж саме, якщо $dF(x) = f(x)dx$.

В основі інтегрального числення лежить теорема, яка полягає у ***множинності первісних для кожної функції***: якщо функція $f(x)$, яка визначена на деякому проміжку (X) скінченої або нескінченної довжини, має одну первісну, $F(x)$, то вона має безліч первісних, які всі містяться в аналогічному виразі

$$F(x) + C,$$

де C – довільна стала

Зауваження. Якщо область визначення функції $f(x)$, являє собою не проміжок (відрізок) (X), як це припускалось у теоремі, а деяку систему (S) таких проміжків (відрізків) (X_n), які не перетинаються між собою, то на кожному (X_n) згідно з зазначеним вище будь-які дві первісні для функції $f(x)$ будуть як і раніше відрізнятись між собою на деякий сталий доданок C_n. Однак ці доданки C_n можуть бути і різними числами. Тому різниця між двома первісними, якщо розглядати її на всій області (S) визначення функції $f(x)$, може виявитися не сталою, а так званою ***кусково-сталою функцією*** $C(x)$, яка в кожному проміжку (відрізку) (X_n) системи (S) має стале числове значення C_n. Очевидно, що $C' \equiv 0$ скрізь в (S).

Приклад 1. Показати наявність для функції $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$ двох Кусково-сталих доданків в складі її первісної в проміжках $(x>0)$ і $(x<0)$, що неперетинається.

Розв'язання.

$$F(x)=-\frac{1}{x}+C(x),$$

де $C(x)\equiv\begin{cases} C_1 & \text{при} \quad x<0, \\ C_2 & \text{при} \quad x>0. \end{cases}$

$C_1\neq C_2$; C_1, C_2 – довільні дійсні числа.

Сукупність всіх первісних для даної функції $f(x)$, визначеної в деякому проміжку або на деякому відрізку скінченої або нескінченної довжини, називається ***невизначеним інтегралом від функції*** $f(x)$ [або від виразу $f(x)dx$] і позначається символом $\int f(x)dx$.

Якщо $F(x)$ є одна із первісних для $f(x)$, то згідно з теоремою про первісну

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)+C, \tag{1}$$

де C є довільна стала.

За означенням первісної $F'(x)=f(x)$ і, значить, $dF(x)=f(x)dx$. В формулі (1) $f(x)$ називається ***підінтегральною функцією***, а $f(x)dx$ – ***підінтегральним виразом.***

Геометрично невизначений інтеграл являє собою одно параметричну сім'ю плоских кривих $y=F(x)+C$ (C – параметр), які мають наступну властивість: дотичні, проведені до цих кривих в точках з однаковою абсцисою $x=x_0$ паралельні між собою; дійсно, їх кутовий коефіцієнт буде рівним $[F(x)+C]'=F'(x_0)=f(x_0)$. Ці криві називаються ***інтегральними кривими.*** Як показує рівняння сім'ї $y=F(x)+C$ всі криві цієї сім'ї можна одержати із однієї із них за допомогою паралельного переносу цієї кривої вздовж вісі OY.

Інтегральні криві (даної сім'ї) мають загальну для них проекцію на вісь OX, що співпадає з областю визначення M функції $f(x)$. Вони не перетинаються між собою і не дотикаються одна до другої. Через кожну точку площини з абсцисою, що належить M, проходить одна і тільки одна інтегральна крива.

Проінтегрувати задану функцію $f(x)$ ***означає*** знайти всі її первісні, тобто обчислити невизначений інтеграл (1) від цієї функції.

2. *Теорема про існування невизначеного інтеграл та його основні властивості*

Надзвичайно важливою в інтегральному численні є відповідь на питання про існування первісної для даної підінтегральної функції.

Теорема (про існування) 1. Всяка неперервна функція $f(x)$ обов'язково має первісну $F(x)$, де $F'(x)=f(x)$.

Властивості невизначених інтегралів:

1. Диференціал від невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$ дорівнює підінтегральному виразові:

$$d\int f(x)dx = f(x)\,dx. \tag{2}$$

2. Невизначений інтеграл $\int d\,u(x)$ від диференціала деякої функції $u(x)$ дорівнює цій функції, складеній з деякою сталою:

$$\int d\,u(x) = u(x)+C. \tag{3}$$

3. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від кожної із функцій:

$$\int [f(x)+\varphi(x)-\psi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx - \int \psi(x)dx. \tag{4}$$

4. Сталий множник (що не дорівнює нулю) можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int a\,f(x)dx = a\int f(x)dx,\ \ a\neq 0. \tag{5}$$

5. Похідна від невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$ дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x). \tag{6}$$

3. *Таблиця інтегралів і табличне інтегрування*

Значення інтегралів від основних елементарних функцій отримуються із формул диференціювання цих функцій, застосування формули $udx = du$ і властивості $\int du(x) = u(x)+C$.

Візьмемо для прикладу формулу диференціювання степеневої функції:

$$d\left(u^{m+1}\right) = (m+1)u^m\,du,$$

якщо $m\neq -1$, то її можна переписати в виді:

$$u^m du = \frac{d\left(u^{m+1}\right)}{m+1}.$$

Звідси інтегрування обох частин цієї рівності і використання другої і четвертої властивості невизначеного інтеграла дає

$$\int u^m\,du=\frac{1}{m+1}\int d\left(u^{m+1}\right)=\frac{u^{m+1}}{m+1}+C\,.$$

Таким способом можна одержати формули таблиці основних інтегралів.

Таблиця основних інтегралів

1.	$\int u^m\,du=\dfrac{u^{m+1}}{m+1}+C$	2.	$\int \dfrac{du}{u}=\ln\left\| u \right\|+C$
3.	$\int a^u\,du=\dfrac{a^u}{\ln a}+C$	4.	$\int e^u\,du=e^u+C$
5.	$\int \sin u\,du=-\cos u+C$	6.	$\int \cos u\,du=\sin u+C$
7.	$\int tg\,u\,du=-\ln\left\| \cos u \right\|+C$	8.	$\int ctg\,u\,du=\ln\left\| \sin u \right\|+C$
9.	$\int \dfrac{du}{\cos^2 u}=tgu+C$	10.	$\int \dfrac{du}{\sin^2 u}=-ctgu+C$
11.	$\int \dfrac{du}{\sin u}=\ln\left\| tg\,\dfrac{u}{2}\right\|+C$	12.	$\int \dfrac{du}{\cos u}=\ln\left\| tg\left\|\dfrac{u}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right\|\right\|+C$
13.	$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\dfrac{u}{a}+C$	14.	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2+a}}=\ln\left\| u+\sqrt{u^2+a}\right\|+$
15.	$\int \dfrac{du}{a^2+u^2}=\dfrac{1}{a}\,arctg\,\dfrac{u}{a}+C$	16.	$\int \dfrac{du}{a^2-u^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{a+u}{a-u}\right\|+C$

В таблиці інтегралів змінна u являє собою незалежну змінну або будь-яку диференційовану функцію цієї змінної, а C – довільну сталу. Якщо вдасться в підінтегральному виразі перейти до змінної u і одержати одну з формул таблиці, то можливе інтегрування, яке називається ***табличним.***

Приклад 2. Шляхом перетворення та застосування позначення $u=\varphi(x)$ одержати одну із формул таблиці при обчисленні інтеграла $\int \dfrac{dx}{x^2+4x+8}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{d(x+2)}{2^2+(x+2)^2} = \left| \begin{matrix} x+2=u \\ dx=du \end{matrix} \right| = \int \frac{du}{2^2+u^2}.$$

Згідно з формулою 15 таблиці маємо

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \frac{1}{2} arctg \frac{x+2}{2} + C.$$

Приклад 3. Шляхом перетворення та застосування спеціального позначення $u=\varphi(x)$ одержати одну із формул таблиці для обчислення інтеграла $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+1}\,dx$.

Розв'язання.

$$\int x^2 \sqrt[5]{x^3+1}\,dx = \int (x^3+1)^{\frac{1}{5}} \frac{d(x^3+1)}{3} = \left| \ x^3+1=u \ \right| = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{5}}\,du =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{u^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} u^{\frac{5}{6}} + C = \frac{5}{18}(x^3+1)^{\frac{5}{6}} + C.$$

Приклад 4. Шляхом перетворення та застосування доцільного позначення $u=\varphi(x)$ звести інтеграл $\int \frac{\cos ec\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$ до табличного.

Розв'язання. За формулою 11 таблиці

$$\int \frac{\cos ec\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx = \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sin\sqrt{x}} = \left| \ \sqrt{x}=u \ \right| = \int \frac{du}{\sin u} = \ln\left| tg\frac{u}{2} \right| + C = \ln\left| tg\frac{\sqrt{x}}{2} \right| + C.$$

Приклад 5. Шляхом перетворення та доцільного позначення $u=\varphi(x)$ звести інтеграл $\int e^{x^2} x\ dx$ до табличного і знайти його.

Розв'язання. За формулою 4 таблиці

$$\int e^{x^2} x\ dx = \int \frac{e^{x^2} d(x^2)}{2} = \frac{1}{2}\int e^{x^2} d(x^2) = \left| \ x^2=u \ \right| = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Приклад 6. Шляхом перетворення та застосування позначення $u=\varphi(x)$ записати шуканий інтеграл $\int \frac{dx}{x^2-9}$ у вигляді табличного і знайти його.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{x^2-9} = -\int \frac{dx}{3^2-x^2} = \left| \begin{matrix} u=x \\ a=3 \end{matrix} \right| = -\int \frac{dx}{3^2-u^2} = -\frac{1}{6}\ln\left| \frac{3+x}{3-x} \right| + C = \ln\sqrt[6]{\left| \frac{3-x}{3+x} \right|} + C$$

.

3. *Безпосереднє інтегрування*

Відомі наступні основні способи інтегрування: безпосереднє, інтегрування частинами, інтегрування підстановкою (перетворення змінної).

Найбільш часто використовуються наступні методи інтегрування: метод безпосереднього інтегрування, інтегрування частинами, інтегрування підстановкою (заміни змінної).

Метод безпосереднього інтегрування полягає в тому, що даний інтеграл шляхом тотожних перетворень підінтегральної функції (або виразу) і використання властивостей невизначеного інтегралу приводиться до одного або кількох табличних інтегралів. Покажемо на прикладах використання тотожних перетворень підінтегральної функції або виразу.

Приклад 6. Знайти інтеграл $I=\int tg^2 x dx$. Виконати перевірку.

Розв'язання. Скористаємось тригонометричними формулами $tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ та $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, і перетворимо підінтегральну функцію до виду:

$$tg^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}-1.$$

Підставивши цю рівність в заданий інтеграл і скориставшись методом розкладання, тобто властивістю 3, матимемо:

$$I=\int tg^2 x dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx.$$

Підставивши рівності $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C_1$, $\int dx=x+C_2$, матимемо:

$$I=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=tgx+C_1-(x+C_2)=tgx-x+C_1-C_2.$$

Замінимо сталу інтегрування $C_1-C_2=C$, тоді шуканий інтеграл має вид:

$$I=\int tg^2 x dx=tgx-x+C.$$

Перевірка: Користуючись правилами диференціювання і таблицею похідних, знайдемо похідну функції $I(x)$, яка є кінцевим результатом інтегрування:

$$I'=(tgx-x+C)'=(tgx)'-x'+C'=\frac{1}{\cos^2 x}-1+0=\frac{1}{\cos^2 x}-1=$$

$$=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=tg^2 x.$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int\dfrac{x^2+12}{x^2-3}dx$.

Розв'язання. Виділимо цілу частину підінтегральної функції. Для цього поділимо чисельник на знаменник способом ділення многочлена на многочлен, або припишемо в чисельнику -3 та $+3$ і розглянемо суму дробів. Одержимо

$$\frac{x^2-3+3+12}{x^2-3}=\frac{x^2-3}{x^2-3}+\frac{15}{x^2-3}=1+\frac{15}{x^2-3}.$$

$$\int\frac{x^2+12}{x^2-3}dx=\int\left(1+\frac{15}{x^2-3}\right)dx=\int dx+15\int\frac{dx}{x^2-3}=x+\frac{15}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C.$$

При приведені інтегралів до табличних часто використовуються наступні перетворення диференціала, які називають операцією ***підведення під знак диференціала***:

$du=d(u+a)$, a – число,

$du=\frac{1}{a}d(au)$, $a\neq 0$ – число,

$u\cdot du=\frac{1}{2}d(u^2)$,

$\cos u du=d(\sin u)$,

$\sin u du=-d(\cos u)$,

$\frac{1}{u}du=d(\ln u)$,

$\frac{du}{\cos^2 u}=d(tgu)$.

Операція підведення під диференціал базується на формулі $f'(u)du=d(f(u))$; ця формула, а значить і операція підведення під диференціал, дуже часто використовується при обчисленні інтегралів. Покажемо на прикладах.

Приклад 8. Шляхом перетворення підінтегральної функції обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int\frac{d(x+2)}{2^2+(x+2)^2}=\left|\begin{array}{l}x+2=u\\ dx=du\end{array}\right|=\int\frac{du}{2^2+u^2}.$$

Згідно з формулою 15 таблиці маємо

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\frac{1}{2}arctg\frac{x+2}{2}+C.$$

Приклад 9. Шляхом перетворення підінтегральної функції обчислити інтеграл $\int x^2\sqrt[5]{x^3+1}\,dx$.

Розв'язання.

$$\int x^2 \sqrt[5]{x^3+1}\,dx = \int \left(x^3+1\right)^{\frac{1}{5}} \frac{d\left(x^3+1\right)}{3} = \left|\ x^3+1=u\ \right| = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{5}}\,du =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}u^{\frac{5}{6}} + C = \frac{5}{18}\left(x^3+1\right)^{\frac{5}{6}} + C\,.$$

Приклад 10. Шляхом перетворення підінтегральної функції звести інтеграл $\int \frac{\operatorname{cosec}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$ до табличного.

Розв'язання.

За формулою 11 таблиці

$$\int \frac{\operatorname{cosec}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx = \int \frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{\sin\sqrt{x}} = \left|\ \sqrt{x}=u\ \right| = \int \frac{du}{\sin u} = \ln\left| tg\,\frac{u}{2}\right| + C = \ln\left| tg\,\frac{\sqrt{x}}{2}\right| + C\,.$$

Приклад 11. Шляхом перетворення підінтегральної функції звести інтеграл $\int e^{x^2} x\ dx$ до табличного і знайти його.

Розв'язання.

За формулою 4 таблиці

$$\int e^{x^2} x\ dx = \int \frac{e^{x^2} d\left(x^2\right)}{2} = \frac{1}{2}\int e^{x^2} d\left(x^2\right) = \left|\ x^2 = u\ \right| = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^{x^2} + C\,.$$

Приклад 12. Знайти інтеграл $\int \frac{3x-2}{\sqrt{5-x^2}}dx$.

Розв'язання.

Розглянемо різницю двох інтегралів і до кожного із них застосуємо відповідну формулу із таблиці інтегралів. Одержимо

$$I = \int \frac{3x-2}{\sqrt{5-x^2}}dx = 3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5-x^2}} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}\,,$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{5-x^2}} = \left|\begin{array}{c} u = 5-x^2 \\ du = -2x\,dx \end{array}\right| = \frac{1}{-2}\int \frac{-2xdx}{\sqrt{5-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{1/2} = -\sqrt{u} = -\sqrt{5-x^2}\,,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ a = \sqrt{5} \end{array} \right| = \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}},$$

$$I = 3\left(-\sqrt{5-x^2}\right) - 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C = -3\sqrt{5-x^2} - 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

5. *Метод заміни змінної (підстановки).*

Метод інтегрування підстановкою полягає у введенні нової змінної інтегрування (тобто підстановки). При цьому заданий інтеграл приводиться до нового інтегралу, який є табличним або до нього зводиться. Загальних методів підбору підстановок не існує. Уміння правильно визначити підстановку досягається практикою.

Нехай необхідно обчислити інтеграл $\int f(x)dx$. Зробимо підстановку $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – функція, що має неперервну похідну. Тоді $dx=\varphi'(t)dt$ і на підставі властивості інваріантності формули інтегрування невизначеного інтеграла одержуємо *формулу інтегрування підстановкою*

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt}. \qquad (7)$$

Формула (6.6) також називається формулою заміни змінних в невизначеному інтегралі. Після знаходження інтеграла правої частини цієї рівності слід перейти від нової змінної інтегрування t назад до змінної x.

Іноді доцільно підбирати підстановку у вигляді $t=\varphi(x)$, тоді $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$, де $t=\varphi(x)$. Іншими словами, формулу (6.6) можна застосовувати справа наліво.

Приклад 13. Методом підстановки знайти інтеграл $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$.

Розв'язання.

Введемо нову змінну $t = 2+\sqrt{x}$ та розв'яжемо отримане рівняння відносно x: $x=(t-2)^2$. Диференціюємо обидві частини цієї рівності по змінній t. В результаті матимемо:

$$dx = x'_t \cdot dt = 2\cdot(t-2)dt.$$

Підставивши одержані рівності в заданий інтеграл і виконавши алгебраїчні перетворення, отримаємо:

$$I = \int \frac{dx}{2+\sqrt{x}} = \int \frac{2\cdot(t-2)dt}{t} = \int \frac{2t-4}{t}dt = \int\left(2-\frac{4}{t}\right)dt,$$

$$I=\int 2dt-\int\frac{4}{t}dt=2\int dt-4\int\frac{dt}{t}=2t-4\ln|t|+C_1.$$

Повернемось до змінної x:

$$I=2\left(2+\sqrt{x}\right)-4\left(\ln 2+\sqrt{x}\right)+C_1=4+2\sqrt{x}-4\cdot\ln\left(2+\sqrt{x}\right)+C_1.$$

Замінивши сталу інтегрування $4+C_1=C$, одержимо:

$$I=\int\frac{dx}{2+\sqrt{x}}=2\sqrt{x}-4\ln\left(2+\sqrt{x}\right)+C.$$

Приклад 14. Обчислити інтеграл $\int x(x-1)^9\,dx$.

Розв'язання.

Введемо нову змінну $t=x-1$, тоді $x=t+1$, $dx=dt$. Початковий інтеграл перетвориться таким чином:

$$\int x(x-1)^9\,dx=\int(t+1)t^9\,dt=\int(t^{10}+t^9)dt=\frac{t^{11}}{11}+\frac{t^{10}}{10}+C.$$

Повертаючись до *старої* змінної, одержимо:

$$\int x(x-1)^9\,dx=(x-1)^{10}\left(\frac{x-1}{11}+\frac{1}{10}\right)+C.$$

Приклад 15. Обчислити інтеграл $\int\frac{x^3}{(1-x)^3}dx$.

Розв'язання.

Покладемо $t=1-x$. Тоді $x=1-t$, $dx=-dt$. Тоді початковий інтеграл перетвориться таким чином:

$$\int\frac{x^3}{(1-x)^3}dx=-\int\frac{(1-t)^3}{t^3}dt=-\int\left(t^{-3}-3t^{-2}+3t^{-1}-1\right)dt=$$

$$=2t^{-2}-3t^{-1}-3\ln|t|+t+C.$$

Повертаючись до *старої* змінної, одержимо:

$$\int\frac{x^3}{(1-x)^3}dx=2(1-x)^{-2}-3(1-x)^{-1}-3\ln(1-x)+(1-x)+C.$$

В простих випадках заміну змінної рекомендують виконувати усно, не записуючи нову змінну під знаком інтеграла, а використовувати операцію *підведення під знак диференціала.*

Приклад 16. Знайти інтеграл $\int\cos(3x+5)dx$.

Розв'язання.

Застосовуємо метод внесення під знак диференціала. За правилами диференціювання знаходимо

$$dx = \frac{d(3x+5)}{3}.$$

Тоді

$$I = \int \cos(3x+5)dx = \int \cos(3x+5)\frac{d(3x+5)}{3} = \frac{1}{3}\cdot\int \cos(3x+5)d(3x+5).$$

Не записуючи нової змінної, усно, покладемо $3x+5=u$ і, використавши табличний інтеграл, отримаємо:

$$I = \int \cos(3x+5)dx = \frac{1}{3}\cdot \sin(3x+5)+C.$$

6. Метод інтегрування частинами

До числа досить ефективних методів інтегрування відноситься метод інтегрування частинами. Цей метод ґрунтується на наступному твердженні.

Теорема 2. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ визначені і диференційовні на проміжку X і функція $u'(x)v(x)$ має первісну на цьому проміжку. Тоді функція $u(x)v'(x)$ також має первісну на проміжку X, причому справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \tag{8}$$

Зауваження 2. Означення диференціала функції $(v'(x)dx = dv$ і $u'(x)dx = du)$ і властивість інваріантності його форми дозволяє записати формулу (6.7) у вигляді:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}. \tag{9}$$

Доведення. За правилом диференціювання добутку функцій

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Звідки випливає, що

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x).$$

У правій частині останньої рівності перший доданок має первісну функцію $u(x)v(x)$ на X, другий доданок має первісну на X за умовою. Отже, і ліва частина рівності має первісну на X, яка знаходиться шляхом інтегрування цієї рівності.

Формула (8) (***формула інтегрування частинами***) а значить і теорема, доведена.

Розглянемо основні типи інтегралів , які обчислюються методом інтегрування частинами.

Якщо підінтегральна функція $f(x)$ в інтегралі $\int f(x)dx$ є добутком многочлена $P(x)$ і однієї із тригонометричних ($\sin kx$, $\cos lx$; k, l – числа), або показникових (e^{mx}, a^{nx}; a, m, n – числа) функцій, то приймають $u = P(x)$, а dv дорівнює добуткові однієї із зазначених функцій на dx.

Приклад 17. Знайти $\int x\sin xdx$.

Розв'язання.

$$\int x\sin xdx = \left| \begin{array}{c} x=u, \quad du=dx \\ \sin xdx = dv, \\ v=\int \sin xdx = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Приклад 18. Знайти $\int x e^x\, dx$.

Розв'язання.

$$\int x e^x\, dx = \left| \begin{array}{c} x=u, \ \ du=dx \\ e^x dx = dv, \\ v=\int e^x\, dx = e^x \end{array} \right| = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C.$$

Якщо підінтегральна функція $f(x)$ в інтегралі $\int f(x)dx$ є добутком многочлена $P(x)$ на $\ln x$ або на одну із обернених тригонометричних функцій $(\arcsin x,\ \arccos x,\ arctgx,\ arcctgx)$, то в якості u слід брати одну із зазначених функцій, а $dv = P(x)dx$.

Приклад 19. Знайти $\int x\ \ln x\, dx$.

Розв'язання.

$$\int x\ \ln x\, dx = \left| \begin{array}{c} \ln x = u, \quad du = \dfrac{dx}{x} \\ xdx = dv,\ \ v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Приклад 20. Знайти $\int x\arcsin x\, dx$.

Розв'язання.

$$\int x\arcsin x\, dx = \left| \begin{array}{c} \arcsin x = u,\ \ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ xdx = dv,\ v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Знайдемо

$$I=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{x\cdot x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{array}{c} x=u,\quad du=dx \\ \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=dv,\ v=\int\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}\end{array}\right|=$$

$$=-x\sqrt{1-x^2}+\int\sqrt{1-x^2}\,dx=-x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=-x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x-I\,.$$

Тоді

$$2I=-x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x;$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\,.$$

Тому

$$\int x\arcsin x\,dx=\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)+C=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C\,.$$

Приклад 21. Знайти $\int\ln x\,dx$.

Розв'язання.

$$\int\ln x\,dx=\left|\begin{array}{c}\ln x=u,\quad du=\dfrac{dx}{x} \\ dx=dv,\quad v=\int dx=x\end{array}\right|=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x+C\,.$$

Приклад 22. Знайти $\int\arcsin x\,dx$.

Розв'язання.

$$\int\arcsin x\,dx=\left|\begin{array}{c}\arcsin x=u,\ \ du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=dx,\quad v=\int dx=x\end{array}\right|=x\arcsin x-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C\,.$$

Якщо підінтегральна функція $f(x)$ в інтегралі $\int f(x)dx$ є добутком однієї із тригонометричних ($\sin kx$, $\cos lx$; k, l – числа), на одну із показникових (e^{mx}, a^{nx}; a, m, n – числа) функцій, то в якості u можна брати будь-яку із функцій підінтегрального добутку, а dv – добуток іншої із функцій в добутку на dx. Зазначений вибір не слід змінювати в процесі дворазового інтегрування частинами. В результаті інтегрування в правій частині появиться шуканий інтеграл. Далі одержана рівність розв'язується відносно шуканого інтеграла.

Приклад 23. Знайти $\int e^x\cdot\sin x\,dx$.

Розв'язання.

$$\int e^x \cdot \sin x\,dx = \left| \begin{array}{c} e^x = u, \quad du = e^x dx \\ \sin x dx = dv, \;\; v = -\cos x \end{array} \right| = -e^x \cos x + \int \cos x \cdot e^x \,dx .$$

$$I = \int \cos x \cdot e^x \,dx = \left| \begin{array}{c} e^x = u, \quad du = e^x dx \\ \cos x dx = dv, \;\; v = \sin x \end{array} \right| = \sin x \cdot e^x - \int \sin x \cdot e^x \,dx .$$

Отже,

$$\int e^x \cdot \sin x\,dx = -e^x \cos x + \sin x \cdot e^x - \int \sin x \cdot e^x \,dx ,$$

звідки

$$2\int e^x \cdot \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) + C ,$$

а тому,

$$\int e^x \cdot \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C .$$

Лекція 6а.

ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

План лекції

1. *Правило розкладу раціонального дробу на суму елементарних дробів. Метод невизначених коефіцієнтів. Метод коллокації.*
2. *Інтегрування раціональних дробів.*
3. *Загальне правило інтегрування будь-якого раціонального* дробу.

1.Правило розкладу раціонального дробу на суму елементарних дробів. Метод невизначених коефіцієнтів. Метод коллокації.

В зв'язку з тим, що елементарні дроби легко інтегруються, дуже важливим є опанування правило розкладу раціональних дробів на елементарні.

Раціональним дробом (дробово-раціональною функцією) називається частка двох цілих многочленів $Q_m(x)$ і $P_n(x)$ однакового аргументу x і степенів відповідно m і n.

Раціональний дріб $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ називається ***правильним***, якщо $m < n$, тобто якщо показник степеня многочлена $Q_m(x)$ менше показника степеня многочлена $P_n(x)$. При $m \ge n$ дріб називається ***неправильним***.

У випадку неправильного дробу $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ шляхом ділення многочлена $Q_m(x)$ на многочлен $P_n(x)$ дріб $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ вдається представити у вигляді суми многочленна R_{m-n} (степеня $m-n$, ціла частина $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$) і відповідного правильного раціонального дробу. В подальшому викладі ми будемо вважати, що дріб $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ – правильний, тобто в ньому $m < n$.

Важливим питанням буде розклад многочленна

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

на множники і запис його у вигляді добутку цих множників.

При вирішенні цього питання слід прийняти до уваги дві важливі теореми алгебри - теореми Гаусса і Безу.

Теорема Гаусса твердить, що всякий многочлен має, принаймні, один корінь, дійсний чи уявний. Його позначають – k_1. Тоді, згідно ***теореми Безу***, многочлен $P_n(x)$ можна поділити без залишку на двочлен $x - k_1$, тобто

$$P_n(x) = (x - k_1)P_{n-1}(x), \tag{1}$$

де $P_{n-1}(x)$ – многочлен степеня $n-1$.

Згідно з викладеним вище

$$P_{n-1}(x) = (x - k_2)P_{n-2}(x).$$

Послідовне застосування зазначених теорем приводить до запису

$$P_n(x) = a_0(x - k_1)(x - k_2)\cdot \ldots \cdot (x - k_n). \tag{2}$$

Це показує, по-перше, що многочлен степеня n не може мати більше n різних коренів. Якщо деякі із коренів повторяються (наприклад $k_1 - m_1$ разів, $k_2 - m_2$ разів,…, $k_l - m_l$ разів), то маємо

$$P_n(x) = a_0(x - k_1)^{m_1} \ldots (x - k_l)^{m_l}, \tag{3}$$

де m_1 – кратність кореня k_1,

m_2 – кратність кореня k_2,

………………………………

m_l – кратність кореня k_l.

Очевидно, що $m_1 + m_2 + \ldots + m_l = n$.

Крім того, деякі із коренів многочленна можуть бути не дійсними, а комплексними, точніше, комплексно-спряженими. Це пов’язано з тим, що у розкладі

$P_n(x)$ на множники крім двочленів типу $x-k$, або їх степенів, $(x-k)^m$, можуть бути тричлени типу x^2+px+q з дійсними коефіцієнтами, які в силу того, що $D=\frac{p^2}{4}-q<0$, не розкладуються на двочленні множники. Тоді маємо запис

$$P_n(x)=a_0(x-k_1)^{m_1}...(x-k_s)^{m_s}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}...(x^2+p_lx+q_l)^{\mu_l}, \qquad (4)$$

де $m_1+...+m_s+2(\mu_1+...+\mu_l)=n$, a_0 – множник при старшому степені x в $P_n(x)$, двочлени відповідають дійсним кореням кратностей $m_1, m_2,..., m_s$, а тричлени – парам спряжених комплексних коренів кратностей $\mu_1, \mu_2,..., \mu_l$).

Число k називається ***m-кратним коренем многочлена*** $P_n(x)$, якщо $P_n(x)$ можна поділити без залишку на $(x-k)^m$, але не можне поділити на $(x-k)^l$, де $l>m$.

Введемо до розгляду так звані найпростіші (або елементарні) раціональні дроби:

$$\frac{A}{x-k},\quad \frac{A}{(x-k)^m},\quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q},\quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\mu} \qquad (5)$$

відповідно 1, 2, 3 і 4 типів. Тут A, B, C, k – дійсні числа, m і n – натуральні числа; член з дійсними коефіцієнтами x^2+px+q має уявні корені (типу $a\pm b_i$, де $i=\sqrt{-1}$, a, b – дійсні числа).

Без доведення наводимо теорему алгебри про розклад дробу

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_0}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_0} \qquad (6)$$

на суму елементарних дробів.

Теорема 1. Будь-який правильний раціональний дріб $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ $(m<n)$ може бути представлений, і притому єдиним способом, у вигляді суми скінченого числа елементарних раціональних дробів (5), вид яких визначається розкладом (4) знаменника $P_n(x)$ в добуток дійсних множників:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\left[\frac{A_1}{(x-k_1)^{m_1}}+\frac{A_2}{(x-k_1)^{m_1-1}}+...+\frac{A_{m_1}}{x-k_1}\right]+... \qquad (7)$$

$$\ldots+\left[\frac{L_1}{(x-k_s)^{m_s}}+\frac{L_2}{(x-k_s)^{m_s-1}}+\ldots+\frac{L_{m_s}}{x-k_s}\right]+$$

$$+\left[\frac{B_1x+C_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}}+\ldots+\frac{B_{\mu_1}x+C_{\mu_1}}{x^2+p_1x+q_1}\right]+\ldots$$

$$\ldots+\left[\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_lx+q_l)^{\mu_l}}+\ldots+\frac{M_{\mu_1}x+N_{\mu_1}}{x^2+p_lx+q_l}\right].$$

Метод невизначених коефіцієнтів. Невизначені коефіцієнти чисельників елементарних дробів знаходять за наступним алгоритмом:

1) Приводимо праву частину (7) до спільного знаменника, $P_n(x)$, і позначимо приведений числівник $S(x)$.
2) Відкидаємо знаменник, $P_n(x)$, як в лівій, так і в правій частинах рівності (7).
3) В отриманій тотожності $Q_m(x)\equiv S(x)$ права її частина, $S(x)$, містить невизначені коефіцієнти. Для отримання їх значень прирівнюємо коефіцієнти при однакових значеннях x в лівій та в правій частинах тотожності $Q_m(x)\equiv S(x)$. Це дає лінійні рівняння, що пов'язують шукані невизначені коефіцієнти.

Інколи застосується ***метод коллокації*** – прирівнювання значень $Q_m(x)$ і $S(x)$ при значеннях x, які дорівнюють кореням $P_n(x)$, а також іншим "вигідним" значенням x. Все це дає можливість одержати достатню кількість рівнянь, необхідних для знаходження коефіцієнтів.

Наведемо приклади з розкладу раціональних дробів на суму елементарних.

Приклад 1. Записати раціональний дріб $\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3}$ у вигляді суми елементарних і знайти невизначені коефіцієнти.

Розв'язання. Згідно з (7) маємо

$$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-3)}+\frac{C}{(x-3)^2}+\frac{D}{(x-3)^3}.$$

Для знаходження A, B, C і D приводимо праву частину до спільного знаменника і відкидаємо його. Одержимо тотожність

$$x^2+4=A(x-3)^3+B(x-2)(x-3)^2+C(x-2)(x-3)+D(x-2).$$

1) Застосовуємо метод коллокації:

нехай $x=3$, тоді $13=D$, $D=13$,
нехай $x=2$, тоді $8=-A$, $A=-8$.

2) Далі покладемо $x = 4$, маємо $20 = 2B + 2C + 26 - 8$, звідки $2B + 2C = 2$, тобто $B + C = 1$. Крім того прирівняємо коефіцієнти при x^3, зліва і права: $0 = -8 + B$, $B = 8$, $C = -7$.

Отже,

$$\frac{x^2 + 4}{(x-2)(x-3)^3} = -\frac{8}{x-2} + \frac{8}{(x-3)} - \frac{7}{(x-3)^2} + \frac{13}{(x-3)^3}.$$

Приклад 2. Записати раціональний дріб $\frac{3x^5 + 3x^4 + 9x^2 + 18x^3 + 32x + 16}{(x^2+4)^2(x^2+x+1)}$ у вигляді суми елементарних і знайти невизначені коефіцієнти.

Розв'язання. Згідно з (7) маємо

$$\frac{3x^5 + 3x^4 + 9x^2 + 18x^3 + 32x + 16}{(x^2+4)^2(x^2+x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} + \frac{Ex+F}{x^2+x+1}.$$

Приводимо рівність до спільного знаменника і відкинемо його:

$$3x^5 + 3x^4 + 9x^2 + 18x^3 + 32x + 16 =$$

$$= (Ax+B)(x^2+x+1) + (Cx+D)(x^2+4)(x^2+x+1) + (Ex+F)(x^2+4)^2.$$

Прирівнюючи один до одного послідовно коефіцієнти при x^5, x^4, x^3, x^2, x і вільні члени в лівій і правій частині тотожності, одержимо систему із шести лінійних рівнянь з шістьма невідомими:

$$\begin{cases} C + E = 3, \\ C + D + F = 3, \\ A + 5C + D + 8E = 18, \\ A + B + 4C + 5D + 8F = 9, \\ A + B + 4C + 4D + 16C = 32, \\ B + 4D + 16F = 16. \end{cases}$$

Розв'язання цієї системи дає:

$$A = B = -4,\ C = D = F = 1,\ E = 2.$$

Значить

$$\frac{3x^5 + 3x^4 + 9x^2 + 18x^3 + 32x + 16}{(x^2+4)^2(x^2+x+1)} = \frac{-4x-4}{(x^2+4)^2} + \frac{x+1}{x^2+4} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Приклад 3. Записати раціональний дріб $\frac{12x-6}{x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x}$ у вигляді суми елементарних і знайти невизначені коефіцієнти.

Розв'язання. Знаходимо розклад знаменника на множники. Винесемо x множником:

$$x^4-6x^3+11x^2-6x=x\left(x^3-6x^2+11x-6\right).$$

Бачимо, що $x=1$ є корінь кубічного многочленна в дужках, а тому він ділиться на $x-1$ без залишку; після ділення на $x-1$ отримуємо

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Тому розклад раціонального дробу має вид:

$$\frac{12x-6}{x^4-6x^3+11x^2-6x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x-3}.$$

Приводимо рівність до спільного знаменника і відкидаємо його. Маємо:

$$12x-6=$$

$$=A(x-1)(x-2)(x-3)+Bx(x-2)(x-3)+Cx(x-1)(x-3)+Dx(x-1)(x-2).$$

Застосовуємо метод коллокації:
нехай $x=0$, тоді $-6=-6A$, звідки $A=1$;
нехай $x=1$, тоді $6=2B$, звідки $B=3$;
нехай $x=2$,тоді $18=-2C$, звідки $C=-9$;
нехай $x=3$, тоді $30=6$, звідки $D=5$.
Таким чином

$$\frac{12x-6}{x^4-6x^3+11x^2-6x}=\frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}-\frac{9}{x-2}+\frac{5}{x-3}.$$

2. *Інтегрування раціональних дробів*

Спочатку розглянемо інтегрування елементарних дробів всіх типів.

Інтеграли $\int\frac{A}{x-k}dx$ і $\int\frac{A}{(x-k)^m}dx$, $m>1$ від елементарних дробів типів 1 і 2 табличні:

$$\int\frac{A}{x-k}dx=A\ln|\,x-k\,|+C,$$

$$\int\frac{A}{(x-k)^m}dx=\frac{A}{1-m}\cdot\frac{1}{(x-k)^{m-1}}+C.$$

Для обчислення інтеграла

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$$

тричлен x^2+px+q доповнимо до повного квадрата і застосуємо підстановку

$$x+\frac{p}{2}=t.$$

Тоді в новому аргументі t маємо інтеграл

$$\int \frac{\alpha t + \beta}{t^2 \pm r^2}\, dt,$$

де α, β, r – певні числа.

Останній інтеграл записуємо у вигляді суми двох інтегралів

$$\int \frac{\alpha t + \beta}{t^2 \pm r^2}\, dt = \alpha \int \frac{t\,dt}{t^2 \pm r^2} + \beta \int \frac{dt}{t^2 \pm r^2} = \frac{\alpha}{2} \int \frac{2t\,dt}{t^2 \pm r^2} + \beta \int \frac{dt}{t^2 \pm r^2} =$$

$$= \frac{\alpha}{2} \int \frac{d\left(t^2 \pm r^2\right)}{t^2 \pm r^2} + \beta \int \frac{dt}{t^2 \pm r^2}.$$

Останні легко обчислюються за допомогою формул 2, 15 і 16 таблиці основних інтегралів.

Інколи трапляється, що вираз $mx + n$ дорівнює точному значенню похідної тричлена $ax^2 + bx + c$ або пропорціональний їй. Тоді

$$\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}\, dx = \lambda \int \frac{d\left(ax^2 + bx + c\right)}{ax^2 + bx + c} = \lambda \ln\left| ax^2 + bx + c \right| + C,$$

де λ – коефіцієнт пропорціональності, а обчислюваний інтеграл є табличним.

Залишається розглянути правило інтегрування дробів типу 4 і навести відповідні приклади.

Це інтеграли виду

$$I = \int \frac{Bx + C}{\left(x^2 + px + q\right)^{\mu}}\, dx,$$

де μ – натуральне число, а тричлен $x^2 + px + q$ має не дійсні, а уявні корені.

Використовуючи вже відому нам підстановку $x + \frac{p}{2} = t$, для якої $q = \frac{p^2}{4} = r^2 > 0$, приведемо інтеграл до виду

$$I = \int \frac{Bt + G}{\left(t^2 + r^2\right)^{\mu}}\, dt,$$

де $G = C - \frac{Bp}{2}$.

Представило I в виді суми двох інтегралів:

$$I = B \int \frac{t\,dt}{\left(t^2 + r^2\right)^{\mu}} + G \int \frac{dt}{\left(t^2 + r^2\right)^{\mu}}.$$

Перший із цих інтегралів можна привести до табличного виду:

$$t^2 + r^2 = z, \quad 2tdt = dz, \quad tdt = \frac{dz}{2},$$

тоді

$$B\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+r^2\right)^{\mu}} = \frac{B}{2}\int \frac{dz}{z^{\mu}} = \frac{B}{2}\cdot\frac{z^{-\mu+1}}{-\mu+1}+C^*.$$

Для обчислення інтеграла $I_\mu = \int \frac{dt}{\left(t^2+r^2\right)^{\mu}}$ застосуємо спеціальний прийом:

$$I_\mu = \frac{1}{r^2}\int \frac{\left(t^2+r^2\right)-t^2}{\left(t^2+r^2\right)^{\mu}}\,dt = \frac{1}{r^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+r^2\right)^{\mu-1}} - \frac{1}{r^2}\int \frac{t^2\,dt}{\left(t^2+r^2\right)^{\mu}} =$$

$$= \frac{1}{r^2} I_{\mu-1} - \frac{1}{r^2}\int \frac{t\cdot t\,dt}{\left(t^2+r^2\right)^{\mu}} = \frac{1}{r^2} I_{\mu-1} - \frac{1}{r^2}\int t\cdot d\left[\frac{1}{2(1-\mu)}\frac{1}{\left(t^2+r^2\right)^{\mu-1}}\right]$$

$$I_\mu = \int \frac{dt}{\left(t^2+r^2\right)^{\mu}} = \frac{1}{r^2} I_{\mu-1} - \frac{1}{r^2}\left[\frac{t}{2(1-\mu)\left(t^2+r^2\right)^{\mu-1}} + \frac{1}{2r^2}\cdot\frac{2\mu-3}{(\mu-1)}\int \frac{dt}{\left(t^2+r^2\right)^{\mu-1}}\right]$$

$$I_\mu = \frac{1}{2r^2}\frac{1}{(\mu-1)\left(t^2+r^2\right)^{\mu-1}} + \frac{2\mu-3}{2r^2(\mu-1)} I_{\mu-1}, \quad I_{\mu-1} = \int \frac{dt}{\left(t^2+r^2\right)^{\mu-1}}$$

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2(2-2\mu)} = \frac{1}{r^2}\left(1+\frac{1}{2-2\mu}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{2-2\mu+1}{2(1-\mu)} = \frac{1}{r^2}\frac{-2\mu+3}{(1-\mu)} = \frac{1}{r^2}\frac{2\mu-3}{(\mu-1)}.$$

Одержана формула

$$I_\mu = \frac{1}{2r^2}\frac{1}{(\mu-1)}\left[\frac{1}{\left(t^2+r^2\right)^{\mu-1}} + (2\mu-3)I_{\mu-1}\right], \tag{8}$$

яка називається ***рекурентною;*** вона виражає інтеграл I_μ, що містить двочлен $\left(t^2+r^2\right)^{\mu}$ в знаменнику, через інтеграл такого же типу $I_{\mu-1}$, який містить двочлен $\left(t^2+r^2\right)^{\mu-1}$ також в знаменнику. Із інтегралів цього типу лише $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+r^2}$ є табличним; $I_1 = \frac{1}{r} arctg\,\frac{t}{2} + K$, $K = const$.

При обчисленні інтегралів I_μ ми повинні послідовно застосовуючи формулу (8), виразити I_μ через $I_{\mu-1}$, $I_{\mu-1}$ через $I_{\mu-2}$ і т.д., нарешті, I_2 через I_1

$$I_2 = \frac{t}{2r^2\left(t^2+r^2\right)} + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{1}{2} arctg\,\frac{t}{2} + K\right),$$

потім вираз I_3 і т.д., нарешті, знаходимо вираз I_μ.

Приклад 4. Знайти інтеграл $I = \int \frac{3x-5}{x^2+6x}dx$.

Розв'язання.

$$I=\int\frac{3x-5}{x^2+6x}dx=\left|\begin{matrix}x+3=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{3(t-3)-5}{t^2-3^2}dt=\int\frac{3t-14}{t^2-3^2}dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d\left(t^2-3^2\right)}{t^2-3^2}-14\int\frac{dt}{t^2-3^2}=\frac{3}{2}\ln\left|\,t^2-3^2\,\right|+\frac{14}{6}\ln\left|\frac{3+t}{3-t}\right|+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|\,x^2+6x\,\right|+\frac{7}{3}\ln\left|\frac{x+6}{x}\right|+C.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x+3}{x^2+6x+1}dx$.

Розв'язання.

$$I=\int\frac{x+3}{x^2+6x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+6x+1\right)}{x^2+6x+1}=\frac{1}{2}\ln\left|\,x^2+6x+1\,\right|+C.$$

Приклад 6. Знайти $I=\int\frac{x+4}{\left(x^2+2x+3\right)^3}\,dx$.

Розв'язання. Приймаємо

$$x+1=t,\ dx=dt.$$

Тоді

$$I=\int\frac{(t+3)dt}{\left(t^2+2\right)^3}=\int\frac{t\,dt}{\left(t^2+2\right)^3}+3\int\frac{dt}{\left(t^2+2\right)^3}=\left|\,t^2+2=z\,\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^3}+3I_3$$

$$I_3=\frac{1}{2\cdot2\cdot2}\left[\frac{t}{\left(t^2+2\right)^2}+3I_2\right]=\frac{1}{8}\frac{t}{\left(t^2+2\right)^2}+\frac{3}{8}I_2,$$

$$I_2=\frac{1}{2\cdot2\cdot1}\left[\frac{t}{\left(t^2+2\right)^1}+I_1\right]=\frac{t}{4\left(t^2+2\right)}+\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Нарешті

$$I=-\frac{1}{4\left(t^2+2\right)^2}+3\left[\frac{t}{8\left(t^2+2\right)^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{t}{4\left(t^2+2\right)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]+C=$$

$$=\frac{3t-2}{8\left(t^2+2\right)^2}+\frac{9t}{32\left(t^2+2\right)}+\frac{9}{8\cdot4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=\frac{3t-2}{8\left(t^2+2\right)^2}+\frac{9t}{32\left(t^2+2\right)}+\frac{9}{32\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C.$$

$$I=\frac{3x+1}{8\left(x^2+2x+3\right)^2}+\frac{9x+9}{32\left(x^2+2x+3\right)}+\frac{9}{32\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

3.Загальне правило інтегрування будь-якого раціонального дробу

1. Якщо дріб неправильний, то спочатку виділяємо цілу частину шляхом ділення чисельника на знаменник, а потім записуємо дріб у вигляді суми цілої частини і правильного раціонального дробу.
2. Робимо розклад знаменника правильного дробу на множники і представляємо дріб у вигляді суми елементарних.
3. Інтегруємо цілу частину і суму елементарних дробів.

Приклад 7. Знайти $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$.

*Розв'язання***.** Підінтегральна функція є неправильним раціональнидробом, тому спочатку виділяємо цілу частину

$$\begin{array}{rl}
-\begin{array}{l} x^5 + x^4 - 8 \\ x^5 - 4x^3 \end{array} & \left| \begin{array}{l} x^3 - 4x \\ \hline x^2 + x + 4 \end{array} \right. \\ \hline
-\begin{array}{l} x^4 + 4x^3 - 8 \\ x^4 - 4x^2 \end{array} & \\ \hline
-\begin{array}{l} 4x^3 + 4x^2 - 8 \\ 4x^3 - 16x \end{array} & \\ \hline
4x^2 + 16x - 8 &
\end{array}$$

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}$$

Розкладаємо знаменник на множники та представляємо дріб у вигляді суми елементарних

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Приводимо дроби до загального знаменника

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{(A+B+C)x^2 + 2(B-C)x - 4A}{x(x-2)(x+2)},$$

$$4x^2 + 16x - 8 = (A+B+C)x^2 + 2(B-C)x - 4A.$$

Запишемо та розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} A + B + C = 4, \\ 2(B - C) = 16, \\ -4A = -8, \end{cases}$$

звідки $A = 2$, $B = 5$, $C = -3$. В результаті маємо

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}+\frac{-3}{x+2}.$$

Таким чином,

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int\left(x^2+x+4\right)dx+\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{5}{x-2}dx+\int\frac{-3}{x+2}dx=$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

Лекція 7.

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. НЕВЛАСНИЙ ІНТЕГРАЛ. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

План лекції

1. *Поняття визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца.*
2. *Властивості визначеного інтеграла.*
3. *Методи обчислення визначених інтегралів (метод інтегрування частинами, заміна змінної).*
4. *Геометричне та фізичне застосування визначених інтегралів.*
5. *Економічні застосування визначених інтегралів*
6. *Невласні інтеграли першого роду.*
7. *Невласні інтеграли другого роду.*

1.Поняття визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца.

Нехай на відрізку $[a, b]$ визначена функція $f(x)$. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n частин точками

$$a=x_0<x_1<x_2<....<x_{i-1}<x_i<...<x_n=b.$$

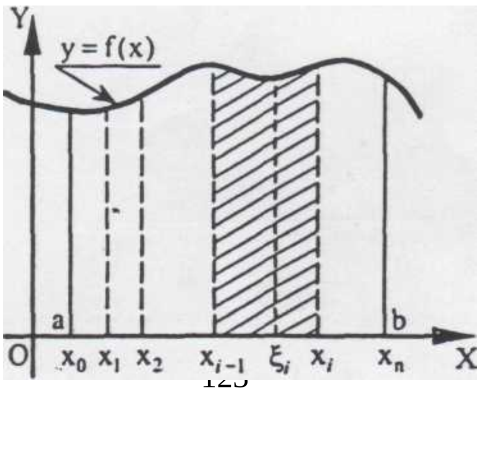


Рис. 1 - До поняття визначеного іннеграла

Виберемо на кожному інтервалі (x_{i-1}, x_i) довільну точку ξ. Суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i; \tag{1}$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ називають ***інтегральноюсумою функції*** f(x) ***на відрізку*** [a, b].

Найбільше значення Δx_i для даного розбиття відрізка [a; b] позначають символом max Δx_i.

Якщо існує скінчена границя інтегральної суми (1) при умові max $\Delta x_i \to 0$, то її називають ***визначеним інтегралом функції*** f(x) ***в межах від a до b*** і позначають

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i. \tag{2}$$

Функція f(x) в такому випадку називається ***інтегровною на відрізку [a; b].***

У виразі (2) функцію f(x) називають підінтегральною функцією, змінну x змінною інтегрування, числа a та b — відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування.

Для інтегровності функції достатньо, щоб на відрізку [a; b] вона була неперервна, або ж мала скінчену кількість розривів першого роду.

Якщо $F(x)$ яка-небудь первісна функція для $f(x)$, то за означенням

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{3}$$

При $a = b$ за означенням приймається $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Рівність (3) називається ***формулою Ньютона-Лейбніца***. Різницю $F(b) - F(a)$ коротко записуємо як $F(x)\Big|_a^b$, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Таким чином, для обчислення визначеного інтеграла необхідно знайти первісну, тобто невизначений інтеграл, а потім застосувати формулу Ньютона-Лейбніца. Наприклад,

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x}dx = \int_0^8 x^{1/3}dx = \frac{3x^{4/3}}{4}\Bigg|_0^8 = \frac{3}{4}\sqrt[3]{8^4} = \frac{3}{4}\cdot 8\cdot 2 = 12; \qquad \int_1^2 e^x dx = e^x\Big|_1^2 = e^2 - e.$$

2.Властивості визначеного інтеграла

1.Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz \tag{5}$$

2.Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0\,. \tag{6}$$

3.Від переставлення меж інтегрування інтеграл змінює знак на ротилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,. \tag{7}$$

$$\left(\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)dx\right)$$

4.Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \tag{8}$$

5.Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтервалів

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx \tag{9}$$

6.Якщо відрізок інтегрування розбито на частини, то визначений інтеграл по всьому відрізку дорівнює сумі визначених інтегралів по його частинам, тобто якщо $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,. \tag{10}$$

Доведення.

$$\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a); \quad \int_c^b f(x)dx = F(b) - F(c)$$

тоді

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx\,.$$

Формула (5) залишається в силі при будь-якому розташуванні чисел a, b, c. Наприклад, $a < b < c$, тоді

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx\,.$$

Звідки

$$\underline{\underline{\int_a^b f(x)dx}} = \int_a^c f(x)dx - \underbrace{\int_b^c f(x)dx}_{} =$$

міняємо межі інтегрування

$$= \underline{\underline{\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}}$$

7. Т***еорема про середнє***. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то на цьому відрізку знайдеться така точка c, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \tag{11}$$

Д**оведення**: Нехай $F(x)$ - первісна до функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

До різниці $F(b) - F(a)$ застосуємо теорему Лагранжа:

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx .$$

8. Якщо функція $f(x)$ додатна $f(x) > 0$ для будь-якого $x \in [a,b]$, то визначений інтеграл на цьому відрізку також додатний

$$\int_a^b f(x)dx > 0 .$$

9. Якщо функція $f(x)$ від'ємна $f(x) < 0$ для будь-якого $x \in [a,b]$, то визначений інтеграл на цьому відрізку також від'ємний

$$\int_a^b f(x)dx < 0 .$$

10. Якщо φ(x)≤f(x) для будь-якого x є [a; b], то $\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b f(x)dx.$

Розглянемо декілька прикладів:

1. $\int_0^1 \frac{x + arctgx}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{arctgxdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \int_0^1 d(arctgx)\cdot arctgx =$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|_0^1 + \frac{(arctgx)^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{(arctg1)^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\ln 2 + \frac{\pi^2}{16}\right);$$

2. $\int_0^\pi (2x - \sin x)dx = \left(x^2 + \cos x\right)\Big|_0^\pi = \pi^2 - 1 - 1 = \underline{\underline{\pi^2 - 2}}$.

1. *Методи обчислення визначених інтегралів*

Знаходження визначених інтегралів методом інтегрування частинами

Застосування методу інтегрування частинами до знаходження означеного інтеграла полягає у використанні формули:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du, \qquad (12)$$

де u и та v — деякі функції. Застосовуючи метод інтегрування частинами до знаходження визначеного інтеграла, діють аналогічно його застосуванню до знаходження невизначеного інтеграла.

Прикла 1. Знайти визначений інтеграл $\int_1^e x \cdot \ln x \, dx$.

Розв'язання. а) Застосуємо метод інтегрування частинами. Позначимо $u = \ln x$, тоді $dv = xdx.$ Звідси знаходимо:

Застосуємо метод інтегрування частинами. Позначимо $u = \ln x$, тоді $dv = xdx.$ Звідси знаходимо:

$$du = (\ln x)' \, dx = \frac{dx}{x} \text{ і } v = \frac{x^2}{2}.$$

Тоді

$$I = \int_1^e x \cdot \ln x \, dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = xdv & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2 \ln x}{2}\Bigg|_1^e - \int_1^e \frac{x^2 dx}{2x} = \frac{e^2 \ln e}{2} - \frac{1^2 \ln 1}{2} - \int_1^e \frac{x\,dx}{2} =$$

$$= \frac{e^2 \cdot 1}{2} - \frac{1 \cdot 0}{2} - \int_1^e \frac{x\,dx}{2} = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x\,dx}{2}. \qquad (*)$$

Останній інтеграл є табличним. За формулою Ньютона–Лейбніца отримаємо:

$$\int_1^e \frac{x\,dx}{2} = \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^e = \frac{e^2 - 1}{4}.$$

Підставивши отриманий вираз в (*), одержимо шуканий результат:

$$I = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{2e^2 - e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі

Метод заміни змінної, або підстановки у визначеному інтегралі базується на використанні формули:

$$\int_{X_2}^{X_1} f(x)dx = \int_{T_1}^{T_2} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt,$$

де f(x) = f(φ(t)) — складена функція змінної t, причому $x_1 = \varphi(t_1)$ і $x_2 = \varphi(t_2)$.

Метод заміни змінної, або підстановки у визначеному інтегралі потребує перетворення підінтегрального виразу і відшукання меж інтегрування для нової змінної. Таким чином відпадає потреба повертатися в кінцевому розв'язку до старої змінної. Саме цим відрізняються методи заміни змінної у визначеному і невизначеному інтегралах .

Приклад 2. Знайти визначений інтеграл

$$\int_{-2}^{11} \frac{(2x-3)dx}{\sqrt[3]{(2x+5)^2}+2\cdot\sqrt[3]{2x+5}+4}$$

Розв'язання. Виконаємо заміну змінної $2x+5=t^3$. Диференціюючи цю рівність, знаходимо: $2dx=3t^2dt$, звідки: $dx=\frac{3}{2}\cdot t^2dt$.

Виразимо всі доданки і множники підінтегральної функції через нову змінну t: $\sqrt[3]{2x+5}=t$, $\sqrt[3]{(2x+5)^2}=t^2$, $2x-3=2x+5-8=t^3-8.$

Визначимо межі інтегрування для змінної t:
якщо $x=-2$, то $t=\sqrt[3]{2x+5}=\sqrt[3]{-4+5}=1$,
якщо $x=11$, то $t=\sqrt[3]{2x+5}=\sqrt[3]{22+5}=3$.

Отримаємо

$$I=\int_{-2}^{11} \frac{(2x-3)dx}{\sqrt[3]{(2x+5)^2}+2\cdot\sqrt[3]{2x+5}+4}=\int_{1}^{3}\frac{\left(t^3-8\right)}{t^2+2t+4}\cdot\frac{3}{2}t^2\,dt.$$

Враховуючи формулу різниці кубів, матимемо:

$$t^3-8=(t-2)\cdot\left(t^2+2t+4\right).$$

Виконавши алгебраїчні перетворення, отримаємо:

$$I=\frac{3}{2}\int_{1}^{3}\frac{(t-2)\left(t^2+2t+4\right)t^2\,dt}{t^2+2t+4}=\frac{3}{2}\int_{1}^{3}(t-2)t^2\,dt=\frac{3}{2}\int_{1}^{3}\left(t^3-2t^2\right)dt=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\int_{1}^{3}t^3dt-2\int_{1}^{3}t^2\,dt\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{t^4}{4}-\frac{2t^3}{3}\right)\Bigg|_{1}^{3}=\frac{3}{2}\left(\frac{81}{4}-\frac{1}{4}-18+\frac{2}{3}\right)=4.$$

4.Геометричні застосування визначених інтегралів

1) Обчислення площ плоских фігур

Площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної функції $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$, прямими $x=a$ і $x=b$ та віссю OX, обчислюється за формулою

$$S=\int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (13)$$

Площа фігури, обмеженої графіками функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$, прямими $x = a$, $x = b$, які можуть вироджуватись у точки, $f_1 \le f_2$, $x \in [a, b]$, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \tag{14}$$

Площа криволінійної трапеції у випадку, коли крива, що її обмежує зверху, задана параметрично рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, а межі інтегрування визначаються з рівнянь $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, причому $a \le x(t) \le b$ при $\alpha \le t \le \beta$, обчислюється за формулою

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt \tag{15}$$

Площа криволінійного сектора, обмеженого дугою, заданою в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, і двома променями $\varphi = \varphi_1$ і $\varphi = \varphi_2$, визначається так

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi \tag{16}$$

Наведемо приклади обчислювання площ плоских фігур, обмежених заданими лініями.

Приклад 3. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = 4x - x^2$ і віссю OX.

Розв'язання. Парабола перетинає вісь OX в точках $O(0;0)$ і $M(4;0)$. Тому площа дорівнює

$$S = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]\Bigg|_0^4 = \frac{33}{3} \text{ (од.}^2\text{)}$$

Приклад 4 Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої однією аркою циклоїди $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ і віссю OX.

Розв'язання.

Тут $dx = 2(1 - \cos t)dt$ і t змінюється від $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi$. Тому

$$S = \int_0^{2\pi} 2^2(1 - \cos t)^2 dt = 4\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt =$$

$$= 4\left[t - 2\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]\Bigg|_0^{2\pi} = 12\pi$$

Приклад 5. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої лемніскатою $\rho^2 = 2\cos 2\varphi$

Розв'язання. Четвертій частині шуканої площі відповідає зміна φ від 0 до $\frac{\pi}{4}$, а тому

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\varphi d\varphi = 2\sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2.$$

2) Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Ця операція може бути виконана в декартових та полярних координатах, а також у випадку параметричного запису кривої ($x = x(t),\ y = y(t)$). У всіх випадках функція, що задає форму кривої, повинна бути неперервно диференційованою. Довжина відповідної дуги цієї кривої в декартових координатах визначається формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y_x'^2}\, dx \tag{17}$$

неперервноінтегрована функція.

В параметричній формі ця формула має вид

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt \tag{18}$$

Якщо функція, що задає форму кривої, є неперервно диференційованою, то відповідна формула в полярних координатах $\rho,\ \varphi\ \ (\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta)$ має вид

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\, d\varphi. \tag{19}$$

Приклад 6. Знайти довжину дуги плоскої кривої $y^2 = x^3$ від $x = 0$ до $x = 1\ (y \ge 0)$.

Розв'язання. Диференціювання рівняння кривої дає $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Довжина дуги дорівнює

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right).$$

Приклад 7. Знайти довжину дуги кривої $x = \cos^5 t,\ y = \sin^5 t$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Знайдемо похідні за параметром t: $x_t' = -5\cos^4 t \cdot \sin t,\quad y_t' = 5\sin^4 t \cdot \cos t$.

Довжина дуги дорівнює за формулою (18)

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(-5\cos^4 t\sin t\right)^2 + \left(5\sin^4 t\cos t\right)^2}\, dt = 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t}\, dt =$$

$$=\frac{5}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 2t}\,dt=-\frac{5}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cos^2 2t}\,d\left(\cos 2t\right)=$$

$$=-\frac{5}{8\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\cdot\sqrt{1+3\cos^2 2t}+\frac{1}{2}\ln\sqrt{3}\cos 2t+\sqrt{1+3\cos^2 2t}\right]\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{5}{8}\left[2-\frac{\ln\left(2-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}\right].$$

Приклад 8. Знайти довжину дуги кривої $\rho=\sin^3\frac{\varphi}{3}$ від $\varphi_1=0$ до $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Маємо $\rho'=\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$. Довжина дуги дорівнює (19):

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3}+\left(\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\right)^2}\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi-\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right).$$

3) Обчислення об'ємів тіл обертання

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі ОХ кривої $y=f\left(x\right)$, відрізком осі абсцис $a\le x\le b$ і двома вертикалями $x=a$ і $x=b$, обчислюється за формулою

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b f^2\left(x\right)dx \qquad (20)$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі OY фігури, обмеженої кривою $x=\varphi\left(y\right)$, відрізком вісі ординат $c\le y\le d$ і двома паралелями $y=c$ і $y=d$, обчислюється за формулою

$$V_y=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d\varphi^2\left(y\right)dy \qquad (21)$$

Приклад 9. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі ОХ однієї напівхвилі синусоїди $y=\sin x\ \left(0\le x\le\pi\right)$.

Розв'язання.

$$V_x=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\pi\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}\ (\text{од.}^3)$$

Приклад 10. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі OY фігури, обмеженої параболою $y=x^2$, віссю OY і прямою $y=1$.

Розв'язання. За формулою (21), враховуючи, що $c=0,\quad d=1,\quad x^2dy=ydy$, маємо

$$V_y = \pi\int_0^1 y dy = \pi\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ \left(од^3\right).$$

4) Обчислення об'ємів тіл з відомим поперечним перерізом

Якщо відомий закон зміни площі поперечного перерізу тіла $S = S(x)$, де ОХ – деякий вибраний напрям, то об'єм тіла, коли $a \le x \le b$, обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b S(x)dx\,. \qquad (22)$$

Приклад 11. Знайти об'єм V піраміди з основою B і висотою H.

Розв'язання. В якості осі *ОХ* приймемо пряму, що проходить через вершину *О* піраміди, перпендикулярно її основі.

Хай S – площа перерізу піраміди площиною, яка знаходиться на віддалі x від вершини. Так як площі паралельних перерізів піраміди відносяться як квадрати віддалей їх від вершин, то маємо $\dfrac{S}{B} = \dfrac{x^2}{H^2}$, звідки

$$S = \frac{B}{H^2}x^2.$$

В результаті одержуємо

$$V = \int_0^H Sdx = \frac{B}{H^2}\int_0^H x^2dx = \frac{B}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3} = \frac{BH}{3},$$

що узгоджується з відомою формулою стереометрії.

5) Площа поверхні обертання

Площа поверхні, що утворюється при обертанні навколо осі *ОХ* кривої $y = f(x),\ a \le x \le b,\ f(x) \ge 0$, обчислюється за формулою

$$P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\ dx\,. \qquad (23)$$

Якщо криву *АВ* задано параметрично рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta$, де функції $x,\ y,\ x'$ і y' неперервні на $[\alpha,\ \beta]$, то

$$P = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\ dt\,, \qquad (24)$$

причому значення параметра α відповідає точці *А*, а значення β – точці *В*.

Приклад 12. Знайти площу поверхні обертання навколо осі *ОХ* дуги кубічної параболи $y = x^3$ при $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$.

Розв'язання. Знаходимо похідну $y' = 3x^2$, тому за формулою, маємо

$$P = 2\pi\int_0^{1/2} x^3\sqrt{1 + 9x^4}\ dx\,.$$

З метою обчислення інтеграла покладемо $1+9x^4=z$, тоді $36x^3dx=dz$, якщо $x=0$, то $z=1$; якщо $x=1/2$, то $z=25/16$. Таким чином,

$$P=2\pi\int_1^{25/16}\sqrt{z}\,\frac{dz}{36}=\frac{\pi}{18}\int_1^{25/16}z^{1/2}dz=\frac{\pi}{18}\cdot\frac{2}{3}z^{3/2}\Big|_1^{25/16}=\frac{\pi}{27}\left(\frac{25}{16}\cdot\frac{5}{4}-1\right)=\frac{61\pi}{1728}\ \left(од^2\right)$$

.

5.Економічні застосування визначених інтегралів

1) Застосування в динамічних процесах

Економічний зміст визначеного інтеграла: він чисельно дорівнює обсягу виробленої продукції підприємством (фірмою) з продуктивністю праці $\mathrm{f}=\mathrm{f(t)}$ за інтервал часу $[0,T]$, тобто

$$q=\int_0^T f(t)dt \tag{35}$$

В економічній теорії виробнича функція Кобба—Дугласа, яка враховує технічний прогрес, має вигляд $f(t)=AK^{\alpha}L^{\beta}e^{\lambda t}$, де K - обсяг фондів; L — обсяг трудових ресурсів; λ — інтенсивність розвитку вибництва, пов'язаного з технічним прогресом. Тоді згідно з економічим змістом виробничої функції Кобба—Дугласа можна показати, що обсяг виробленої продукції визначається за формулою (35).

Приклад 21. Знайдемо обсяг продукції, виробленої фірмою за два роки, якщо виробнича функція Кобба—Дугласа мас вигляд

$$f(t)=(1+2t)e^{5t}$$

Розв'язання. За формулою (35) дістанемо

$$q=\int_0^2(1+2t)e^{5t}dt=\left|\begin{matrix}u=1+2t, & du=2dt\\ dy=e^{5t}dt, & y=\frac{1}{5}e^{5t}\end{matrix}\right|=\frac{1+2t}{5}e^{5t}\Big|_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2 e^{5t}dt=$$

$$=e^{10}-\frac{1}{5}e^0-\frac{1}{10}e^{5t}\Big|_0^2=e^{10}-0{,}2-\frac{1}{10}(e^{10}-e^0)=0{,}9e^{10}-0{,}1$$

2) Обчислення середніх значень економічних функцій

В економічних задачах часто використовують теорему про середнє значення (властивість визначеного інтеграла).

Якщо *C=C(t), R=R(t), P=P(t)* – відповідно змінні витрати, доход і прибуток підприємства (фірми), то їхні середні значення за час від $t=t_0$ до $t=t_1$, обчислюють за формулами

$$C_{сер} = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} C(t)dt, \quad R_{сер} = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} R(t)dt, \quad P_{сер} = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} P(t)dt \qquad (36)$$

Приклад 22. Знайти середній доход за 10 місяців поточного року, якщо задано функцію доходу фірми $R(t) = 3t^2 + 2t - 1$, де t — час.

Розв'язання. За умовою середній доход фірми потрібно визначити за інтервал часу від $t = 0$ до $t = 10$. Використовуючи формулу (11.11), дістанемо

$$R_{сер} = \frac{1}{10}\int_0^{10}(3t^2 + 2t - 1)dt = \frac{1}{10}(t^3 + t^2 - t)\Big|_0^{10} =$$

$$= \frac{1}{10}(10^3 + 10^3 - 10) = 109 \text{ (умов. грош. од.)}$$

При вивченні диференціального числення розглядалися різні граничні функції (граничний доход, граничні витрати, граничний прибуток). Було показано, шо граничні функції можна дістати з відповідних економічних функцій диференціюванням. Інтегрування дає змогу розв'язати обернену задачу: знайти дану економічну функцію за відомою граничною функцією.

Якщо $C'(x)$, $R'(x)$, $P'(x)$ — відповідно функції граничних витрат, доходу та прибутку підприємства (фірми), то при реалізації x одиниць товару (продукції) зміни витрат, доходу й прибутку зі збільшенням реалізації виробленої продукції від a до b одиниць обчислюють за формулами

$$C(b) - C(a) = \int_a^b C'(x)dx, \quad R(b) - R(a) = \int_a^b R'(x)dx, \; P(b) - P(a) = \int_a^b P'(x)dx.$$

Приклад 23. Задано граничний прибуток фірми $P'(x)$ **=** *23,5-0,01x*Визначити зростання прибутку, якщо реалізація продукції збільшується з*1000* до *1500* одиниць.

Розв'язання. Прибуток фірми зросте на

$$P(1500) - P(1000) = \int_{1000}^{1500}(23{,}5 - 0{,}01x)dx = \left(23{,}5x - 0{,}01\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1000}^{1500} =$$

$$= 35350 - 11250 + 5000 = 5500 \text{ (грош.од.)}$$

Приклад 24. Задано граничний доход фірми $R'(x)$ - *15 - 0,01x*Знайти функцію доходу й визначити співвідношення між ціною одиницьпродукції та обсягом проданої продукції.

Розв'язання. Функцію доходу фірми можна знайти інтегруванням граничногодоходу, тобто

$$R(x) = \int R'(x)dx = \int(15 - 0{,}01x)dx = 15\int dx - 0{,}01\int xdx =$$

$$=15x-0{,}01\frac{x^2}{2}+C=15x-0{,}005x^2+C$$

Для визначення константи *С* використовуємо той факт, що доход має дорівнювати нулю, якщо не продано жодної одиниці продукції,тобто при *х = 0* дістанемо 0 = 15·0 - 0,005 • 0^2 + С. Тоді ***С*** = 0. Отже,функція доходу фірми має вигляд

$$R(x)=15x-0{,}005x^2.$$

Якщо ціна кожної одиниці проданої фірмою продукції *р* і продано***х*** одиниць, то її доход $R(x)=px$. Отже, $px=15x-0{,}005x^2$. Тому шукане співвідношення описується рівністю $p=15-0{,}005x$.

3) Визначення приросту капіталу за відомими інвестиціями

Розглянемо задачу визначення капіталу (основних фондів) за відомими чистими інвестиціями (капіталовкладеннями). Чисті інвестиції —це загальні інвестиції, які надходять в економіку за певний інтервал(зазвичай за рік), із відрахуванням інвестицій на відшкодування основних фондів (витраченого капіталу). Таким чином, за одиницючасу капітал збільшується на обсяг чистих інвестицій.

Припустимо, що капітал *К*= *K(t)* збільшується за одиницю часу tна обсяг чистих інвестицій *І* = *I(t).* Тоді чисті інвестиції — це похіднавід капіталу за часом t, тобто *I(t)* = *К'(t).*

Часто в економічних дослідженнях доводиться знаходити прирісткапіталу за інтервал часу від *t1* до *t2,* тобто Δ*K*= *K(t2) – K(t1).* Оскільки*K*=*K(t)* є первісною для функції *I* = *I(t)*, то, використовуючи фор-мулу, яка пов'язує первісну з визначеним інтегралом, можна записати

$$\Delta K=K(t_2)-K(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}I(t)dt$$

Приклад 25*.* За даними чистими інвестиціями I(t)=50 000t обчислити прирісткапіталу з першого по третій рік і визначити, за скількироків приріст капіталу становитиме 25 000 000 умов. грош. од.

Розв'язання. Приріст капіталу знаходимо за інтервал часу від t_1 = 1 до t_2 = 3. Тоді

$$\Delta K=K(3)-K(1)=\int_1^3 50000t\,dt=25000t^2\Big|_1^3=200000 \text{ умов. грош. од.}$$

За умовою задачі $\Delta K=25000t^2\Big|_0^T=25000000$, тобто $T^2=100$, звідки *Т*=10. Отже, потрібно 10 років, щоб приріст капіталу досяг25 млн. умов. грош. од.

4) Оцінка ступеня нерівномірності розподілу доходів населення

Розглянемо функцію *y =f(x)*, яка характеризує нерівномірний роз-поділ доходів населення, де *y* — частка сукупного доходу, яку одержуєчастина *x* населення. Графік цієї функції називають ***кривою Лоренца.*** Очевидно, що $0 \le f(x) \le x$ при $x \in [0;1]$, і нерівномірність розподілу доходів тим вища, чим більша площа фігури OAB.

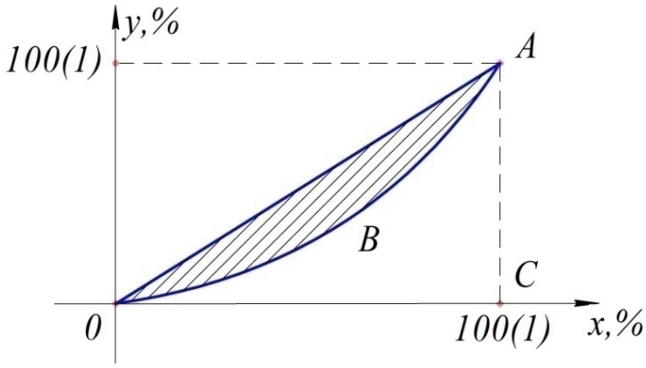


Рис. 2 – Коефіцієнт Джині

Тому як міру нерівномірності використовують ***коефіцієнт Джині*** *k*,який дорівнює відношенню площі фігури OAB до площі трикутника OAC.

Приклад 2 6 За даними досліджень розподілу доходів населення деякої країни крива Лоренца описується функцією $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, де y —частка сукупного доходу, яку одержує частина x населення. Обчислитикоефіцієнт Джині.

Розв'язання. Коефіцієнт Джині обчислюється за формулою

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2S_{OBAC},$$

оскільки $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$. Тоді

$$S_{OBAC} = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Зробивши заміну $x = \sin t,\ dx = \cos t\ \mathrm{dt},\quad t_в = \pi/2,\quad t_н = 0$, обчислимо інтеграл:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 x} \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, коефіцієнт Джині

$$k = 1 - 2S_{OBAC} = 1 - 2\left(1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx\right) = 2\frac{\pi}{4} - 1 \approx 0{,}57.$$

Досить велике значення коефіцієнта Джині свідчить про суттєво нерівномірний розподіл доходів населення даної країни.

5) Застосування в задачах реалізації товарів

Розглянемо криву попиту деякого товару у вигляді $p = f(q)$. Якщо p — ціна одиниці товару, то загальна сума витрат напридбання товару обсягом q становить pq.

Через p_0 позначимо рівноважну ціну, а через q_0 —обсяг товару, який реалізується за ціною p_0 Точка рівноваги — це точ-ка перетину кривих попиту й пропозиції.

Припустимо, що товар обсягом q_0 не відразу весь потрапляє наринок, а надходить невеликими партіями, рівними Δq. Це поширена тактика реалізації товару. Мета продавця зрозуміла: підтримувати цінутовару, вишу за рівноважну. Після надходження першої партії товаруйого обсяг на ринку становить $q_1=\Delta q$. Ціна, що відповідає цьомуобсягові, знаходиться з кривої попиту й становить $p_1 = f(q_1)$.

Якщо величина Δq мала, то можна вважати, що вся партія реалізується за ціною p_1, а витрати споживача на цю партію товару станов-лять $p_1\Delta q$.

Після надходження на ринок другої партії товару обсягом Δq за-гальний обсяг його на ринку становить $q_2 = q_1 + \Delta q = 2\Delta q$, а відповіднаціна також визначається з кривої попиту й становить $p_2 = f(q_2)$

Можна вважати, що друга партія товару обсягом Δq реалізується заціною p_2, а витрати споживача на цю партію товару становлять $p_2\Delta q$.

Цей процес триває доти, доки дістанемо $q_n = q_0 = n\Delta q$. Для тогощоб потрапити в точку $q_0 = n\Delta q$, потрібно вибрати $\Delta q = q_0/n$.

Товар останньої *n-ої* партії реалізується за ціною $p_n = f(q_n) = f(q_0) = p_0$,тобто за рівноважною. Витрати споживачів на цю партію становлять$p_n\Delta q = p_0\Delta q$

Загальні витрати споживачів на загальний обсяг товару q_0:

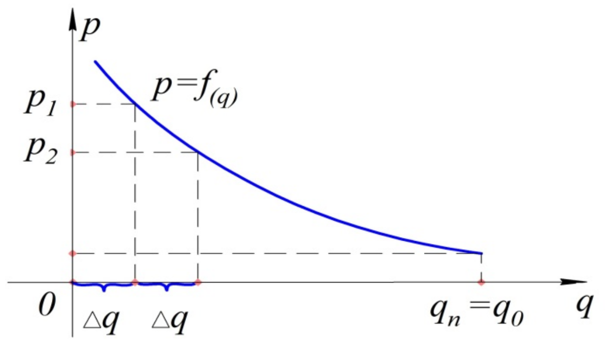


Рис.3 – Крива попиту товару

$$p_1\Delta q + p_2\Delta q + \ldots + p_n\Delta q = p_1(q_1)\Delta q + p_2(q_2)\Delta q + p_n(q_n)\Delta q = \sum_{k=1}^{n} p_k(q_k)\Delta q.$$

Із рисунку видно, що загальні витрати споживачів дорівнюють сумі площ прямокутників, яка, в свою чергу, наближено дорівнює визначеному інтегралу. Зі збільшенням n величина Δq відповідно як завгодно мала. Тоді наближена рівність перетвориться на точну. Отже, ***сумарні витрати споживачів*** $S_в$ обчислюються за формулою

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(q_k)\Delta q \approx \int_0^{q_0} f(q)dq. \qquad S_в = \int_0^{q_0} f(q)dq.$$

Надлишок споживача S_H **-** різниця між можливими й реальними витратами споживача в умовах ринку:

$$S_н = \int_0^q f(q)dq - p_0 q_0.$$

Геометричну інтерпретацію цього означення наведено на рисунку,де *p=f(q)* - крива попиту; (p_0, q_o) - точка рівноваги.

Приклад 27. Знайти надлишок споживача, якщо крива попиту визначається функцією p=f(q)=29-3q², а рівноважний обсяг товаруq₀ =2.

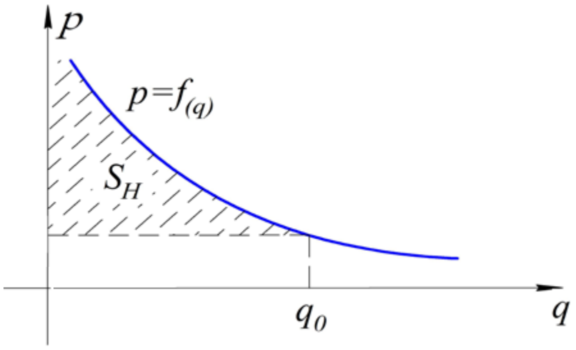


Рис.4 –До прикладу 27

Розв'язання. Підставивши значення q_0 = 2 у функцію попиту, дістанемо рівноважну ціну:

$$P_0 = f(q_0) = 29 - 3 \cdot 2^2 = 17.$$

Тоді матимемо

$$S_н = \int_0^q f(q)dq - p_0 q_0 = \int_0^2 (29 - 3q^2)dq - 17 \cdot 2 = (29q - q^3)\Big|_0^2 - 34 = 29 \cdot 2 - 8 - 34.$$

Розглянемо ще одне поняття ринкової економіки — ***додаткову вартість,*** або ***надлишок, виробника.*** Для цього візьмемо криву пропозиції деякого товару *p=f(q)*. Графік цієї кривої й точку рівноваги (p_0, q_o) (перетину з кривою попиту) показано на рисунку.

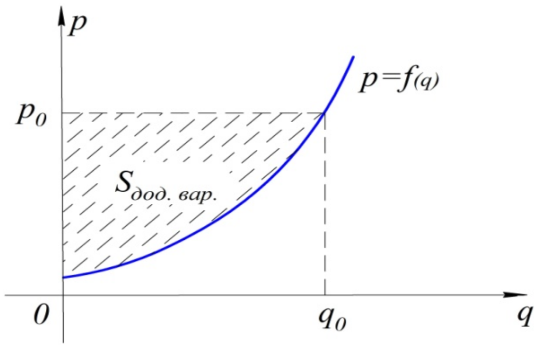


Рис.5 – Додаткова вартість

Завдяки ринковим відносинам як деякі споживачі мають змогупридбати товар за ціною, нижчою ніж та, яку вони готові були запла-тити, так і виробники іноді можуть продати товар за **вигіднішою** ціною, ніж та, з якою вони погоджувалися. Припускаючи, що весь товар обсягом q_0 буде реалізовано на ринку за ціною p_0, обчислимодоход споживачів: $R=p_0q_0$.

Нехай водночас обсяг товару, менший за q_0, виробники реалізуютьза ціною, нижчою, ніж p_0. Тоді додаткова вартість виробника обчислюється за формулою

$$S_{дод.вар.} = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} f(q)dq.$$

6. Невласні інтеграли першого роду (інтеграли з нескінченними межами інтегрування)

Поняття визначеного інтеграла було введено для скінченого проміжку інтегрування й від обмеженої на цьому проміжку функції. Якщо хоча б одна з цих умов на цьому проміжку не виконується, то визначений інтеграл як границя інтегральної суми не існує. Але під час розв'язування практичних задач виникає необхідність розглядати інтеграли на нескінченному проміжку й від необмежених функцій. Такі інтеграли називають ***невласними*** і поділяють на два типи – першого роду та другого роду.

а) Невласний інтеграл з нескінченною верхньою межею.

Якщо для певного інтеграла $\int_a^b f(x)dx \quad (a < b)$ при $b \to \infty$ існує границя, то ця границя називається ***невласним інтегралом першого роду (інтегралом із нескінченними межами інтегрування)***:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (37)$$

Алгебраїчно:

- якщо границя існує і скінчена, то говорять, що інтеграл збігається (існує);
- якщо скінченої границі немає, то говорять, що інтеграл не існує (розбігається).

Геометрично:

- площа обмежена;
- площі не існує.

Приклади 28-29:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_2^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2}$$ – інтеграл збігається;

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_3^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln x \Big|_3^b = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 3) = \infty$$ – інтеграл розбігається.

б) Невласний інтеграл першого роду з нескінченною нижньою межею інтегрування визначається аналогічним чином:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx \qquad a < b. \qquad (38)$$

Приклади 30-31:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{+a}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty} e^x \Big|_{+a}^{0} = \lim_{a\to-\infty}(1-e^a) = 1 - \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{e^a} = 1$$ – збігається;

$$\int_{-\infty}^{2}\frac{dx}{9^x} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{2} 9^{-x}dx = -\lim_{a\to-\infty}\frac{9^{-x}}{\ln 9}\Big|_{a}^{2} = -\frac{1}{\ln 9}\lim_{a\to-\infty}(9^{-2}-9^{-a}) =$$

$$= -\frac{1}{\ln 9}\cdot\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{81}-9^{-a}\right) = \infty$$ – розбігається.

в) Невласний інтеграл першого роду із двома нескінченними межами інтегрування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx. \qquad (39)$$

Приклади 32-33:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{b\to\infty} arctgx\Big|_{0}^{b} = 2\lim_{b\to\infty} arctgb = \frac{\pi}{2}\cdot 2 = \pi;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{2} e^{-x}dx + \lim_{b\to\infty}\int_{2}^{b} e^{-x}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_{a}^{2} + \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_{2}^{b} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}(-e^{-2}+e^{-a}) + \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+e^{-2}) =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} e^{-a} - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = \lim e^{\infty} - \lim e^{-\infty} = \infty.$$

Невласні інтеграли з нескінченними границями мають всі властивості визначених інтегралів.

Найбільш часто в прикладних науках використовують

1) Інтеграл Пуассона: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$;

2) Інтеграл Діріхле: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

7. .Невласні інтеграли другого роду (інтеграли від необмежених функцій)

а) Нехай $f(x)$ неперервна у всіх точках відрізка $[a,b]$ за винятком точки $x=c$, яка належить відрізку $[a,b]$ і в якій функція має розрив другого роду, тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\int_a^{c-h} f(x)dx + \lim_{h\to 0}\int_{c-h}^{b} f(x)dx \qquad (40)$$

б) Нехай $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, а в точці $x=c$ не існує, тобто $\lim\limits_{x\to c} f(x)\to\infty$, тоді:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\int_a^{c-h} f(x)dx + \lim_{h\to 0}\int_{c+h}^{b} f(x)dx. \qquad (41)$$

в) $\lim\limits_{x\to b} f(x)\to\infty$ не існує на правій межі інтегрування

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\int_a^{b-h} f(x)dx\ . \qquad (42)$$

г) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\to\infty$ не існує на лівій межі інтегрування

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\int_{a+h}^{b} f(x)dx\ . \qquad (43)$$

д) $f(x)$ не існує й на лівій, і на правій межі інтегрування

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\int_{a+h}^{c} f(x)dx + \lim_{h\to 0}\int_{c}^{b-h} f(x)dx. \qquad (44)$$

Ці інтеграли називають ***невласними інтегралами другого роду*** або ***інтегралами від необмежених функцій***.

Якщо границі в правих частинах цих рівностей існують й скінчені, то інтеграли називають *збіжними*, у протилежному випадкові – ***розбіжними***.

Приклади 34-37:

1. $\int_{-2}^{0}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{h\to 0}\int_{-2}^{h}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-2}^{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{h}\right) = \infty$ –інтеграл розбігається;

2. $\int_{1}^{3}\frac{dx}{x-1} = \lim\limits_{h\to 0}\int_{1+h}^{3}\frac{dx}{x-1} = \lim\limits_{h\to 0}\ln|x-1|\Bigg|_{1+h}^{3} = \lim\limits_{h\to 0}[\ln 2-\ln h] = \ln 2+\infty$ – розбігається;

3. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{h\to 0}\int_{-1+h}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim\limits_{h\to 0}\int_{0}^{1-h}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\arcsin x\Bigg|_{-1+h}^{0} + \arcsin x\Bigg|_{0}^{-1+h}\right] = -\lim_{h\to 0}\arcsin(-1+h) + \lim_{h\to 0}\arcsin(1-h) =$$

$= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$ – інтеграл збігається;

4. $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sin^2(x-1)} = \lim\limits_{h\to 0}\int_{0}^{1-h}\frac{dx}{\sin^2(x-1)} + \lim\limits_{h\to 0}\int_{1+h}^{2}\frac{dx}{\sin^2(x-1)} =$

$$= -\left(\lim_{h\to 0} ctg(x-1)\Big|_0^{1-h} + \lim_{h\to 0} ctg(x-1)\Big|_{1+h}^{2} \right) =$$

$$= -\lim_{h\to 0}\left[ctg(-h) - ctg(-1) + ctg1 - ctgh\right] = \infty$$ – інтеграл розбігається;

5. $$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[5]{2-x}} = \lim_{h\to 0}\int_1^{2-h} \frac{dx}{\sqrt[5]{2-x}} + \lim_{h\to 0}\int_{2+h}^{3} \frac{dx}{\sqrt[5]{2-x}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{-5\sqrt[5]{(2-x)^4}}{4}\Bigg|_1^{2-h} - \frac{5\sqrt[5]{(2-x)^4}}{4}\Bigg|_{2+h}^{3} \right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(-\frac{5}{4}h^{4/5} + \frac{5}{4} - \frac{5}{4} + \frac{5}{4}h^{4/5} \right) = 0$$ – інтеграл збігається.

Лекція 8.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

План лекції

1. *Основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь.*
2. *Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь.*
3. *Диференціальні рівняння першого порядку.*
4. *Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.*
5. *Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.*
6. *Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.*
7. *Диференціальні рівняння Бернуллі.*

1. Основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь

При дослідженні різноманітних процесів та явищ, що містять елементи динаміки, часто користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, до яких, крім незалежних величин і залежних від них шуканих функцій, входять також похідні або диференціали від невідомих функцій. Такі рівняння називають ***диференціальними***. Термін "диференціальне рівняння" був введений у 1576р. Лейбніцем.

Диференціальне рівняння називається ***звичайним,*** якщо невідома функція є функцією однієї змінної, і ***диференціальним рівнянням у частинних похідних***, якщо невідома функція є функцією багатьох змінних. Ми розглядатимемо лише звичайні диференціальні рівняння.

Диференціальним рівнянням n***- го порядку*** називають рівняння, яке пов'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідні y' , y'', ..., $y^{(n)}$ або диференціали до деякого порядку n:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \qquad (1)$$

Зауваження. В диференціальному рівнянні обов'язковою є лише наявність похідних або диференціалів; x та $y = y(x)$ можуть не входити явно в рівняння (1).

Порядком диференціального рівняння називають найвищий порядок похідної або диференціала від шуканої функції, яка входить у це рівняння.

Будь-яку n разів неперервно диференційовану функцію $y = \varphi(x)$, яка перетворює рівняння (1) в тотожність, називають ***розв'язком*** (або ***інтегралом***) ***диференціального рівняння*** (1), а графік цієї функції – ***інтегральною кривою*** диференціального рівняння (1). Якщо розв'язок диференціального рівняння задано в неявному вигляді $\Phi(x, y) = 0$, то його називають ***інтегралом диференціального рівняння***.

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називають ***інтегруванням*** цього рівняння.

n - параметричну сім'ю функцій $y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, яка містить n незалежних довільних сталих, називають ***загальним розв'язком диференціального рівняння*** (1), якщо вона є розв'язком цього рівняння при будь-яких значеннях сталих c_1, c_2, ... , c_n

Сукупність функцій, яка містить усі розв'язки даного рівняння, не завжди вдається виразити у вигляді явної функції незалежної змінної. Цю сім'ю можна записати у вигляді неявної функції $\Phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$, і тоді її називають ***загальним інтегралом рівняння (1).***

Зауваження. Кількість довільних сталих в загальному розв'язку диференціального рівняння дорівнює його порядку.

Надаючи в загальному розв'язку або загальному інтегралі диференціального рівняння певних конкретних значень сталим C_1, C_2, ... , C_n отримаємо ***частинний розв'язок*** або відповідно ***частинний інтеграл*** цього рівняння.

2. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь

1) Задача про вільне падіння матеріальної точки

Рух матеріальної точки масою m під дією зовнішніх сил описується другим законом Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$. Нехай точка рухається вздовж осі Ox, тоді її положення характеризується абсцисою в момент часу t, тобто $x(t)$. Швидкість матеріальної точки в момент часу t становитиме $v(t)=\dfrac{dx}{dt}$, а прискорення $a(t)=\dfrac{d^2x}{dt^2}$. Таким чином, функція $x(t)$ задовольняє диференціальному рівнянню другого порядку

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(t,\,x(t),\,\frac{dx}{dt}\right).$$

Для того, щоб визначити положення матеріальної точки в момент часу t, необхідно знати її положення та швидкість у початковий момент часу t_0:

$$x(t_0)=x_0,\qquad v(t_0)=\frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0}=v_0.$$

2) ***Задача про рекламу***

Нехай торговельними фірмами реалізується продукція, про яку в момент часу t знають лише $x(t)$ покупців із числа потенційних n. Після оголошення реклами швидкість зміни кількості покупців, яким відомо про продукцію, пропорційна як кількості покупців, що знають про товар, так і кількості покупців, котрим про нього нічого не відомо.

Оскільки швидкість зміни кількості покупців, що знають про продукцію, виражається похідною $\dfrac{dx}{dt}=\mathrm{x}'$, то одержимо диференціальне рівняння у виді

$$x'(t)=k\cdot x(t)\cdot(n-x(t)),$$

де $x(t)$- кількість покупців, що знають про продукцію; $(n-x(t))$- кількість покупців, що не знають про неї в момент часу t; k - коефіцієнт пропорційності. Для визначення закону зміни в часі кількості покупців, що знають про продукцію, припустимо, що в початковий момент часу t_0 про неї дізналися n/γ чоловік (γ - задане число): $x(t_0)=x_0=n/\gamma$.

3) ***Задача про рух фондів***

Під фондами розуміють обладнання, прилади, приміщення тощо. Позначимо через $\mathrm{K}=\mathrm{K(t)}$ обсяг фондів (в натуральній або вартісній формі) у момент часу t. Оскільки фонди можуть старіти, спрацьовуватися, ламатися, то в цьому випадку кажуть, що фонди вибувають. Швидкість вибуття фондів виражається через коефіцієнт вибуття. Наприклад, якщо за десять років фонди повністю оновлюються, то коефіцієнт вибуття дорівнює 0,1.

Позначимо через μ коефіцієнт вибуття фондів. Тоді вибуття веде до зменшення фондів за рік на величину $\mu\,\mathrm{K(t)}$; за умови, що вибуття фондів відбувається рівномірно, за інтервал часу $\Delta\mathrm{t}$ фонди зменшаться на величину

$\mu\,\mathrm{K(t)\Delta t}$. Інвестиції – вкладання грошей – ведуть до збільшення фондів. За рік інвестиції в розмірі I $(\mathrm{I}=\mathrm{const})$ дадуть збільшення фондів на величину $\rho\,I$ ($\rho\neq 1$, так як частина інвестицій іде на заробітну плату проектувальникам, будівельникам, тобто не на пряме збільшення фондів). В разі рівномірного вкладання інвестицій за інтервал часу $\Delta\mathrm{t}$ фонди збільшаться на величину $\rho\,\mathrm{I\Delta t}$. Зміна фондів за час $\Delta\mathrm{t}$ становитиме

$$\mathrm{K(t+\Delta t)=K(t)}-\mu\,\mathrm{K(t)\Delta t}+\rho\,\mathrm{I\Delta t}$$

і при $\Delta\mathrm{t}\to 0$ дістанемо диференціальне рівняння

$$\mathrm{K'(t)}=-\mu\,\mathrm{K(t)}+\rho\,\mathrm{I}.$$

3. *Диференціальні рівняння першого порядку*

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$\mathrm{F(x,y(x),y'(x))=0}\ , \tag{2}$$

що зв′язує незалежну зміну x, невідому функцію $y=y(x)$ та її похідну y' .

Рівняння (2) може не містити явно x або y, але обов′язково має містити похідну y' , у протилежному випадку воно не буде диференціальним рівнянням.

Якщо рівняння (2) можна розв′язати відносно похідної, то його записують у вигляді

$$y'=\mathrm{f(x,y)} \tag{3}$$

Саме такі рівняння ми, в основному, і будемо розглядати.

Рівняння (3) можна записати ще й так:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad \text{або}\quad dy=f(x,y)dx. \tag{4}$$

Загальним розв′язком диференціального рівняння називається функція $\mathrm{y}=\varphi(\mathrm{x,C})$, яка при будь-якому сталому значенні C перетворює рівняння (4) в тотожність.

У теорії диференціальних рівнянь основною задачею є пошук відповіді на питання про існування та єдиність розв′язку рівняння. Цю відповідь дає теорема Коші.

Теорема Коші. Нехай задано диференціальне рівняння першого порядку $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$. Якщо функція $f(x,y)$ та її похідна $f'_y(x,y)$ неперервні в деякій області D площини xOy, то в деякому околі довільної внутрішньої точки (x_0,y_0) цієї області існує єдиний розв′язок заданого рівняння, який задовольняє умову $\mathrm{x}=\mathrm{x}_0$, $y=y_0$.

В області D міститься багато інтегральних кривих. Теорема Коші гарантує, що через кожну внутрішню точку проходить тільки одна інтегральна крива.

Якщо крім рівняння (4) нам задано значення шуканої функції $y = y_0$ при $x = x_0$, то цю додаткову умову називають ***початковою умовою*** і записують у вигляді:

$$y(x_0) = y_0, \quad \text{або} \qquad y\big|_{x=x_0} = y_0.$$

Задача знаходження розв’язку диференціального рівняння, який задовольняє початкову умову, називають ***задачею Коші***, тобто з множини інтегральних кривих виокремлюють ту, яка проходить через задану точку (x_0, y_0). Якщо умови теореми Коші не виконуються, то через деякі точки області D або не проходить жодна інтегральна крива, або проходить більше ніж одна. Ці точки називають ***особливими точками диференціального рівняння.***

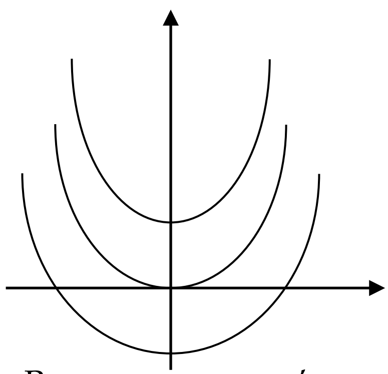
Частинним розв’язком диференціального рівняння називають функцію $y = \varphi(x, C_0)$, яку отримують підставивши в загальний розв’язок цього рівняння будь-яке конкретне стале значення C_0.

НАПРИКЛАД: функція $y = x\ln x, \quad x \in (0, +\infty)$ є розв’язком рівняння $xy' - x - y = 0$, бо $y' = \ln x + 1$. Підставляємо y та y′ в задане рівняння:

$$x(\ln x + 1) - x - x\ln x \equiv 0, \qquad x \in (0, +\infty)$$

Неважко переконатися, що розв’язком даного рівняння є також функція $y = x\ln x + cx, \quad x \in (0, +\infty)$, де c – довільна стала. Надаючи c довільного дійсного значення, щоразу дістаємо розв’язок даного рівняння, тобто маємо нескінченну множину розв’язків.

Наприклад: рівняння $y' = 2x$ має безліч розв’язків $y = x^2 + c$ де c – довільна стала. Це загальний розв’язок, що геометрично зображує сім’ю парабол.



y Через кожну точку площини проходить лише одна інтегральна крива.

Покладемо $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ і знайдемо інтегральну криву, що проходить через точку (1;1): $1=1+c \Rightarrow c=0$

Отже, $y = x^2$ – частинний розв’язок, що
x задовольняє початковій умові: y(1)=1.

Розглянемо розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку. Розглянемо такі рівняння, для яких задачу про знаходження всіх розв’язків вдається звести до обчислення скінченого числа інтегралів. На жаль, клас таких диференціальних рівнянь надзвичайно вузький.

4. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінами

Рівняння виду

$$y' = f(x) \cdot \varphi(y) \tag{5}$$

де f(x) та φ(y) – задані та неперервні на деякому інтервалі функції, називається ***диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.***

Права частина рівняння (5) є добутком двох множників, кожен з яких є функцією лише однієї змінної. Щоб розв'язати це рівняння, треба відокремити змінні. Для цього замінимо $y' = \frac{dy}{dx}$, одержимо: $\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$; $dy = f(x)\varphi(y)dx$.

Поділимо обидві частини на φ(y)≠0:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx \tag{6}$$

Рівняння (6), в якому множник при dy залежить лише від y, а множник при dx є функцією, що залежить лише від x, називається диференціальним рівнянням з ***відокремлюваними змінними.***

Оскільки рівняння (6) містить тотожно рівні диференціали, то відповідні невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину, тобто $\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + c$

Диференціальне рівняння (5) є окремим випадком рівняння виду

$$f(x) \cdot \varphi(y)\,dx + f_1(x) \cdot \varphi_1(y)\,dy = 0. \tag{7}$$

Для розв'язання рівняння (7) слід відокремити змінні, тобто подати це рівняння у вигляді:

$$\frac{f(x)dx}{f_1(x)} + \frac{\varphi_1(y)dy}{\varphi(y)} = 0. \tag{8}$$

Загальним інтегралом диференціального рівняння (8), а, отже, і рівняння (7) буде:

$$\int \frac{f(x)dx}{f_1(x)} + \int \frac{\varphi_1(y)dy}{\varphi(y)} = C. \tag{9}$$

Необхідно зауважити, що при діленні рівняння (5) на φ(y), а також рівняння (7) на $f_1(x)\varphi(y)$ можна загубити деякі розв'язки. Це так звані <u>особливі</u> розв'язки, наявність яких слід розглядати окремо.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$xy + y' \cdot \sqrt{1 - x^2} = 0.$$

і його частинний розв'язок, що задовольняє початкову умову y(1)=1.

Розв'язання. Врахувавши, що $\frac{dy}{dx} = y'$, матимемо :

$$xy + \frac{dy}{dx} \cdot \sqrt{1 - x^2} = 0, \quad xy\,dx + dy \cdot \sqrt{1 - x^2} = 0$$

Відокремимо змінні, поділивши обидві частини рівняння на вираз $y \cdot \sqrt{1-x^2}$.

Отримаємо:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Проінтегруємо кожну частину рівняння по своїй змінній:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В результаті матимемо:

$$\ln |y| = \sqrt{1-x^2} + C.$$

Потенціюючи останній вираз, знайдемо загальний розв'язок рівняння :

$$y_{з.р.} = e^{C+\sqrt{1-x^2}}.$$

Підставимо в загальний розв'язок початкову умову y(1)=1 і знайдемо потрібне значення сталої С:

$$e^{C+\sqrt{1-1}} = 1,\ e^{c} = 1,\ C = 0.$$

Підставивши С=0 в загальний розв'язок рівняння, отримаємо шуканий частинний розв'язок цього рівняння, який задовольняє початкову умову y(1)=1. Таким чином, розв'язок задачі Коші матиме вигляд:

$$y_{ч.р.} = e^{\sqrt{1-x^2}}.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2 y)dy = 0$$

Розв'язання. Згрупуємо змінні $y^2(x+1)dx + x^2(1-y)dy = 0$ та поділимо обидві частини рівняння на $x^2 y^2 \neq 0$:

$$\frac{x+1}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0, \quad \int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx + \int\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right)dy = c$$

$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \ln|y| = c$$

Таким чином, загальний розв'язок диференціального рівняння має вид

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = c, \qquad \ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x+y}{xy} = c.$$

Дослідимо рівняння на наявність особливих розв'язків. Рівняння $xy = 0$ має розв'язки $x = 0$ і $y = 0$, тому прямі $x = 0$ та $y = 0$ є інтегральними кривими даного рівняння. Вони не утворюються із загального розв'язку ні при якому значені С.

Розв'язки $x = 0$ та $y = 0$ називаються <u>особливими</u>, і їх слід виписувати додатково до загального розв'язку.

5. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку називають ***однорідним,*** якщо воно має вигляд

$$\mathrm{f}(x, y)\,dx = \mathrm{g}(x, y)\,dy \tag{10}$$

де $f(x, y)$, $g(x, y)$ - однорідні функції однакового степеня.

Функцію $f(x, y)$ називають ***однорідною*** n***-го степеня*** за змінними x, y, якщо для довільного t виконується рівність $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

Наприклад, функція $\mathrm{f}(x, y) = x^5 + 3x^2y^3 - y^5$ є однорідною функцією п'ятого степеня, оскільки $f(tx, ty) = (tx)^5 + 3(tx)^2(ty)^3 - (ty)^5 = t^5(x^5 + 3x^2y^3 - y^5) = t^5 f(x, y)$. А функція $f(x, y) = xy - 3$ є неоднорідною, так як $f(tx, ty) = (tx)(ty) - 3 = t^2xy - 3$.

Однорідне диференціальне рівняння можна подати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{11}$$

Диференціальні рівняння (10), (11) розв'язують за допомогою підстановки $y = x \cdot u(x)$, де $u(x)$ – деяка невідома функція.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$2x\,y\,y' = x^2 + y^2$$

Розв'язання. Поділимо задане рівняння на x^2 і отримаємо однорідне диференціальне рівняння першого порядку:

$$2 \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Нехай $y = x\,u(x)$, де $u(x)$ – деяка невідома функція. Тоді:

$$\frac{y}{x} = u, \qquad \frac{dy}{dx} = y' = u' \cdot x + u.$$

і рівняння набуває вигляду:

$$2u \cdot (u' \cdot x + u) = 1 + u^2, \qquad 2x\,u\,u' = 1 - u^2.$$

Ми отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Проінтегруємо це рівняння:

$$2\,x\,u\frac{du}{dx} = 1 - u^2, \qquad \frac{2udu}{1-u^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2udu}{1-u^2} = \int \frac{dx}{x}, \qquad -\int \frac{d(1-u^2)}{1-u^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\ln\left|1-u^2\right| = \ln|x| + C_1$$

Замінивши сталу C_1 = - ln | C | і спростивши вираз, матимемо:

$$-\ln|1-u^2| = \ln|x| - \ln|C|, \quad \ln|1-u^2| = \ln\left|\frac{c}{x}\right|,$$

$$1-u^2 = \frac{C}{x}, \quad u^2 = 1-\frac{C}{x}.$$

Замінимо в рівності u = $\frac{y}{x}$, спростимо вираз і одержимо шуканий загальний інтеграл однорідного диференціального рівняння першого порядку:

$$\frac{y^2}{x^2} = 1-\frac{C}{x}, \qquad y^2 = x^2 - Cx.$$

6. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{12}$$

де p(x) та f(x) – неперервні на деякому проміжку функції.

Термін «лінійне рівняння» пояснюється тим, що невідома функція y та її похідна y' входять до рівняння в першому степені, тобто лінійно.

Якщо $f(x) = 0$, то (12) називають ***лінійним однорідним рівнянням,*** якщо $f(x) \neq 0$, рівняння (12) називають ***лінійним неоднорідним рівнянням.***

Є кілька методів інтегрування рівняння (12). Один з них – ***Метод Бернуллі.*** Він полягає в тому, що розв'язок цього рівняння шукають у вигляді добутку

$$y(x) = u(x)\cdot v(x), \tag{13}$$

де u = u(x), v=v(x) – нові невідомі функції, причому одна з цих функцій добирається довільно.

Виразивши із заміни похідну $y' = u'v + uv'$ і підставивши в рівняння (12), одержимо

$$u'v + uv' + puv = f, \qquad u'v + u(v' + pv) = f.$$

Доберемо функцію v таким чином, щоб вона задовольняла рівняння

$$v' + pv = 0, \tag{14}$$

тоді функція u має задовольняти рівнянню

$$u'v = f. \tag{15}$$

Рівняння (14) є рівнянням з відокремленими змінними, тому його розв'язком є

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx, \quad \ln|v| = -\int p(x)dx + C$$

$$v = e^{-\int p(x)dx}$$

(Ми поклали C=0). Знаючи функцію v, з рівняння (15) знаходимо функцію u:

$$\frac{du}{dx}\cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x), \qquad du = f(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

$$u = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1$$

Підставляючи знайдені допоміжні функції в (13), знаходимо загальний розв'язок рівняння (12)

$$y(x) = v(x)u(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right) \qquad (16)$$

Розв'язок (16) можна записати у вигляді

$$y = e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1e^{-\int p(x)dx}$$

Звідси випливає, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння першого порядку дорівнює сумі розв'язків: частинного розв'язку заданого лінійного неоднорідного рівняння і загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння $y' + p(x)y = 0$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin\ 2x}{x}$

Розв'язання. Це рівняння є неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Нехай $y = u\cdot v$; *тоді* $y' = u'v + uv'$. Підставимо у вихідне рівняння:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin\ 2x}{x}, \quad v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + uv' = \frac{\sin\ 2x}{x}.$$

Виберемо функцію u так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю. Тоді u буде частинним розв'язком диференціального рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}, \quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}, \quad \ln u = -\ln\ x, \quad u = \frac{1}{x}.$$

Про інтегруємо рівняння для змінної v

$$uv' = \frac{\sin\ 2x}{x}, \quad \frac{1}{x}\frac{dv}{dx} = \frac{\sin\ 2x}{x}, \quad dv = \sin\ 2xdx, \quad v = -\frac{1}{2}\cos\ 2x + c.$$

Таким чином, загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння має вид

$$y = \frac{1}{x}(c - \frac{1}{2}\cos\ 2x).$$

7. *Диференціальні рівняння Бернуллі*

Диференціальні рівняння Бернуллі, які мають вигляд

$$y' + y\ f(x) = y^n\ \varphi(x), \quad n \neq 0{,}1 \qquad (17)$$

розв'язують так само, як і лінійні диференціальні рівняння першого порядку - за допомогою підстановки y = uv, де u = u(x) і v = v(x) – деякі невідомі функції.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння Бернуллі

$$x\ y' + 2y = 3x^5y^2$$

і його частинний розв'язок , який задовольняє початкову умову y(1) = - 1.

Розв'язання. Нехай $y = u \cdot v;$ тоді $y' = u'v + uv'$ і задане рівняння матиме вигляд:

$$xu'v + xuv' + 2uv = 3x^5u^2v^2, \quad xu'v + u\ (xv' + 2v) = 3x^5u^2v^2$$

Одну із функцій u і v ми можемо вибрати довільно. Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю. Тоді v буде частинним розв'язком диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$xv' + 2v = 0, \quad \int\frac{dv}{v} = -2\cdot\int\frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -2\ln|x| + C_1.$$

Надамо сталій інтегрування довільного, зручного для обчислень значення. Нехай C_1 =0.Тоді:

$$\ln|v| = -2\ln|x|, \quad \ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x^2}\right|, \quad v = \frac{1}{x^2}.$$

Підставимо v і, замінивши $\frac{du}{dx} = u'$ та відокремивши змінні, проінтегруємо отримане рівняння. Матимемо:

$$x\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x^2} + u\cdot 0 = 3x^5u^2\cdot\frac{1}{x^4}, \quad \frac{du}{xdx} = 3xu^2, \quad \frac{du}{u^2} = 3x^2dx,$$

$$\int\frac{du}{u^2} = \int 3x^2dx, \quad \frac{-1}{u} = x^3 + C, \quad u = \frac{-1}{C + x^3}.$$

Отже, шуканий загальний розв'язок рівняння Бернуллі має вид:

$$y_{з.р.} = \frac{-1}{C + x^3}\cdot\frac{1}{x^2}, \quad y_{з.р} = \frac{-1}{Cx^2 + x^5}.$$

Підставивши в загальний розв'язок задану початкову умову (тобто y = -1 та x = 1), отримаємо:

$$\frac{-1}{C + 1} = -1, \quad \text{звідки C = 0.}$$

Підставимо знайдене значення сталої в загальний розв'язок і одержимо шуканий частинний розв'язок, який задовольняє вказану початкову умову:

$$y_{ч.р.} = \frac{-1}{0\cdot x^2 + x^5} = -\frac{1}{x^5}\ y_{ч.р.} = \frac{-1}{0\cdot x^2 + x^5} = -\frac{1}{x^5}\ y_{ч.р.} = \frac{-1}{0\cdot x^2 + x^5} = -\frac{1}{x^5}$$

$$y_{ч.р.} = \frac{-1}{0\cdot x^2 + x^5} = -\frac{1}{x^5}$$

Лекція 9.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

План лекції

1. *Основні поняття.*
2. *Диференціальні рівняння, в яких можливе зниження порядку.*
3. *Лінійні диференціальні рівняння другого порядку.*
4. *Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.*
5. *Системи двох диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.*
6. *Застосування диференціальних рівнянь у економічних моделях.*

1. Основні поняття

Диференціальним рівнянням другого порядку називають рівняння, яке пов'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідні y' , y'' :

$$F(x,\ y(x),\ y'(x),\ y''(x)) = 0 \qquad (1)$$

В диференціальному рівнянні обов'язковою є лише наявність похідних або диференціалів; x та $y = y(x)$ можуть не входити явно в рівняння (1).

Будемо розглядати рівняння, які можна записати у вигляді

$$y'' = f(x, y, y'). \qquad (2)$$

Будь-яку двічі неперервно диференційовану функцію $y = \varphi(x)$, яка перетворює рівняння (1) в тотожність, називають ***розв'язком*** (або ***інтегралом***) ***диференціального рівняння*** (1), а графік цієї функції – ***інтегральною кривою*** диференціального рівняння (1). Якщо розв'язок диференціального рівняння задано в неявному вигляді $\Phi(x, y) = 0$, то його називають ***інтегралом диференціального рівняння***.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1) називається функція $y = \varphi(x, c_1, c_2)$, якщо вона є розв'язком цього рівняння при будь-яких значеннях сталих c_1, c_2.

Надаючи в загальному розв'язку або загальному інтегралі диференціального рівняння певних фіксованих значень сталим C_1, C_2 отримаємо ***частинний розв'язок*** (***частинний інтеграл)*** цього рівняння.

Теорема Коші (теорема існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння другого порядку). Нехай задано диференціальне рівняння другого порядку

$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$. Якщо функція $f(x, y, y')$ та її частинні похідні $f'_y(x, y, y')$ і $f'_{y'}(x, y, y')$ неперервні в деякій області D, то в деякому околі довільної внутрішньої точки (x_0, y_0, y'_0) цієї області існує єдиний розв'язок заданого рівняння, який задовольняє початкові умови $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$.

Задачу відшукання розв'язку диференціального рівняння (2) за даними початковими умовами називають ***задачею Коші.***

2. *Диференціальні рівняння, в яких можливе зниження порядку*

Є три види рівняння $y'' = f(x, y, y')$, які заміною змінної зводяться до рівнянь першого порядку.

1) Диференціальне рівняння вигляду

$$y'' = f(x) \tag{3}$$

розв'язують послідовним двократним інтегруванням правої частини.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' = \frac{6}{x^3}$ та його частинний розв'язок, що задовольняє початкові умови: $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.

Розв'язання.

Це диференціальне рівняння другого порядку виду (3), тому задане рівняння допускає зниження порядку. Проінтегруємо двічі його праву частину і одержимо шуканий загальний розв'язок:

$$y' = \int y''dx = 6 \cdot \int \frac{dx}{x^3} = 6 \cdot \int x^{-3}dx = -\frac{6}{2x^2} + c_1 = c_1 - \frac{3}{x^2};$$

$$y = \int (c_1 - \frac{3}{x^2})dx = c_1 \cdot \int dx - 3 \cdot \int x^{-2}dx = c_1x + \frac{3}{x} + c_2$$

Підставимо початкові умови у загальний розв'язок:

$$y'(1) = c_1 - \frac{3}{1^2} = c_1 - 3 = 1;$$

$$y = c_1 \cdot 1 + \frac{3}{1} + c_2 = c_1 + c_2 + 3 = 1$$

Звідки $c_1 = 4$, $c_2 = -6$. Підставивши знайдені значення сталих в загальний розв'язок, одержимо частинний розв'язок, що задовольняє початкові умови:

$$y = 4x + \frac{3}{x} - 6.$$

2) Диференціальне рівняння вигляду

$$y'' = f(x, y') \tag{4}$$

в яке не входить в явній формі шукана функція y, за допомогою підстановки $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$ зводиться до диференціального рівняння першого порядку $p'(x) = f(x, p(x))$.

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y'' + y'\, tgx = \sin 2x$.

Розв’язання.

В задане рівняння y не входить в явній формі, тому можливе зниження порядку. Зробимо заміну $y' = p(x), \quad y'' = p'(x)$ і одержимо лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$p' + p\, tgx = \sin 2x$$

яке розв'яжемо методом Бернуллі.

Нехай p = uv, де u = u(x) і v = v(x) – деякі функції, тоді рівняння матиме вигляд:

$$u'v + uv' + uv\, tgx = \sin 2x, \quad u'v + u\,(v' + v\, tgx) = \sin 2x$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю. Тоді v буде частинним розв’язком диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dv}{v} = -tgx\, \mathrm{dx},, \quad \int \frac{dv}{v} = \int -tgxdx, \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}, \qquad \ln|v| = \ln|\cos x| + C\,.$$

Нехай стала C = 0 (її ми вибираємо довільно). Тоді:

$$\ln | v | = \ln | \cos x |, \qquad v = \cos x.$$

Підставимо функцію v в рівняння для функції u і отримаємо:

$$u' \cos x = \sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \frac{du}{dx} = 2\sin x, \quad \int du = 2 \cdot \int \sin x dx,$$

$$u = -2\cos x + C_1$$

Таким чином, маємо

$$p = (C_1 - 2\cos x) \cdot \cos x = C_1 \cos x - 2\cos^2 x\,,$$

звідки, замінивши $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$, отримаємо диференціальне рівняння і його шуканий загальний розв'язок:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \cos x - 2\cos^2 x, \quad \int dy = C_1 \int \cos x dx - 2\int \cos^2 x dx,$$

$$y = C_1 \sin x - \int (1 + \cos 2x) dx,$$

$$y = C_1 \sin x - x - \frac{\sin 2x}{2} + C_2$$

3) Диференціальне рівняння вигляду

$$y'' = f(y, y') \tag{5}$$

в яке не входить в явній формі незалежна змінна x, за допомогою підстановки $y' = \dfrac{dy}{dx} = p(\mathrm{y}), \quad y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot p$ зводиться до диференціального рівняння першого порядку відносно функції $p(y)$:

$$\frac{dp}{dy}\, p = f(y, p)\,.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$y'' - (y')^2 = 0\,.$$

Розв'язання. В задане диференціальне рівняння в явній формі не входить незалежна змінна (рівняння виду (5)), тому зробивши підстановку $y' = p(y), \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$, зведемо його до рівняння першого порядку

$$p\frac{dp}{dy} - p^2 = 0, \quad p \cdot \left(\frac{dp}{dy} - p\right) = 0 .$$

Перший розвв'язок цього рівняння $p = 0, \quad y = C$, де C – довільна стала. Скоротивши обидві частини рівняння на p, дістанемо рівняння $\frac{dp}{dy} - p = 0$, загальний розв'язок якого $p = C_1 e^y$. Після зворотної заміни змінних одержимо

$$\frac{dy}{dx} = C_1 e^y, \quad e^{-y} dy = C_1 dx,$$

$$e^{-y} = C_1 x + C_2, \quad y(x) = -\ln(C_1 x + C_2)$$

де C_1, C_2- довільні сталі. Цей розв'язок містить і розв'язок $y = C$ добутий раніше, тому особливих точок диференціальне рівняння не має.

3. *Лінійні диференціальні рівняння другого порядку .*

Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку називають рівняння виду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{6}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ - неперервні на проміжку (a, b) функції.

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{7}$$

називається ***лінійним однорідним рівнянням,*** а при $f(x) \neq 0$ – ***лінійним неоднорідним рівнянням.***

Рівняння (6) є окремим випадком рівняння (2) і задовольняє умови існування та єдиності розв'язку (теореми Коші), тому за будь-яких початкових умов рівняння (6) має єдиний розв'язок.

Теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння. Загальний розв'язок рівняння (6) складається із суми його частинного розв'язку y^* та загального розв'язку $\overline{y}$ відповідного однорідного рівняння (7)

$$y(x) = \overline{y} + y^* . \tag{8}$$

В свою чергу загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння

$$\overline{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{9}$$

де C_1, C_2- довільні сталі, $y_1(x)$ та $y_2(x)$ - два лінійно незалежних розв'язки лінійного однорідного рівняння (7), тобто такі, для яких визначник Вронського відмінний від нуля

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (10)$$

Зауваження. Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно залежні $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda, \quad \lambda = const$, то визначник Вронського, складений із них, дорівнює нулю.

4. *Лінійні диференціальні рівняння другого порядкузі сталими коефіцієнтами*

Розглянемо важливий і поширений клас лінійних диференціальних рівнянь, в яких функції $p(x) = \mathrm{p}$, $q(x) = q$ сталі.

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку називають рівняння виду

$$y^{//} + py^{/} + qy = 0 \qquad (11)$$

де p, q - деякі дійсні числа.

Щоб знайти два лінійно незалежні розв'язки рівняння (11) (так звану фундаментальну систему) скористаємось ідеєю Ейлера. Шукаємо розв'язок у вигляді

$$y = e^{kx}, \quad y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2e^{kx}$$

і підставляємо у рівняння (11). Одержимо $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$. Скоротивши обидві частини рівняння на e^{kx}, дістанемо квадратне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0, \qquad (12)$$

яке називається ***характеристичним рівнянням*** для (11).

Структура загального зв’язку рівняння (11) залежить від того, які корені має характеристичне рівняння (12). Позначимо ці корені через $k_1, \quad k_2$.

Теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

1. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні і різні $k_1 \neq k_2$, то загальним розв'язком буде

$$\overline{y} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} \quad (C_1 \text{ і } C_2 \text{ - довільні сталі}). \qquad (13)$$

2. Якщо характеристичне рівняння має два дійсних корені, рівні між собою $k_1 = k_2 = k$, то загальним розв'язком буде

$$\overline{y} = (C_1 + C_2x)e^{kx}. \qquad (14)$$

3. Якщо ж корені характеристичного рівняння є комплексно-спряженими числами $\alpha \pm \beta\, i$, $(i = \sqrt{-1})$, то загальним розв'язком буде

$$\overline{y} = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right). \qquad (15)$$

Приклад 4. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Розв’язання. Задане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку. Складемо його характеристичне рівняння $k^2 - k - 6 = 0$ та знайдемо корені $k_1 = -2$, $k_2 = 3$. Оскільки характеристичне рівняння має два дійсні, не рівні між собою, корені, то згідно з (13) загальний розв'язок має вид

$$\bar{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$y'' - 6y' + 9 = 0.$$

Розв’язання. Задане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку. Складемо і розв'яжемо його характеристичне рівняння

$$k^2 - 6k + 9 = 0, \qquad k_1 = k_2 = k = 3.$$

Оскільки характеристичне рівняння має один дійсний корінь, то згідно з (14) загальний розв'язок має вид

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2 x).$$

Приклад 6. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$y'' - 4y' + 13 = 0.$$

Розв’язання. Задане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку. Складемо і розв'яжемо його характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 13 = 0$,

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36\cdot i^2}}{2} = \frac{4 \pm 6\cdot i}{2} = 2 \pm 3i,$$

тобто $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

Оскільки характеристичне рівняння має комплексно спряжені корені, то згідно з (15) загальний розв'язок має вид

$$y = e^{2x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x).$$

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називають рівняння виду

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{16}$$

де p, q - деякі дійсні числа, $f(x)$- відома неперервна функція.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (16) є сумою його частинного розв'язку y^* неоднорідного рівняння (16) та загального розв'язку $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння (11)

$$y(x) = \bar{y} + y^*.$$

Якщо $f(x)$ - поліном, показникова або тригонометрична функція чи їх комбінація, то частинний розв'язок рівняння (16) знаходять ***методом невизначених коефіцієнтів.***

Розглянемо застосування метода невизначених коефіцієнтів, якщо права частина рівняння (16) має спеціальний вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]. \tag{17}$$

Тут α і β - дійсні числа, а $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ - многочлени з дійсними коефіцієнтами степеня відповідно *n*-го і *m*-го. В такому випадку ***частинний розв’язок*** відшукується в виді:

$$y^* = x^k e^{\alpha x}\left[M_S(x)\cos\beta\, x + N_S(x)\sin\beta\, x\right], \qquad (18)$$

де: $M_S(x),\ N_S(x)$ - многочлени $S-\text{того}$ степеня $\left(S = \max(m;\ n)\right)$ з невизначеними коефіцієнтами, а k - кратність, з якою $(\alpha \pm \beta\, i)$ входить в число коренів характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$, відповідного однорідного рівняння (11).

Для знаходження коефіцієнтів многочленів $M_S(x)$ і $N_S(x)$ шуканий частинний розв'язок y^* підставляють у рівняння (16) і здійснюють відповідні спрощення, потім в одержаній тотожності прирівнюють коефіцієнти при подібних членах в лівій і правій частинах, що приводить до системи лінійних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів, із якої визначають ці коефіцієнти. Частинний розв'язок y^* має певний вид в залежності від виду функції $f(x)$. Можуть мати місце слідуючі випадки:

1) якщо $\underbrace{\alpha = 0,\ \beta = 0}_{\alpha+\beta i=0}$, тобто права частина є поліномом із відомими коефіцієнтами $f(x) = P_n(x)$, тоді частинний розв'язок відшукується в вигляді

$$y^* = x^k\left(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n\right),$$

де k - число коренів характеристичного рівняння, що дорівнюють нулю;

2) якщо $\underbrace{\alpha \neq 0,\ \beta = 0}_{\alpha+\beta i=\alpha}$, тобто $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, тоді частинний розв'язок відшукується в вигляді

$$y^* = x^k e^{\alpha x}\left(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n\right),$$

де k - кратність, з якою α входить в число коренів характеристичного рівняння;

3) якщо $\underbrace{\alpha = 0,\ \beta \neq 0}_{\alpha+\beta i=\beta i}$, $n = m = 0$, тобто права частина є тригонометричною функцією $f(x) = A\cos\beta\, x + B\sin\beta\, x$, тоді частинний розв'язок відшукується у вигляді

$$y^* = x^k(A_0\cos\beta\, x + B_0\sin\beta\, x),$$

де k - кількість коренів характеристичного рівняння, що дорівнюють $\beta\, i$.

У тому випадку, коли права частина неоднорідного рівняння являє собою суму функцій виду (18), тобто $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_r(x)$, то для кожної із них відшукується частинний розв'язок і повний частинний розв'язок є сума всіх частинних розв'язків $y^* = y_1^* + y_2^* + \ldots + y_r^*$.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 2y' = e^x(3x^2 + 2x + 9)$.

Розв'язання. Спочатку знаходимо загальний розв'язок $\overline{y}$ відповідного однорідного рівняння $y^{//} + 2y^{/} = 0$. Розв'язуємо відповідне йому характеристичне рівняння $k^2 + 2k = 0$ і знаходимо його корені $k_1 = 0,\ k_2 = -2$. Отже, $\overline{y} = C_1 + C_2 e^{-2x}$.

Переходимо до знаходження частинного розв'язку y^* вихідного рівняння. Тут права частина $f(x) = e^x(3x^2 + 2x + 9)$ має вид (18), де $n = 2$, $P_2(x) = 3x^2 + 2x + 9$, $\alpha = 1,\ \beta = 0$. Тому що $\alpha + \beta\, i = 1$ не є коренем характеристичного рівняння, то $k = 0$. Отже, частинний розв'язок y^* необхідно знаходити в виді $y^* = (Ax^2 + Bx + C)e^x$, де $A,\ B$ і C - коефіцієнти, що підлягають знаходженню. Для цього використаємо те, що y^* повинно бути розв'язком вихідного рівняння. Знаходимо $y^{*/}$ і $y^{*//}$:

$$y^{*/} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^x + (2Ax + B)e^x = \left(Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C\right)e^x$$

$$y^{*//} = \left(Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C\right)e^x + \left(2Ax + 2A + B\right)e^x =$$

$$= \left(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C\right)e^x$$

Тепер підставимо вирази для $y^{*/}$ і $y^{*//}$ у вихідне рівняння:

$$\left(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C\right)e^x + 2\left(Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C\right)e^x = e^x\left(3x^2 + 2x + 9\right)$$

Після скорочення обох частин одержаної рівності на e^x і групування членів при однакових степенях x, одержимо:

$$3Ax^2 + \left(8A + 3B\right)x + 2A + 4B + 3C = 3x^2 + 2x + 9.$$

Ця рівність виконується тотожно лише тоді, коли коефіцієнти при однакових ступенях x в обох частинах рівні між собою. Таким чином, для відшукання коефіцієнтів $A,\ B$ і C маємо слідуючу систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3A = 3, \\ 8A + 3B = 2, \\ 2A + 4B + 3C = 9. \end{cases}$$

Розв'язання системи дає $A = 1,\ B = -2,\ C = 5$. Отже, одержуємо шуканий частинний розв'язок $y^* = \left(x^2 - 2x + 5\right)e^x$. Таким чином, розв'язок вихідного рівняння запишеться

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{-2x} + \left(x^2 - 2x + 5\right)e^x.$$

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{//} - y^{/} = xe^x$.

Розв'язання. Спочатку знаходимо загальний розв'язок $\overline{y}$ відповідного однорідного рівняння $y^{//} - y^{/} = 0$. Складемо характеристичне рівняння $k^2 - k = 0$ і знайдемо його корені $k_1 = 0,\ k_2 = 1$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\overline{y} = C_1 + C_2 e^x$.

Враховуючи, що β = 0, $n=1$, число 1 є коренем характеристичного рівняння $\alpha = \mathrm{k}_2 = 1$, шукаємо частинний розв’язок y^* неоднорідного рівняння у вигляді $\mathrm{y}^* = e^x(Ax+B)\,x$. Знаходимо $y^{*/}$ і $y^{*//}$:

$$y^{*/} = e^x(Ax^2 + Bx + 2Ax + B),$$

$$y^{*''} = e^x(Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B)$$

Підставимо вирази для $y^{*/}$ і $y^{*//}$ у вихідне рівняння:

$$e^x(Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B - Ax^2 - Bx - 2Ax - B) = xe^x .$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x. Одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} 2\mathrm{A} = 1, \\ 2\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0, \end{cases}$ розв'язком якої є А=1/2, В=-1. Отже, частинний розв’язок неоднорідного рівняння має вигляд $y^* = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^x$.

Таким чином, розв’язок вихідного неоднорідного рівняння

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^x .$$

5. *Системи двох диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами*

Для розв’язання системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases},$$

укладають характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0,$$

його корені $k_1, k_2, \ldots, k_n$ називаються коренями характеристичного рівняння. Для кожного кореня k_i, $\left(i = \overline{1,n}\right)$ записується система лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0 \end{cases}$$

і визначаються коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, один із яких довільний і його можна взяти рівним одиниці. Таким чином, одержуємо частинний розв'язок системи у вигляді:

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt},\ x_2 = \alpha_2 e^{kt}, ..., x_n = \alpha_n e^{kt}.$$

Шляхом безпосередньої підстановки в рівняння можна впевнитись, що система функцій

$$\begin{cases} x_1 = C_1\alpha_1^{(1)}e^{k_1 t} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{k_2 t} + ... + C_n\alpha_1^{(n)}e^{k_n t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n = C_1\alpha_n^{(1)}e^{k_1 t} + C_2\alpha_n^{(2)}e^{k_2 t} + ... + C_n\alpha_n^{(n)}e^{k_n t} \end{cases}$$

де C_1 ,C_2 ,..., C_n - довільні сталі, також є розв'язком системи диференціальних рівнянь. Це є загальний розв'язок системи.

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок системи $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$.

Розв'язання. Укладемо характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$, або $k^2 - 5k + 4 = 0$, звідки $k_1 = 1,\ k_2 = 4$.

Укладемо систему лінійних рівнянь для кореня $k_1 = 1$:

$$\begin{cases} (2-1)\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0 \\ \alpha_1^{(1)} + (3-1)\alpha_2^{(1)} = 0 \end{cases}, \quad \text{або} \quad \begin{cases} \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0 \\ \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0 \end{cases}.$$

Звідки $\alpha_2^{(1)} = -\dfrac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$. Виберемо $\alpha_1^{(1)} = 1$ і одержимо $\alpha_2^{(1)} = -\dfrac{1}{2}$. Таким чином, частинний розв'язок має вид $x_1 = e^t,\ y_1 = -\dfrac{1}{2}e^t$. Укладемо систему для кореня $k_2 = 4$:

$$\begin{cases} -2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0 \\ \alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} = 0 \end{cases}.$$

Звідки $\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)}$. Виберемо $\alpha_1^{(2)} = 1$ і одержимо $\alpha_2^{(2)} = 1$. Маємо другий частинний розв'язок системи: $x_2 = e^{4t},\ y_2 = e^{4t}$.

Загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь запишеться в вигляді:

$$x = C_1e^t + C_2e^{4t},$$

$$y = -\frac{1}{2}C_1e^t + C_2e^{4t}.$$

6. *Застосування диференціальних рівнянь у економічних моделях*

1) Модель демографічного процесу

Зі статистичних даних відомо, що для даного регіону кількість новонароджених і померлих за одиницю часу пропорційна чисельності населення з коефіцієнтами пропорційності k_1 і k_2 відповідно. Знайдемо *закон зміни чисельності населення в часі,* інакше кажучи, опишемо демографічний процес у регіоні.

Нехай $y = y(t)$ - кількість мешканців регіону в момент часу t. Приріст населення Δy за час Δt дорівнює різниці між кількістю народжених і кількістю померлих за цей час, тобто

$$\Delta y = k_1 y \Delta t - k_2 y \Delta t \text{ або } \frac{\Delta y}{\Delta y} = ky,$$

де $k = k_1 - k_2$.

Переходячи до границі при $\Delta t \to 0$, достанемо рівняння

$$y' = ky. \tag{19}$$

Це диференціальне рівняння першого порядку з відокремленими змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dy}{dt} = ky, \ \frac{dy}{y} = k\,dt, \ \int \frac{dy}{y} = k\int dt, \ \ln|y| = kt + C_1, \ y = e^{kt+C_1},$$

$$y = Ce^{kt}, \tag{20}$$

де C - довільна стала, що визначається початковими умовами (чисельністю населення в початковий момент часу).

2) Модель рівноважного зростання випуску продукції

Нехай продукція деякої фірми продається за фіксованою ціною p. Позначимо через $q(t)$ обсяг продукції, реалізованої в момент часу t. Тоді на цей момент часу дістанемо доход $R(t) = pq(t)$. Припустимо, що частина доходу використовується на інвестиції у виробництво реалізованої продукції, тобто

$$I(t) = mpq(t), \tag{21}$$

де m - норма інвестицій (стале число), причому $0 < m < 1$.

Якщо виходити з припущення про ненасичення ринку (тобто про повну реалізацію продукції, що виробляється), то в результаті розширення виробництва буде одержано приріст доходу, частина якого знову використовуватиметься для розширення випуску продукції. Це приведе до зростання швидкості випуску продукції (*акселерації*), причому швидкість випуску пропорційна збільшенню інвестицій, тобто

$$q'(t) = lI(t), \tag{22}$$

де $1/l$ - норма акселерації. Підставивши (21) у (22), дістанемо

$$q' = lmpq(t)$$

або

$$q' = kq(t) \tag{23}$$

де $k = lmp$.

Рівняння (23) - це диференціальне рівняння першого порядку з відокремленими змінними, загальний розв'язок якого $q = Ce^{kt}$, де C - довільна стала.

Нехай у початковий момент часу $t = t_0$ обсяг продукції становить q_0. Тоді $q_0 = Ce^{kt_0}$. Виразимо сталу: $C = q_0 e^{-kt_0}$ і підставимо її значення в загальний розв'язок. Дістанемо частинний розв'язок рівняння (23), тобто розв'язок задачі Коші

$$q = q_0 e^{k(t - t_0)} \tag{24}$$

Зазначимо, що математичні моделі мають властивість загальності. Так, рівняння (24) описує також динаміку росту цін за постійної інфляції, процес розмноження бактерій, процес радіоактивного розпаду.

3) Модель зростання випуску продукції в умовах конкуренції

Припустимо, що деяка фірма випускає продукцію й продає її за ціною p за одиницю. Позначимо через $q = q(t)$ обсяг продукції, яка реалізована в момент часу t. Нехай ціна залежить від обсягу продукції. Тоді $p = p(q)$ - спадна функція, тобто зі збільшенням обсягу випуску продукції її ціна на ринку зменшується. Це означає, що $\frac{dp}{dq} < 0$. У момент часу t фірма одержує доход $R(t) = p(q(t))q(t)$. Якщо частина доходу використовується на інвестиції $I(t)$ у виробництво реалізованої продукції, то за умови ненасиченості ринку швидкість випуску продукції пропорційна збільшенню інвестицій, тобто $q' = kq$, $k = lmp$, де m - це норма інвестицій, $1/l$ - норма акселерації, p - стала ціна.

У випадку, коли ціна $p = p(q)$, дістанемо диференціальне рівняння першого порядку відносно q із відокремленими змінними

$$q' = \alpha\, p(q) q, \tag{25}$$

де $\alpha = lm$. Оскільки всі співмножники в правій частині цього рівняння додатні, то й $q' > 0$, тобто функція $q = q(t)$ зростаюча. Характер зростання функції визначається її другою похідною. Диференціюючи рівняння (25), дістанемо

$$q'' = \alpha\left(q' p(q) + q\frac{dp}{dq}q'\right) = \alpha q'\left(p + \frac{dp}{dq}q\right). \tag{26}$$

Оскільки еластичність попиту $E_p(q) = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q}$, то рівність (26) можна записати у вигляді

$$q'' = \alpha q' p\left(1 + q\frac{dp}{dq}\frac{q}{p}\right) = \alpha q' p\left(1 + \frac{1}{E_p(q)}\right).$$

Ураховуючи, що $\frac{dq}{dp} < 0$, а отже, й $E_p(q) < 0$, остаточно дістанемо

$$q'' = \alpha q' p \left(1 - \frac{1}{\left| E_p(q) \right|} \right) \tag{27}$$

Із рівності (27) випливає, що за еластичного попиту, тобто коли $\left|E_p(q)\right| > 1$, $q'' > 0$, графік функції $q = q(t)$ має напрямок опуклості вниз, а це означає прогресивне зростання; за нееластичного попиту, тобто при $\left|E_p(q)\right| < 1$, $q'' < 0$, графік функції $q = q(t)$ має напрям опуклості вгору, що означає вповільнене зростання (насичення).

Розглянемо залежність ціни від попиту $p = p(q)$ у вигляді лінійної функції (рис. 1)

$$p(q) = a - bq,\ a > 0,\ b > 0. \tag{28}$$

Тоді рівняння (25) і (27) набирають вигляду

$$q' = \alpha(a - bq)q \tag{29}$$

і

$$q'' = \alpha q'(a - bq) \tag{30}$$

відповідно.

Зі співвідношень (27) і (28) дістанемо, що $q' = 0$ при $q = 0$ і $q = \frac{a}{b}$, $q'' > 0$ при $q < \frac{a}{2b}$, $q'' < 0$ при $q > \frac{a}{2b}$. Отже, $q = \frac{a}{2b}$ - точка перегину графіка функції $q = q(t)$.

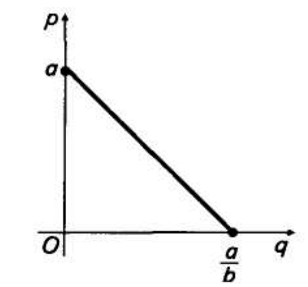


Рис. 1

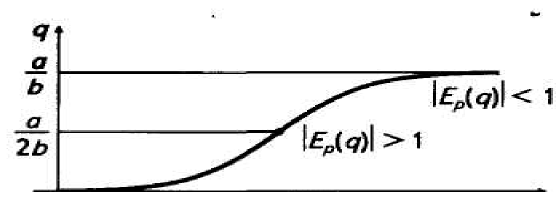


Рис. 2

Графік функції $q = q(t)$ - однієї з інтегральних кривих диференціального рівняння (рис. 2) - називають *логістичною кривою.*

4) Модель знецінення обладнання

Швидкість знецінення обладнання внаслідок його зносу пропорційна в кожний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість рівна y_0. Визначимо вартість обладнання після його використання впродовж t років.

Позначимо через y_t вартість обладнання в момент часу t, тоді зміна вартості (знецінення) виражається різницею $(y_0 - y_t)$. Швидкість знецінення $\frac{d}{dt}(y_0 - y_t)$

пропорційна фактичній вартості в даний момент y_t, тому одержуємо диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt}(y_0 - y_t) = \mathrm{k}\mathrm{y}_\mathrm{t}, \quad y_t\big|_{t=0} = y_0 .$$

Розв'язавши його, отримаємо

$$-\frac{dy_t}{dt} = ky_t, \quad \int\frac{dy_t}{y_t} = -k\int dt, \quad \ln|y_t| = -kt + \ln|C|,$$

$$\ln\left|\frac{y_t}{C}\right| = -kt, \qquad y_t = Ce^{-kt}$$

Для визначення довільної сталої використовуємо початкову умову $y_t = \mathrm{y}_0$ при t =0: $y_0 = Ce^{-k\cdot 0} = C$.

Таким чином, вартість обладнання після його використання впродовж t років буде $y_t = Ce^{-k\cdot t}$.

Лекція 10а.

ЧИСЛОВІ РЯДИ

План лекції

1. *Числові ряди. Збіжність числового ряду.*
2. *Властивості збіжних рядів.*
3. *Ознаки збіжності числових рядів з додатними членами.*
4. *Абсолютна та умовна збіжність ряду. Знакозмінні ряди та знакопереміжні ряди*

1.***Числові ряди. Збіжність числового ряду***

Якщо числа $U_1, U_2, ..., U_n, ...,$ являються членами нескінченної послідовності, то вираз виду:

$$U_1+U_2+...+U_n+... = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \tag{1}$$

називається ***числовим рядом***.

Числа U_1, U_2, U_3,…, U_n … називаються ***членами ряду***, а U_n називається ***загальним членом ряду***. Для того, щоб задати ряд (1) досить задати його загальний член U_n . Як правило, припускають, що n дорівнює 1, 2, 3,…, але інколи ряд починають з n = 0.

Приклад 1. Записати перші п'ять членів числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}$.

Розв'язання. Загальний член данного ряду дорівнює $U_n = \frac{2^n}{n^2+1}$. Тоді при $n=1$ маємо $U_1 = 1$; при $n=2$ отримаємо $U_2 = \frac{4}{5}$. Аналогічно знаходимо $U_3 = \frac{4}{5}$; $U_4 = \frac{16}{17}$; $U_5 = \frac{16}{13}$.

Приклад 2. Знайти загальний член ряду: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$.

Розв'язання. Співставляючи номер члена ряду та його величину, одержимо

$$\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots .$$

Таким чином, загальний член ряду дорівнює $U_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Зауважимо, що члени даного ряду є нескінченою геометричною прогресією, причому $U_n = a_1 q^{n-1}, q = \frac{1}{2}, a_1 = 1.$

Числовой ряд виду (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots , \tag{2}$$

де q – знаменник геометричної прогресії, називається ***рядом геометричної прогресії***.

Числовой ряд виду (3)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \tag{3}$$

називається ***гармонічним рядом***.

Числовой ряд виду (4)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = 1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\frac{1}{4^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\ldots \tag{4}$$

називається ***узагальненим гармонічним рядом***.

Суму перших n членів ряду (1) називають ***n-ю частковою сумою ряду*** і позначають S_n, тобто:

$$
\begin{aligned}
&S_1 = U_1,\\
&S_2 = U_1 + U_2,\\
&S_3 = U_1 + U_2 + U_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Часткові суми числового ряду (1) утворюють нескінченну числову послідовність його часткових сум

$$\mathrm{S}_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots \qquad (6)$$

Якщо послідовність (6) часткових сум числового ряду (1) має скінченну границю при $n \to \infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \;, \qquad (7)$$

то ряд (1) називається ***збіжним***, а число S називають ***сумою ряду*** і записують $S = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$. Якщо ж послідовність (6) не має скінченної границі при $n \to \infty$, то ряд (1) називається ***розбіжним***. В цьому випадку ряд не має суми ряду.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд

$$3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{3^{n-2}} + \ldots.$$

Розв'язання. Заданий ряд є сумою членів геометричної прогресії з першим членом $b_1 = 3$ і знаменником $q = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{3}$. Сума перших членів геометричної прогресії обчислюється за формулою $S_n = \frac{b_1.(1 - q^n)}{1 - q}$. Таким чином n–а часткова сума заданого ряду матиме вигляд:

$$S_n = \frac{3 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

При $n \to \infty$ послідовність часткових сум заданого ряду має скінченну границю:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{9}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 4{,}5 \cdot (1 - 0) = 4{,}5.$$

Отже, заданий ряд збіжний, його сума S=4,5.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд

5+7+9+11…+(2n+3)+ …

Розв'язання. Заданий ряд є сумою членів арифметичної прогресії з першим членом $a_1 = 5$ і різницею $d = a_n - a_{n-1} = 2$. Сума n перших членів арифметичної прогресії обчислюється за формулою $S_n = \left(2a_1 + d \cdot (n-1)\right) \cdot \frac{n}{2}$. Таким чином n-а часткова сума заданого ряду матиме вигляд:

$$S_n = \left(10 + 2 \cdot (n-1)\right) \cdot \frac{n}{2} = (2n+8) \cdot \frac{n}{2} = (n+4) \cdot n.$$

При $n \to \infty$ послідовність часткових сум заданого ряду не має скінченної границі:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left((n+4) \cdot n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(n^2 + 4n\right) = \infty.$$

Отже, заданий ряд розбіжний.

2. Властивості збіжних рядів

1) Якщо ряд $U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$ збіжний і має суму S, а $C \neq 0$ - стала, то ряд $CU_1 + CU_2 + \ldots + CU_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} CU_n$ теж збіжний і має суму CS.

2) Якщо ряд $U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$ збіжний і має суму S_u, а ряд $v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжний і має суму S_v, то ряд $(U_1 \pm v_1) + (U_2 \pm v_2) + \ldots + (U_n \pm v_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (U_n \pm v_n)$ теж збіжний і має суму $S_{u\pm v} = S_u \pm S_v$.

3) Ряд, утворений шляхом відкидання або дописування будь-якого скінченного числа членів до збіжного ряду, теж буде збіжним.

Необхідна умова збіжності ряду. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ збігається, то його загальний член U_n прямує до нуля при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0. \tag{8}$$

Якщо ж $\lim_{n\to\infty} U_n \neq 0$ (необхідна умова не виконується), то відповідний ряд обов'язково розбігається: це так звана ***достатня ознака розбіжності числового ряду.***

Наприклад, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots.$$

розбігається, так як $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

Підкреслимо, що розглянута ознака є лише необхідною, але не є достатньою, тобто із того, що загальний член прямує до нуля, не слідує, що ряд збігається; ряд може і розбігатися. Наприклад, гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$$

розбігається, незважаючи на те, що $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

3. Ознаки збіжності рядів з додатними членами

Якщо всі члени ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ невід'ємні $U_n\geq 0$, то цей ряд називають ***рядом з додатними членами.***

Ознаки порівняння

При дослідженні числових рядів на збіжність інколи застосовується дослідження збіжності за визначенням, тобто обчислюється сума ряду, як границя його *n*-х часткових сум при $n\to\infty$. Але такі задачі не завжди легко розв’язуються, до того ж в науці і практиці часто потрібне знання не суми ряду, а лише факту збіжності ряду (або його розбіжності).

Для цієї мети у випадку знакододатних рядів застосовуються (крім достатньої ознаки розбіжності) так звані достатні ознаки збіжності.

Проста ознака порівняння рядів

Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n$ - ряди з додатними членами. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ збіжний і, починаючи з деякого номера *n*, для кожного члена ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n$ виконується нерівність $\mathrm{V_n}\leq U_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n$ також збігається. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ розбіжний і, починаючи з деякого номера *n*, для кожного члена ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n$ виконується нерівність $\mathrm{V_n}\geq U_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n$ також розбіжний.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}+\cdots.$

Розв’язання. Порівняємо заданий ряд з геометричною прогресією $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots,$ яка є збіжною, бо знаменник прогресії $|q|=\frac{1}{2}<1$. Заданий ряд і геометрична прогресія – ряди з додатними членами. Очевидно, що всі члени заданного ряду не перевищують членів ряду геометричної прогресії. Отже, за простою ознакою порівняння рядів, заданий ряд – збіжний.

Гранична ознака порівняння рядів

Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ - ряди з додатними членами. Якщо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = C, \quad (0 < \mathrm{C} < \infty,\ \mathrm{V_n} \neq 0),$$

то обидва ряди збігаються або розбігаються одночасно.

При застосуванні ознак порівняння використовуються так звані стандартні ряди (ряди, умови чи збіжності або розбіжності яких відомі). Як стандартні ряди використовуються, наприклад, нескінченно спадаюча геометрична прогресія $(|\mathrm{q}| < 1)$, границя часткових сум якої при $n \to \infty$ дорівнює $\frac{a_1}{1-q}$, і узагальнений гармонічний ряд $\sum \frac{1}{n^p}$, (p - число), який збігається при $p>1$ і розбігається, якщо $p \leq$ 1.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \cdots$

Розв'язання. Знаменники членів числового ряду утворюють арифметичну прогресію з загальним членом $3n-1$, тому загальний член заданого ряду має вид $U_n = \frac{1}{3n-1}$. Порівняємо заданий ряд з гармонічним рядом, загальний член якого має вид $V_n = \frac{1}{n}$. Знайдемо границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

За граничною ознакою порівняння рядів - оскільки гармонічний ряд розбігається, то розбігається і заданий ряд.

Ознака Даламбера

Якщо для знакододатнього ряду $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ існує скінченна границя відношення послідуючого члена до попереднього

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \rho,$$

то при $\rho < 1$ ряд збігається,

при $\rho > 1$ ряд розбігається;

при $\rho = 1$ питання про збіжність не вирішується; у цьому разі слід скористатися іншими ознаками збіжності рядів.

Цю ознаку рекомендується використовувати, якщо загальний член досліджуваного ряду містить показникові або (і) факторіальні елементи відносно номера n.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$.

Розв'язання. Заданий ряд є рядом з додатними членами. Для нього маємо

$$U_n=\frac{n!}{2^n},\quad U_{n+1}=\frac{(n+1)!}{2^{n+1}};\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{(n+1)!2^n}{2^{n+1}n!}=\frac{n+1}{2}.$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty>1$

Отже, заданий ряд розбігається.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$.

Розв'язання. Заданий ряд є рядом з додатними членами. Для нього маємо

$$U_n=\frac{4n-3}{\sqrt{n\,3^n}},\qquad U_{n+1}=\frac{4(n+1)-3}{\sqrt{(n+1)\,3^{n+1}}}=\frac{4n+1}{\sqrt{(n+1)\,3^{n+1}}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{4n-3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n\,3^n}}{\sqrt{(n+1)\,3^{n+1}}}=1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Оскільки $\rho=\frac{1}{\sqrt{3}}<1$, то за ознакою Даламбера заданий ряд збігається.

Радикальна ознака Коші

Якщо для знакододатнього ряду $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ при $n\to\infty$ існує скінчена границя кореня n-ого степеня із його загального члена

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\rho\ ,$$

то при $\rho<1$ цей ряд збігається;

при $\rho>1$ ряд розбігається;

при $\rho=1$ питання про збіжність за допомогою цієї ознаки не може бути вирішене.

Дану ознаку рекомендується застосовувати, якщо загальний член ряду є показово-степеневою функцією відносно n.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-3}{4n+5}\right)^n$.

Розв'язання. Заданий ряд є рядом з додатними членами. Його загальний член $U_n=\left(\frac{2n-3}{4n+5}\right)^n$, тому $\sqrt[n]{U_n}=\frac{2n-3}{2n+5}$. Знаходимо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{4n+5}\right)=\frac{1}{2}<1.$$

Отже, за радикальною ознакою Коші даний ряд збігається.

Інтегральна ознака Коші

Нехай члени ряду $U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n+\ldots$ додатні і не зростають, тобто

$$U_1\geq U_2\geq U_3\geq\ldots\geq U_n\geq\ldots,$$

і нехай $f(x)$ - така неперервна, додатня, монотонно спадна функція, що

$$f(1)=U_1,\quad f(2)=U_2,\quad f(3)=U_3,\ldots,\ f(n)=U_n,\ldots$$

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ збігається або розбігається разом зі збіжністю або розбіжностю невласного інтеграла $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$, де $a\geq 1$.

Умовам цієї ознаки, задовольняє, наприклад, узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. Тому що $\int\limits_1^{\infty}\frac{dn}{n^p}=\lim\limits_{\beta\to\infty}\frac{1}{(1-p)n^{p-1}}\Bigg|_1^{\beta}=\begin{cases}\infty & при\ \ p\leq 1\\ \dfrac{1}{p-1} & при\ \ p>1\end{cases}$ то, очевидно, що цей ряд збігається при $p>1$, і розбігається при $p\leq 1$.

Приклад 10. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$.

Розв'язання. Члени данного ряду додатні і монотонно спадають, тоді $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$. Ця функція неперервна, додатна і спадна на проміжку $[1;+\infty]$.

Знаходимо невласний інтеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{2x}{x^2+1}dx=\lim_{a\to\infty}\int\limits_1^{a}\frac{2x}{x^2+1}dx=\lim_{a\to\infty}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_1^a=\lim_{a\to\infty}\left[\ln\left(a^2+1\right)-\ln 2\right]=\infty.$$

Невласний інтеграл розбіжний, отже за інтегральною ознакою Коші заданий ряд теж розбіжний.

3. *Абсолютна та умовна збіжність ряду. Знаозмінні та знакопереміжні ряди*

Якщо серед членів деякого числового ряду є як додатні, так і від'ємні числа (причому і тих і інших необмежена кількість), то такий ряд називають ***знакозмінним***.

Знакозмінний ряд називають ***абсолютно збіжним***, якщо ряд, складений з абсолютних величин членів цього ряду, збіжний. Тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ ***абсолютно збіжний***, якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|U_n\right|$ збіжний.

Знакозмінний ряд називають ***умовно збіжним***, якщо він збіжний, а ряд, складений з абсолютних величин членів цього ряду, розбіжний. Тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ ***умовно збіжний***, якщо він збіжний, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|U_n\right|$ розбіжний.

Властивості абсолютно збіжних рядів:

1. Якщо знакозмінний ряд абсолютно збіжний і має суму S, то ряд, отриманий з нього будь-якою перестановкою скінченного чи нескінченного числа членів, теж абсолютно збіжний і має суму S.

2. Якщо знакозмінні ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно збіжні і мають суми відповідно S_u і S_v, то, ряд, складений з попарних алгебраїчних сум членів цих рядів, взятих в будь-якому порядку $(u_n \pm v_k)$, теж абсолютно збіжний і має суму $S_u \pm S_v$.

Зауваження. Наведені властивості не стосуються умовно збіжних рядів.

Приклад 11. Показати, що сума умовно збіжного ряду залежить від порядку його членів.

Розв'язання. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ умовно збіжний. Нехай сума цього ряду S (можна довести, що $S = \ln 2$).

Переставимо члени ряду так, щоб за кожним додатнім членом ряду слідували два, не записані раніше, від'ємні члени ряду. В результаті цього отримаємо такий ряд:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots \ .$$

Згрупувавши члени цього ряду, матимемо:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \ldots\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{S}{2}.$$

Отже, від перестановки членів цього умовно збіжного ряду його сума зменшилась вдвічі.

Приклад 12. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{27} + \frac{1}{8} - \frac{1}{81} + \ldots \ .$$

Якщо ряд збіжний, то встановити характер збіжності (абсолютна чи умовна) і знайти суму ряду.

Розв'язання. Додатні члени ряду утворюють геометричну прогресію з першим членом $b_1 = 1$ і знаменником $q = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{2} < 1$. Отже, вони утворюють абсолютно збіжний ряд, сума якого $S_1 = \frac{b_1}{1-q} = 2$. Від'ємні члені ряду утворюють геометричну прогресію з першим членом $b_1 = -\frac{1}{3}$ і знаменником $q = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{3} < 1$. Отже, вони утворюють абсолютно збіжний ряд, сумою якого буде $S_2 = \frac{b_1}{1-q} = -\frac{1}{2}$.

За властивістю абсолютно збіжних рядів, заданий ряд абсолютно збіжний і його сума $S = S_1 + S_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Ряд, знаки членів якого чергуються

Знакозмінний ряд називають ***рядом, знаки членів якого чергуються***, якщо будь-які два сусідніх члени цього ряду мають протилежні знаки. ***Ряд, знаки членів якого чергуються***, можна записати так:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n,$$

де всі u_n - додатні числа. Ці ряди називають ще ***знакопереміжними рядами***.

Для знакопереміжних рядів має місце достатня ознака збіжності Лейбніца.

Теорема Лейбніца. Якщо в знакопереміжному ряді $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n$ абсолютні величини членів спадають, тобто

$$\mathrm{U}_1 > U_2 > U_3 > \ldots > U_n > \ldots$$

і загальний член прямує до нуля, $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$, то ряд збігається, причому його сума додатна та не перевищує величини першого члена.

Наслідок. Якщо ряд задовольняє умови теореми Лейбніця і його суму S замінити n-ю частковою сумою S_n, тобто відкинути залишок $R_n = S - S_n$, то абсолютна величина отриманої похибки не перевищуватиме абсолютної величини першого відкинутого члена u_{n+1}.

Приклад 13. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots .$$

Розв'язання. Ряд задовольняє умови теореми Лейбніца. Дійсно:

1) він є рядом, знаки членів якого чергуються;
2) його члени за абсолютною величиною монотонно спадають, бо

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots;$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Отже, за теоремою Лейбніца, заданий ряд збіжний і абсолютна величина його суми $|S| \le |u_1| = 1$.

Ряд, складений з абсолютних величин членів заданого ряду буде гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який розбігається. Тому заданий ряд є умовно збіжним.

Приклад 14. Обчислити з точністю до 0,01 суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}=1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\dots\ .$$

Розв'язання. Ряд задовольняє умови теореми Лейбніца. Дійсно:

1) він є рядом, знаки членів якого чергуються;
2) його члени за абсолютною величиною монотонно спадають, бо

$$1>\frac{1}{2^3}>\frac{1}{3^3}>\frac{1}{4^3}>\dots;$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$.

Легко бачити, що $|u_5|=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}<0{,}01$. За наслідком з теореми Лейбніца, відкинувши всі члени ряду, починаючи з п'ятого, отримаємо похибку, яка менша 0,01.

Отже, з точністю до 0,01 обчислюємо суму ряду

$$S\approx S_4=1-\frac{1}{8}+\frac{1}{27}-\frac{1}{64}=\frac{1549}{1728}\approx 0{,}90.$$

Лекція 10б.

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

План лекції

1. *Функціональні ряди.*
2. *Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус збіжності степеневого ряду.*
3. *Диференціювання та інтегрування степеневих рядів.*
4. *Теореми Тейлора і Маклорена. Розкладання елементарних функцій у ряди Тейлора і Маклорена.*
5. *Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.*

1. Функціональні ряди

Ряд, членами якого є функції незалежної змінної, називають ***функціональним рядом***:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots . \qquad (1)$$

При кожному конкретному значенні незалежної x функціональний ряд (1) перетворюється в числовий ряд, який при одних значеннях x може виявитися збіжним, а при інших розбіжним. Якщо числовий ряд, отриманий з ряду (1) при $x = x_0$, збіжний, то кажуть, що функціональний ряд (1) ***збіжний в точці*** x_0.

Областю збіжності функціонального ряду називають множину всіх значень аргументу x, при яких цей ряд збіжний.

Нехай числовий ряд, отриманий з ряду (1) при $x = x_0$, збіжний. Позначимо його суму S_0. ***Сумою функціонального ряду*** (1) називають таку функцію $S(x)$, що для будь-якого x_0 з області збіжності цього ряду $S(x_0) = S_0$.

2. ***Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус збіжності степеневого ряду.***

Функціональний ряд виду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (2)$$

або більш загального виду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n , \qquad (3)$$

де коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ не залежать від змінної x, x_0 - деяке стале число, називається ***степеневим рядом***.

Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ назваються ***коефіцієнтами степеневих рядів*** (2), (3).

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (2) збігається при деякому значенні $x = x_1$, то він збігається абсолютно для усіх x, що задовольняють нерівність $|x| \le |x_1|$.

Якщо степеневий ряд (2) розбігається при $x = x_2$, то він розбігається для усіх x, що задовольняють нерівність $|x| > |x_2|$.

Теорема Абеля стверджує, що якщо степеневий ряд (2) збігається при $x_1 \neq 0$, то він збігається абсолютно при будь-якому x із інтервалу $(-|x_1|, |x_1|)$. Якщо ж ряд розбігається при x_2, то він розбігається у всіх точках, які лежать поза інтервалом $(-|x_2|, |x_2|)$.

Очевидно, що будь-який степеневий ряд (2) збіжний в точці $x = 0$.

Для будь-якого степеневого ряду (2) існує деяке число $R \ge 0$ таке, що цей ряд абсолютно збіжний при $|x| < R$, або $x \in (-R; R)$ і розбіжний при $|x| > R$. Число R називають ***радіусом збіжності степеневого ряду,*** а інтервал $(-R; R)$ ***інтервалом збіжності степеневого ряду*** (2).

Якщо ряд (2) збіжний лише при $x = 0$, то вважають, що його радіус збіжності $R = 0$. Якщо ж ряд (2) збіжний при будь-якому x, то вважають, що $R = \infty$.

Правило. Щоб знайти область збіжності степеневого ряду (2), потрібно спочатку знайти інтервал збіжності $(-R;R)$, а потім з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях цього інтервалу, тобто при $x=-R$ та $x=R$. При $x=\pm R$ ряд може або збігатися, або розбігатися. Це питання розв'язується для кожного конкретного ряду індивідуально. Отже, ***областю збіжності степеневого ряду*** є його інтервал збіжності з можливим приєднанням до нього однієї або двох точок в залежності від того, як веде себе ряд на кінцях інтервалу, тобто при $x=\pm R$.

3. *Диференціювання та інтегрування степеневих рядів.*

Диференціювання степеневого ряду. Нехай степеневий ряд має радіус збіжності R. Тоді ряд, отриманий по членним диференціюванням вихідного степеневого ряду, також має радіус збіжності R, а його сума дорівнює похідній від суми вихідного ряду.

Інтегрування степеневого ряду. Нехай степеневий ряд має радіус збіжності R. Якщо межі інтегрування лежать в інтервалі збіжності степеневого ряду, то степеневий ряд можна почленно інтегрувати. Отриманий степеневий ряд матиме той же радіус збіжності R і послідовність інтегралів від частинних сум цього ряду збігається до інтегралу від суми ряду.

Два степеневих ряда можна почленно додавати і множити (за правилом множення многочленів). При цьому інтервалом збіжності одержаного нового ряду буде сукупність всіх точок, в яких одночасно збігаються обидва ряди.

Для знаходження радіусу збіжності степеневого ряду використовують ознаку Даламбера або ознаку Коші.

Якщо степеневий ряд включає всі послідовні степені x, тобто має вид (2), то радіус збіжності знаходять за формулою, яка випливає з ознаки Даламбера:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{4}$$

де a_n – коефіцієнт при загальному члені U_n степеневого ряду.

Приклад 1. Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots .$$

Розв'язання. Для даного ряду маємо $a_n=\frac{1}{n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$. За формулою (4) визначаємо радіус збіжності степеневого ряду

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

Тоді інтервал збіжності даного ряду (-1; 1).

З'ясуємо поведінку ряду на кінцях цього інтервалу, тобто при $x=-1$ та $x=1$.

Якщо $x=-1$, то отримаємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. За ознакою Лейбніца цей ряд збіжний, так як $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\dots$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, тому $x=-1$ належить області збіжності ряду.

Якщо $x=1$, то отримаємо гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Цей ряд розбіжний, тому $x=1$ не належить області збіжності ряду.

Таким чином, областю збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ є проміжок $[-1;1)$.

Приклад 2. Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\dots.$$

Розв'язання. Для даного ряду маємо $a_n=\frac{1}{n!}$; $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$. За формулою (4), його радіус збіжності:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Оскільки $R=\infty$, то досліджуваний ряд збіжний при будь-якому x. Його область збіжності $(-\infty,+\infty)$.

Приклад 3. Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}n!\cdot x^n=x+2x^2+6x^3+24x^4+\dots.$$

Розв'язання. Для даного ряду маємо $a_n=n!$; $a_{n+1}=(n+1)!$. За формулою (4), його радіус збіжності:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Оскільки $R=0$, то досліджуваний ряд збіжний лише при $x=0$. Його область збіжності точка $x=0$.

Приклад 4. Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^4(3x-2)^n}{2^{n-1}}.$$

Розв'язання. Зробивши у заданому ряді заміну $3x-2=u$, отримаємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^4u^n}{2^{n-1}}=\frac{2^4u}{1}+\frac{3^4u^2}{2}+\dots+\frac{(n+1)^4u^n}{2^{n-1}}+\frac{(n+2)^4u^{n+1}}{2^n}+\dots$. Для цього ряду маємо $a_n=\frac{(n+1)^4}{2^{n-1}}, a_{n+1}=\frac{(n+2)^4}{2^n}$. За формулою (4) знаходимо радіус збіжності

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4}{2^{n-1}}\cdot\dfrac{2^n}{(n+2)^4}=2$. Отже, степеневий ряд збігається у інтервалі (-2; 2).

При u=2 отримаємо наступний числовой ряд $\dfrac{2^4\cdot 2}{2^0}+\dfrac{3^4\cdot 2^2}{2}+\dfrac{4^4\cdot 2^3}{2^2}+\ldots+\dfrac{(n+1)^4 2^n}{2^{n-1}}+\cdots$ або $2^4\cdot 2+3^4\cdot 2+4^4\cdot 2+\ldots+(n+1)^4 2+\cdots$.

Очевидно, що n-й член цього числового ряду не прямує до нуля при $n\to\infty$, тобто необхідна умова збіжності ряду не виконується. Звідси випливає, що цей числовий ряд розбігається.

При u = - 2 отримаємо наступний знакопереміжний числовий ряд

$$-\frac{2^4\cdot 2}{2^0}+\frac{3^4\cdot 2^2}{2}-\ldots+\frac{(-1)^n(n+1)^4 2^n}{2^{n-1}}+\cdots \text{або}$$

$$-2^4\cdot 2+3^4\cdot 2-\ldots+(-1)^n(n+1)^4 2+\cdots$$

І в цьому випадку n-й член ряду не прямує до нуля, значить, за ознакою Лейбніца цей ряд розбігається.

Визначимо область збіжності вихідного степеневого ряду для змінної x. Оскільки $u=3x-2$, то при $u=2;\ x=\dfrac{4}{3}$, при $u=-2;\ x=0$, тоді область збіжності заданого степеневого ряду $\left(0;\ \dfrac{4}{3}\right)$.

Ще одну формулу для знаходження області збіжності степеневого ряду можна одержати за допомогою ознаки Коші:

Степеневий ряд збігається при всіх x, *для яких* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|}<1$. (5)

Приклад 5. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n x$.

Розв'язання. Застосуємо радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\ln^n x|}=|\ln x|<1.$$

Із означення логарифма x >1, тоді:

а) ряд збігається, якщо $-1<\ln x<1;\quad -\ln e<\ln x<\ln e,\quad e^{-1}<x<e$;

б) ряд розбігається, якщо $|\ln x|>1$

в) на кінцях інтервалу збіжності:

при $x=e^{-1}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ - ряд розбігається;

при $x=e$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1^n$ - ряд розбігається.

Отже, область збіжності ряду $x\in\left(\dfrac{1}{e},e\right)$.

Приклад 6. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$.

Розв'язання. Застосуємо радикальну ознаку Коші, враховуючи $U_n = \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$. Тоді $\sqrt[n]{|U_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}\right|} = \frac{|x-1|^{(n+1)}}{n}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|} = \begin{cases} 0, & |x-1|\le 1, \\ \infty, & |x-1|>1. \end{cases}$

Таким чином, степеневий ряд збігається при $|x-1|\le 1$, тобто в інтервалі $0<x<2$.

4. *Теореми Тейлора і Маклорена. Розкладання елементарних функцій у ряди Тейлора і Маклорена.*

Розклад функцій в степеневий ряд

а)Розклад функцій в ряд Тейлора

Сума будь-якого збіжного степеневого ряду є функцією, яка визначена в інтервалі збіжності цього ряду. Тому виникає задача, чи можна по цій заданій функції знайти збіжний ряд, сума якого в області збіжності дорівнювала б заданій функції. Ця задача називається ***розкладом функції в ряд.*** Оскільки многочлен є найбільш простою функцією, то теоретичне і практичне значення має задача, чи можна задану функцію $f(x)$ наближено замінити (апроксимувати) многочленом.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ має в деякому інтервалі, що містить точку $x=a$, похідні до (n+1)-го порядку включно, то для любого x з цього інтервалу справедлива ***формула Тейлора***

$$f(x)= f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n, \tag{6}$$

де R_n - залишковий член, який дорівнює

$$R_n = f(x)-S_n = \frac{\mathrm{f}^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \tag{7}$$

де $$S_n = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \tag{8}$$

(с – деяке число, що лежить між a та x).

Якщо функція $f(x)$ визначена і має похідні до (n+1)-го порядку включно в деякому замкнутому інтервалі, що містить точку $x=a$, а також якщо залишковий член прямує до нуля $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$, то вона може бути представлена рядом Тейлора

$$f(x)= f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots. \qquad (9)$$

Представлення функції $f(x)$ у вигляді ряду (9) називається ***розкладом функції в ряд Тейлора.*** Сума (8) є частинною сумою ряду (9).

Необхідною і достатньою умовою існування рівності (9) для значень x із деякого проміжку є умова $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$ для всіх x із цього проміжку.

Для розкладу заданої функції в ряд Тейлора необхідно:

1) записати ряд Тейлора для заданої функції, тобто обчислити значення цієї функції і її похідні при $x=a$ і підставити їх у загальний вираз ряду Тейлора (9) для заданої функції;

2) дослідити залишковий член формули Тейлора для заданої функції і визначити сукупність значень x, при яких одержаний ряд збігається до заданої функції (тобто при яких $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$). Умова $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ виконується на будь-якому проміжку, на якому $f^{(n+1)}(c)$ величина обмежена.

Для багатьох функцій, які використовуються в практичних застосуваннях математичного аналізу, інтервал збіжності ряду Тейлора співпадає з сукупністю тих значень x, при яких $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$, тобто для багатьох функцій кожна точка x збіжності ряду Тейлора є і точкою збіжності того ряду, який складено для заданої функції. Через це при розкладі багатьох функцій в ряд Тейлора можна замість дослідження відповідного залишкового члена, що в багатьох випадках складно, дослідити збіжність самого ряду Тейлора, як звичайного степеневого ряду.

б)Розклад функцій в ряд Маклорена

Якщо в ряді Тейлора (9) прийняти $a=0$, то одержимо розклад функції в ***ряд Маклорена***

$$f(x)= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots. \qquad (10)$$

Якщо функція $f(x)$ на деякому проміжку подано у вигляді степеневого 5ряду, збіжного до $f(x)$, то кажуть, що цьому проміжку функцію $f(x)$ ***розкладено в степеневий ряд***.

Приклад 7. Розкласти многочлен $f(x)= x^3-5x^2+8x+3$ по степеням (x - 2).

Розв'язання. Послідовно диференціюючи функцію $f(x)= x^3-5x^2+8x+3$, отримаємо $f'(x)=3x^2-10x+8$, $f''(x)=6x-10$, $f'''(x)=6$, $f^{(n)}(x)=0$ при $n>3$. При $x=2$ маємо $f(2)=7$, $f'(2)=0$, $f''(2)=2$, $f^{(n)}(2)=0$ при $n>3$. За формулою (9) розклад многочлена має наступний вид

$$f(x)=7+\frac{0}{1!}(x-2)+\frac{2}{1\cdot 2}(x-2)^2+\frac{6}{1\cdot 2\cdot 3}(x-2)^3 \text{ або } f(x)=7+(x-2)^2+(x-2)^3.$$

Приклад 8. Розкласти в степеневий ряд функцію $f(x)=\sin x$.

Розв'язання. Розкладемо функцію $f(x)$ в ряд Маклорена. Послідовно диференціюючи функцію $f(x)$ і знаходячи значення її похідних при $x=0$, матимемо:

$$\begin{aligned}
&f(x)=\sin x; && f(0)=\sin 0=0;\\
&f'(x)=\cos x; && f'(0)=\cos 0=1;\\
&f''(x)=-\sin x; && f''(0)=-\sin 0=0;\\
&f'''(x)=-\cos x; && f'''(0)=-\cos=-1;\\
&f^{(4)}(x)=\sin x; && f^{(4)}(0)=\sin 0=0;\\
&f^{(5)}(x)=\cos x; && f^{(5)}(0)=\cos 0=1;
\end{aligned}$$

Неважко помітити, що при $x=0$ похідні парного порядку дорівнюють нулю, а непарного порядку $f^{(2n-1)}(0)=(-1)^{n-1}$.

Підставляючи знайдені значення похідних в рівність (10), запишемо формулу Маклорена для функції $f(x)=\sin x$:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n}(x).$$

Дослідимо залишковий член цієї формули. Очевидно, що для будь-яких n та c виконується нерівність $\left|f^{(n+1)}(c)\right|\le 1$. Це означає, що $f^{(n+1)}(c)$ є величиною обмеженою при будь-яких n та x. Тому для будь-якого x виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, а звідси випливає, що при $x\in(-\infty;+\infty)$ відповідний ряд Маклорена збіжний і його сума дорівнює $f(x)=\sin x$. Отже, при $x\in(-\infty;+\infty)$:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Розклад в степеневі ряди деяких елементарних функцій:

1) $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \textit{при} \quad x\in(-\infty;+\infty);$$

2) $$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \textit{при} \quad x\in(-\infty;+\infty);$$

3) $$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2\cdot(n-1))!}, \quad \textit{при} \quad x\in(-\infty;+\infty);$$

4) $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n},\quad при\quad x\in(-1;1]$$

5) $$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad при\quad x\in[-1,1];$$

6) $$(1+x)^m=1+mx+\frac{m\cdot(m-1)}{2!}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{3!}\cdot x^3+$$
$$+\ldots+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}\cdot x^{n-1}+\ldots,\quad при\quad x\in(-1;1).$$

Приклад 9. Розкласти в степеневий ряд функцію $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

Розв'язання. Запишемо задану функцію у вигляді $f(x)=(1-2x)^{-0.5}$. Скористаємося розкладом (6) в степеневий ряд функції $f(x)=(1+x)^m$. Підставивши $m=-0{,}5$ і замінивши x на вираз (- $2x$), матимемо:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x}}=1+x+\frac{1\cdot 3}{2!}\cdot x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}\cdot x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4!}\cdot x^4+\ldots.$$

Отриманий ряд збіжний до функції при $-2x\in(-1;1)$, або $x\in(-0{,}5;0{,}5)$.

5.Застосування рядів до наближених обчислень

Степеневі ряди мають самі різні застосування. З їх допомогою обчислюють із заданим степенем точності значення функції, визначені інтеграли, які не виражаються через елементарні функції або є надто складними для обчислень, інтегруються диференціальні рівняння. Для обчислення наближених значень функцій з заданою точністю зручно користуватися рядами в тому випадку, якщо відповідний ряд є знакопереміжним. Для знакопереміжного збіжного ряду легко оцінити похибку наближеного значення суми – вона не перевищує абсолютного значення першого із відкинутих членів (ознака Лейбніца). В інших випадках наближене значення функції з заданою точністю обчислюється за формулою Тейлора (Маклорена).

Приклад 10. З точністю до 0,0001 обчислити $A=\sqrt[4]{630}$.
Розв'язання. Перепишемо А у вигляді:

$$A=\sqrt[4]{630}=\sqrt[4]{625+5}=\sqrt[4]{625\cdot\left(1+\frac{5}{625}\right)}=$$
$$=\sqrt[4]{625\cdot(1+0{,}008)}=5\cdot\sqrt[4]{1+0{,}008}=5\cdot(1+0{,}008)^{0{,}25}.$$

Підставимо $x=0,008$ та $m=0,25$ у розклад в степеневий ряд функції $f(x)=(1+x)^m$, при цьому врахуємо, що $x=0,008$ належить області збіжності цього ряду. Матимемо:

$$(1+0,008)^{0,25}=1+0,25\cdot 0,008+\frac{0,25\cdot(-0,75)}{2!}\cdot 0,008+\ldots=$$
$$=1+0,002-0,000006+\ldots$$

Отримали ряд, знаки членів якого чергуються. Абсолютна величина третього члена цього ряду 0,000006. За теоремою Лейбніца, якщо відкинути всі члени ряду, починаючи з третього, то похибка при обчисленні $\sqrt[4]{1+0,008}$ не перевищить 0,000006. Тоді похибка при обчисленні $\sqrt[4]{630}=\sqrt[4]{1+0,008}\cdot 5$ не перевищить $5\cdot 0,000006=0,00003<0,0001$. Отже, для забезпечення необхідної точності досить взяти два перші члени ряду:

$$A=\sqrt[4]{630}=5\cdot\sqrt[4]{1+0,008}=5\cdot(1+0,002-\ldots)\approx 5\cdot(1+0,002)=5,01.$$

Таким чином $A=\sqrt[4]{630}\approx 5,0100$ з точністю до 0,0001.

Приклад 11. З точністю до 0,0001 обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}dx$.

Розв'язання. Розкладемо підінтегральну функцію у ряд Маклорена та проінтегруємо його почленно

$$\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}dx=\left(x-\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^3}{3\cdot 4!}-\frac{x^4}{4\cdot 6!}+\frac{x^5}{5\cdot 8!}+\right)\ldots\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{2\cdot 2!}+\frac{1}{3\cdot 4!}-\frac{1}{4\cdot 6!}+\frac{1}{5\cdot 8!}-\ldots$$

П'ятий член одержаного знакопереміжного ряду менший за 0,0001. За теоремою Лейбніца для забезпечення необхідної точності досить взяти суму перших чотирьох членів ряду.

Кожен доданок слід обчмслювати з точністю до 0,00001, а одержаний результат закруглити до 4-х знаків. Отже,

$$\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}dx\approx 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{72}-\frac{1}{2880}\approx 0,7635\,.$$

Зауваження. *Застосовуючи ряди до наближеного обчислення означених інтегралів, обов'язково слід переконатися, що відрізок інтегрування лежить в області збіжності відповідного ряду*.

Приклад 12. Знайти перші три, відмінні від нуля, члени розкладу в степеневий ряд частинного розв'язку диференціального рівняння

$$y''-xy'+y=e^x\,,$$

який задовольняє початкові умови: $y(0)=1;\ y'(0)=0$.

Розв'язання. Запишемо задане диференціальне рівняння у вигляді:

$$y'' = xy' - y + e^x,$$

а шуканий частинний розв'язок у вигляді ряду Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}\cdot x + \frac{y''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}\cdot x^4 + \ldots.$$

З початкових умов уже відомо $y(0)$ і $y'(0)$. Підставимо ці значення в початкове рівняння і обчислимо $y''(0)$:

$$y''(0) = 0\cdot y'(0) - y(0) + e^0 = 0 - 1 + 1 = 0.$$

Послідовно диференціюючи початкове рівняння і знаходячи значення похідних при $x = 0$, матимемо:

$$y'''(x) = y' + xy'' - y' + e^x = xy'' + e^x, \quad y'''(0) = 0\cdot y''(0) + e^0 = 0 + 1 = 1,$$

$$y^{(4)}(x) = y'' + xy''' + e^x, \qquad y^{(4)}(0) = y''(0) + 0\cdot y'''(0) + e^0 = 0 + 0 + 1 = 1.$$

Підставимо ці значення в записаний раніше ряд Маклорена:

$$y(x) = 1 + \frac{0}{1!}\cdot x + \frac{0}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 + \ldots = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots.$$

Це і є шуканий частинний розвязок. Діючи аналогічно, можна знайти будь-яку кількість членів ряду.

Приклад 12. З точністю до 0,0001 обчислити наближене значення натурального логарифму $\ln 3$.

Розв'язання. Наведений вище ряд не можна застосовувати для обчислення натуральних логарифмів чисел, які більші за 2, оскільки він розбігається при $x > 1$. Застосуємо наступний прийом. Замінимо у розкладі

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}$$ x на $-x$:

$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} - \ldots$. Обидва ряди мають один і той же інтервал збіжності $-1 < x < 1$. Збіжні ряди можна почленно додавати або віднімати, тому для $x \in (-1,1)$ маємо

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\right).$$

Нехай $\frac{1+x}{1-x} = \frac{N+1}{N}$, $N > 0$, тоді $x = \frac{1}{2N+1}$. Підставляючи ці значення в одержаний ряд, отримаємо

$$\ln(N+1) - \ln N = 2\left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2N+1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2N+1)^5} + \ldots + \frac{1}{n}\frac{1}{(2N+1)^n} + \ldots\right).$$

Якщо $N=1$, то одержимо $\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{3^5}\right)=0{,}6932$. Четвертий член одержаного ряду менше 0,00001. При $N=2$, маємо $\ln 3-\ln 2 = 2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\frac{1}{5^3}\right)$, звідки $\ln 3 = \ln 2 - 2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\frac{1}{5^3}\right)=1.0985$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. – М.: Наука, 1978. – т. 1. – 456 с. – т.2. – 476 с.
2. Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович – 4-е изд. - М.: Наука, 1986. – 576 с.
3. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. – 4-е изд. – СПб.: Лань, 2001. – 736 с.
4. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. – 4-те вид., випр. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.
5. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2: Дилеренціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. / П.П. Овчинников, В.М. Михайленко. – 3-тє вид., випр. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.
6. Лавріненко Н.М. Лінійна алгебра і аналітична геометрія: навч. посіб. для студ. економ. спец. / М-во освіти і науки України, Донец. нац. ун-т ім.М. Туган-Барановського, каф. вищої і приклад. математики; Н.М. Лавріненко, С.М. Латинін. - Донецьк: [ДонНУЕТ], 2008. - 314 с.
7. Сільченко В.О. Системи лінійних рівнянь. Вектори та аналітична геометрія. Навчальний посібник для сам. роботи студ. д/в спец. «ОБ» за кредитно-модульною системою навчання / В.О. Сільченко, С.В. Бондаренко.- Донецьк: ДонДУЕТ, 2005. - 73 с.
8. Сільченко В.О. Границі послідовностей і функцій. Навчальний посібник для сам. роб. студ. д/в спец. “ОБ” за кредитно-модульною системою навчання / В.О. Сільченко, С.В. Бондаренко. - Донецьк: ДонДУЕТ, 2006. - 91 с.
9. Фортуна В.В. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: Метод. реком. для самост. работы студентов д/о спец. ОБ по кредит.-мод. сист. обучения / В.В. Фортуна, А.А. Павличенко - Донецк: ДонГУЭТ, 2005. - 119 с.
10. Фортуна В.В. Применение производной: Уч. пособие для сам. работы студентов д/о спец. ОБ / В.В. Фортуна, А.А. Павличенко. - Донецк: ДонГУЭТ, 2006. - 83 с.
11. Лавриненко Н.М. Функции нескольких переменных: Учебное пособие для самостоятельной работы студентов дневного отделения специальности “Оборудование” по кредитно-модульной системе обучения / Н.М. Лавриненко – Донецк: ДонГУЭТ, 2006. – 158 с.
12. Сільченко В.О. Невизначений, визначений і невласний інтеграли. Навчальний посібник для сам. роб. студ. д/в спец. “ОБ” за кредитно-модульною системою навчання / В.О. Сільченко. - Донецьк: ДонДУЕТ, 2006. – 197 с.

13. Бескровний О.І. Вища та прикладна математика: Навч. посіб. для самост. роботи студентів техн. і екон. спец-й / О.І. Бескровний, В.В. Фортуна - К: УУ, 2019. - 650 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Асимптоти

Вектор
Визначений інтеграл
Визначник
Визначні границі

Геометричний зміст похідної
Гіпербола
Границя числової послідовності
Графічна інтерпретація

Диференціал
Диференціальне рівняння
Диференціювання неявної функції

Економічна інтерпретація похідної
Екстремуми
Еліпс

Знакопочерговий ряд

Інтегрування частинами

Лінійне диференціальне рівняння
Лінійні операції з векторами
Логарифмічне диференціювання

Матриця
Метод Гаусса
Метод заміни змінної
Метод найменших квадратів
Метод оберненої матриці

Нескінченно малі
Нескінченно великі
Неперервні функції на точці і на відрізку
Невизначений інтеграл

Обернена матриця
Однорідне диференціальне рівняння

Ознака Даламбера
Ознака Коші

Парабола
Порівняння нескінченно малих
Порівняння рядів
Похідна

Радіус збіжності
Рівняння прямої
Розкриття невизначеності

Скалярний добуток векторів
Степеневий ряд

Транспонована матриця

Формули Крамера

ЗМІСТ

Лекція 1.	Визначники. Елементи теорії матриць. Загальна теорія систем лінійних рівнянь……………………….…………….…..4
Лекція 2.	Елементи векторної алгебри. Елементи аналітичної геометрії……………………………………………………….21
Лекція3.	Границі. Неперервність функції..….……………….…………..40
Лекція 4.	Похідна функції. Диференціал функції. Застосування похідної………………….………………………....................58
Лекція 5.	Первісна. Невизначений і визначений інтеграли……..…100
Лекція 6.	Методи інтегрування …………………………………….… ..113
Лекція 7.	Застосування визначеного інтегралу. Невласний інтеграл……………………………………………………………123
Лекція 8.	Диференціальні рівняння I порядку..…………………....….142
Лекція 9	Диференціальні рівняння II порядку………..……...……..153
Лекція 10.	Числові ряди і степеневі ряди. ……..……...............................166

Навчальне видання

Бескровний Олексій Іванович

Кафедра комп'ютерної інженерії

Математика для економістів: Вища математика

Курс лекцій

Відкритий міжнародний університет розвитку людини Україна

03115, м. Київ, вул., Львівська 23.