

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»



ТЕОРІЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Підручник

Дніпро

НГУ

2017

УДК 681.5
Т 33

Рекомендовано вченою радою як підручник для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» (протокол № 7 від 18.04.2017).

Рецензенти:

О.В. Поркуян, д-р техн. наук, професор (Східноукраїнський національний університет ім. В. Даля, ректор);

В.М. Корчинський, д-р техн. наук, професор (Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, завідувач кафедри електронних засобів телекомунікацій).

Т 33 **Теорія систем керування:** підручник / В.І. Корнієнко, О.Ю. Гусєв, О.В. Герасіна, В.П. Щокін; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Дніпро: НГУ, 2017. – 497 с.

ISBN 978-966-350-650-0

Розглянуто основи теорії систем, системного аналізу та сучасної теорії керування. Викладено основні визначення та математичні моделі лінійних систем керування. Значну увагу приділено оптимальному керуванню динамічними системами за принципом максимуму, методом динамічного програмування та за класичним варіаційним численням. Наведено методи фільтрації та особливості керування стохастичними динамічними системами, а також визначено властивості лінійних систем: керованість, спостережуваність та ідентифікованість. Розглянуто методи створення інтелектуальних систем керування, принципи нейронного і нейронечіткого керування, наведено адаптивні системи керування з авторегресійними структурами, а також комбіновані системи робастного і адаптивного керування.

УДК 681.5

ISBN 978-966-350-650-0

© В.І. Корнієнко, О.Ю. Гусєв,
О.В. Герасіна, В.П. Щокін, 2017
© Державний ВНЗ «НГУ», 2017

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	10
ВСТУП	12
ЧАСТИНА I. УВЕДЕННЯ В ТЕОРІЮ СИСТЕМ І СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ	17
Глава 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ СИСТЕМ	18
1.1. Класифікація, структура і закономірності функціонування	18
1.1.1. Системні представлення	18
1.1.2. Поняття системи	18
1.1.3. Стан і функціонування системи	21
1.1.4. Функції зворотного зв'язку	25
1.1.5. Структура системи	27
1.1.6. Класифікація систем	29
1.1.7. Закономірності і принципи цілеутворення	34
1.2. Методи і моделі теорії систем	35
1.2.1. Визначення понять модель і моделювання	35
1.2.2. Класифікації методів моделювання систем	38
1.2.3. Моделі систем	41
1.3. Інформаційний підхід в теорії систем	43
1.3.1. Теорія інформаційного поля	43
1.3.2. Дискретні інформаційні моделі	46
1.3.3. Інформація і ентропія	46
Глава 2. ОСНОВИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ	51
2.1. Системний аналіз	51
2.1.1. Визначення системного аналізу	51
2.1.2. Характеристики завдань системного аналізу	52
2.1.3. Особливості завдань системного аналізу	53
2.1.4. Процедури системного аналізу	54
2.1.5. Цілі системного аналізу	55
2.1.6. Генерування альтернатив	55
2.1.7. Впровадження результатів аналізу	56
2.2. Застосування загальної теорії систем	57
2.2.1. Основні поняття і визначення	57
2.2.2. Абстрактні лінійні моделі	60
2.2.3. Часові системи	63
2.2.4. Динамічні системи	66
2.3. Складні системи	68
2.3.1. Властивості і атрибути	68
2.3.2. Взаємообумовленість загальносистемних властивостей	71
2.3.3. Закономірності ієрархічного порядку	73
2.3.4. Синергетичні особливості складних систем	74
ЧАСТИНА II. ОСНОВИ ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ. ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ	86

Глава 3. СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ (САК)	86
3.1. Основні визначення	86
3.1.1. Система керування	87
3.1.2. Принципи керування	88
3.1.3. Види систем керування	89
3.1.4. Регулятори і задаючі блоки	90
3.1.5. Спеціальні блоки систем керування	92
3.2. Математичні моделі систем керування	93
3.2.1. Статичні характеристики систем керування	93
3.2.2. Система лінійних рівнянь об'єкту	96
3.2.3. Передавальна функція системи	98
3.2.4. Типові ланки САК	99
3.2.5. Типові вхідні дії	100
3.3. Часові характеристики САК	102
3.3.1. Поняття часових характеристик	102
3.3.2. Експериментальне визначення часових параметрів	103
3.3.3. Фізична реалізованість	104
3.4. Частотні характеристики САК	104
3.4.1. Поняття частотних характеристик	104
3.4.2. Годограф	105
3.4.3. Логарифмічні частотні характеристики	106
3.5. Характеристики елементарних ланок систем	107
3.5.1. Безінерційна (пропорційна, підсилювальна) ланка	107
3.5.2. Аперіодична інерційна ланка першого порядку	108
3.5.3. Інтегруюча (астатична) ланка	111
3.5.4. Інтегруюча ланка з уповільненням	112
3.5.5. Ідеальна диференціююча ланка	113
3.5.6. Диференціююча ланка з уповільненням	114
3.5.7. Аперіодична ланка другого порядку	115
3.5.8. Коливальна ланка	116
3.6. Побудова моделей вхід-вихід	118
3.6.1. Прості з'єднання блоків	118
3.6.2. Передавальні функції систем керування	120
Глава 4. СТІЙКІСТЬ І ЯКІСТЬ САК	123
4.1. Критерії стійкості САК	123
4.1.1. Поняття стійкості системи	123
4.1.2. Умова стійкості САК	126
4.1.3. Алгебраїчні критерії стійкості	130
4.1.4. Критерій Рауса	130
4.1.5. Критерій Гурвиця	131
4.2. Частотні критерії стійкості САК	132
4.2.1. Принцип аргументу	133
4.2.2. Критерій стійкості Михайлова	134
4.2.3. Критерій стійкості Найквіста	135
4.3. Запас стійкості САК	138

4.3.1. Поняття структурної стійкості	138
4.3.2. Поняття запасу стійкості	139
4.3.3. Аналіз стійкості по ЛЧХ	140
4.4. Точність САК	142
4.4.1. Статична точність	142
4.4.2. Динамічна точність	143
4.5. Якість САК	144
4.5.1. Показники якості САК	144
4.5.2. Показники якості перехідного процесу	146
4.5.3. Послідовний корегуючий пристрій	148
4.5.4. Паралельний корегуючий пристрій	149
4.5.5. Метод Солодовникова	150
4.5.6. Програми аналізу якості процесів керування	151
Глава 5. ДИСКРЕТНІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ	154
5.1. Математичний опис систем дискретного керування	154
5.1.1. Гратчаста функція	154
5.1.2. Теорема відновлення Котельникова-Шеннона	155
5.1.3. Різницеві рівняння	155
5.1.4. Дискретизація автономних систем	156
5.1.5. Дискретне z-перетворення	157
5.1.6. Перетворювач неперервного сигналу в цифровий код	158
5.1.7. Цифровий обчислювальний пристрій (ЦОП)	160
5.1.8. Передавальні функції ЦОП	161
5.1.9. Частотні характеристики ЦОП	163
5.2. Моделі лінійних дискретних систем	164
5.2.1. Математичні моделі дискретних систем	164
5.2.2. Побудова дискретного представлення неперервної системи	164
5.2.3. Операторна форма моделі	166
5.2.4. Рішення різницевих рівнянь	167
5.2.5. Сталий режим	168
5.2.6. Елементарні ланки дискретних систем	168
5.2.7. Стійкість дискретних систем	171
5.2.8. Якість дискретних систем керування	172
Глава 6. ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ	174
6.1. Роль методів теорії оптимальних процесів	174
6.1.1. Загальна задача оптимального керування і її математична модель	174
6.1.2. Класифікація методів теорії оптимальних процесів	176
6.1.3. Умови і проблема існування оптимального керування	177
6.1.4. Результати оптимального керування	179
6.1.5. Умови раціонального застосування методів оптимізації	180
6.2. Поняття математичної теорії оптимального керування	180

6.2.1. Математичні моделі. Змінні стану (фазові координати) керованого процесу	180
6.2.2. Керування	184
6.2.3. Еволюція стану системи	184
6.2.4. Функціонал. Критерій якості керування	185
6.2.5. Автономні системи	186
6.2.6. Допустиме програмне керування	187
6.2.7. Допустимий закон керування	189
6.2.8. Допустимі траєкторії і процеси	189
6.2.9. Граничні умови. Краєва задача	189
6.3. Постановка основної задачі оптимального керування	190
6.3.1. Основна задача оптимального координатного керування	192
6.3.2. Оптимальні траєкторії	192
6.3.3. Властивості оптимальних керувань і оптимальних траєкторій	193
6.3.4. Геометрична інтерпретація основної задачі оптимального керування	195
6.4. Принцип максимуму	196
6.4.1. Формулювання задачі	196
6.4.2. Допоміжні побудови	197
6.4.3. Принцип максимуму Л.С. Понтрягіна	198
6.4.4. Наслідки принципу максимуму	202
6.5. Метод динамічного програмування	206
6.5.1. Завдання синтезу оптимального закону керування	206
6.5.2. Принцип оптимальності динамічного програмування	207
6.5.3. Необхідна умова	210
6.5.4. Процедура методу динамічного програмування	214
6.6. Класичне варіаційне числення	218
6.6.1. Задача Больца, Маєра, Лагранжа	218
6.6.2. Перша необхідна умова екстремуму функціонала в задачі Больца	220
6.6.3. Друга необхідна умова мінімуму функціонала в задачі Больца (умова Веєрштраса)	223
6.6.4. Третя необхідна умова мінімуму в задачі Больца (умова Лежандра–Клебша)	223
6.6.5. Четверта необхідна умова в задачі Больца (умова Якобі–Маєра–Кнезера)	224
6.7. Задача Лагранжа і оптимальне керування	226
6.7.1. Принцип Лагранжа для задачі Лагранжа	226
6.7.2. Принцип максимуму у формі Лагранжа	228
Глава 7. ФІЛЬТРАЦІЯ І СТОХАСТИЧНЕ КЕРУВАННЯ В ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ	233
7.1. Випадкові процеси в САК	233
7.1.1. Моделі випадкових сигналів в САК	233
7.1.2. Фільтрація завод	234

7.1.3. Фільтр Вінера-Колмогорова	236
7.1.4. Частотна характеристика фільтру	236
7.2. Постановка загальної задачі керування	238
7.2.1. Базова задача і структура системи керування	238
7.2.2. Основні класи стратегій стохастичного керування	240
7.3. Загальне рішення оптимального стохастичного керування	244
7.3.1. Рекурсивне рішення задачі керування	244
7.3.2. Баєсівське рішення задачі фільтрації	247
7.4. Стратегії стохастичного керування	248
7.4.1. Лінійні системи з квадратичним критерієм якості	249
7.4.2. Лінійна рекурсивна фільтрація	250
7.4.3. Оптимальна стратегія замкнутого стохастичного керування	251
Глава 8. КЕРОВАНІСТЬ, СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЬ ТА ІДЕНТИФІКОВАНІСТЬ СИСТЕМ	255
8.1 Керованість лінійних нестационарних систем	255
8.1.1. Гільбертові простори	255
8.1.2. Керованість	257
8.1.3. Область досяжності	262
8.1.4. Критерії керованості	264
8.1.5. Рішення задачі досяжності за допомогою лінійного зворотного зв'язку	268
8.2. Керованість лінійних стаціонарних систем	273
8.2.1. Скінченномірні неперервні системи	273
8.2.2. Загальні висновки	275
8.3. Спостережуваність й ідентифікованість лінійних систем.	
Принцип подвійності	276
8.3.1. Спостережуваність нестационарних систем	276
8.3.2. Спостережуваність стаціонарних систем	279
8.3.3. Принцип подвійності	283
8.3.4. Ідентифікованість	284
ЧАСТИНА ІІІ. НЕЛІНІЙНІ ТА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ	288
Глава 9. НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ	288
9.1. Нелінійні моделі систем	288
9.1.1. Загальні поняття і особливості нелінійних систем	288
9.1.2. Безінерційні нелінійні елементи	291
9.1.3. Динамічні нелінійні елементи	294
9.1.4. Нелінійні моделі з розкритою структурою	295
9.1.5. Розрахункові форми нелінійних моделей	296
9.2. Аналіз рівноважних режимів	297
9.2.1. Рівноважні режими	297
9.2.2. Визначення рівноважних режимів за диференціальними рівняннями	298

9.2.3. Визначення рівноважних режимів і статичних характеристик систем з типовою структурою	299
9.3. Аналіз поведінки систем на фазовій площині	303
9.3.1. Метод фазової площини	303
9.3.2. Поведінка нелінійних систем в околиці положень рівноваги	306
9.3.3. Побудова фазових портретів нелінійних систем	311
9.3.4. Зв'язок фазових траєкторій з часом	314
9.3.5. Особливості фазових портретів нелінійних систем	316
9.4. Стійкість положень рівноваги	318
9.4.1. Поняття про стійкість незбуреного руху	319
9.4.2. Перший метод Ляпунова	320
9.4.3. Другий (прямий) метод Ляпунова	325
9.4.4. Застосування другого методу Ляпунова	328
9.4.5. Частотний метод дослідження абсолютної стійкості	328
Глава 10. ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ	334
10.1. Принципи нейрокерування	335
10.1.1. Штучні нейронні мережі в САК	335
10.1.2. Приклади прямих та інверсних нейромережових моделей	340
10.1.3. Структури систем нейрокерування	343
10.2. Системи нейронечіткого керування	350
10.2.1. Аналітичне конструювання блоків нечіткого висновку	350
10.2.2. Синтез нейронечіткого емулятора зворотної динаміки	357
10.2.3. Приклад адаптивної САК з нечітким інверсним контролером	362
10.3. Адаптивні САК з авторегресійними структурами	364
10.3.1. Дискретно-неперервні фільтри та моделі	365
10.3.2. Застосування авторегресійних моделей у САК	366
10.3.3. Рівняння адаптивних САК з авторегресійними структурами	368
10.3.4. Приклад САК з авторегресійними структурами	371
10.3.5. Стійкість САК з авторегресійними структурами	373
10.4. Комбінування робастного та адаптивного керування	376
Глава 11. СПОСТЕРЕЖЕННЯ, ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ	383
11.1. Прогнозування стану об'єктів керування	384
11.1.1. Класифікація методів прогнозування	384
11.1.2. Методи прогнозування	386
11.2. Дискретизація та відновлення сигналів в задачах спостереження й ідентифікації	400
11.2.1. Дискретизація сигналів з обмеженим спектром	402
11.2.2. Дискретизація сигналів з необмеженим спектром	403
11.2.3. Відновлення сигналів	406
11.3. Адаптивне прогнозування сигналів і стану об'єктів керування	409

11.3.1. Лінійний АФА	412
11.3.2. Нейромережевий АФА	413
11.3.3. Нейронечіткий АФА	414
11.3.4. Нейронний вейвлет АФА	415
11.4. Ідентифікація нелінійних процесів за часовими реалізаціями	417
11.4.1. Характеристики нелінійних хаотичних процесів	418
11.4.2. Визначення характеристик стану нелінійних процесів	419
11.4.3. Приклади ідентифікації породжуючих процесів	423
11.5. Структурно-параметрична ідентифікація об'єктів керування	427
11.5.1. Постановка задачі	427
11.5.2. Структурна оптимізація	429
11.5.3. Критерії оптимізації та обмеження	431
11.5.4. Структура і базисні функції моделі	433
11.5.5. Приклад структурно-параметричної ідентифікації нелінійного об'єкту	435
Глава 12. ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ НЕЛІНІЙНИМИ ОБ'ЄКТАМИ	440
12.1. Основи синергетичної теорії керування	440
12.1.1. Основні поняття синергетики	440
12.1.2. Постановка задачі синтезу систем	442
12.1.3. Супроводжуючі оптимізуючі функціонали	444
12.1.4. Узагальнений метод аналітичного конструювання нелінійних агрегованих регуляторів	447
12.1.5. Приклади аналітичного конструювання скалярних регуляторів для нелінійних динамічних об'єктів	450
12.2. Принципи оптимального керування нелінійними об'єктами	457
12.2.1. Проблеми синтезу та реалізації оптимального керування нелінійними об'єктами	457
12.2.2. Синтез оптимального керування за принципом мінімуму узагальненої роботи	464
12.2.3. Синергетичний підхід до синтезу оптимального керування	470
12.3. Адаптивні системи оптимального керування з прогнозуючими моделями	474
12.3.1. Адаптивне регулювання з прогнозуванням	474
12.3.2. Адаптивне керування за мінімумом узагальненої роботи	481
12.3.3. Ієрархічне адаптивне керування за синергетичним принципом	487
ДОДАТОК 1	492
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	495

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

АКАР – аналітичне конструювання агрегованих регуляторів
АКОР – аналітичне конструювання оптимальних регуляторів
АСОК – адаптивна система оптимального керування
АФА – адаптивний фільтр-апроксиматор
АФЧХ – амплітудно-фазо-частотна характеристика
АЧХ – амплітудно-частотна характеристика
ГА – генетичний алгоритм
ДВП – дискретне вейвлет перетворення
ЗБ – задаючий блок
ЗДВП – зворотне дискретне вейвлет перетворення
ЗЗ – зворотний зв'язок
ЗТ – зображаюча точка
КІХ – кінцева імпульсна характеристика
ЛАЧХ – логарифмічна амплітудно-частотна характеристика
ЛЧ – лінійна частина
МГУА – метод групового урахування аргументів
ММ – математична модель
НЕ – нелінійний елемент
НІХ – нескінченна імпульсна характеристика
НМ – нейронна мережа
ОК – об'єкт керування
ПВП – прямий випадковий пошук
ПД – пропорційно-інтегрально-диференціальний
ПК – пристрій керування
Р – регулятор
РБФ – радіальна базисна функція
САК – система автоматичного керування
СНС – сигнал з необмеженим спектром

СОС – сигнал з обмеженим спектром

СОФ – супроводжуючий оптимізуєчий функціонал

СХ – статична характеристика

ТОП – теорія оптимальних процесів

ФНЧ – фільтр нижніх частот

ФУР – функціонал узагальненої роботи

ФЧХ – фазо-частотна характеристика

ЦОП – цифровий обчислювальний пристрій

ЧХ – частотна характеристика

ШНМ – штучна нейронна мережа

Anfis – адаптивна нейронна система нечіткого висновку

ARMA – авторегресійна модель з ковзним середнім

ВСТУП

Наразі характерним є широке застосування методів теорії систем та теорії керування при розв'язанні теоретичних і прикладних задач.

Теорія систем вивчає загальні закони функціонування систем, а також їх класифікацію та закономірності вибору методів дослідження і моделювання конкретних об'єктів. Розвинуті на її основі прикладні наукові напрями відносно нові, тому нерідко поняття і визначення, що вводяться в них, базуються на термінології тих міждисциплінарних напрямів, що передували теорії систем, зокрема, кібернетики, дослідження операцій, теорії прийняття рішень тощо. В той же час при підготовці фахівців доцільно мати основне ядро загальноновизнаних в цій області понять, а для цього потрібно не тільки знайомити студентів з різними точками зору, але і давати їх в порівнянні.

Теорія керування розробляє і вивчає методи та засоби систем керування. Як самостійний науковий напрям вона склалася в ХХ столітті на базі теорії автоматичного регулювання, яка почала інтенсивно розвиватися з другої половини ХІХ століття у зв'язку з потребою в регуляторах, що підтримують стійкий режим роботи парових машин в промисловості і на транспорті.

Теорія автоматичного керування (ТАК) вивчає завдання аналізу і синтезу систем автоматичного керування (САК), як одного з класів кібернетичних систем. Розвиток ТАК показав, що її результати і висновки можуть бути застосовані до керування об'єктами різної природи і принципів дії.

Особливість сучасного етапу розвитку технологій полягає в тому, що об'єктами автоматизації є не тільки процеси матеріального виробництва, але і різні сфери діяльності людини: організаційно-адміністративне управління, розподіл ресурсів і прийняття рішень, проектування і конструювання, інформаційне обслуговування, охорона здоров'я, наукові дослідження, освіта і багато інших.

Сучасна теорія керування займає одне з провідних місць в технічних науках і в той же час відноситься до однієї з галузей прикладної математики. Окрім того, теорія і практика автоматичного керування пов'язані з обчислювальною технікою. Теорія керування на базі математичних моделей (ММ) дозволяє ви-

вчати динамічні процеси в автоматичних системах, встановлювати структуру і параметри складових частин системи для надання реальному процесу керування бажаних властивостей і заданої якості. Вона є фундаментом для спеціальних дисциплін, що вирішують проблеми автоматизації керування і контролю технологічних процесів, проектування стежачих систем і регуляторів, автоматичного моніторингу виробництва і навколишнього середовища, створення автоматів і робототехнічних систем, а також керування інформаційними телекомунікаційними мережами.

Предмет теорії керування включає вирішення наступних проблем:

- постановку завдань керування, тобто формулювання цілей керування, визначення функцій об'єкту керування (ОК), вибір керуючих дій і встановлення обмежень на область допустимих станів об'єкту;
- розробку принципів керування, що включають визначення необхідних перетворень інформації про ОК для вироблення керуючих дій, а також визначення функціональної і алгоритмічної структур керуючого об'єкту;
- розробку методів і засобів аналізу процесів в САК, визначення адекватних засобів моделювання цих процесів і методів обробки його результатів;
- розробку методів синтезу структур і розрахунку параметрів керуючих об'єктів.

Таким чином, основними завданнями теорії керування є аналіз динамічних властивостей автоматичних систем на модельному або фізичному рівні і синтез алгоритмів керування, функціональної структури автоматичної системи, що реалізовує цей алгоритм, її параметрів і характеристик, що задовольняють вимогам якості і точності. Крім того, до завдань ТАК відносяться також проектування систем керування, створення і випробування реальних САК.

Зі всіх відомих методів синтезу оптимальних керувань найбільш ефективним в практичному застосуванні до складних нелінійних систем є метод з прогнозуючою моделлю і функціоналами узагальненої роботи. Це обумовлено малими обчислювальними витратами, робастністю за рахунок додавання в класичний функціонал витрат на керування в оптимальній системі, а також перетво-

ренням на нуль оптимальних керувань на вільному русі ОК.

В даний час розвинена теорія адаптивного регулятора (АР) нового класу, який можна назвати таким, що самоорганізовується. З ним пов'язується можливість вирішення проблеми "безмодельного керування", при якому конкретна ММ ОК не відома ні на стадії проектування САК, ні в процесі її функціонування. Така можливість з'являється за рахунок автоматичного вибору і перебудови алгоритму керування в процесі роботи САК. Головна відмінність нових АР полягає в тому, що оптимізація здійснюється на короткому інтервалі часу, а це робить поведінку ОК передбачуваною. Екстраполяція найбільш важливих сигналів і оцінювання похідних дозволяє застосовувати спостерігачі, що самоорганізуються, для діагностики, реконфігурації, сигналізації, ідентифікації, а також підтримки прийняття рішень при керуванні.

Зміст нового підходу до керування заснований на синтезі концепції теорії синергетичного керування і алгоритмів навчання статичних багат шарових нейронних мереж (БНМ) прямої дії в динамічних системах. Цілями синтезу, при цьому, є отримання алгоритмів навчання БНМ, використовуваних як регулятори в нелінійних багатовимірних системах, що конструюються на основі синергетичного підходу до проблеми керування.

Ключовою проблемою цього підходу є навмисне введення в простір стану синтезуємих систем інваріантних інтегральних різноманіть, на яких природні властивості об'єкту узгоджуються з вимогами завдання керування. Суть синергетичного підходу до синтезу систем керування визначається як формування і збудження внутрішніх сил взаємодії, що породжують у фазовому просторі системи стійкі диссипативні структури, які відповідають цілі керування. При цьому синтез систем полягає в розробці аналітичних методів генерації природної сукупності негативних і позитивних нелінійних зворотних зв'язків, що формують направлені процеси самоврядування в ОК.

Підручник складається з трьох частин. У першій частині (глави 1-2) викладені основи теорії систем та системного аналізу. Наведені класифікація, структура і основні поняття систем, розглянуті методи і моделі теорії систем,

зокрема, модель «чорної скриньки» та функції зворотного зв'язку, а також застосування загальної теорії систем для часових динамічних систем. Визначені загальносистемні властивості та синергетичні особливості складних систем.

Друга частина підручника (глави 3-8) присвячена основам теорії керування стосовно до лінійних систем. В ній викладені основні визначення та математичні моделі лінійних САК, їх часові та частотні характеристики, критерії стійкості та показники якості і точності аналогових та дискретних САК.

Значну увагу приділено оптимальному керуванню динамічними системами за принципом максимуму, методом динамічного програмування та за класичним варіаційним численням. Наведені методи фільтрації та особливості керування стохастичними динамічними системами, а також визначені властивості лінійних систем: керованість, спостережуваність та ідентифікованість.

Третя частина (глави 9-12) присвячена розгляду нелінійних та інтелектуальних систем керування. В главі 9 викладені загальні поняття і особливості аналізу рівноважних режимів, поведінки на фазовій площині, а також стійкості положення рівноваги нелінійних систем керування.

В главі 10 розглянуті методи створення інтелектуальних систем керування, викладені принципи нейронного і нейронечіткого керування, наведені адаптивні САК з авторегресійними структурами, а також комбіновані системи робастного і адаптивного керування.

Глава 11 присвячена спостереженню, ідентифікації та прогнозуванню нелінійних процесів. В ній розглянуті методи прогнозування ОК, узагальнені методи дискретизації та відновлення сигналів з обмеженим та необмеженим спектром, адаптивне прогнозування за допомогою нелінійних фільтрів, ідентифікація за часовими реалізаціями та структурно-параметрична ідентифікація нелінійних ОК.

В главі 12 розглянуто оптимальне керування нелійними об'єктами. В ній викладені основи синергетичної теорії керування, принципи оптимального керування нелійними об'єктами, а також наведені адаптивні системи оптимального керування з прогнозуючими моделями.

Контрольні запитання, що наведені в кінці кожної глави, спрямовані на закріплення матеріалу та поглиблення його осмислення.

В основу підручника покладені лекції, що читаються авторами протягом ряду років в Національному гірничому та Криворізькому національному університетах.

Метою підручника є формування навичок й умінь з принципів побудови, розрахунку і оцінки параметрів систем керування об'єктами різної природи і принципів дій.

Підручник призначений для підготовки бакалаврів та магістрів денної, заочної та дистанційної форм навчання спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» і відповідає програмам дисциплін «Основи теорії систем» та «Теорія систем та управління» для вищих навчальних закладів.

Підручник може бути корисним для підготовки бакалаврів та магістрів спеціальностей галузей знань 12 «Інформаційні технології», 15 «Автоматизація та приладобудування» та 17 «Електроніка та телекомунікації».

ЧАСТИНА І.

УВЕДЕННЯ В ТЕОРІЮ СИСТЕМ І СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

Перша частина цього підручника передусе викладу основного матеріалу книги, присвяченій власне теорії систем керування. Теорія систем вивчає загальні закони функціонування систем, а також їх класифікацію і роль у виборі методів дослідження та моделювання конкретних об'єктів.

У зв'язку з тим, що теорія систем і розвинуті на її основі прикладні напрями – відносно нові наукові напрями, наявні підручники і навчальні посібники з цієї тематики орієнтовані в більшості своїй на конкретні спеціальності. Тому, нерідко поняття і визначення, що вводяться в них, базуються на термінології тих міждисциплінарних напрямів, що передували теорії систем, зокрема, кібернетики, дослідження операцій, теорії прийняття рішень. В той же час при підготовці фахівців доцільно мати основне ядро загальноновизнаних в цій області понять, а для цього потрібно не тільки знайомити студентів, аспірантів і дослідників з різними точками зору, неминучими в науковому напрямі, що розвивається, але й давати їх в зіставленні, оскільки порівняльний аналіз сприяє вибору ефективних методів і засобів системного дослідження, більшою мірою відповідних конкретним спеціальностям.

Найбільш конструктивним з напрямів системних досліджень в даний час вважається системний аналіз. Він займається застосуванням методів і моделей теорії систем для практичних її додатків до завдань керування.

Важлива функція системного аналізу – робота з цілями, організація процесу цілеутворення, тобто дослідження чинників, що впливають на мету, формулювання, структуризацію або декомпозицію узагальнювальної мети. При цьому розробка методики і вибір методів і прийомів виконання її етапів базуються на використанні понять і закономірностей теорії систем.

Глава 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ СИСТЕМ

1.1. Класифікація, структура і закономірності функціонування

1.1.1. Системні представлення.

Практична діяльність людини носить системний характер. Людина – це активна частина природи. Добиваючись своїх цілей, людина використовує природу, впливає на неї, перетворює її тощо.

Якщо розглядати практичну діяльність людини, то вона теж системна. Природна системність людської практики є одним з об'єктивних чинників виникнення й розвитку системних понять і теорій. Зростання людської діяльності супроводжується удосконаленням і розвитком цієї системності, причому цей процес носить прискорювальний характер. Вплив знання і дотримання принципів системності на практиці зростає.

Об'єктивні причини розвитку системних уявлень показують, що системність властива не тільки практичній діяльності людини, але й людському мисленню і пізнавальним процесам. Крім того, системність – це не тільки властивість людської діяльності або практики, але й властивість всієї матерії взагалі.

1.1.2. Поняття системи.

Система є певною множиною взаємозв'язаних елементів, створюючих стійку єдність і цілісність, що володіє узагальненими властивостями і закономірностями.

Повніше визначення: *система* – комплекс вибірково-залучених компонентів, у яких взаємодії і взаємини набувають характер взаємосприяння компонентів на отримання сконцентрованого корисного результату.

Розглянемо деякі характерні моменти цього визначення:

– «...комплекс вибірково-залучених компонентів...» – це означає, що, по-перше, не всі компоненти об'єкту можуть стати елементами системи, і, по-друге, існує деяка причина такої вибіркості;

– «...у яких взаємодія і взаємини набувають характеру взаємосприяння компонентів...» – академік П.К. Анохин стверджував, що у визначенні системи важлива не взагалі сукупність взаємодіючих компонентів, а сукупність «взаємосприяючих» для досягнення чогось конкретного і визначеного;

– «...на отримання сконцентрованого результату» – у визначення вводиться поняття системостворюючого чинника.

Причини утворення системи є вузловими в системній теорії. Саме залучення компонентів до системи або вибору їх з наявної множини відбувається до і в процесі формування мети на основі початкової потреби.

Ми використовуватимемо поняття системи, яке враховує такі важливі складові будь-якого матеріального об'єкту, як елемент, зв'язок, взаємодія, цілеположення (рис. 1.1).

Елемент – неподільна частина системи, що володіє самостійністю по відношенню до даної системи. Неподільність елемента розглядається як недоцільність обліку в межах моделі даної системи його внутрішнього змісту.

Множину A елементів системи можна описати у вигляді

$$A = \{a_n\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

де a_i – i -й елемент системи; n – число елементів в системі.

Кожен елемент a_i характеризується m конкретними властивостями Z_{i1}, \dots, Z_{im} (наприклад, вага, температура тощо), які однозначно визначають його в даній системі. Сукупність всіх m властивостей елемента a_i називатимемо *станом* елемента Z_i :

$$Z_i = (Z_{i1}, Z_{i2}, \dots, Z_{ik}, \dots, Z_{im}). \quad (1.2)$$

Стан елемента, залежно від різних чинників (часу, простору, зовнішнього середовища і так далі), може змінюватися. Послідовні зміни стану елемента називатимемо *рухом* елемента.

Зв'язок – сукупність залежностей властивостей одного елемента від властивостей інших елементів системи. Встановити зв'язок між двома елементами – це означає виявити наявність залежностей їх властивостей.



Рис. 1.1. Схема компонентів системи

Множину Q зв'язків між елементами a_i і a_j можна представити у вигляді

$$Q = \{q_{ij}\}, i, j = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Залежність властивостей елементів може мати односторонній і двосторонній характер. Двостороння залежність властивостей одного елемента від властивостей інших елементів системи називається *взаємозв'язком*.

Взаємодія – сукупність взаємозв'язків і взаємин між властивостями елементів, коли вони набувають характеру взаємосприяння один одному.

Структура системи – сукупність елементів системи і зв'язків між ними у вигляді множини

$$D = \{A, Q\}. \quad (1.4)$$

Структура є статичною моделлю системи і характеризує тільки будову системи, не враховуючи множини властивостей (станів) її елементів. Система існує серед інших матеріальних об'єктів, які не увійшли до неї. Вони об'єднуються поняттям «зовнішнє середовище» – об'єкти зовнішнього середовища. Тобто, визначення системи є розділення деякої області матеріального світу на дві частини, одна з яких розглядається як система – об'єкт аналізу (синтезу), а інша – як зовнішнє середовище.

Зовнішнє середовище – це набір об'єктів (інших систем), що існують в просторі і в часі, які, як передбачається, діють на систему.

1.1.3. Стан і функціонування системи.

Стан характеризує миттєву фотографію, «зріз» системи, зупинку в її розвитку. Його визначають або через вхідні дії і вихідні сигнали (результати), або через макропараметри, макровластивості системи (тиск, швидкість, прискорення тощо).

Стан системи – сукупність станів її m елементів і зв'язків між ними. Якщо зв'язки в системі незмінні, то її стан можна представити у вигляді

$$Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots, Z_m). \quad (1.5)$$

Визначення конкретної системи зводиться до визначення її станів, починаючи із зародження і кінчаючи загибеллю або переходом в іншу систему.

Реальна система не може знаходитися в будь-якому стані. Завжди є відомі обмеження – деякі внутрішні і зовнішні чинники (наприклад, людина не може жити 1000 років).

Можливі стани реальної системи утворюють в просторі станів системи деяку підобласть (підпростір) – множину допустимих станів системи.

Якщо система здатна переходити з одного стану в інший (наприклад $s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3 \rightarrow \dots$), то говорять, що вона володіє *поведінкою*. Поведінку можна представити як функцію $s(t) = [s(t-1), y(t), x(t)]$, де t – час.

Рівновагу визначають як здатність системи у відсутності зовнішніх збурюючих дій (або при постійних діях) зберігати свій стан скільки завгодно довго.

Стійкість – здатність системи повертатися в стан рівноваги після того, як вона була з цього стану виведена під впливом *зовнішніх* (а в системах з активними елементами – *внутрішніх*) збурюючих дій.

Стан рівноваги, в яку система здатна повертатися, називають *стійким станом рівноваги*. Повернення в цей стан може супроводжуватися коливаннями.

Розвиток – допомагає пояснити складні термодинамічні та інформаційні процеси в природі і суспільстві. Дослідження процесу розвитку (еволюції), співвідношення *розвитку* і *стійкості*, вивчення механізмів, лежачих в їх основі, – найбільш складні завдання теорії систем.

Входи системи x_i – це різні точки прикладання впливу (дії) зовнішнього середовища на систему (рис. 1.2).

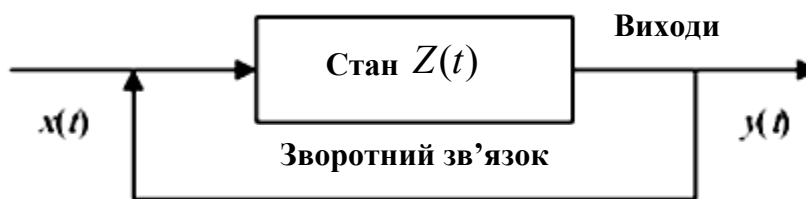


Рис. 1.2. Схема системи з одиничним зворотним зв'язком

Входами системи можуть бути інформація, речовина, енергія тощо, які підлягають перетворенню.

Узагальненим входом (X) називають стан всіх r входів системи, який можна представити у вигляді вектора

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_r). \quad (1.6)$$

Виходи системи y_i – це різні точки прикладення впливу (дії) системи на зовнішнє середовище (див. рис. 1.2). Виходом системи є результат перетворення інформації, речовини і енергії.

Зворотний зв'язок – те, що сполучає вихід з входом системи і використовується для контролю за зміною виходу (див. рис. 1.2).

Обмеження системи – те, що визначає умови її функціонування (реалізацію процесу). Обмеження бувають *внутрішніми* і *зовнішніми*. Одним із зовнішніх обмежень є мета функціонування системи. Прикладом внутрішніх обмежень можуть бути ресурси, що забезпечують реалізацію довільного процесу.

Рух системи – це послідовна зміна її стану.

Вимушений рух системи – зміна її стану під впливом зовнішнього середовища. Прикладом вимушеного руху може служити переміщення ресурсів за наказом (що поступив в систему ззовні).

Власний рух – зміна стану системи без дії зовнішнього середовища (тільки під дією внутрішніх причин). Власним рухом системи «чоловік» буде його життя як біологічного (а не суспільного) індивіда, тобто живлення, сон, розмноження.

Розглянемо залежності станів системи від функцій (станів) входів системи, її станів (переходів) і виходів.

Стан системи $Z(t)$ у момент часу t залежить від функції входів $X(t)$

$$Z(t) = F_c [X(t)], \quad (1.7)$$

де F_c – функція стану системи (перехідна функція).

Стан системи $Z(t)$ також залежить від попередніх її станів в моменти $Z(t-1)$, $Z(t-2)$...:

$$Z(t) = F_c [X(t), Z(t-1), Z(t-2), \dots]. \quad (1.8)$$

Зв'язок між функцією входу $X(t)$ і функцією виходу $Y(t)$ системи, без урахування попередніх станів, можна представити у вигляді

$$Y(t) = F_B [X(t)], \quad (1.9)$$

де F_B – функція виходів системи. Система з такою функцією виходів називається *статичною*.

Якщо ж система залежить не тільки від функцій входів $X(t)$, але і від функцій станів (переходів) $Z(t-1)$, $Z(t-2)$..., то

$$Y(t) = F_B[X(t), Z(t), Z(t-1), Z(t-2), \dots, Z(t-\nu)]. \quad (1.10)$$

Системи з такою функцією виходів називаються *динамічними* (або системами з поведінкою).

Залежно від математичних властивостей функцій входів і виходів систем розрізняють системи *дискретні* і *неперервні*.

Для неперервних систем вирази (1.6) і (1.7) виглядають як:

$$\frac{dZ(t)}{dt} = F_c[X(t), Z(t)]; \quad (1.11)$$

$$Y(t) = F_B[X(t), Z(t)]. \quad (1.12)$$

Рівняння (1.11) визначає стан системи і називається *рівнянням змінних станів* системи. Рівняння (1.12) визначає спостережуваний нами вихід системи і називається *рівнянням спостережень*.

Функції F_c (функція станів системи) і F_B (функція виходів) враховують не тільки поточний стан $Z(t)$, але й попередні стани $Z(t-1)$, $Z(t-2)$..., $Z(t-\nu)$ входів системи, які є параметром «пам'яті» системи. Отже, величина ν характеризує об'єм (глибину) пам'яті системи.

Процеси системи – це сукупність послідовних змін стану системи для досягнення мети. До них відносяться вхідний, вихідний і перехідний процеси системи.

Вхідний процес – множина вхідних дій, які змінюються з часом.

Вихідний процес – множина вихідних дій на навколишнє середовище, які змінюються з часом.

Перехідний процес систем – множина перетворень початкового стану і вхідних дій у вихідні величини, які змінюються з часом по певних правилах.

1.1.4. Функції зворотного зв'язку.

Зворотний зв'язок (ЗЗ) – одне з фундаментальних понять теорії систем.

Зворотний зв'язок зазвичай ілюструють схемами, подібними приведеній на рис. 1.3, де $x(t)$ – закон або алгоритм (програма) керування, $x_{\text{треб}}$ – необхідне значення регульованого параметра («уставка»), x_j – фактичне значення регульованого параметра, Δx – розузгодження між $x_{\text{треб}}$ і x_j .

Зворотний зв'язок може бути:

– *негативним* – протидіючим тенденціям зміни вихідного параметра, тобто направленим на збереження, стабілізацію необхідного значення параметра (наприклад, стабілізацію кількості продукції, що випускається, тощо);

– *позитивним* – зберігаючим тенденції змін того або іншого вихідного параметра системи (що використовується при моделюванні систем, які розвиваються).

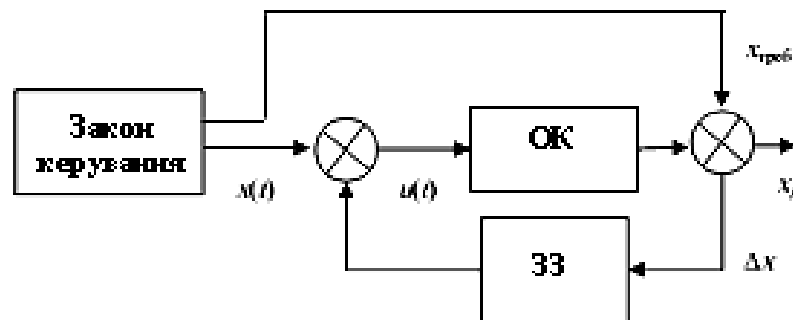


Рис. 1.3. Система із зворотним зв'язком

Зворотний зв'язок є основою саморегуляції, розвитку систем, пристосування їх до умов існування, що змінюються.

При розробці моделей функціонування складних саморегульованих систем, які самоорганізуються, в них, як правило, одночасно присутні і негативні, і позитивні зворотні зв'язки. На використанні цих понять базується, зокрема, *імітаційне динамічне моделювання*.

Зворотний зв'язок може бути:

- 1) об'єктом окремого процесу підсистеми;
- 2) об'єктом інтегрованого процесу підсистеми;

3) розподіленим за часом об'єктом, що повертає вихід підсистеми.

Схема на рис. 1.4 дозволяє пояснити перераховані види процесів підсистеми зворотного зв'язку.

Інтегрованим процесом називається такий, в якому об'єкти підсистеми втрачають свій незалежний характер. У інтегрованих системах об'єкти можуть бути визначені тільки в контексті підсистеми або системи, до якої вони належать.

Підсистема AA на рис. 1.4 передує двом підсистемам AB і AC. Але вона грає по відношенню до них різні ролі: зворотний зв'язок AB дає вхід в підсистему AA (виступає як зворотний зв'язок об'єкту окремого процесу підсистеми), але, крім того, вихід використовується як вхід в підсистему AC.

Вихід підсистеми AC поступає на вхід підсистеми AE. Підсистеми AA, AC і AE видозмінюються власними функціями підсистем зворотного зв'язку (зворотний зв'язок виступає як об'єкт інтегрованого процесу підсистем). Крім того, підсистеми AA, AC, AE також змінюються під впливом результатів подальших дій, наприклад, підсистема AE змінює підсистему AA за допомогою зворотного зв'язку AF.

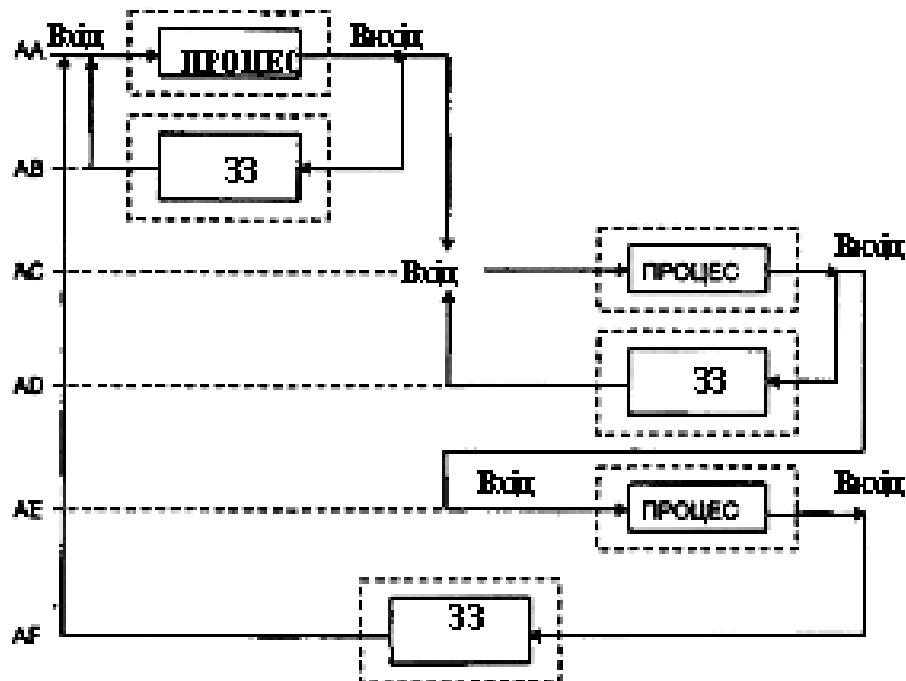


Рис. 1.4. Схема складної системи із зворотними зв'язками

1.1.5. Структура системи.

Система може бути представлена простим перерахуванням елементів або «чорним ящиком» (моделлю «вхід – вихід»). Проте найчастіше при дослідженні об'єкту таке уявлення недостатнє, оскільки потрібно з'ясувати, що є об'єктом, що в ній забезпечує виконання поставленої мети, отримання необхідних результатів. У цих випадках систему відображають шляхом розчленування на підсистеми, компоненти, елементи з взаємозв'язками, які можуть носити різний характер, і вводять поняття *структури*.

Одна й та ж система може бути представлена різними структурами залежно від стадії пізнання об'єктів або процесів, від аспекту їх розгляду, мети створення.

Структури можуть бути представлені в матричній формі, у формі теоретико-множинних описів, за допомогою мови топології, алгебри і інших засобів моделювання систем.

Мережева структура або мережа, є декомпозицією системи *в часі* (рис. 1.5, а). Такі структури можуть відображати порядок дії технічної системи (телефонна мережа, електрична мережа тощо), а також етапи діяльності людини.

Ієрархічні структури є декомпозицією системи *в просторі* (рис. 1.5, б – д). Всі компоненти (*вершини, вузли*) і зв'язки (*дуги, з'єднання вузлів*) існують в цих структурах одночасно (не рознесені в часі). Такі структури можуть мати більше число рівнів декомпозиції (структуризації).

В структурах типу рис. 1.5, б кожен елемент рівня, що пролягає нижче, підпорядкований одному вузлу (одній вершині) вищестоящого. Їх називають *деребовидними* структурами.

Структури типу рис. 1.5, в, в яких елемент рівня, що пролягає нижче, може бути підпорядкований двом і більш вузлам (вершинам) вищестоящого, називають ієрархічними структурами з «слабкими» зв'язками.

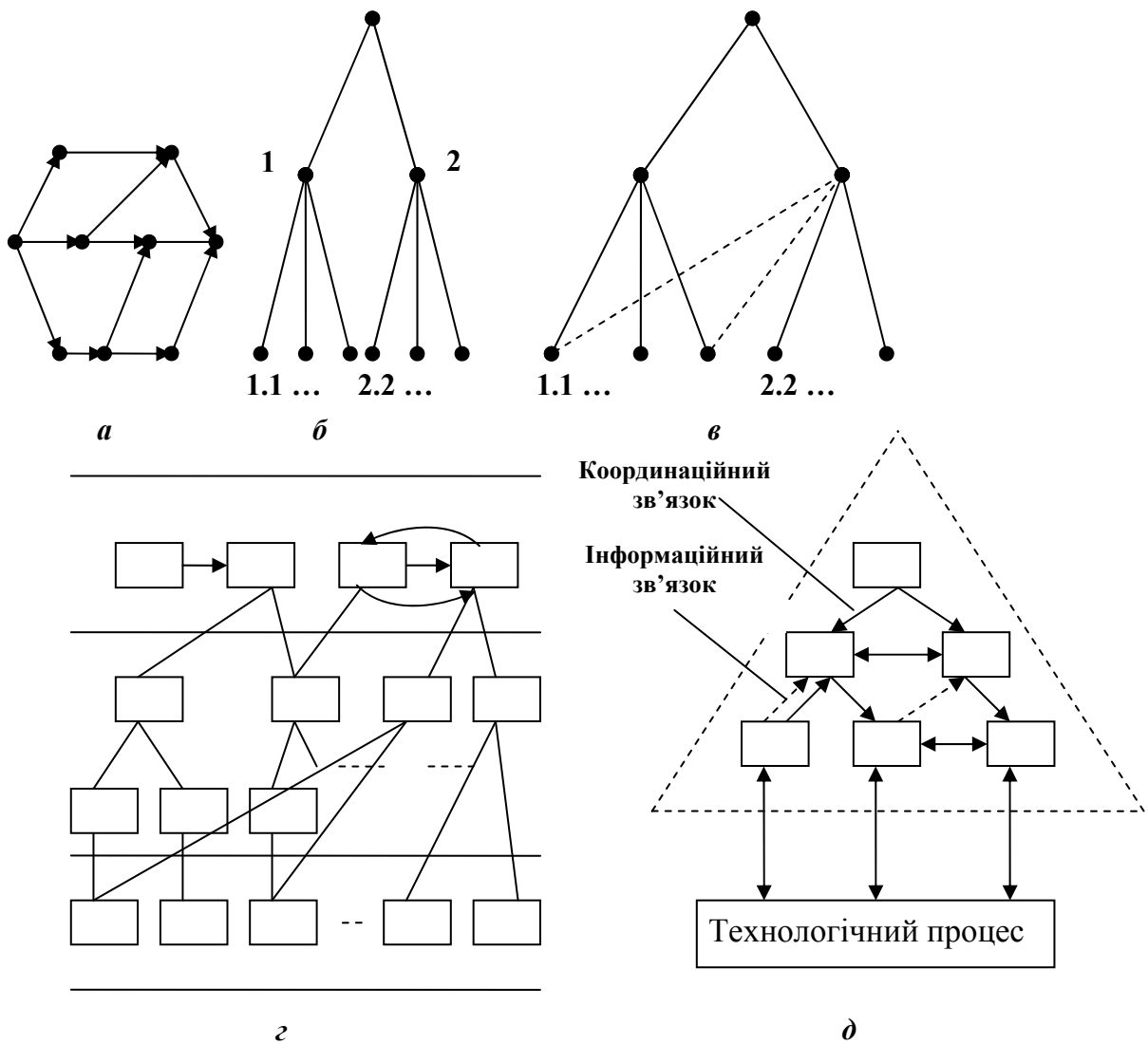


Рис. 1.5. Структури систем

Мережеві структури використовуються в тих випадках, коли систему вдається відобразити через опис матеріальних і інформаційних процесів, тобто представити послідовністю виготовлення виробів, проходження документів тощо.

Для порівняльного аналізу структур використовуються інформаційні оцінки ступеня цілісності α і коефіцієнта використання компонентів системи β , які можна інтерпретувати як оцінки стійкості структури при наданні свободи елементам або як оцінки ступеня централізації-децентралізації керування в системі.

Ці оцінки отримані із співвідношення, що визначає взаємозв'язок системної C_c , власної C_o і взаємної C_g складностей системи:

$$C_c = C_o + C_g. \quad (1.13)$$

Власна складність C_o є сумарною складністю (зміст) елементів системи поза зв'язком їх між собою.

Системна складність C_c характеризує зміст системи як цілого (наприклад, складність її використання).

Взаємна складність C_g характеризує ступінь взаємозв'язку елементів в системі (тобто складність її пристрою, схеми, структури).

Розділивши члени виразу (1.13) на C_o отримаємо зв'язані оцінки:

$$\alpha = -C_g / C_o; \quad (1.14)$$

$$\beta = C_c / C_o, \quad (1.15)$$

причому $\beta = 1 - \alpha$.

Оцінка (1.14) характеризує ступінь цілісності, зв'язності, взаємозалежності елементів системи; для організаційних систем α може бути інтерпретована як характеристика стійкості, керованості, ступеня централізації управління.

Оцінка (1.15) показує самостійність, автономність частин в цілому, ступінь використання можливостей елементів. Для організаційних систем β зручно називати коефіцієнтом використання елементів в системі.

Знак мінус у виразі (1.14) введений для того, щоб α було позитивним, оскільки C_g у стійких системах, для яких характерний $C_o > C_c$, формально має негативний знак. Зв'язаний (що залишається як би усередині системи) зміст C_g характеризує роботу системи на себе, а не на виконання мети, що стоїть перед нею (чим пояснюється негативний знак C_g).

1.1.6. Класифікація систем.

Система може бути одночасно охарактеризована декількома ознаками, тобто їй може бути знайдено місце одночасно в різних класифікаціях, кожна з

яких може виявитися корисною при виборі методів моделювання. Розглянемо деякі з найбільш важливих класифікацій систем.

Для виділення класів систем можуть використовуватися різні ознаки: природа елементів, походження, тривалість існування, мінливість властивостей, ступінь складності, відношення до середовища, реакція на збурюючі дії, характер поведінки і ступінь участі людей в реалізації керуючих дій (табл. 1.1).

Таблиця 1.1. Класифікація систем

Класифікаційні ознаки	Класи
Природа елементів	Реальні (фізичні) Абстрактні
Походження	Природні Штучні
Тривалість існування	Постійні Тимчасові
Змінність властивостей	Статичні Динамічні
Ступінь складності	Прості Складні Великі
Відношення до середовища	Відкриті Закриті
Реакція на збурюючі дії	Активні Пасивні
Характер поведінки	З керуванням Без керування
Ступінь зв'язку із зовнішнім середовищем	Відкриті Ізольовані Закриті Відкриті рівноважні Відкриті дисипативні
Ступінь участі людей в реалізації керуючих дій	Технічні Людино-машинні Організаційні

За природою елементів системи діляться на реальні і абстрактні.

Реальними (фізичними) системами є об'єкти, що складаються з матеріальних елементів. Абстрактні системи складають елементи, що не мають прямих аналогів на реальному світі. Вони створюються шляхом уявного відтворення

тих або інших сторін, властивостей і (або) зв'язків предметів, і створюються в результаті творчої діяльності людини. Прикладом абстрактних систем є системи рівнянь, ідеї, плани, гіпотези, теорії тощо.

Залежно від походження виділяють природні і штучні системи.

Природні системи є продуктом розвитку природи та виникли без втручання людини. До них можна віднести, наприклад, клімат, ґрунт, живі організми, сонячну систему і інше.

Штучні системи – це результат творчої діяльності людини, з часом їх кількість збільшується.

По тривалості існування системи підрозділяються на постійні і тимчасових. До *постійних* зазвичай відносяться природні системи, хоча з погляду діалектики всі існуючі системи – *тимчасові*.

До *постійних* відносяться штучні системи, які в процесі заданого часу функціонування зберігають істотні властивості, визначувані призначенням цих систем.

Залежно від ступеня мінливості властивостей системи діляться на статичні і динамічні.

До *статичних* відносяться системи, при дослідженні яких можна нехтувати змінами в часі характеристик їх істотних властивостей. Статична система – це система з одним станом.

На відміну від статичних, *динамічні* системи мають множину можливих станів, які можуть мінятися як неперервно, так і дискретно.

Залежно від ступеня складності системи діляться на прості, складні і великі.

Прості системи з достатнім ступенем точності можуть бути описані відомими математичними співвідношеннями. Прикладами простих систем можуть служити окремі деталі, елементи електронних схем тощо.

Складні системи складаються з великого числа взаємозв'язаних і взаємодіючих елементів, кожен з яких може бути представлений у вигляді системи (підсистеми). Складні системи характеризуються багатовимірністю (великим

числом складених елементів), різноманіттям природи елементів, зв'язків, різно-
рідністю структури.

Складні системи володіють властивостями, якими не володіє жоден з еле-
ментів, що входять в систему. Складними системами є живі організми, зокрема,
людина, ЕОМ тощо. Особливість складних систем полягає в істотному взаємоз-
в'язку їх властивостей.

Великі системи – це складні просторово-розподілені системи, в яких під-
системи (їх складові частини) відносяться до категорій складних. Додатковими
особливостями, що характеризують велику систему, є:

- великі розміри;
- складна ієрархічна структура;
- циркуляція в системі великих інформаційних, енергетичних і матеріа-
льних потоків;
- високий рівень невизначеності в описі системи.

По ступеню зв'язку із зовнішнім середовищем системи діляться на ізольо-
вані, закриті, відкриті рівноважні та відкриті дисипативні.

Ізольовані системи не обмінюються з середовищем енергією і речовиною.

Закриті системи не обмінюються з навколишнім середовищем речови-
ною, але обмінюються енергією. Вони здібні до фазових переходів в рівноваж-
ний впорядкований стан.

Відкриті системи обмінюються з навколишнім середовищем енергією і
речовиною. Зміна ентропії відкритої системи ds визначається сумою алгебри
ентропії, вироблюваної усередині системи $d_p s$ і ентропії $d_c s$, що поступає ззо-
вні або що йде в зовнішнє середовище, тобто

$$ds = d_p s + d_c s .$$

В стані міцної рівноваги (стаціонарному стані) $ds = 0$.

Відкриті системи значною мірою характеризуються швидкістю виробни-
цтва ентропії в одиниці об'єму – функцією дисипації (розсіяння), яка за визна-
ченням рівна

$$d_p s / dt = \int \sigma dV .$$

Відкриті дисипативні системи виникають в результаті кооперативних процесів. Їх поведінка нелінійна (ізолюваних і закритих систем фактично в природі не існує. Вони є спрощеними схемами відкритих систем, корисними при наближеному вирішенні часткових завдань).

Залежно від реакції на збурюючі дії виділяють активні і пасивні системи.

Активні системи здатні протистояти діям середовища (супротивника, конкурента тощо) і самі можуть впливати на неї. У *пасивних систем* ця властивість відсутня.

По характеру поведінки всі системи підрозділяються на системи з управлінням і без управління.

Клас систем з управлінням утворюють системи, в яких реалізується процес цілеполягання і цілездійснення.

Прикладом *систем без управління* може служити Сонячна система, в якій траєкторії руху планет визначаються законами механіки.

Залежно від ступеня участі людини в реалізації дій системи, що управляють, підрозділяються на технічні, людино-машинні, організаційні.

До *технічних* відносяться системи, які функціонують без участі людини. Як правило, це системи автоматичного керування (регулювання), що є комплексами пристроїв для автоматичної зміни, наприклад, координат об'єкту керування, з метою підтримки бажаного режиму його роботи.

Прикладами *людино-машинних (ергатичних) систем* можуть служити автоматизовані системи управління різного призначення. Їх характерною особливістю є те, що людина зв'язана з технічними пристроями, причому остаточне рішення ухвалює людина, а засоби автоматизації лише допомагають їй в обґрунтуванні правильності цього рішення.

До *організаційних систем* відносяться соціальні системи – групи, колективи людей, суспільство в цілому.

1.1.7. Закономірності і принципи цілеутворення.

Аналіз визначень поняття *мета* дозволяє зробити вивід про те, що, формулюючи мету, потрібно прагнути відобразити у формулюванні або в способі представлення мети основну суперечність: її активну роль в пізнанні, в управлінні; в той же час необхідність зробити її реалістичною, направити з її допомогою діяльність на отримання певного корисного результату.

При аналізі причин виникнення і формулювання цілей потрібно враховувати, що на мету впливають як зовнішні чинники (зовнішні вимоги, потреби, мотиви, програми), так і внутрішні чинники (потреби, мотиви, програми самої системи і її елементів, виконавців мети).

Дослідження психологів показують, що мета на будь-якому рівні управління спочатку виникає у вигляді деякого «образу» або «області» мети. Найбільшою мірою це виявляється на рівні глобальної мети. При цьому досягти однакового розуміння цієї області мети принципово неможливо без її деталізації у вигляді набору одночасно виникаючих взаємозв'язаних підцілей, які роблять її конкретнішою і зрозумілішою для всіх учасників процесу цілеутворення.

Цілі можуть представлятися у формі різних структур, подібних приведеним на рис. 1.5, тобто з допомогою:

а) мережевих графіків (декомпозиція в часі – рис. 1.5,а);

б) у вигляді ієрархій різного вигляду (декомпозиція в просторі) – деревовидних (рис. 1.5,б), з «слабкими зв'язками» (рис. 1.5,в), у формі «страт» і «ешелонів» М. Месаровіча (рис. 1.5,г-д, відповідно);

в) у матричній (табличній) формі (рис. 1.5,е-ж), при цьому матричні представлення рис. 1.5,е- ж відповідають ієрархічним структурам рис. 1.5,б-в.

У ієрархічній структурі цілісність (*емерджентність*) виявляється на будь-якому рівні ієрархії. Стосовно структури цілей це означає, що, з одного боку, досягнення мети вищестоячого рівня не може бути повністю забезпечене досягненням підлеглих їй підцілей, хоча й залежить від них, а, з іншого боку, потреби необхідно досліджувати на кожному рівні структуризації.

1.2. Методи і моделі теорії систем

1.2.1. Визначення понять модель і моделювання.

Спочатку *моделлю* називали якийсь *допоміжний засіб, об'єкт, який в певній ситуації замінював інший об'єкт.*

Осмислення основних особливостей моделей привело до розробки численних визначень, типовим прикладом яких служить наступне: *моделлю називається якийсь об'єкт-заступник, який в певних умовах може замінювати об'єкт-оригінал, відтворюючи властивості, що цікавлять нас, і характеристики оригіналу, причому має істотні переваги зручності (наочність, доступність випробувань, легкість операції з ним тощо).*

В результаті діяльності математиків, логіків і філософів, що займалися дослідженням основ математики, була створена теорія моделей. У ній *модель визначається, як результат відображення однієї абстрактної математичної структури на іншу, також абстрактну, або як результат інтерпретації першої моделі в термінах і образах другої.*

У ХХ столітті поняття моделі стає все більш загальним, таким, що охоплює і реальні, і ідеальні моделі. При цьому поняття абстрактної моделі вийшло за межі математичних моделей, почало відноситися до будь-яких знань і уявлень про світ.

Спочатку у сфері наукових дисциплін інформаційного, кібернетичного, системного напрямку, а потім і в інших областях науки модель почала усвідомлюватися як щось універсальне.

Модель є спосіб існування знань.

У широкому сенсі під **моделюванням** слід розуміти процес адекватного відображення найбільш істотних сторін досліджуваного об'єкту або явища з точністю, яка необхідна для практичних потреб. У загальному випадку **моделюванням** можна назвати також особливу форму опосередковування, основою якого є формалізований підхід до дослідження складної системи.

Теоретичною базою моделювання є теорія подібності. *Подібність* – це взаємно однозначна відповідність між двома об'єктами, при якій відомі функції переходу від параметрів одного об'єкту до параметрів іншого, а математичні описи цих об'єктів можуть бути перетворені в тотожні.

Таким чином, *моделювання* – це процес представлення об'єкту дослідження адекватною (подібною) йому моделлю і проведення експериментів з моделлю для отримання інформації про об'єкт дослідження. При моделюванні модель виступає і як засіб, і як об'єкт досліджень.

Іншими словами, *модель* – це фізична або інформаційна система, що є об'єктом дослідження, адекватною цілям дослідження.

Моделювання – невід'ємний етап всякої цілеспрямованої діяльності. Системність діяльності виявляється в тому, що вона здійснюється по певному алгоритму. Тобто *алгоритм* – образ майбутньої діяльності, її *модель*. У алгоритмі моделюються всі можливі ситуації, залежно від різних проміжних значень параметрів; можливі кроки діяльності не виконуються реально, а програються на моделі. Деякі властивості можна охарактеризувати величинами, що приймають числові значення.

Однією з підстав класифікації моделей може бути співвідношення типів моделей з типами цілей. Наприклад, моделі можна розділити на пізнавальні і прагматичні.

Пізнавальні моделі є формою організації і представлення знань, засобом з'єднання нових знань з тими, що є.

Прагматичні моделі є засобом управління, засобом організації практичних дій, способом уявлення зразково правильних дій або їх результату.

Прикладами прагматичних моделей можуть служити плани, програми дій, статuti організацій, кодекси законів, алгоритми, робочі креслення.

Розрізняють фізичні і абстрактні моделі.

Фізичні моделі утворюються з сукупності матеріальних об'єктів. Для їх побудови використовуються різні фізичні властивості об'єктів, причому приро-

да вживаних в моделі матеріальних елементів не обов'язково та ж, що і в досліджуваному об'єкті.

Інформаційна (абстрактна) модель – це опис об'єкту досліджень на якій-небудь мові. Абстрактність моделі виявляється в тому, що її компонентами є поняття, а не фізичні елементи (наприклад, словесні описи, креслення, алгоритми, програми, математичні описи).

Інформаційні моделі описують поведінку об'єкту-оригіналу, але не копіюють її. Інформаційна модель – це цілеспрямовано відібрана інформація про об'єкт, яка відображає найбільш істотні для дослідника властивості цього об'єкту.

Математична модель – абстрактна модель, представлена на мові математичних відносин. Вона має форму функціональних залежностей між параметрами, що враховуються відповідною концептуальною моделлю.

Наприклад, систему диференціальних рівнянь, що описує процеси перемикачів в елементах цифрового пристрою, можна використовувати для оцінки їх швидкодії (часу перемикання), але недоцільно застосовувати для побудови тестів або часових діаграм роботи пристрою. Очевидно, в останніх випадках необхідно скористатися якими-небудь іншими моделями, наприклад, логічними рівняннями.

Залежно від ступеня деталізації опису складних систем і їх елементів можна виділити три основні *рівні моделювання*.

1. Рівень *структурного* або *імітаційного* моделювання складних систем з використанням їх алгоритмічних моделей (моделюючих алгоритмів) і застосуванням спеціалізованих мов моделювання, теорій множин, алгоритмів, формальних граматики, графів, масового обслуговування, статистичного моделювання.

2. Рівень *логічного* моделювання функціональних схем елементів і вузлів складних систем, моделі яких представляються у вигляді рівнянь безпосередніх зв'язків (логічних рівнянь) і будуються із застосуванням апарату двозначної або багатозначної алгебри логіки.

3. Рівень *кількісного* моделювання (аналізу) принципів схем елементів складних систем, моделі яких представляються у вигляді систем нелінійної алгебри, або інтегро-диференціальних рівнянь і досліджуються із застосуванням методів функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної статистики.

На кожному з основних рівнів моделювання можливі описи об'єкту з різним ступенем повноти і узагальнення, оскільки існують різні ступені деталізації структурних, логічних і кількісних властивостей і відносин.

1.2.2. Класифікація методів моделювання систем.

Постановка будь-якого завдання полягає в тому, щоб перевести її словесний (*вербальний*) опис у *формальний*.

У разі відносно простих завдань такий перехід здійснюється в свідомості людини, яка не завжди навіть може пояснити, як вона це зробила. Якщо отримана формальна модель (математична залежність між величинами у вигляді формули, рівняння, системи рівнянь) спирається на фундаментальний закон або підтверджується експериментом, то цим доводиться її адекватність ситуації, що відображається, і модель рекомендується для вирішення завдань відповідного класу.

Для вирішення проблеми перекладу вербального опису у формальне в різних областях діяльності почали розвиватися спеціальні прийоми і методи. Так, виникли методи типу «мозкової атаки», «сценаріїв», експертних оцінок, «дерева цілей» тощо.

У свою чергу, розвиток математики йшов по шляху розширення засобів постановки і вирішення складноформалізованих завдань. Разом з детермінованими, *аналітичними методами* класичної математики виникла *теорія імовірності* і *математична статистика* (як засіб доказу адекватності моделі на основі представницької вибірки і поняття правомірності використання моделі і результатів моделювання). Для завдань з більшим ступенем невизначеності інженери почали використовувати *теорію множин, математичну логіку, мате-*

матичну лінгвістику, теорію графів, що багато в чому стимулювало розвиток цих напрямів. Іншими словами, математика почала поступово накопичувати засоби роботи з невизначеністю, з сенсом, який класична математика виключала з об'єктів свого розгляду.

Аналітичні і статистичні методи набули найбільшого поширення в практиці проектування і керування.

Аналітичними в даній класифікації названі методи, які відображають реальні об'єкти і процеси у вигляді точок (безрозмірних в строгих математичних доказах), що здійснюють які-небудь переміщення в просторі або взаємодіють між собою.

Основу уявлень складають поняття класичної математики (*величина, формула, функція, рівняння, система рівнянь, логарифм, диференціал, інтеграл* тощо).

На базі аналітичних уявлень виникли і розвиваються математичні теорії різної складності – від апарату класичного *математичного аналізу* (методів дослідження функцій, їх вигляду, способів представлення, пошуку екстремумів функцій тощо) до таких нових розділів сучасної математики, як *математичне програмування* (лінійне, нелінійне, динамічне тощо), *теорія ігор* (матричні ігри з чистими стратегіями, диференціальні ігри тощо).

Статистичні уявлення сформувалися як самостійний науковий напрям в середині минулого століття. Основу їх складає відображення явищ і процесів за допомогою випадкових (*стохастичних*) подій і їх поведінок, які описуються відповідними ймовірнісними (*статистичними*) характеристиками і *статистичними закономірностями*.

Статистичні відображення системи в загальному випадку (по аналогії з аналітичними) можна представити у вигляді «розмиті» точки (розмитій області) в n -мірному просторі, в яку переводить систему (її властивості, що враховуються в моделі) оператор $\Phi[S_x]$. «Розмиту» точку слід розуміти як деяку область, що характеризує рух системи (її поведінку), при цьому межі області задані з деякою імовірністю p («розмиті»).

Статистичні закономірності можна представити у вигляді *дискретних* випадкових величин і їх ймовірності, або у вигляді *неперервних* залежностей розподілу подій, процесів.

Для *дискретних* подій співвідношення між можливими значеннями випадкової величини x_i і їх ймовірністю p_i називають законом розподілу і записують або у вигляді ряду, або представляють у вигляді залежностей $F(x)$ (рис. 1.6,а) та $p(x)$ (рис. 1.6,в).

При цьому

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i(x_i).$$

Для *неперервних* випадкових величин (процесів) закон розподілу представляють (відповідно дискретним законам) або у вигляді *функції розподілу* (інтегрального закону розподілу – рис. 1.6,б), або у вигляді *щільності ймовірності* (диференціального закону розподілу – рис. 1.6,г). В цьому випадку $p(x) = dF(x)/dx$ і $F(x) = p(x) \Delta x$, де $p(x)$ – ймовірність попадання випадкових подій в інтервал від x до $x + \Delta x$.

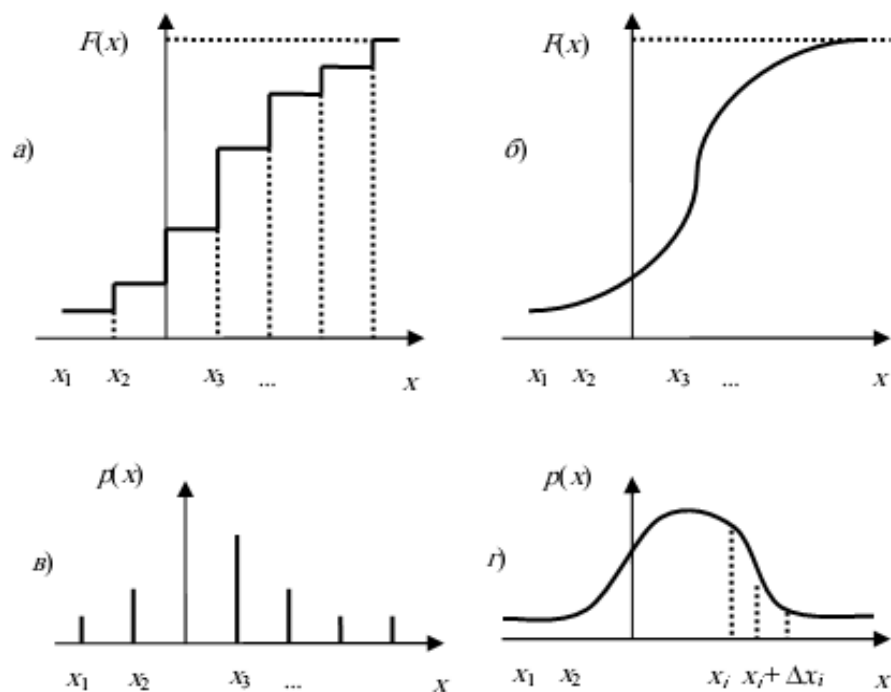


Рис. 1.6. Закон розподілу і щільність ймовірності випадкових величин

Закон розподілу є зручною формою статистичного відображення системи. Проте отримання закону (навіть одновимірного) або визначення змін цього закону при проходженні через які-небудь пристрої або середовища є важким, часто нездійсненним завданням. Тому у ряді випадків користуються не розподілом, а його характеристиками – початковими і центральними моментами.

Найбільше застосування отримали:

1) перший початковий момент – *математичне очікування* або *середнє значення* випадкової величини:

- для дискретних величин

$$m_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i(x_i),$$

- для неперервних величин

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx;$$

2) другий центральний момент – дисперсія випадкової величини:

- для дискретних величин

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i(x_i),$$

- для неперервних величин

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx.$$

На практиці іноді використовується не дисперсія σ_x^2 , а середнє квадратичне відхилення σ_x .

1.2.3. Моделі систем.

Для полегшення рішення задачі створення систем необхідне застосування моделювання, оскільки для визначень і точної характеристики будь-якої системи слід удосконалювати і розвивати її модель.

Найбільш простою моделлю є модель «чорного ящика» (рис. 1.7).

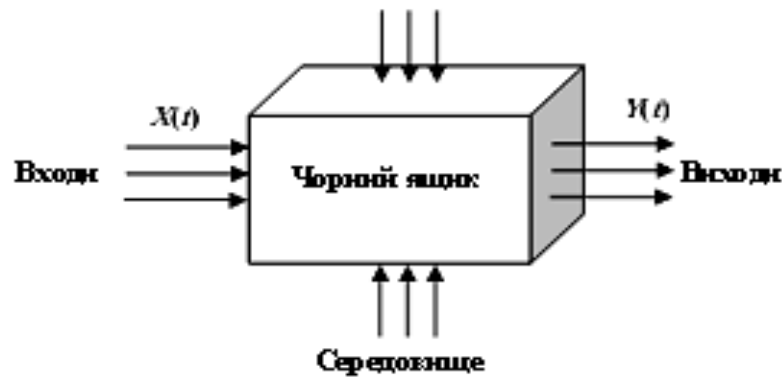


Рис. 1.7. Схема моделі чорного ящика

Ідея використання «чорного ящика» виникла від недостатності інформації про внутрішню побудову (склад) самої системи, тому її ми зображаємо у вигляді непрозорого чорного ящика, який володіє наступними властивостями: цілісністю і його відособленістю від середовища.

Перша властивість говорить про те, що ящик виділений з середовища, але не є повністю ізольованим від нього, тобто він пов'язаний з середовищем зв'язками. Як середовище діє на нього, так і він діє на середовище.

Разом з очевидністю моделі «чорного ящика» його простота оманлива. При описі будь-якої реальної системи дуже часто ми стикаємося з труднощами у визначенні всіх входів і виходів цієї системи. Використання моделі «чорного ящика» дає ті результати, які визначаються метою системи. Вибір входів «чорного ящика» є протилежним завданням.

Неврахування деяких вхідних або вихідних параметрів системи приводить часто до поганого досягнення поставленої мети.

Очевидно, що модель «чорного ящика» не розглядає внутрішній устрій системи, тому для розвитку моделювання і деталізації опису складу системи потрібне ускладнення моделі, тобто створення моделі складу системи (рис. 1.8).

Дана модель описує основні складові частини системи, проглядає елементи системи як неподільні частини і підсистеми, тобто модель складу ілюструє ієрархію складових частин системи.

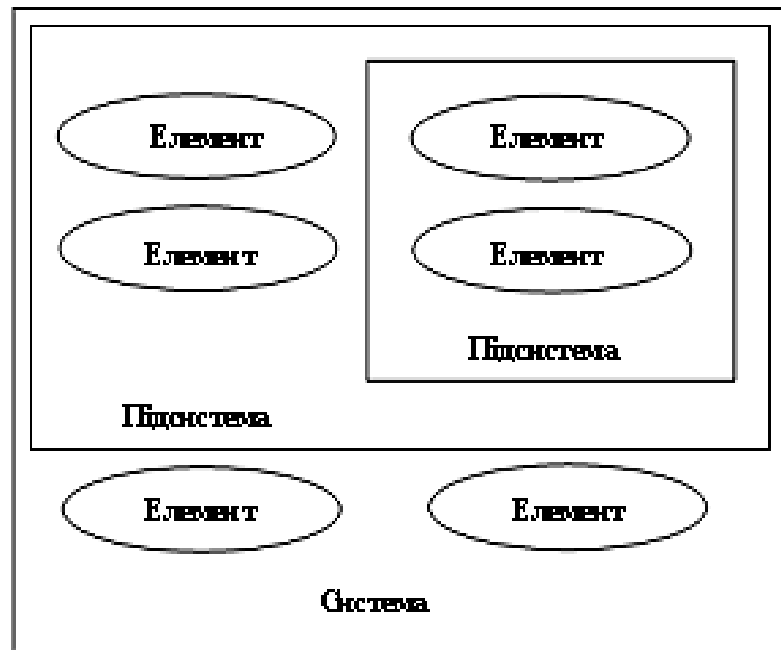


Рис. 1.8. Схема моделі складу системи

1.3. Інформаційний підхід в теорії систем

1.3.1. Теорія інформаційного поля.

Загальний взаємозв'язок і взаємозалежність всіх явищ матеріального світу – факт, незаперечний ні матеріалістами, ні ідеалістами. Матеріалістичний світогляд виводить єдність світу з його матеріальності, тобто з нього самого, не апелюючи ні до яких зовнішніх впливів. Тим часом, механізм загального взаємозв'язку і взаємозалежності явищ матеріального світу, що забезпечує дію одних і тих же законів природи в усі моменти часу і в будь-якій точці простору, може бути двояким. Це або заснований на дальності безпосередній вплив розділених в просторі і в часі об'єктів матеріального світу через «порожнечу», від чого фізика була вимушена врешті-решт відмовитись стосовно пояснення фізичної взаємодії; або заснована на близькодії взаємодія об'єктів за допомогою того, що заповнює простір між ними поля тієї або іншої природи, яке виступає у формі структури матерії і середовища між взаємодіючими об'єктами.

Логічні зв'язки, що діють між окремими об'єктами і явищами природи, носять об'єктивний характер і можуть існувати (але не виявлятися) у відсутності тих або інших об'єктів.

Таким чином, якщо в просторі існують логічні зв'язки, що виявляються за наявності в ньому відповідних об'єктів, то можна говорити про існування в ньому *інформаційно-логічного поля*.

Оскільки інформації не буває поза її матеріальними носіями, то *під полем розумітимемо структуру матерії, що оточує об'єкт, яка є джерелом поля, структура якого склалася під впливом структури самого об'єкту*.

Оскільки матерія існує в просторі, вона тим самим завжди має структуру. Саме структура як розподіл матерії в просторі характеризується кількісно і є *інформацією в собі*. Відтворення ж структури матерії на якісно інших носіях або в нашій свідомості є *інформація для нас*.

Між цими інформаціями немає ніякої якісної відмінності, але є відмінність кількісна, бо *інформації в собі* J_c у загальному випадку більше *інформації для нас* J_n :

$$J_n = R_k(J_c)J_c = R_k(M)M,$$

або в лінійному наближенні

$$J_n = R_k J_c = R_k M,$$

де M – вимірювана матеріальна властивість (маса, колір, заряд тощо), що створює J_c ; J_n – *сенсорна інформація (інформація для нас) або інформація сприйняття*, яку надалі скорочено використовуватимемо без індексу; R_k – *відносна інформаційна проникність середовища*.

Оскільки сенсорне віддзеркалення протікає в часі і в просторі, то інформація J є сумою потоків інформації від окремих частин матеріального об'єкту або від сукупності матеріальних об'єктів, що формують інформаційне поле навколо вимірника, який сприймає його.

Якщо говорити про віддзеркалення матеріального об'єкту або поля якоюсь довільною замкнутою навколо нього поверхнею, то повна інформація

складеться з суми потоків інформації, що доводяться на одиницю dS площі цієї поверхні, тобто з $O = dJ / dS$.

У такому разі повинна мати місце теорема Гауса, що є математичним виразом філософського положення про пізнаваність миру:

$$M = \oint_S O dS \quad \text{або} \quad J_c = \oint_S O dS, \quad (1.16)$$

де O – вектор інтенсивності потоку існування (віддзеркалення), а інтеграл береться по поверхні S , що охоплює явище або об'єкт, які вивчаються.

Співвідношення (1.16) означає, що всяка інформація в собі створює поле існування, сумарний потік якого адекватний цій інформації, тобто матерії, як джерела поля. Іншими словами, з теореми Гауса у формі (1.16) витікає, що джерело поля інформації J принципово повністю ідентифікуємо по реакції тих або інших матеріальних об'єктів на поле існування, що вивчається ним, без безпосереднього контакту з самим джерелом.

З урахуванням (1.16) теорему Гауса можна представити у формі

$$J_n = \oint_S R_k O dS = \oint_S O_n dS,$$

де $O_n = R_k O$ – вектор інтенсивності віддзеркалення.

Будь-які процеси, які доступні нашому спостереженню, супроводжуються обміном інформацією між системами і навколишнім середовищем. Та і саме спостереження за цими процесами має на увазі сприйняття суб'єктом відповідних потоків інформації. Очевидно, що одні потоки за обмежений відрізок часу приносять багато інформації, інші – мало. Зручною для зіставлення інформаційних потоків мірою служить *інформаційний струм* I , який природно визначити як інформацію, що приноситься потоком в кожен секунду часу

$$I = dJ / dt.$$

Можна також ввести вектор щільності інформаційного струму j , який визначимо як струм, що протікає через одиницю площі поперечного перетину інформаційного потоку

$$j = dI / dS.$$

1.3.2. Дискретні інформаційні моделі.

Згідно формули пізнання: «Від живого споглядання до абстрактного мислення, і від нього – до практики», – можна виділити три етапи віддзеркалення дійсності: два пасивних – *сенсорне* і *логічне віддзеркалення*, і один активний – етап *прагматичного віддзеркалення*. Відповідно продуктами цих етапів є *сенсорна, логічна* і *прагматична* інформація.

Сенсорна інформація J вводиться як міра відбитої в нашій свідомості елементної бази системи у формі

$$J = A / \Delta A,$$

де A – загальна кількість яких-небудь знаків, що сприймаються вимірювальними приладами або нашими органами чуття; ΔA – «квант», з точністю до якого нас цікавить сприймана інформація, або роздільна здатність приладу.

Тут необхідно відзначити принципову відмінність A і J . Якщо A завжди прийнято виражати числом, яке є класичним математичним об'єктом і через це задовольняє закону тотожності $A \equiv A$, то про інформацію цього сказати не можна.

Логічна інформація H на відміну від J , що завжди відноситься до конкретних об'єктів, або властивостей, характеризує цілий клас однорідних в певному відношенні об'єктів або властивостей, будучи синтезом законів логіки, правил функціонування системи і її елементів.

Згідно *основному закону класичної логіки* Арістотеля, *власна суть системи зворотна об'єму поняття* n про неї, тобто

$$H = J / n.$$

Об'єм поняття залежить від аспекту розгляду системи (елементу) і зазвичай припускає родову їх приналежність.

1.3.3. Інформація і ентропія.

Ентропія характеризує інформацію, якої бракує. У вивчення будь-яких систем чоловік вводить людський чинник, що приводить до неточностей. Для вимірювання, визначення цих неточностей і існує поняття невизначеності.

Сучасне поняття інформації склалося не відразу. Больцман в 1877 р. висловив фразу, що: «Ентропія характеризує бракуючу інформацію». Пізніше в 1948 р. К. Шенон вивів формулу для інформаційної ентропії, яка опинилася тожньою формулі Больцмана для термодинамічної ентропії.

Властивість будь-якого об'єкту (його стан) знаходиться завжди відповідно до стану іншого або інших об'єктів, іншими словами, один об'єкт містить інформацію про інший. Поняття інформації володіє загальністю і має сенс філософській категорії. Для теорії систем поняття інформації так же фундаментально і важливо як, наприклад, поняття енергії для фізики.

Для того, щоб два об'єкти містили інформацію один про одного, необхідно, щоб між їх станами існувала певна відповідність. Така відповідність може встановитись тільки в результаті фізичної взаємодії між об'єктами, або через проміжні об'єкти.

Сигнал – це матеріальний носій інформації, засіб перенесення інформації в часі і просторі. Сигнали повинні бути стійкі як по відношенню до перебігу часу, так і до зміни положення в просторі. Вони діляться на статичні і динамічні.

У першому випадку сигнали є стабільними в часі або не змінними, хоч би в якомусь моменті часу. До другого типу відносяться сигнали, які використовуються для опису динамічних полів, наприклад, звук.

Очевидно, що динамічні сигнали переважно використовуються для передачі сигналів, а статичні – для зберігання.

Сигнали грають в системах важливу роль. Якщо енергетичні і/або речовинні потоки живлять систему, то *потоки інформації, що переносяться сигналами, організовують її функціонування, управляють її роботою.*

Специфічним поняттям теорії інформації є поняття *невизначеності* випадкового об'єкту.

Для кількісної оцінки цієї невизначеності було введено поняття, зване ентропією, тобто *ентропія – це кількісна міра невизначеності.*

Якщо який-небудь об'єкт A має стан A_1, \dots, A_n , а вірогідність кожного з цих станів p_1, \dots, p_n , то ентропія цієї події

$$H(A) = -\sum_{k=1}^n p_k \log p_k.$$

Розглянемо властивості цієї ентропії:

1. Якщо вірогідність настання одного з n -подій $= 1$, то ентропія цього стану рівна 0

$$H(p_1, \dots, p_n) = 0 \text{ за умови } p_i = 1.$$

2. Ентропія досягає свого найбільшого значення в тому випадку, якщо ймовірності p_1, \dots, p_n рівні між собою, тобто $H(p_1, \dots, p_n) = \max$, якщо

$$p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_n = 1/n;$$

$$\sum p_i = 1; \quad p_i = 1/n.$$

3. Якщо події A і B незалежні, то їх ентропія рівна сумі ентропій кожної події

$$H(A \cap B) = H\{p_k\} + H\{q_m\} = H(A) + H(B).$$

4. Якщо події A і B залежні, то їх ентропія

$$H(A \cap B) = H(A) + H(B/A),$$

тобто рівна сумі ентропії події A і ентропії події B за умови настання події A .

5. Ентропія події A не менше ентропії події A при настанні події B

$$H(A) \geq H(A/B),$$

тобто інформація про об'єкт B завжди зменшує невизначеність події A , якщо A і B залежні, і не змінюються, якщо події A і B незалежні.

Процес отримання будь-якої інформації можна інтерпретувати як зміну невизначеності в результаті передачі сигналів. При цьому корисний або такий, що відправляється, сигнал є послідовністю незалежних символів з ймовірністю $p(x_i)$. Сигнал, що приймається, є набором символів y_k того ж кодування (алфавіту), і якщо у нас відсутній шум, що впливає на цю передачу, то сигнали, що приймаються і відправляються рівні $Y_k = X_m$. Але оскільки при будь-якій передачі є завади, тобто йде спотворення сигналу, то на приймальній стороні системи з'явиться невизначеність.

На передавальній стороні $H(X)$ – апіорна ентропія, а на приймальній стороні $H(X/Y)$ – апостеріорна.

Щоб оцінити кількість інформації, яку було передано від одного об'єкту до іншого, береться різниця апіорної і апостеріорної інформації. Кількість інформації в цьому випадку є різниця між ентропіями

$$I(X, Y) = H(X) - H(X/Y).$$

Властивості кількості інформації:

1. Кількість інформації у випадковому об'єкті X щодо об'єкту Y рівна кількості інформації в Y відносно X

$$I(X, Y) = I(Y, X).$$

2. Кількість інформації завжди ненегативна

$$I(X, Y) = I(Y, X) \geq 0.$$

3. Для дискретних об'єктів X справедлива рівність

$$I(X, X) = I(X, X)$$

За одиницю ентропії приймають невизначеність випадкового об'єкту, у якого ентропія рівна 1

$$H(X) = -\sum_{i=1}^k p_k \log p_k = 1.$$

Зазвичай береться бінарний випадок, для якого $k = 2$ і основа $\log m = 2$, тоді виходить тотожність

$$-p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2 = 1,$$

вирішенням якої є $p_1 = p_2 = 1/2$.

При цьому одиниця інформації називається *бітом*. Якщо ж узяти натуральний логарифм, то одиниця інформації називається *нітом*.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення поняття «система».
2. Які компоненти включає система?

3. Які функції виконує зворотний зв'язок?
4. Приведіть приклади видів структур систем.
5. Сформулюйте принципи класифікації систем.
6. Дайте визначення понять «модель» і «моделювання».
7. Класифікуйте методи моделювання систем.
8. Розкрийте суть поняття «інформаційне поле».
9. Розкрийте суть понять «інформація» і «ентропія».

Розділ 2. ОСНОВИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

2.1. Системний аналіз

2.1.1. Визначення системного аналізу.

Системний аналіз – міждисциплінарний курс, узагальнюючий методологію дослідження складних технічних, природних і соціальних систем.

Центральною проблемою системного аналізу є проблема прийняття рішення. Стосовно завдань дослідження, проектування і управління системами проблема прийняття рішення пов'язана з вибором певної альтернативи в умовах різного роду невизначеності. Невизначеність обумовлена багатокритеріальністю завдань оптимізації, цілей розвитку систем, неоднозначністю сценаріїв розвитку системи, недостатністю апріорної інформації про систему, дією випадкових чинників в ході динамічного розвитку системи тощо.

Враховуючи дані обставини, системний аналіз можна визначити як дисципліну, що займається проблемами прийняття рішень в умовах, коли вибір альтернативи вимагає аналізу складної інформації різної фізичної природи.

У системному аналізі можна виділити три головні напрями:

- 1) побудова моделі досліджуваного об'єкту;
- 2) постановка завдання дослідження;
- 3) рішення поставленої математичної задачі.

Побудова моделі – опис процесу на мові математики. При цьому здійснюється математичний опис явищ і процесів, що відбуваються в системі. Від якості моделі залежить результат всього системного аналізу.

На етапі *постановки завдання* дослідження формулюється мета аналізу, яка є зовнішнім чинником по відношенню до системи. Мета повинна бути формалізована. Завдання системного аналізу полягає в проведенні необхідного аналізу невизначеностей, обмежень та формулюванні, кінець кінцем, деякого оптимізаційного завдання

$$f(x) \rightarrow \max, \quad x \in G.$$

Тут x – елемент деякого нормованого простору G , що визначається природою моделі; $G \subset E$, де E – множина, що визначається структурою моделі і особливостями досліджуваної системи.

Таким чином, завдання системного аналізу на цьому етапі трактується як деяка оптимізаційна проблема. Аналізуючи вимоги до системи, тобто цілі, які припускає досягти дослідник, і ті невизначеності, які при цьому неминуче присутні, дослідник повинен сформулювати мету аналізу на мові математики.

Успішне *вирішення завдань* системного аналізу вимагає використання на кожному етапі дослідження неформальних міркувань. Зважаючи на це перевірка якості рішення, його відповідність початковій меті дослідження перетворюється на найважливішу теоретичну проблему.

2.1.2. Характеристики завдань системного аналізу.

Розглянемо основні завдання системного аналізу.

По-перше, слід зазначити завдання дослідження системи взаємодій аналізованих об'єктів з навколишнім середовищем. Рішення даної задачі вимагає:

- проведення межі між досліджуваною системою і навколишнім середовищем;
- визначення реальних ресурсів взаємодії системи і навколишнього середовища;
- розгляд взаємодій досліджуваної системи з системою більш високого рівня.

Завдання другого етапу пов'язані з конструюванням альтернатив цієї взаємодії, альтернатив розвитку системи в часі і в просторі.

Завдання третього етапу полягають в конструюванні множини імітаційних моделей, що описують вплив тієї або іншої взаємодії на поведінку об'єкту дослідження.

Завдання системних аналітиків – вибрати і обґрунтувати якнайкращу альтернативу розвитку. Дослідження в цій області включають:

а) побудову теорії оцінки ефективності прийнятих рішень або сформованих планів і програм;

б) вирішення проблеми багатокритеріальності в оцінках альтернатив рішення або планування;

в) дослідження проблеми невизначеності, особливо пов'язаної не з чинниками статистичного характеру, а з невизначеністю експертних думок і навмисно створюваною невизначеністю, пов'язаною із спрощенням уявлень про поведінку системи;

г) розробку проблеми агрегації індивідуальних переваг на рішеннях, що зачіпають інтереси декількох сторін, які впливають на поведінку системи;

д) вивчення специфічних особливостей соціально-економічних критеріїв ефективності;

е) створення методів перевірки логічної узгодженості цільових структур і планів та встановлення необхідного балансу між зумовленістю програми дій і її підготовленістю до перебудови під час вступу нової інформації як про зовнішні події, так і зміні уявлень про виконання цієї програми.

2.1.3. Особливості завдань системного аналізу.

Кінцевою метою системного аналізу є розв'язання проблемної ситуації, що виникла перед об'єктом системного дослідження.

Системний аналіз займається вивченням проблемної ситуації, з'ясуванням її причин, виробленням варіантів її усунення, прийняттям рішення і організацією подальшого функціонування системи, що вирішує проблемну ситуацію.

У різних областях практичної діяльності (техніці, економіці, соціальних науках, психології) виникають ситуації, коли потрібно приймати рішення, для яких не вдається повністю врахувати умови, що зумовлюють їх. Прийняття рішення у такому разі відбуватиметься в умовах невизначеності різної природи.

Найбільш простій вигляд такого роду невизначеності – *стохастична невизначеність*. Вона має місце в тих випадках, коли невідомими чинниками є випадкові величини або випадкові функції, статистичні характеристики яких

можуть бути визначені на підставі аналізу минулого досвіду функціонування об'єкту системних досліджень.

Наступний вид – *невизначеність цілей*. Формулювання мети при вирішенні завдань системного аналізу є однією з ключових процедур, тому що мета є об'єктом, яка визначає постановку завдання системних досліджень. Невизначеність мети є наслідком багатокритеріальності завдань системного аналізу.

Як наступна особливість системного аналізу відзначимо роль моделей як засобу вивчення систем і їх системних досліджень. Будь-які методи системного аналізу спираються на математичний опис тих або інших фактів, явищ, процесів. Точність, якість опису визначаються, перш за все, відповідністю моделі тим вимогам, які пред'являються до дослідження, відповідністю отримуваних за допомогою моделі результатів спостережуваному ходу процесу.

2.1.4. Процедури системного аналізу.

Методика проведення системного аналізу і керівні принципи не є універсальними – кожне дослідження має свої особливості і вимагає від виконавців інтуїції, ініціативи і уяви, щоб правильно визначити цілі проекту і добитися успіху в їх досягненні. Основні процедури системного аналізу включають:

- вивчення структури системи, аналіз її компонентів, виявлення взаємозв'язків між окремими елементами;
- збір даних про функціонування системи, дослідження інформаційних потоків, спостереження і експерименти над аналізованою системою;
- побудова моделей;
- перевірку адекватності моделей, аналіз невизначеності і чутливості;
- дослідження ресурсних можливостей;
- визначення цілей системного аналізу;
- формування критеріїв;
- генерування альтернатив;
- реалізацію вибору і прийняття рішень;
- впровадження результатів аналізу.

2.1.5. Цілі системного аналізу.

Початковий етап роботи полягає в постановці формального завдання, яке треба вирішувати. У дослідженні складної системи це проміжний результат, якому передують тривала робота по структуризації проблеми. Початковий пункт визначення цілей в системному аналізі пов'язаний з формулюванням проблеми.

Необхідність системного аналізу виникає тоді, коли замовник вже сформулював свою проблему, тобто проблема не тільки існує, але і вимагає рішення. Проте системний аналітик повинен усвідомлювати те, що сформульована замовником проблема є приблизним робочим варіантом. Причини, по яких початкове формулювання проблеми необхідно рахувати як перше наближення, полягають в тому, що система, для якої формулюється мета проведення системного аналізу, не є ізольованою. Вона пов'язана з іншими системами, входить як частина до складу деякої надсистеми.

Визначити мету системного аналізу – це означає відповісти на питання, що треба зробити для зняття проблеми. Сформулювати мету – означає вказати напрям, в якому слід рухатися, щоб вирішити існуючу проблему, показати шляхи, які відводять від існуючої проблемної ситуації.

Формулюючи мету, потрібно завжди віддавати звіт в тому, що вона має активну роль в управлінні. У визначенні цілі було відображено, що мета – це бажаний результат розвитку системи. Таким чином, сформульована мета системного аналізу визначатиме весь подальший комплекс робіт. Отже, цілі повинні бути реалістичні і потрібно направити всю діяльність по виконанню системного аналізу на отримання певного корисного результату.

При формулюванні мети потрібно враховувати, що на мету впливають як зовнішні по відношенню до системи чинники, так і внутрішні.

2.1.6. Генерування альтернатив.

Наступним етапом системного аналізу є створення множини можливих способів досягнення сформульованої мети. Іншими словами, на даному етапі

необхідно згенерувати множину альтернатив, з яких потім здійснюватиметься вибір якнайкращого шляху розвитку системи.

Важливість цього етапу полягає в тому, що кінцева мета полягає у виборі якнайкращої альтернативи на заданій множині і в обґрунтуванні цього вибору. Якщо в сформовану множину альтернатив не потрапила якнайкраща, то ніякі найдосконаліші методи аналізу не допоможуть її обчислити.

Необхідно згенерувати як можна більше число альтернатив. Є наступні способи генерації:

- а) пошук альтернатив в патентній і журнальній літературі;
 - б) залучення декількох експертів, що мають різну підготовку і досвід;
 - в) збільшення числа альтернатив за рахунок їх комбінації, утворення проміжних варіантів між запропонованими раніше;
 - г) модифікація наявної альтернативи, тобто формування альтернатив, що лише частково відрізняються від відомої;
 - д) включення альтернатив, протилежних запропонованим, у тому числі і «нульової» альтернативи (не робити нічого);
 - е) інтерв'ювання зацікавлених осіб і широкі анкетні опити;
 - ж) включення в розгляд навіть тих альтернатив, які на перший погляд здаються надуманими;
- з) генерування альтернатив, розрахованих на різні інтервали часу (довгострокові, короткострокові, екстрені).

Для докладного вивчення кожною з альтернатив буде потрібно неприйнятно великі витрати часу і засобів. Тому необхідно провести попередній аналіз альтернатив і постаратися звужити їх множину на ранніх етапах аналізу. Для цього застосовують якісні методи порівняння альтернатив, не удаючись до точніших кількісних методів. Тим самим здійснюється грубе відсіювання.

2.1.7. Впровадження результатів аналізу.

Питанням впровадження результатів системного аналізу в практику приділяється підвищена увага. При впровадженні результатів необхідно мати на

увазі, що робота здійснюється на клієнта (замовника), який володіє владою, достатньою для зміни системи тими способами, які будуть визначені в результаті системного аналізу. У роботі повинні безпосередньо брати участь всі зацікавлені сторони – це ті, хто відповідає за вирішення проблеми, і ті, кого ця проблема безпосередньо торкається. В результаті впровадження системних досліджень необхідно забезпечити поліпшення роботи організації замовника з точки зору хоч би однієї із зацікавлених сторін; при цьому не допускаються погіршення цієї роботи з погляду решти всіх учасників проблемної ситуації.

Кажучи про впровадження результатів системного аналізу, важливо відзначити, що в реальному житті ситуація, коли спочатку проводять дослідження, а потім їх результати упроваджують в практику, зустрічається у край рідко, лише в тих випадках, коли мова йде про прості системи. При дослідженні складних систем вони змінюються з часом як самі по собі, так і під впливом досліджень. В процесі проведення системного аналізу змінюються стан проблемної ситуації, цілі системи, персональний і кількісний склад учасників, співвідношення між зацікавленими сторонами.

2.2. Застосування загальної теорії систем

2.2.1. Основні поняття і визначення.

Загальна теорія систем надає можливість створювати такі моделі в максимально загальній формі. Основою для цього служить поняття системи, визначене в теоретико-множинних термінах. Система визначається як відношення на мові теорії множин таким чином.

Передбачається, що задане сімейство множин $\bar{V} = \{V_i : i \in I\}$, де I — множина індексів.

Визначення 2.1. Під системою S , заданою на \bar{V} розуміється деяка власна підмножина декартового добутку $\times \bar{V}$:

$$S \subset \times \{V_i : i \in I\}.$$

Всі компоненти $V_i, i \in I$ декартового добутку $\times V_i$ називаються *об'єктами системи* S , а I називається *таким, що індексує множину системи*.

Визначення 2.2. Хай $I_x \subset I, I_y \subset I$ утворюють розбиття множини I , тобто $I_x \cap I_y = \emptyset, I_x \cup I_y = I$. Множина $X = \times \{V_i, i \in I_x\}$ називається *вхідним об'єктом*, а множина $Y = \times \{V_i, i \in I_y\}$ називається *вихідним об'єктом*. Тоді система S визначається відношенням

$$S = X \times Y. \quad (2.1)$$

Надалі така система називається *системою "вхід-вихід"*.

Визначення 2.3. Якщо S є функцією

$$S: X \rightarrow Y,$$

то відповідна система називається *функціональною*. При цьому використовуємо позначення $F: (X) \rightarrow Y$, щоб підкреслити, що F не обов'язково визначена на кожному елементі множини X , тобто F є не глобальною, а частковою *функцією*. Область визначення F позначатимемо через $D(F) \subset X$, а область її значень (тобто її кообласть) — через $\mathfrak{R}(F) \subset Y$.

Аналогічні позначення використовуватимемо і в нефункціональних системах, тобто $D(S) = \{x: (\exists y) ((x, y) \in S)\}$, $\mathfrak{R}(S) = \{y: (\exists x) ((x, y) \in S)\}$.

Зауваження 2.1. Надалі, якщо не обумовлене інше, вважатимемо, що $D(S) = X$.

Приклад 2.1. Розглянемо систему, визначену рівнянням

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.2)$$

у якій $x \in E^n, u \in E^r$ A і B — постійні матриці. Допустимими управліннями вважатимемо функції $u(t) \in L_2(0, T)$.

Якщо $X(t)$ — фундаментальна матриця рішень рівняння $\dot{y} = Ay$, то загальне рішення рівняння (2.2) при конкретному управлінні $u = u(t)$ можна представити у вигляді

$$x(t) = X(t)c + \int_0^t X(t)X^{-1}(s)u(s)ds, \quad (2.3)$$

де $c \in E^n$ — довільний постійний вектор. Визначимо три об'єкти:

- 1) V_1 — множина всіх абсолютно неперервних вектор-функцій $x(t)$
 $0 < t < T$
- 2) V_2 — множина всіх функцій з $L_2'(0, T)$;
- 3) V_3 — множина всіх векторів з E^n .

Тоді систему управління, задану рівнянням (2.2), можна розглядати як систему вигляду

$$S \subset V_1 \times V_2 \times V_3,$$

де S складається з тих трійок $\{x(t), u(t), c\}$, $x(t) \in V_1$, $u(t) \in V_2$, $c \in V_3$, які зв'язані між собою співвідношенням (2.3).

Якщо розглядається система, задана рівнянням (2.2) і початковою умовою $x(0) = a$, то, вважаючи $X = V_1$, $Y = V_2$, отримаємо систему з двома об'єктами вигляду (2.1), де S складається з пар $\{x(t), u(t)\}$, $x(t) \in X$, $u \in Y$, зв'язаних співвідношенням

$$x(t) = e^{At}a + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

Визначаючи систему як граничне загальне теоретико-множинне відношення, ми починаємо з найменш структурованих і найбільш широко вживаних понять. При цьому система визначається в термінах її спостережуваних властивостей, а точніше, в термінах взаємодії між цими властивостями, а не тим, що насправді вона є (тобто не за допомогою фізичних, біологічних, соціальних або інших явищ). У розглянутому прикладі множини (об'єкти) наділені певними структурами (метрика, неперервність тощо). У інших випадках відповідні структури можуть виявитися менш чіткими, і навіть розпливчати, особливо тоді, коли вдається дати лише вербальний опис системи.

Визначення 2.4. Хай C — довільна множина і для системи S існує функція $R: (C \times X) \rightarrow Y$ така, що справедливе твердження

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow (\exists c)[R(c, x) = y].$$

Тоді C називається *множиною* або *об'єктом глобальних станів*, а її елементи – просто *глобальні стани* системи, функція R при цьому називається *глобальною реакцією* системи S .

У прикладі 2.1 множину глобальних станів системи (2.2) можна розглядати як множину C векторів $c \in E^n$, а глобальна реакція визначається співвідношенням (2.3).

Теорема 2.1. Кожній системі відповідає деяка глобальна реакція, і ця реакція (з урахуванням зауваження 1) не є частковою, тобто $R: (C \times X \rightarrow Y)$.

Доказ. Позначимо через F множину всіляких функцій, що відображають X в Y , тобто $F = Y^X = \{f: X \rightarrow Y\}$. Хай, далі, множина $G = \{f_c: c \in C\} \subseteq F$ така, що $f_c \in G \Leftrightarrow f_c \subseteq S$, де c — індексуєча множина для G . Визначимо тепер $R: C \times X \rightarrow Y$ за допомогою умови $R(c, x) = f_c(x)$.

Покажемо, що з цієї умови виходить, що $S = \{(x, y): (\exists c) y = R(c, x)\}$. Хай $S' = \{(x, y): (\exists c) y = R(c, x)\}$. Розглянемо довільну пару $(x, y) \in S$. Тоді $y = R(c, x) = f_c(x)$ для деякого $c \in C$. Отже $(x, y) \in S'$, оскільки $f_c \subseteq S$. Значить $S' \subseteq S$.

Назад: візьмемо довільну пару $(x, y) \in S'$. Оскільки $D(S) = X$ і $x \in X$ та множина S непорожня. Виберемо деяке $f_c \in G$ і покладемо $\hat{f} = (f_c \setminus \{x, f_c(x)\}) \cup \{(x, y)\}$. Тоді $\hat{f} \in F$ і $\hat{f} \in S$. Тому $\hat{f} = f_{c'}$ для деякого $c' \in C$ і, отже $y = f_{c'}(x)$, або $(x, y) \in S$. Звідси витікає, що $S \subseteq S'$. Це означає, що $S = S'$. Теорема повністю доведена.

2.2.2. Абстрактні лінійні системи.

Наступний природний крок у вивченні систем полягає в розробці деякій їх класифікації. Почнемо з визначення поняття лінійної системи. Така методика в дослідженні представляється цілком природною, оскільки лінеаризація про-

цесів завжди була першим кроком у вивченні поведінки об'єктів будь-якої природи.

З цією метою нагадаємо необхідні надалі поняття загальної алгебри.

Хай в множині R задана непорожня система підмножин \mathfrak{R} . Ця система називається *алгеброю*, якщо:

а) $\emptyset, R \in \mathfrak{R}$;

б) $S \in \mathfrak{R} \Rightarrow R \setminus S \in \mathfrak{R}$;

в) об'єднання будь-якої кінцевої сукупності множин з \mathfrak{R} належить \mathfrak{R} ,

тобто з того, що $S_i \in \mathfrak{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, витікає, що $\bigcup_{i=1}^n S_i \in \mathfrak{R}$.

Якщо властивість в) справедлива при $n = \infty$, то алгебра називається σ -алгеброю.

Алгебра називається *лінійною*, якщо вона є множиною з однією внутрішньою і однією зовнішньою операціями, що задовольняють аксіомам векторного простору. Такими операціями можуть бути складання елементів (внутрішня операція) і множення елементів множини на елементи скалярного поля (зовнішня операція).

Визначення 2.5. Хай A – деяке скалярне поле, X і Y – лінійна алгебра над A , а відношення $S \subset X \times Y$ непорожні.

Нехай, далі:

1) $s \in S \ \& \ s' \in S \Rightarrow s + s' \in S$;

2) $s \in S \ \& \ \alpha \in A \Rightarrow \alpha s \in S$,

де «+» позначає (внутрішню) операцію складання в $X \times Y$, а через αs позначений результат (зовнішньої) операції множення на скаляр. Причому, операції складання і множення на скаляр визначаються на $X \times Y$ природним чином: $(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$ і $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, де $(x, y) \in S$, $(x_1, y_1) \in S$, $\alpha \in A$.

Тоді S називається *абстрактною (повною) лінійною системою*.

Згадка терміну "повнота" у визначенні лінійної системи не є випадковою, оскільки в додатках досить часто зустрічаються неповні системи. До таких, наприклад, відносяться системи, які описуються лінійними диференціальними рі-

вняннями, множина допустимих початкових умов яких не визначає лінійний простір. Проте в теорії керування зазвичай не накладаються ніяких обмежень на початкові умови. Тому надалі ми припускати будемо, що кожна лінійна система є повною, якщо, звичайно, не обумовлене інше.

Основний результат, що відноситься до лінійних систем полягає в наступному.

Теорема 2.2. Хай X і Y — лінійна алгебра над одним і тим же полем A . Система $S \subset X \times Y$ є лінійною тоді і тільки тоді, коли існує глобальна реакція $R: C \times X \rightarrow Y$ така що:

1) C є лінійною алгеброю над полем A ;

2) існує пара таких лінійних відображень $R_1: C \rightarrow Y$ і $R_2: X \rightarrow Y$, що для всіх $(c, x) \in C \times X$ справедлива рівність $R(c, x) = R_1(c) + R_2(x)$.

Доведення цієї теореми достатньо громіздке і його приводити не будемо. Проте слід особливо підкреслити, що практично кожен результат теорії загальних лінійних систем спирається на сформульовану теорему.

Визначення 2.6. Хай $S \subset X \times Y$ — лінійна система. Відображення $R: C \times x \rightarrow Y$ називається лінійною глобальною реакцією системи тоді і тільки тоді, коли:

а) R узгоджується з S , тобто $(x, y) \in S \Leftrightarrow (\exists c)[y = R(c, x)]$;

б) C є лінійною алгеброю над полем A скалярів лінійної алгебри X і Y ;

в) існують два лінійні відображення $R_1: C \rightarrow Y$ і $R_2: X \rightarrow Y$ такі, що для будь-яких $(x, y) \in S$ справедлива рівність $R(c, x) = R_1(c) + R_2(x)$.

При цьому C називається лінійним об'єктом глобальних станів R_1 — глобальною реакцією на стан, а R_2 — глобальною реакцією на вхід.

Тут слід звернути увагу на наступну важливу обставину. У визначенні глобальної реакції потрібне виконання лише умови: R узгоджується з S , тобто $(x, y) \in S \Leftrightarrow (\exists c)[y = R(c, x)]$, а для визначення лінійної глобальної реакції необхідне виконання ще двох умов (умови б і в). Тому поведінка лінійної системи може описуватися і реакцією, яка не є лінійною.

З урахуванням введеного визначення виходить наступне важливе слідство з теореми 2.2.

Слідство 2.1. Система є лінійною тоді і тільки тоді, коли для неї існує лінійна глобальна реакція.

2.2.3. Часові системи.

Щоб будувати змістовну теорію систем, засновану на визначенні 2.1, необхідно наділити систему (як відношення) деякою структурою. Це можна зробити одним з наступних способів.

1. Ввести додаткову структуру для елементів об'єктів системи (наприклад, розглядати сам елемент $v_i \in V_i$ як деяку множину з відповідною структурою). У розглянутому прикладі елемент $x(t) \in V_1$ можна розглядати як множину векторів з E^n , залежних від параметра t .

2. Ввести структуру безпосередньо для самих об'єктів V_i .

У першому випадку визначається поняття абстрактної часової системи. У другому випадку отримуємо систему алгебри.

Щоб ввести загальне поняття часової системи, необхідно формалізувати поняття часу. Ця формалізація повинна використовувати мінімальну математичну структуру, відображаючи при цьому найбільш істотні риси інтуїтивних уявлень про час.

Визначення 2.7. Множиною моментів часу (загальної часової системи) називається лінійна впорядкована (абстрактна) множина T , а відношення порядку в ній характеризуватимемо символом \leq , а для зручності позначень вважатимемо, що в T є мінімальний елемент 0 .

Введемо, далі, наступні позначення. Для будь-яких $t \in T$ і $t' \in T$, $t' \geq t$ покладемо

$$\begin{aligned} T_t &= \{t' : t' \geq t\}, & T^t &= \{t' : t' < t\}, & T_{t^*} &= \{t^* : t \leq t^* \leq t'\}, \\ \bar{T}_t &= T_{t^*} \cup \{t'\} & \bar{T}^t &= T^t \cup \{t\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ці співвідношення визначають відрізки і інтервали часу, необхідні надалі для аналізу часових систем.

Визначення 2.8. Хай A і B – деякі множини, а T – множина моментів часу. Хай, далі A^T і B^T – множина відображень T на A і B відповідно і $X \subset A^T$, $Y \subset B^T$. Загальною часовою системою S над X і Y називається відношення на X і Y , тобто $S \subset X \times Y$. Множини A і B називаються *алфавітами входів і виходів* відповідно. Множини X і Y називають *часовими об'єктами системи*. Значення функцій з X і Y у момент часу t позначатимемо через $x(t)$ і $y(t)$ відповідно.

З цього визначення виходить, що функції $x(t)$ і $y(t)$ визначені на всій множині моментів часу. Проте для практичних цілей часто потрібно розглядати їх звуження на ті відрізки часу, які визначаються співвідношеннями (2.4). Для цих звужень використовуються спеціальні позначення:

$$\begin{cases} x_t = x|_{T_t}, x^t = x|_{T^t}, x_{u'} = x|_{T_{u'}}, \bar{x}_{u'} = x|_{\bar{T}_{u'}}, \bar{x}^t = x|_{\bar{T}^t}, \\ X_t = \{x_t : x_t = x|_{T_t} \& x \in X\}, X^t = \{x^t : x^t = x|_{T^t} \& x \in X\}, \\ X_{u'} = \{x_{u'} : x_{u'} = x|_{T_{u'}} \& x \in X\}, X(t) = \{x(t) : x \in X\}. \end{cases}$$

При цьому вважатимемо, що $x_u = \emptyset$, $X_u = \{\emptyset\}$.

Ці формули визначають відповідні звуження системи S :

$$\begin{cases} S_t = \{(x_t, y_t) : x_t = x|_{T_t} \& y_t = y|_{T_t} \& (x, y) \in S\}, \\ S^t = \{(x^t, y^t) : x^t = x|_{T^t} \& y^t = y|_{T^t} \& (x, y) \in S\}, \\ S_{u'} = \{(x_{u'}, y_{u'}) : x_{u'} = x|_{T_{u'}} \& y_{u'} = y|_{T_{u'}} \& (x, y) \in S\}. \end{cases}$$

Крім того, введемо так звану *операцію зчленування*, за допомогою якої будується функція

$$\hat{x}(\tau) = \begin{cases} x(\tau), & \text{якщо } \tau < t, \\ x^*(\tau), & \text{якщо } \tau > t, \end{cases}$$

для якої використовується позначення $\hat{x}(\tau) = x^t \cdot x_t^*$. Аналогічну операцію зчленування можна визначити і на функціях $y(t)$.

Таким чином, будуються різні звуження функцій і відповідних ним множин $X \subset A^T$ і $Y \subset B^T$. Ці звуження визначають відповідні звуження системи $S \subset X \times Y$. Щоб підкреслити, що використовуються вказані класи звужень, поз-

начатимемо через \bar{X} множини звужень такого типу для $X \subset A^T$. Аналогічно визначаємо \bar{Y} і \bar{S} .

Крім того, також припускатимемо, що всі системи є з повним входом, які визначаються таким чином.

Визначення 2.9. Часова система $S \subset X \times Y$ називається системою з повним входом тоді і тільки тоді, коли

$$(\forall x)(\forall x^*)(\forall t)(x, x^* \in D(S) \& t \in T \Rightarrow x^t \cdot x_t^* \in D(S)) \text{ і} \\ (\forall t)(\{x(t) : x \in X\} = A).$$

Ясно, що введені вище поняття об'єкту глобального стану системи, її глобальної реакції застосовні і до часових систем. Проте потрібно визначити відповідні поняття і для звужень часової системи. Звуження S_t часової системи S визначається через звуження її вхідних дій і вихідних величин:

$$S_t = \{(x_t, y_t) : x_t \in X_t \& y_t \in Y_t \& (x, y) \in S\}.$$

Аналогічним чином визначаються звуження S^t і S_{tt} .

Далі природним чином вводяться поняття об'єктів початкового стану.

Визначення 2.10. Об'єктом початкового стану і початковою реакцією часової системи $S \subset A^T \times B^T$ називаються відповідно об'єкт глобальних станів і глобальна реакція ρ_0 цієї системи, тобто відображення $\rho_0 : C_0 \times X \rightarrow Y$ задовольняє умові: $(x, y) \in S$ тоді і тільки тоді, коли $(\exists c) [\rho_0(c, x) = y]$.

Аналогічним чином визначаються об'єкти станів системи і реакції системи ρ_t у момент часу t .

Хай $S \subset X \times Y$ і ρ_t – деяка функція така, що $\rho_t : C_t \times X \rightarrow Y$. Говоритимемо, що ρ_t узгоджується з S тоді і тільки тоді, коли ця функція співпадає з реакцією системи у момент часу t . Це означає, що

$$(x_t, y_t) \in S_t \Leftrightarrow (\exists c) [\rho_t(c, x_t) = y_t].$$

Вводячи позначення $S_t^p = \{(x_t, y_t) : (\exists c)(\rho_t(c, x_t) = y_t)\}$, умову узгодження можна записати у вигляді $S_t^p = S_t$.

Якщо $\bar{\rho} = \{\rho_t : C_t \times X_t \rightarrow Y_t\}$ – сімейство довільних функцій, то говоримо, що $\bar{\rho}$ узгоджується з часовою системою S тоді і тільки тоді, коли $\bar{\rho}$ співпадає з сімейством реакцій системи S , тобто коли $S_t^\rho = S_t$ для будь-якого $t \in T$. Існування сімейства реакцій для кожної часової системи виходить з теореми 2.1.

2.2.4. Динамічні системи.

Для аналізу процесів, які розвиваються в часі, потрібно встановлювати взаємозв'язок між об'єктами системи, що відноситься до різних моментів часу. З позицій загальної теорії систем для цієї мети вже недостатньо одного поняття реакції системи. Для повної характеристики потрібно вводити додаткове сімейство функцій, що характеризують динамічні системи.

Визначення 2.11. Сімейство реакцій $\bar{\rho}$, що узгоджується з часовою системою S , називається *приведеним сімейством реакцій*, якщо

$$(\forall c_t) (\forall \bar{c}_t) (\forall x_t) (\rho(c_t, x_t) = \rho(\bar{c}_t, x_t) \Rightarrow c_t = \bar{c}_t)$$

для будь-якого $t \in T$.

Відмічена в цьому визначенні властивість означає, що з ідентичності поведінки систем в майбутньому виходить еквівалентність їх положення в сьогоденні. Для таких систем визначення динамічності системи полягає в наступному.

Визначення 2.12. Часова система $S \subset X \times Y$ називається *динамічною*, якщо існують два сімейства відображень

$$\bar{\rho} = \{\rho_t : C_t \times X_t \rightarrow Y_t \ \& \ t \in T\}, \quad \bar{\varphi} = \{\varphi_{t'} : C_t \times X_t \rightarrow C_{t'} \ \& \ t, t' \in T \ \& \ t' > t\}$$

такі, що:

1) $\bar{\rho}$ є сімейством реакцій цієї системи;

2) всі функції $\varphi_{t'}$ з сімейства $\bar{\varphi}$ задовольняють умові

$$\rho_t(c_t, x_t) \Big|_{T'} = \rho_{t'}(\varphi_{t'}(c_t, x_{t'}), x_{t'}), \text{ де } x_t = x_{t'} \cdot x_{t'}.$$

При цьому функції $\varphi_{u'}$ називаються *функціями переходу станів*, а сімейство $\bar{\varphi}$ — *сімейством функцій переходу станів*.

Тут слід зазначити, що введені поняття часової системи, а також вхідних і вихідних об'єктів визначалися на одній і тій же множині моментів часу. Це не дозволяє розглядати багато реальних систем, для яких ця умова не виконується. Зокрема, в такі класи не потрапляють системи, в яких вхідним сигналом є функція часу, а на виході точковий сигнал. Такого роду системи також розглядаються в загальній теорії. Проте ми на цьому зупинятися не будемо.

Інший недолік введених понять відноситься до визначення поняття об'єкту стану системи. У ньому відсутня вимога, щоб стани системи, які відносяться до двох різних моментів часу були зв'язані між собою. Відмічений недолік визначення поняття стану слід усунути таким чином, щоб, наприклад, можна було б з'ясувати чи повернулася система в початковий стан через деякий відрізок часу або стан взагалі не змінювався.

Визначення 2.13. Множина S називається *простором станів системи* $S \subset X \times Y$, якщо існують два сімейства функцій

$$\bar{\rho} = \{\rho_t : C \times X \rightarrow Y_t\}, \quad \bar{\varphi} = \{\varphi_{u'} : C \times X_{u'} \rightarrow C\}$$

таких, що:

1) для всіх $t \in T$, $S_t \subset S_t^\rho$ і $S_t^\rho = \{(x, y) : (\exists c)(y = \rho_t(c, x))\} = S$;

2) для всіх t, t' і $t'' \in T$:

а) $\rho_t(c, x_t)|_{T_t} = \rho_{t'}(\varphi_{u'}(c, x_{u'}), x_{t'})$,

б) $\varphi_{u'}(c, x_{u'}) = \varphi_{t''}(c, x_{t''})$ —

в) $\varphi_{u'}(cx_{u'}) = c$ де $x_t = x_{u'} \cdot x_{t'}$, $x_{u'} = x_{t''} \cdot x_{t''} \cdot x_{t'}$.

Система S з таким простором станів називається *динамічною системою*.

Введені поняття і достатньо короткий їх аналіз можна розглядати як вступ до теорії абстрактних систем. Його корисно проаналізувати, щоб оцінити можливості цієї теорії в математичному моделюванні керованих систем. Глибше вивчення теорії систем дозволить переконатися в тому, що основні поняття

теорії керування (стійкість, керованість, оптимальність тощо) можна визначити в такій же загальній формі, як це зроблено вище щодо абстрактних систем і їх різних характеристик. Це відкриває можливості вивчати основні завдання теорії керування для систем більш загального вигляду ніж ті, які описуються диференціальними рівняннями.

2.3. Складні системи

2.3.1. Властивості і атрибути.

Якщо систему представити як складний об'єкт, то з філософської позиції можна стверджувати, що вона володіє *якістю*, тобто тим, що об'єктивно властиво тільки їй і що відрізняє її від всього іншого. Якість же відображається через сукупність *властивостей*. Оскільки властивості виражають відношення даного об'єкту до інших об'єктів, то звідси витікає відносний характер всякої властивості, всієї сукупності властивостей, у тому числі і властивостей системи, а отже, і її якості.

Атрибутами систем є елемент, відношення, зв'язок і мета.

Елемент є проста, неподільна частина системи. Тому елемент – це досягнута або допустима в тому або іншому конкретному випадку межа пізнання системи:

$$s = \lim_{S_M \rightarrow S} F(S),$$

де s – елемент системи; S – система; S_M – модель системи, задана (допустима) або досягнута в процесі пізнання $F(S)$.

Зв'язок є обмеження міри свободи елементів через їх взаємозалежність, що існує і/або виникає в системі як цілому. Характер зв'язків визначається відношенням

$$s_i \rho s_k \equiv l_{ik}, \quad (2.5)$$

де ρ – відношення, що характеризує зв'язок l_{ik} між елементами s_i і s_k ($i \neq k$).

Множина $\{s_i\}$ утворює *елементарний склад системи*, а спільно з множиною $\{l_{ik}\}$ – *сукупність елементів*. Сукупність визначається *метою* системи Z :

$$\{s_i\} \& \{l_{ik}\} \rightarrow Z \quad (2.6)$$

або

$$Z \rightarrow \{s_i\} \& \{l_{ik}\}. \quad (2.7)$$

Вираз (2.6) означає, що наявність певного складу елементів і зв'язків між ними обов'язково переслідує ту або іншу мету. Вираз (2.7) свідчить про те, що досягнення будь-якої мети можливе лише за наявності певного складу елементів і зв'язків між ними. Якщо вказані умови не виконуються, то сукупність, що приймається, не можна визначити як систему.

Мету часто називають *системостворюючим атрибутом* (чинником): «система є засіб досягнення мети». Беручи до уваги, що «засіб» складається з певної множини елементів і зв'язків між ними, можна зробити висновок про подвійну роль мети (у вказаному сенсі):

1) мета є підстава виділення (відособлення) елементів системи з універсальної множини елементів середовища;

2) мета є підстава об'єднання (синтезу) елементів системи:

$$\forall x \in X (P(x) | x \rightarrow Z) \rightarrow x \equiv s_i \in S),$$

де X – універсальна множина елементів x .

Структура є стійка сукупність (інваріант), що забезпечує збереження основних властивостей (якості) системи при різних зовнішніх і внутрішніх змінах (варіаціях). На елементарному рівні структуру можна виразити множиною відносин $\{s_i \bar{\rho} s_k\} \subset \{s_i \rho s_k\}$. З урахуванням (2.5) структуру іноді представляють як множину $\{\bar{l}_{ik}\} \subset \{l_{ik}\}$. Якщо розглядати середовище як атрибут системи, то логічно в загальному вигляді розглядати структуру системи як об'єднання множин $\{s_i \bar{\rho} s_k\}$ і $\{s_i \bar{\xi} s_k\}$, тобто

$$\hat{G} \equiv \{s_i \bar{\rho} s_k\} \cup \{s_i \bar{\xi} s_k\} \equiv \{\bar{l}_{ik}\} \cup \{\bar{l}_{ir}\}.$$

Традиційно структуру системи сприймають як $G \equiv \{s_i \bar{\rho} s_k\} \equiv \{\bar{l}_{ik}\}$ повністю відособляючи систему від середовища, приймаючи $card\{l_{ri}\} = \emptyset$.

Співвіднесенням по рівню і значущості структури атрибутом системи постає функція. *Функція* – є відношення двох або більше об'єктів, в якому зміна одного з них супроводжує зміна іншого.

Для функції можна виділити наступні її фундаментальні властивості.

а) *Функція відображає наслідки з'єднання частин в ціле, елементів – в систему, які виражаються через ефект.* Оскільки з'єднання певних елементів $\{s_i\}$ за допомогою певних зв'язків $\{l_{ik}\}$ здійснюється на підставі мети Z , то виходячи з (2.6) і (2.7) стає очевидною зіставність ефекту E і цілі Z , посередником між якими виступає функція F :

$$Z \rightarrow F \rightarrow E, \quad (2.8)$$

$$Z \equiv S, \quad (2.9)$$

де у (2.9) S розглядається як засіб реалізації F .

Якщо між елементами s_i відбувається взаємодія (функціонування) в рамках системи S , то виходом системи як віддзеркаленням наслідку цієї взаємодії (функції) виступає *результат* P (ще один атрибут системи). Тоді (2.8) і (2.9) можуть бути конкретизовані як $Z \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow E$ і $Z \equiv P$.

Даний аспект визначається як *принцип ефективізму* функції.

б) *Функція відображає основні властивості системи по відносинах між елементами, по сукупності властивостей елементів.*

Для розгляду цього складного аспекту функції скористаємося такою категорією, як *якість*.

Якість системи Q_s виражає об'єктивну тотожність стійкому взаємовідношенню її елементів, тобто $Q_s \equiv G \equiv \{s_i \rho s_k\}$, а з іншого боку, якість виражає функціональну єдність властивостей елементів, тобто $Q_s \equiv \cup q_v \equiv F$.

Зіставлення двох сторін, заснованих на визначенні якості системи, приводить до наступного формулювання $G \equiv \{s_i \rho s_k\} \equiv \cup q_v \equiv Q_s \equiv F$, яке встановлює відповідність функції і структури системи, а також пояснює причину багатому-

нкціональності систем (навіть при незмінній множині $\{s_i\}$ шляхом варіювання ρ можна добитися різного результату P і ефекту E).

в) *Функція є віддзеркалення системи в середовищі.* Будь-які зміни в середовищі, наприклад, зміна c_r при незмінності S можуть привести до зміни відносин ξ , а отже, до зміни функції F системи S і оцінки її якості Q_s . У цьому виявляється *принцип суб'єктивізму* функції системи. Згідно цьому принципу функцію системи оцінює середовище. Оцінка функції F , так само як і якості Q_s , здійснюється за допомогою ефекту E .

г) *Функція визначає властивість системи і середовища.* При злагоді системи S і середовища S_c утворюється симетрія (рівновага) відкритої системи, що характеризується взаємним, симетричним віддзеркаленням функції системи F в середовищі і функції середовища F_c у системі. В цьому випадку можна говорити про функціональну єдність системи S і її середовища, яке позначається наступними правилами:

- неможливо визначити функцію системи (систему) абстрактно, без певної функції середовища (середовища), і навпаки;

- неможливе функціонування системи у відриві від функціонування середовища, і навпаки.

д) *Функція є способом дії системи при взаємодії з середовищем.* Повною мірою даний аспект функції розкривається в доцільних функціонуючих системах, де система S займає активну позицію, направлену на досягнення максимального ефекту \hat{E}_{\max} . Дійсно, в цілеспрямованій функціональній системі дії виконує середовище, яке вибирає, приймає, включає тощо існуючу систему S по її функції F або якості Q для задоволення своїх потреб U_c .

2.3.2. Взаємообумовленість загальносистемних властивостей.

Для різних видів систем (статичних, динамічних, економічних, технічних тощо) можна виділити їх загальні властивості. До таких властивостей можна ві-

днести структурованість, цілеспрямованість, відособленість, цілісність і ієрархічність.

Властивість *структурованість* визначається самою етимологією (походженням слова) поняття «система». Структурованість визначається наявністю складу системи $\{s_i\}$ і множини відносин ρ або зв'язків l_{ik} між компонентами складу. Причому, для абстрактних систем склад системи об'єднується в сукупність лише множиною відносин $\{s_i \rho s_k\}$, а для матеріальних – обов'язкова наявність відповідних зв'язків $\{l_{ik}\}$.

Зв'язок структурованості з *цілеспрямованістю* як властивістю системи, що виражає значення атрибуту мети у формуванні системи.

Мету завжди передбачає потреба (або дефіцит ресурсу), задоволення якої можливо при досягненні бажаного (цільового) результату. У зв'язку з цим мета може бути суб'єктивною і об'єктивною, духовною і матеріальною, короткостроковою і довгостроковою, проміжною і кінцевою тощо. У будь-якому випадку із загальнотеоретичних позицій процес цілеположення пов'язаний з виживанням системи, з прагненням системи до самозбереження, а отже, зі структурою системи, її організацією.

Якщо цілеспрямованість гарантує живучість середовища (і не завжди самої системи, особливо функціональної), то живучість і середовища, і системи, а отже, всього матеріального світу забезпечує доцільність. Для доцільних систем, синтезуючу цілеспрямованість, представляє інтерес така властивість, як *відособленість*.

Основні правила відособленості систем (підсистем):

- рівноважний стан системи S , її злагода з середовищем;
- чим вище ступінь відособленості системи, тим більше вона схильна до деградації;
- чим нижче ступінь відособленості системи, тим більше вона схильна до реорганізації, до зміни своєї структури.

Наступна властивість – *цілісність*. Вона нерозривно пов'язана з такою властивістю, як структурованість, і фактично є похідною від цієї властивості. Не менш важлива роль в розумінні властивості цілісності відводиться якості як об'єктивній суті системи. В світлі цього під цілісністю розуміється така властивість системи, завдяки якій об'єднання її частин дозволяє отримати нову якість, похідну від якостей частин, але відмінну від них або окремо не властиву. Це нова якість виділяє, відособляє систему в навколишньому середовищі, робить її відмінною від інших систем або визначає схожість з ними.

Зміни функції системи в процесі розвитку вимагають нерозривності властивостей *ієрархічності* і цілісності з позиції того, що виникає. Наявність ієрархії є обов'язковою об'єктивною передумовою розвитку будь-яких систем.

Визначаючи систему ієрархічною, необхідно, як мінімум, представляти три її ієрархічних рівня:

- номінальний рівень ієрархії, тобто власне система;
- верхній рівень ієрархії, тобто надсистема або середовище;
- нижній рівень ієрархії, тобто підсистема.

Внаслідок того, що середовище складне, то воно як система також може бути представлене декількома ієрархічними рівнями.

З приведенного аналізу основних загальносистемних властивостей виходить, що всі вони взаємозв'язані і взаємообумовлені і що наявність всіх цих властивостей є обов'язковою при системному відображенні складних об'єктів, явищ, наочних областей. В сукупності вказаних властивостей особливе місце займає ієрархічність. Завдяки ієрархічному представленню складності можливо встановити порядок, що існує в реальних системах, а отже, розкрити їх зміст.

2.3.3. Закономірності ієрархічного порядку.

Грецьке слово *ієрархія* складається з двох слів: *ієроϛ* – «священний» і *арχη* – «влада», тобто вертикальну впорядкованість. З виникненням і розвитком теорії систем терміном «ієрархія» почали позначати «принцип структурної організації складних багаторівневих систем, що полягає у впорядкуванні взає-

модії між рівнями в порядку від вищого до нижчого». Таким чином, ієрархією встановлює пріоритет вищого над нижчим, цілого над частиною.

Характерно те, що в матеріальному світі властивість ієрархічності систем є об'єктивною і дуже важливою. Дослідження цієї об'єктивної властивості дозволило встановити безліч закономірностей функціонування матеріальних і енергетичних систем, їх розвитку, а в подальшому перенести ці правила в організаційну теорію і практику, в процес пізнання і вдосконалення реального світу.

У першочерговому і узагальненому плані в системному аналізі виступає декомпозиція проблеми. Цій процедурі передують процедура виявлення і відособлення проблеми, що має різні підходи і методи реалізації. Проте для успішного виконання цієї процедури необхідно в основі її змісту дотримуватись наступних системних принципів:

1) будь-яка проблема є наслідком виниклого або передбачуваного дефіциту ресурсу ΔR (або потреби U);

2) будь-яка проблема узгоджується з іншими існуючими або передбачуваними проблемами, тобто будь-яка конкретна проблема знаходиться в спектрі проблематики (системі проблем);

3) будь-яка проблема припускає визначення шляхів її рішення (мета Z), способу рішення (функція F) і засобу рішення (система S);

4) будь-яка проблема має свою якість, відбивану кінцем кінцем суб'єктивно встановленими ознаками і/або параметрами;

5) будь-яка проблема в своєму рішенні припускає наявність відповідного ресурсу;

6) будь-яка проблема має часові координати («проблемна ситуація»).

2.3.4. Синергетичні особливості складних систем.

Синергетика як науковий напрям зародився в другій половині ХХ століття, коли в світ вийшли дві основоположні роботи: Г. Николіса, І. Прігожіна, Р. Хакена. Об'єктивна необхідність появи і подальшого розвитку цього напрямку обумовлена істотною роллю колективних, кооперативних ефектів, що виника-

ють у відкритих системах в процесах самоорганізації. При формуванні фундаментальних понять і теоретичних методів синергетики аналізувались і узагальнювались результати досліджень такого роду ефектів в області хімії, біології, фізики, термодинаміки, гідравліки тощо.

Визначаючи взаємозв'язок синергетики з іншими науками, Г. Хакен звертає увагу на ті додаткові аспекти, які привносить синергетика в різні області знань: «...і кібернетика, і синергетика надають першорядне значення поняттю керування, але при цьому переслідують абсолютно різні цілі. Кібернетика займається розробкою алгоритмів і методів, що дозволяють керувати системою для того, щоб та функціонувала заздалегідь заданим чином. У синергетиці ми змінюємо керуючі параметри більш менш непередбачуваним чином і вивчаємо самоорганізацію системи, тобто різні стани, в які вона переходить під впливом «важелів керування...».

Що ж до системного аналізу, то тут синергетика йде неходженим шляхом: звертая увагу на ситуації, в яких макроскопічна поведінка систем зазнає якісні зміни, вона дозволяє висловити загальні твердження, що відносяться до широких класів систем.

Стан системи S можна визначити її якістю в даний момент часу $t_i \in T$. При цьому виникає проблема вибору показників якості системи Q_s , оскільки вона визначається єдністю нескінченної кількості властивостей.

У сучасній фізиці замість ньютонівського опису використовується гамільтонівський, де в загальному випадку стан динамічної системи задається координатами r_1, \dots, r_i, \dots і імпульсами p_1, \dots, p_i, \dots , визначуваними як незалежні змінні. Центральною величиною всієї гамільтонової динаміки є функція Гамільтона або гамільтоніан H :

$$H = V(r_1, \dots, r_i, \dots) + W(p_1, \dots, p_i, \dots),$$

де V – потенційна енергія, залежна тільки від координат; W – кінетична енергія, залежна тільки від імпульсів. Гамільтоніан виражає енергію системи в канонічних змінних r і p . В консервативних системах H приймається не залежним від

часу. Кожен стан динамічної системи може бути представлений точкою у *фазовому просторі*. Для динамічної (механічної) системи, що складається з N елементів, фазовий простір є $6N$ -мірний ($3N$ координат і $3N$ імпульсів).

Із загальносистемних позицій таке твердження свідчить про те, що для відображення станів динамічної системи некоректно визначати якість Q_s через індивідуальні якості елементів: необхідно враховувати властивості, що відображають їх взаємодію:

$$F \equiv Q_s(t) \equiv \cup q_v(t) \equiv \{s_i \rho s_i\}_t \& \{s_i \tilde{\rho} s_i\}_t.$$

Даний вираз показує функцію F як зміну якості в часі, що відбувається в результаті зміни індивідуальних властивостей елементів системи і похідних від них взаємозв'язків (структури системи G).

Проблема неінтегрованості почала розглядатися як новий відправний пункт подальшого розвитку динаміки у зв'язку з появою теорії КАМ (Колмогорова-Арнольда-Мозера), яка дозволила розкрити природу впливу резонансів на траєкторії. Найбільш важливим результатом теорії КАМ можна назвати встановлення джерела і механізму появи (разом з періодичними (квазіперіодичними), тобто впорядкованими) стохастичних траєкторій. Джерелом стохастизма є взаємозв'язок елементів (параметр зв'язку β). При малих значеннях β наголошується проміжний режим, в якому співіснують траєкторії двох типів: регулярні і стохастичні. При збільшенні β (наприклад, шляхом збільшення значення енергії) у фазовому просторі розширюються області, в яких переважає стохастичність. При деякому критичному значенні β виникає *хаос*, відповідний експоненціальному розгону з часом будь-яких двох близьких траєкторій. У разі повністю розвиненого хаосу хмара точок, породжена траєкторією, приводить до дифузії (дисипації), що обумовлює безповоротність процесу і збільшення ентропії (породження ентропії). У свою чергу, необоротні процеси описують фундаментальні особливості природи, що приводять до появи нерівноважних дисипативних структур, а отже, нових функцій, нових систем (підсистем), нового життя, нової інформації. Граничний випадок, коли залишається лише один тип траєк-

торії – стохастичний, відповідає так званим великим системам Пуанкаре, які моделюють більшість ситуацій, що відбуваються в реальній дійсності.

Динамічні системи підрозділяються на стійкі і нестійкі. Для стійких систем слабкі збурення надають малу дію, що не визначає хід руху. У нестійких динамічних системах (а їх переважна більшість) слабкі збурення посилюються.

У рівноважному або слабо рівноважному стані існує тільки один стаціонарний стан A , залежний від знань керуючих параметрів. Ці керуючі параметри формуються зв'язками l_{rk} , тобто зв'язками системи з середовищем. Позначимо якийсь аддитивний керуючий параметр через γ . При збільшенні γ система віддаляється від рівноваги. Досягши деякого значення γ_1 система досягає порогу стійкості. Це критичне значення є точка біфуркації (рис. 2.1), в якій система стає нестійкою відносно флуктуації.

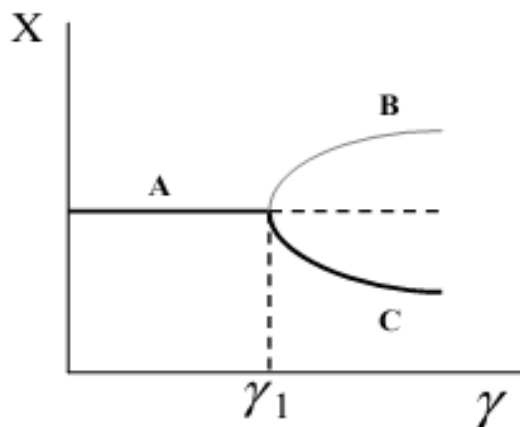


Рис. 2.1. Траєкторія еволюції в нерівноважному стані

У точці біфуркації з'являються два стійкі рішення: B і C . У системи є *вибір*: вона може віддати перевагу одній з двох можливостей, відповідних двом нерівномірним розподілам x . У кожного з них існує свій атрактор (у загальному випадку таких можливостей може бути декілька, тобто може бути декілька атракторів). Таким чином здійснюється самоорганізація (самореорганізація) системи, при якій відбувається зміна G і, відповідно, F . Вибір одного з можливих станів (B або C) відбувається випадково, оскільки він ініціюється випадковою флуктуацією.

У зв'язку з цим фактично неможливо визначити і значення γ_1 , і момент настання біфуркації, і вибір можливого стану системи, тобто неможливо дати макроскопічний опис даного процесу, процесу самоорганізації. Можна лише відзначити, що момент настання біфуркації залежить від початкових умов, а на вірогідність вибору одного із станів (B або C) робить вплив поле, в якому знаходиться система.

Механізм поведінки системи, що знаходиться в нерівноважному стані, можна розглядати на мікроскопічному рівні.

У рівноважному хаосі всі характерні просторові і часові масштаби мають мікроскопічний характер. У рівноважному стані частинки (елементи s_i) поведуться незалежно: кожна з них ігнорує останні. Такі незалежні частинки І. Прігожін назвав гіпнонами або сомнамбулами. Кожна з них може бути скільки завгодно складною, але при цьому не помічати присутності останніх.

У рівноважних умовах закони флуктуацій і кореляцій носять універсальний характер (розподіл Пуассона, закон великих чисел). Під час переходу межі, що відокремлює рівноважну область від нерівноважної, вони втрачають універсальність і знаходять сильну залежність від типу нелінійності системи.

У точці переходу від рівноважного стану до нерівноважного з'являються далекодіючі кореляції, амплітуди яких у міру віддалення від рівноваги наростають і в точках біфуркацій можуть обернутися в нескінченність. Частинки, що знаходяться на макроскопічній відстані одна від одної, перестають бути незалежними. Будь-яка локальна подія розповсюджується по всій системі. Амплітуди флуктуацій набувають такого ж порядку величини, як і середнього макроскопічного значення.

Довжина і амплітуда кореляції описують, яким чином деяка локальна подія впливає на інші частини системи, і тим самим дозволяють встановити взаємозв'язок між спостережуваним порядком і когерентною поведінкою на рівні популяції. Фактично дальнодіючі кореляції організують систему, і цей процес починається до того, як проходить макроскопічна біфуркація. Нерівноважний хаос, що характеризується дальнодіючими флуктуаціями і кореляціями,

приводить кінець кінцем систему до нового порядку, визначуваного дисипативною структурою. При подальшому збільшенні γ може виникнути каскад біфуркацій (рис. 2.2).

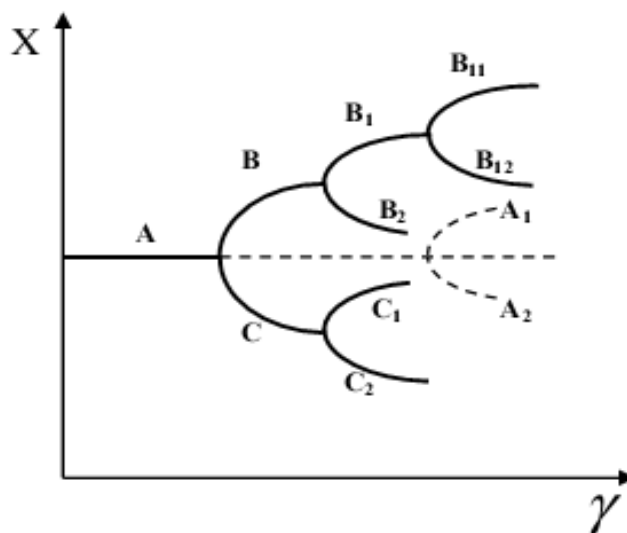


Рис. 2.2. Послідовні біфуркації при віддаленні від рівноважного стану

Отже, нерівноважність є те, що породжує порядок з хаосу. У цьому стані система володіє безповоротністю, непередбачуваністю (невизначеністю, випадковістю), нелінійністю, нестійкістю. Завдяки сукупності цих взаємозв'язаних «не-» відбувається народження нової якості. Безповоротність, що характеризується порушенням симетрії, викликаною дисипацією, породжує рівноважний (молекулярний) тепловий хаос. Існуючі флуктуації (зовнішні і внутрішні) за певних (нерівноважних) граничних умов породжують кореляції, які завдяки нелінійності, обумовленою автокаталітичним процесом, збільшують свої масштаби до макроскопічних розмірів. Виникає нерівноважний (турбулентний) хаос. Внутрішня випадковість приводить до нестійкості. Проте при досягненні граничними умовами (керуючого параметру γ) деякого значення ($\gamma = \gamma_1$) виникає момент біфуркації, при якому «нова» система в результаті випадкового вибору знов приходять в стійкий стан, визначений іншим атрактором.

Чому в точці біфуркації відбувається перехід з нестійкого в стійкий стан?

Стійкість по Ляпунову – внутрішня властивість системи, не залежна від зовнішніх умов. Таке визначення не відповідає вищенаведеному факту, констатуючому можливість присутності в одній системі стійких і нестійких станів, що настають в результаті взаємодії ентропійних і неентропійних процесів.

З урахуванням відособленості система S має три канали взаємодії з середовищем S_c : ресурсний, продуктивний і цільовий. Ресурсний і цільовий канали утворюють пряму лінію зв'язку системи S з середовищем S_c , а продуктивний канал – зворотну лінію зв'язку. В рамках єдиної (прямої) лінії ресурсний і цільовий канали в доцільній системі повинні дотримувати синхронність. Ресурсний канал забезпечує виникнення сил X_k або градієнтів Δcr . Цільовий канал забезпечує цілеспрямовану організацію системи S , тобто такий взаємозв'язок елементів s_i між собою і з елементами середовища c_r , при якому відбудеться відповідний розподіл потоків V . Тобто завдання цільового каналу полягає в тому, щоб забезпечити таку організацію системи S , при якій був би досягнутий результат P , що найповніше задовольняє потребу середовища. Іншими словами, пропозиція і попит повинні бути в згоді. Це згода, а отже, і організація системи оцінюється не тільки ефектом E , але й ефективністю E . Тут стає очевидною роль зворотної лінії зв'язку, тобто продуктивного каналу, який є матеріальним, таким, що включає речовинну, енергетичну і інформаційну складові. В принципі, цей канал аналогічно прямій лінії зв'язку можна розділити на ресурсний і цільовий: так або інакше будь-який продукт P містить інформацію, яка передається в середу. Оскільки середовище має ідентичні відношення не тільки з даною системою, то в ній відбувається накопичення нової інформації (нової проведеної якості), за рахунок чого відбувається її реорганізація. Накопичення нової інформації у середовищі S_c відбувається за рахунок її генерації в інших системах, з якими зв'язано середовище і від яких вона поступає у вигляді P по аналогічних зворотних лініях зв'язку. Накопичення нової інформації в середовищі (або в системі) є не що інше, як її реорганізація, що приводить до зміни її структури і, отже, функції. При розгляді середовища як атрибуту системи мож-

на укласти, що будь-яка зміна середовища, наприклад, поява нових елементів s_r , викликає необхідність виникнення нових зв'язків l_{ir} і, послідовно слідуючи принципам суб'єктивізму, структуралізму і об'єктивізму функції, неминуче приводить до зміни структурних відносин x , зв'язків l_{ir} і, як наслідок, перетворенню структури G системи S . Об'єктивізм функції, що характеризується доцільністю, досягається за допомогою реструктуризації S , тобто такої зміни взаємодії елементів s_i , яке дозволяє провести новий продукт P , що задовольняє нові потреби нового середовища S_c . Тут виявляється принцип ефективізму функції системи. Якщо додати, що вказані перетворення відбуваються в динамічному режимі, тобто при виконанні принципу динамізму функції, то можна відзначити, що саме в процесі розвитку системи виявляється багатоаспектний характер функції, виражається єдність позначених функціональних принципів.

Представлення середовища як атрибуту системи, що об'єднує різні аспекти функції, дозволяє однозначно виразити її (середовища) зміст. Все залежить від того, як відособити систему (або її елементи підсистеми), тобто визначити те, з чим вона знаходиться в доцільній взаємодії. Як правило, відособлення здійснюється як виділення частини з цілого, чим і обумовлюється ієрархічність системи. На реальному світі взаємодія може мати як пріоритетний, так і паритетний характер. Паритетність S і S_c порушується тільки за рахунок великих розмірів (масштабів) середовища, її більшої складності, тобто ієрархічності. При взаємодії (зіткненні) S і S_c кореляції утворюються лише при виникненні між ними відносин доцільності, які П. Анохин охарактеризував як злагоду. На макроскопічному рівні ці відносини виникають при одночасній нагоді і потребі реалізації ланцюжків:

$$P(R) \rightarrow U_s(\Delta R_s) \rightarrow F_c \rightarrow P_c; \quad (2.10a)$$

$$P_c(R_c) \rightarrow U(\Delta R) \rightarrow F \rightarrow P. \quad (2.10б)$$

Можна стверджувати, що аналогічним чином здійснюється виникнення кореляцій на мікроскопічному рівні. У складних системах елементи володіють різними якостями; їх різноманітність полягає не тільки у імовірності їх проявів,

але і у неоднорідності їх властивостей, показників, які їх оцінюють. У зв'язку з цим оцінка кореляцій на відміну від механістичної концепції не може в системному плані виходити тільки з ймовірнісного розподілу в ансамблі. Природно-научна концепція організаційних процесів, що відбуваються в складних системах, може бути представлена із загальносистемних позицій з урахуванням доцільних відносин, що виникають на різних ієрархічних рівнях.

Для розгляду суті кореляцій і зіткнень на мікроскопічному рівні допустимо, що потужність множини елементів системи S і потужність множини елементів середовища S_c рівні 1:

$$\text{card}\{s_i\} = 1 \rightarrow S \equiv s_i;$$

$$\text{card}\{c_r\} = 1 \rightarrow S_c \equiv c_r \equiv s_k.$$

В цьому випадку встановлюється паритет між двома елементарними системами s_i і s_k , який обумовлює взаємну активність їх функцій f_i і f_k . За наявності взаємної потреби активність s_i і s_k набуває доцільного, корельованого, коаліційного характеру. При цьому міри свободи елементів s_i і s_k зменшуються за рахунок утворення зв'язків l_{ik} і l_{ki} (рис. 2.3,а). Кожен з елементів s_i і s_k , у свою чергу, також може увійти до доцільних відносин з іншим елементом (або елементами) і т.д.

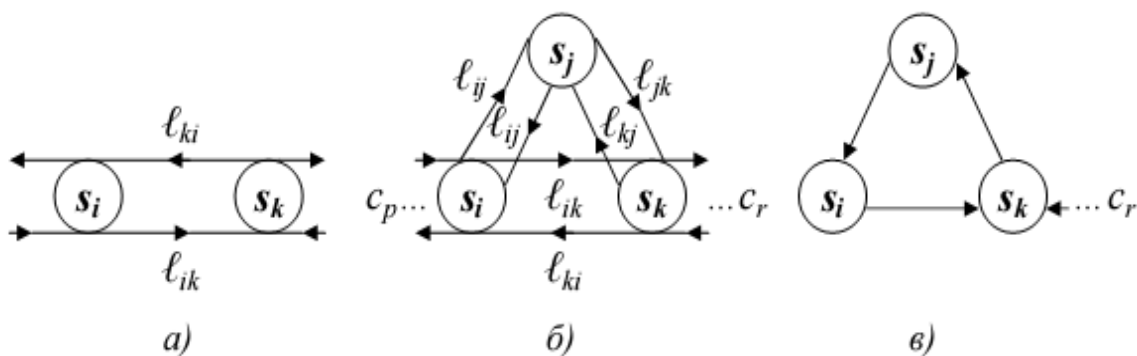


Рис. 2.3. Організація доцільних відносин між елементами

Так утворюються далекодіючі кореляції (доцільні відносини), які формують нову структуру G , а отже, нову функцію F . Початковою умовою утворення

нових (доцільних) зв'язків є факт зв'язку елементів системи s_i з елементами середовища, що знов з'явилися c_r , які роблять вплив на поведінку (або якість) елементів системи s_i через зв'язки, що знов утворилися l_{ri} . Більш того, нові c_r можуть увійти до складу системи S і утворити зв'язки. Причиною такої трансформації служить поява проблеми (W_c і/або W_s), яка виникає у зв'язку із зміною умов функціонування F_c і F або, в загальному випадку, з порушенням функціональної рівноваги $F_c \Leftrightarrow F$, що приводить до відхилення системи від рівноважного стану.

У разі виникнення доцільних відносин між елементами s_i (появи множини пар $\{s_i, s_k\}$ з $\varepsilon_2 > 0$) в умовах динамічного хаосу система S по досягненню $\gamma = \gamma_1$, тобто при значній різниці α_r, α_z і α_p , викликаній появою проблеми, піде по дорозі B ($B_1, B_{11} \dots$) (рис. 2.1, 2.2). За відсутності доцільності ($\varepsilon_2 = 0$) запанує ентропійний процес – система піде по дорозі C , що приведе до деградації, зникнення системи.

З позиції доцільності (2.3,а), (2.3,б) кореляція між елементами (а фактично між окремими, відособленими системами) виникає за умови, по-перше, наявності взаємної споживи і, по-друге, наявності здібностей задовольнити ці споживи. Якщо при зіткненні (взаємодії) ступінь відособленості α (у зв'язку елементів) залишається рівною 1, то кореляції не виникає. Якщо α стає менше 1, то це означає виникнення кореляції або початок взаємодії. У цьому випадку дії (наприклад, рух) цих елементів (систем) набувають когерентності, або іншими словами їх цілі набувають спільності. При цьому міри свободи елементів зменшуються. З позиції динаміки в інтегрованій системі кожен елемент діє (рухається) згідно своєї мети (напрям руху). Після зіткнення (миттєвої взаємодії) мети дій (траєкторії руху) зміняться, але залишаться незалежними один від одного. Між елементами (або системами), що зіткнулися, не виникне зв'язок, що обумовлює їх подальшу взаємодію. По відношенню один до одного вони залишаться гіпнонами. У неінтегрованій системі при раптовому зіткненні додатково може виникнути зв'язок, який змінить не тільки траєкторію руху елементів

(або систем), не тільки на деякий, достатньо тривалий час встановить залежність між діями елементів (систем), що зіткнулися, але і змінить якість (структуру, функцію) цих елементів (систем). Останні дві обставини визначають суть кореляції, її відмінність від простого зіткнення, створення передумови когерентної поведінки окремих елементів. Виникає питання: як впливати на кореляції, щоб керувати такими наслідками зіткнень? (Це питання є одним з ключових в теорії організації.) Виходячи з принципу доцільності, відповідь на це питання здається очевидною: треба керувати потребами. Проте в природних системах виникнення потреб в загальному випадку є латентний процес. Латентний характер U не дозволяє виявити потребу: вона може бути виявлена і рецептирована тільки як проблема W , природа якої має інформаційний характер. Таким чином, виникнення доцільних відносин відбувається, коли S (або s) може сприйняти проблему із зовнішнього по відношенню S (або s) середовища завдяки наявності зв'язків l_{ir} (або l_{ik}).

Згідно теорії самоорганізації матерії, розробленої М. Ейгеном, для виникнення процесу самоорганізації необхідні інструктивні властивості системи на мікрорівні, тобто отримання елементами такої інструкуючої інформації, яка кодує функції, або інакше, реорганізує S (або s), змінюючи її якість. У цьому полягає семантичний і прагматичний сенс інформації, визначуваної з позиції синергетичного підходу як випадковий вибір одного варіанту з декількох можливих і рівноправних. Саме таке визначення було вперше дане Г. Кастлером при встановленні значення інформації у процесі виникнення біологічної організації. Реорганізація, зміна якості S (або s) під інформаційною дією середовища (проблеми W) позначає реальність відношення (реляції) S (або s) до середовища. Тут слід охарактеризувати факт появи W_c , відзначивши, що причиною є зміна організації, якості S_c і що ця причина також має інформаційне коріння. Поява проблем, а отже, градієнтів свідчить про накопичення інформації у середовищі.

Приведений аналіз представлення відкритої системи є лише вибіркою із загального сучасного погляду на тотожність понять «інформація» і «організа-

ція», на те, що неможливо представити суть організації без інформаційних процесів, так само як і процес формування (генерації) інформації без основних організаційних принципів, алгоритмів.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення поняття «системний аналіз».
2. Які основні задачі системного аналізу?
3. Які процедури містить системний аналіз і яка його мета?
4. Дайте аналітичне визначення системи.
5. У чому суть часових систем?
6. У чому суть динамічних систем?
7. Якими властивостями володіють складні системи?
8. У чому полягає взаємообумовленість загальносистемних властивостей?
9. Які закономірності ієрархічного порядку?
10. У чому полягають синергетичні особливості складних систем?

ЧАСТИНА II.

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ. ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ

Глава 3. СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

3.1. Основні визначення

Керування об'єктом за допомогою технічних засобів без участі людини називається *автоматичним керуванням*. Теорія автоматичного керування вивчає процеси керування і проектування систем керування. Сукупність об'єкту керування і засобів автоматичного керування називається *системою автоматичного керування* (САК). Основним завданням автоматичного керування є підтримка певного закону зміни однієї або декількох фізичних величин в об'єкті керування.

Основні завдання теорії автоматичного керування:

- аналіз стійкості, структурних властивостей, динамічних показників якості і точності САК;
- синтез алгоритмів (аналітичних виразів), які описують блоки САК і їх зв'язки, і що забезпечують задану якість керування;
- моделювання САК з використанням комп'ютерів і універсальних або спеціалізованих прикладних програм;
- проектування САК з використанням апаратних засобів обчислювальної техніки і їх програмного забезпечення (операційних систем реального часу, засобів автоматизації програмування тощо).

Відзначимо, що проектування, впровадження і експлуатація сучасних САК має на увазі тісну взаємодію фахівців різних профілів, і, в першу чергу, технологів, що знають «фізичні» особливості керованих процесів і технічні вимоги до проектованої САК; фахівців з автоматичного керування, що забезпечують розробку САК (алгоритмів керування і контролю); фахівців з обчислювальної техніки для розробки математичного забезпечення для проектування САК, засобів автоматизації програмування, організації обчислень в реальному масштабі часу і комплектації технічних засобів.

3.1.1. Система керування.

Система керування складається з двох основних частин (рис. 3.1): об'єкту керування (ОК) і пристрою керування (ПК), який називають також регулятором (Р). Регулятор на підставі одного або декількох задаючих дій $Y(t)$, що визначають закон (алгоритм) керування, виробляє керуючу дію $G(t)$ на ОК і підтримує на заданому рівні або змінює по певному закону стан $Y(t)$, який може відобразитися на його виході відповідним сигналом $u(t)$. Перед регулятором ставиться завдання забезпечення заданої якості роботи системи у всіх практично важливих режимах, зокрема при дії на об'єкт зовнішніх збурюючих дій і дестабілізуючих чинників $X(t)$. Регулятор створюється розробником системи, виходячи із знань про властивості об'єкту керування і необхідні завдання системи.

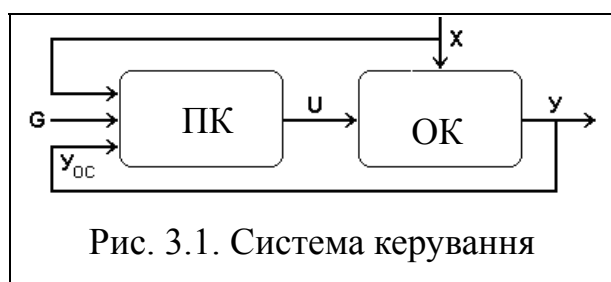


Рис. 3.1. Система керування

Зовнішні зв'язки об'єкту керування показані на рис. 3.1, де X – канал дії середовища на об'єкт і керуючий пристрій, Y – канал дії об'єкту на середовище або інформаційний канал стану об'єкту, U –

канал дії керування на об'єкт, G – задаюча дія, Y_{oc} – сигнал зворотного зв'язку.

Основним завданням керування є підтримка певного закону зміни однієї або декількох фізичних величин процесів, що протікають в ОК. Ці величини називаються керованими (температура, тиск, рівень рідини, напрям переміщення інструменту тощо).

У складі ОК завжди міститься керуючий орган об'єкту, за допомогою якого можна змінювати параметри стану ОК (реостат, вентиль, заслінка тощо). Фізичну величину $U(t)$ на вході керуючого органу називають вхідною величиною ОК або керуючою дією.

До складу ОК зазвичай входить також чутливий елемент (ЧЕ), який перетворить керовану величину в пропорційну їй величину, зручну для використання в системі керування. Фізичну величину $Y(t)$ на виході ЧЕ називають вихідною величиною ОК. Як правило, це електричний сигнал (струм, напруга) або механічне переміщення. Як ЧЕ можуть використовуватися термомпари, тахометри, важелі, датчики тиску, положення тощо.

Дія керування $U(t)$ формується пристроєм керування ПК і є дією, що прикладається до керуючого органу об'єкту з метою підтримки необхідних значень керованої величини. Вона створюється виконавським елементом ПК, в якості якого можуть використовуватися двигуни, мембрани, електромагніти тощо.

У складі системи керування, як правило, є також задаючий блок (ЗБ). Він задає програму зміни керуючої дії, тобто формує задаючий сигнал $U(t)$. ЗБ може бути виконаний у вигляді окремого пристрою з формуванням дії (сигналу) $G(t)$ на вхід ПК, може бути вбудованим в ПК або взагалі бути відсутнім. Як ЗБ може виступати кулачковий механізм, маятник в годиннику тощо.

Величина $X(t)$, що впливає на ОК і (при необхідності) на ПК, називається збуренням. Вона відображає вплив на вихідну величину $Y(t)$ змін навколишнього середовища, навантаження тощо.

У загальному випадку всі зв'язки в системі керування можуть бути багатоканальними (багатовимірними), а самими діями є інформаційні сигнали на матеріальних носіях будь-якої фізичної природи (електричні, магнітні, механічні, оптичні тощо).

3.1.2. Принципи керування.

Розрізняють три фундаментальні принципи керування станом ОК: принцип розімкненого керування, принцип компенсації, принцип зворотного зв'язку.

Принцип розімкненого керування полягає в тому, що програма керування жорстко задана ЗБ і керування не враховує вплив збурень на параметри процесу. Прикладами систем, що працюють за принципом розімкненого керування, є годинник, плейєр тощо.

Принцип компенсації застосовується для нейтралізації відомих збурюючих дій, якщо вони можуть спотворювати стан ОК до неприпустимих меж. При ап'ріорі відомому зв'язку стану об'єкту зі збурюючою дією значення сигналу $U(t)$ коректуються обернено пропорційно до збурюючої дії $X(t)$. Приклади систем компенсації: біметалічний маятник в годиннику, компенсаційна обмотка маши-

ни постійного струму тощо. Перевага принципу компенсації – швидкість реакції на збурення. Недолік – неможливість урахування всіх можливих збурень.

Принцип зворотного зв'язку набув найбільшого поширення в технічних системах керування, керуюча дія при цьому корегується залежно від вихідної величини $Y(t)$. Якщо значення $Y(t)$ відхиляється від потрібного, то відбувається корегування сигналу $U(t)$ з метою зменшення даного відхилення. Зв'язок виходу ОК з входом ПК виконує оперативну корекцію сигналу $U(t)$, називається головним зворотним зв'язком (ЗЗ).

Недоліком принципу ЗЗ є інерційність системи. Тому часто застосовують комбінацію даного принципу з принципом компенсації, що дозволяє об'єднати переваги обох принципів – швидкість реакції на збурення принципу компенсації і точність регулювання незалежно від природи збурень принципу ЗЗ.

3.1.3. Види систем керування.

Залежно від принципу і закону функціонування ПК розрізняють основні види систем: системи стабілізації, програмні, стежачі і самоналагоджувальні системи, серед яких можна виділити екстремальні, оптимальні і адаптивні системи.

Системи стабілізації забезпечують незмінне значення керованої величини при всіх видах збурень, тобто $y(t)=const$. ЗБ формує еталонний сигнал, з яким порівнюється вихідна величина. ЗБ, як правило, допускає настройку еталонного сигналу, що дозволяє міняти за бажанням значення вихідної величини.

Програмні системи забезпечують зміну керованої величини відповідно до програми, що задається на вході ПК або формованою ЗБ. До цього виду систем можна віднести плеєри, програмні верстати тощо. Розрізняють системи з часовою програмою, що забезпечують $y=f(t)$, і системи з просторовою програмою, в яких $y=f(x)$ і які вживані там, де на виході систем важливо отримати необхідну траєкторію в просторі, наприклад, в автоматі свердлення отворів в платах.

Стежачі системи відрізняються від програмних лише тим, що програма $y=f(t)$ або $y=f(x)$ заздалегідь невідома. Як ЗБ виступає пристрій, що стежить за

змінною будь-якого зовнішнього параметра. Ці зміни і визначатимуть зміни вихідної величини $y(t)$.

Все три розглянуті види систем можуть бути побудовані по будь-якому з трьох принципів керування (розімкненого керування, компенсації, ЗЗ). Для них характерна вимога збігу вихідної величини (стану системи) з деяким заданим значенням, яке у будь-який момент часу визначено однозначно.

Самоналагоджувальні системи відрізняються активним ЗБ, таким, що визначає таке значення керованої величини, яке в якомусь сенсі є оптимальним.

Так, в *екстремальних системах* потрібно, щоб вихідна величина завжди приймала екстремальне значення зі всіх можливих, які заздалегідь не визначене і може змінюватися. Для їх пошуку система виконує невеликі пробні рухи і аналізує реакцію вихідної величини на ці проби, після чого виробляється керуюча дія, що наближає вихідну величину до екстремального значення. Процес йде неперервно і виконується тільки з використанням ЗЗ.

Оптимальні системи є складнішим варіантом екстремальних систем. Тут відбувається, як правило, складна обробка інформації про характер зміни вихідних величин і збурень, про характер впливу керуючих дій на вихідні величини, може бути задіяна теоретична інформація, інформація евристичного характеру тощо. Тому основною відмінністю екстремальних систем є наявність обчислювальних пристроїв. Ці системи можуть працювати відповідно до будь-якого з трьох фундаментальних принципів керування.

У *адаптивних системах* передбачена можливість автоматичного перенастроювання параметрів або зміни структури систем з метою пристосування до зовнішніх умов, що змінюються. Відповідно до цього розрізняють самоналагоджувальні та самоорганізуючі адаптивні системи.

3.1.4. Регулятори і задаючі блоки.

До складу ПК системи, призначеної для вирішення локальних завдань, входять ЗБ і регулятор вихідних змінних (рис. 3.2).

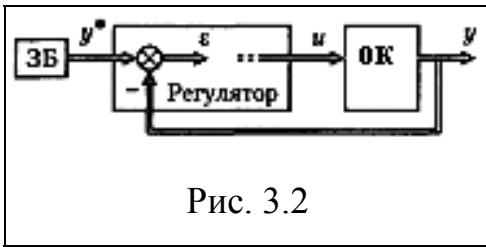


Рис. 3.2

У сучасних системах блоку не обов'язково відповідає фізичний пристрій. Це може бути і алгоритм або програма розрахунків необхідних змінних (сигналів).

Регулятором називається блок (алгоритм), що розраховує керуючу дію $u(t)$ з метою рішення задачі керування. Регулятори в системах автоматизації служать для забезпечення певної якості стабілізації технологічних параметрів на заданому рівні.

Алгоритмом керування називається набір аналітичних виразів, використуваних для розрахунку керуючих дій або система операцій, що виконуються по певних правилах. Типовий алгоритм керування, це математична залежність між вихідною регулюючою дією $u(t)$ і вхідним відхиленням ε регульованої величини y від заданого значення y^* . Вхідною величиною для регулятора є сигнал ε , а вихідний – регулююча дія u :

$$u(t) = F(\varepsilon(t), y^*(t) \dots).$$

Як оператор $F(\bullet)$ можуть виступати функції алгебри, трансцендентні і інтегро-диференціальні оператори, оператори Лапласа, булеві функції тощо.

Простими алгоритмами керування (регуляторами) є регулятори відхилення вигляду: $u(t) = U(-t)$. У практиці прийнято розглядати три типові закони регулювання: пропорційний П, інтегруючий І, диференціюючий Д. На базі цих законів в регуляторах реалізують складніші алгоритми, що є комбінацією основних: пропорційно-інтегральний ПІ, пропорційно-диференціальний ПД, пропорційно-інтегрально-диференціальний ПІД.

Рівняння типових регуляторів:

- П – пропорційний (статичний):

$$u(t) = k_n \varepsilon(t), \quad W(p) = k_n;$$

- І – інтегральний (астатичний):

$$u(t) = k_n \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau, \quad W(p) = k_n / T_n p;$$

- ПІ – пропорційно-інтегральний (ізодромний):

$$u(t) = k_p \varepsilon(t) + (k_i/T_i) \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau, \quad W(p) = k_p + k_i/(T_i p);$$

- ПД – пропорційно-диференціальний:

$$u(t) = k_p \varepsilon(t) + k_d T_d d\varepsilon(t)/dt, \quad W(p) = k_p + k_d T_d p;$$

- ПІД - пропорційно-інтегрально-диференціальний:

$$u(t) = k_p \varepsilon(t) + k_d T_d d\varepsilon(t)/dt + (k_i/T_i) \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau, \quad W(p) = k_p + k_d T_d p + k_i/(T_i p),$$

де k_p , k_d , k_i – постійні коефіцієнти.

Задаючим блоком ЗБ називається блок (алгоритм), що здійснює розрахунок задаючої дії $y^*(t)$. До простих ЗБ можна віднести задаючі рукоятки, реостати, пульти, що генерують сигнали для завдань стабілізації, де $y^* = \text{const}$. У досконаліших системах це апаратні або програмно реалізовані генератори задаючих сигналів.

3.1.5. Спеціальні блоки систем керування.

Допоміжні завдання визначення (ідентифікації) невимірюваних змінних і невідомих параметрів виникають як в САК, так і в системах автоматичного контролю. Це завдання:

- спостереження, оцінювання невимірюваних змінних стану об'єкту в умовах дії шумів (фільтрація, згладжування, прогноз);
- ідентифікації параметрів, оцінювання невідомих параметрів системи.

Для вирішення перерахованих завдань використовуються спостерігачі і ідентифікатори.

Спостерігачем називається блок (алгоритм), призначений для оцінювання змінних стану ОК або зовнішнього середовища. Структура спостерігача включає модель ОК, яка виробляє поточні значення оцінки $y^*(t)$ вихідної змінної $y(t)$ і оцінки $x^*(t)$ вектора стану $x(t)$. Поведінка моделі корегується за рахунок ЗЗ помилки спостереження (нев'язності)

$$\tilde{y}(t) = y^*(t) - y(t).$$

Спостерігачі застосовуються також в системах керування станом, в яких не всі змінні стани $x(t)$ можуть бути зміряні або результати вимірювання містять значні завади.

Математична модель (рівняння) ОК може містити коефіцієнти θ_j – масо-інерційні, електричні, термодинамічні тощо, параметри керованого процесу та інших використовуваних в САК пристроїв. У тих випадках, коли значення параметрів змінюються в часі або заздалегідь невідомі, з'являється необхідність у використанні ідентифікаторів параметрів.

Ідентифікатором називається блок (алгоритм) вигляду $\theta(t) = \Theta(x(t), u(t), \dots)$, де $\Theta(\ast)$ – динамічний оператор, призначений для оцінювання параметрів ОК за наявною інформацією про поточний стан $x(t)$ і вхідні дії $u(t)$ об'єкту, тобто для розрахунку в реальному часі значень $\theta(t)$. Ідентифікатори застосовуються в адаптивних системах керування, в яких параметри регулятора не встановлюються заздалегідь, а настроюються в процесі роботи. У таких системах часто використовуються адаптивні алгоритми керування виду $u(t) = U(\varepsilon(t), x^*(t), \theta(t), \dots)$, а вектор оцінки $\theta(t)$ може бути отриманий за допомогою алгоритму ідентифікації.

3.2. Математичні моделі систем керування

3.2.1. Статичні характеристики систем керування.

Математичні моделі систем керування включають два види опису стану: статичний і динамічний.

Режим роботи систем, в якому керована і всі проміжні величини не змінюються в часі, називається статичним (сталим) і описується рівняннями статички вигляду $y=F(u,f)$, в якому відсутній час t . Відповідні ним графіки називаються статичними характеристиками.

Статична характеристика ланки з одним входом u може бути представлена кривою $y=F(u)$. Якщо ланка має другий вхід по збуренню f , то статична характеристика задається сімейством кривих $y=F(u)$ при різних значеннях f , або $y=F(f)$ при різних u (рис. 3.3).

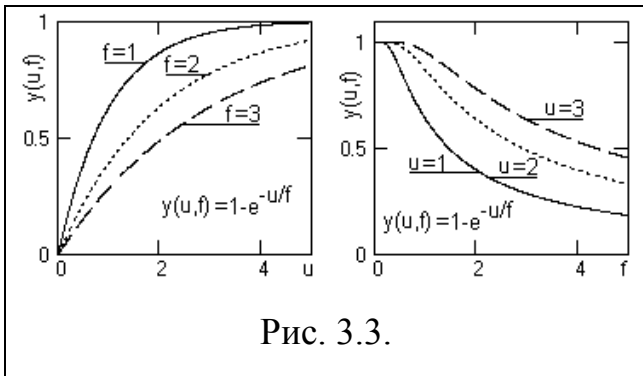


Рис. 3.3.

Коефіцієнт $K = y/u$, рівний відношенню вихідної величини до вхідної, називається *коефіцієнтом посилення ланки*. Якщо вхідна і вихідна величини мають різну природу, його називають *коефіцієнтом передачі*. Ланки

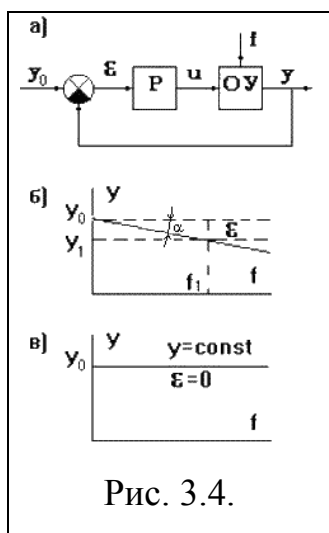
з лінійними статичними характеристиками називаються *лінійними*. Статичні характеристики реальних ланок систем, як правило, нелінійні. Для них характерна залежність коефіцієнта передачі від величини вхідного сигналу: $K = \Delta y / \Delta u \neq \text{const}$, яка може бути виражена якою-небудь математичною залежністю, задаватися таблично або графічно. Якщо всі ланки системи лінійні, то система має лінійну статичну характеристику. Якщо хоч би одна ланка нелінійна, то система *нелінійна*.

Ланки, для яких статична характеристика задана у вигляді однозначної функціональної залежності вихідної величини від вхідної, називаються *статичними*. Якщо кожному значенню вхідної величини може відповідати множина значень вихідної величини, то ланка називається *астатичною*. Прикладом астатичної ланки може бути двигун, вхідною величиною якого є напруга U , а вихідною – кут повороту валу $\alpha(t) = \int_0^t U dt$, величина якого при $U = \text{const}$ може приймати будь-які значення. Вихідна величина астатичної ланки навіть в сталому режимі є функцією часу.

Якщо на керований процес діє збурення (дестабілізуючий чинник) f , то статична характеристика системи має значення у формі $y = F(f)$ при $y_0 = \text{const}$. Можливі два характерні види цих характеристик (рис. 3.4). Відповідно до того, яка з двох характеристик властива даній системі, розрізняють *статичне і астатичне регулювання*.

Розглянемо систему регулювання рівня води в баку. Збурюючим чинником системи є потік Q води з бака. Хай при $Q = 0$ маємо $y = y_0$, сигнал розузгодження по заданому рівню води $\varepsilon = 0$. Ланка керування системи P налаштовується так, щоб вода при цьому в бак не поступала. При $Q \neq 0$, рівень води знижується

($\varepsilon \neq 0$), поплавець опускається і відкриває заслінку, в бак починає поступати вода. Новий стан рівноваги досягається при рівності вхідних потоків води, що виходять. Отже, при $Q \neq 0$ заслінка повинна бути обов'язково відкрита, що можливо тільки при новому рівні води y_1 , при якому $\varepsilon = K(y_0 - y_1) \neq 0$. Причому, чим більше Q , тим при великих значеннях ε встановлюється новий рівноважний стан. Статична характеристика системи має характерний нахил (рис. 3.4,б).



Статичні регулятори працюють при обов'язковому відхиленні ε регульованої величини y від необхідного значення y_0 . Це відхилення тим більше, чим більше збурення f , і називається *статичною похибкою регулятора*. Чим більше коефіцієнт передачі K регулятора, тим на більшу величину відкриватиметься заслінка при одних і тих же значеннях ε , забезпечуючи велику величину потоку Q , при цьому статична характеристика системи піде пологіше.

Тому для зменшення статичної похибки треба збільшувати коефіцієнт передачі регулятора. Цей параметр регулювання отримав назву *статизма* d і рівний тангенсу кута α нахилу статичної характеристики, побудованої у відносних одиницях:

$$d = \operatorname{tg}(\alpha) = (\Delta y / y_n) / (\Delta f / f_n),$$

де y_n, f_n – точка номінального режиму системи. При достатньо великих значеннях K маємо $d \approx 1/K$.

Астатичний регулятор застосовується, якщо статична похибка регулювання недопустима і регульована величина повинна підтримувати постійне необхідне значення незалежно від величини збурюючого чинника. Статична характеристика астатичної системи не має нахилу. Для того, щоб отримати астатичне регулювання, необхідно в регулятор включити астатичну ланку, наприклад імпульсний двигун (ІД). Якщо рівень води знизиться, то значення $\varepsilon > 0$ двигун і ІД почне відкривати заслінку до тих пір, поки значення ε не стане рівним нулю (по певному порозу). При піднятті рівня води значення ε змінить знак і запустить двигун в протилежну сторону, опускаючи заслінку.

Астатичні регулятори не мають статичної похибки (рис. 3.4.в), але вони інерційні, складні конструктивно і дорогі.

Забезпечення необхідної статичної точності регулювання є першим основним завданням при розрахунку елементів системи.

3.2.2. Система лінійних рівнянь об'єкту.

Математичною моделлю динамічної системи прийнято називати сукупність аналітичних виразів і алгоритмів, однозначно визначальних розвиток процесів в системі, тобто її рух. Залежно від типу сигналів розрізняються *неперервні і дискретні* моделі систем. Залежно від використовуваних операторів – *лінійні і нелінійні, часові і частотні* моделі. До часових відносяться моделі, в яких аргументом є час (неперервний або дискретний). Це диференціальні і різницеві рівняння, записані в явному вигляді або в операторній формі. Частотні моделі передбачають використання операторів, аргументом яких є частота відповідного сигналу, тобто оператори Лапласа, Фур'є тощо.

Аналітичні моделі вхід-вихід – це опис зв'язку вхідних і вихідних сигналів динамічної системи, який застосовується як для окремих блоків, так і для всієї системи керування в цілому. Для позначення вхідних і вихідних сигналів скористаємося позначеннями, характерними для ОК, де вхідним сигналом є керуюча дія $u(t)$, а вихідним регульована змінна $y(t)$. У цьому розділі розглядаються неперервні часові моделі, що описують зв'язки вхідних і вихідних змінних динамічної системи за допомогою звичайних диференціальних рівнянь відповідного порядку.

У загальному випадку модель одноканального ОК описується нелінійним диференціальним рівнянням (системою рівнянь), що зв'язує вхідний сигнал керування $u(t)$ і вихідний сигнал стану об'єкту по змінній $y(t)$:

$$F(y', y'', \dots, y^{(n)}, u', u'', \dots, u^{(m)}) = 0. \quad (3.1)$$

Рівняння описує динамічне перебування ОК на деякому часовому інтервалі $t \geq t_0$, і пов'язує вхідні сигнали $u(t)$ і їх похідні $u^{(n)}(t)$ з вихідними сигналами $y(t)$ і їх похідними $y^{(n)}(t)$. Значення $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n)}(t_0) = y^{(n)}_0$ назива-

ються початковими значеннями (умовами), а число $r = n - m \geq 1$ – відносним ступенем моделі.

Класом диференціальних рівнянь, зручним для проведення досліджень, є лінійні диференціальні рівняння (системи рівнянь). Перехід до лінійних диференціальних рівнянь виконується операцією лінеаризації, при якій змінні рівняння (3.1) замінюються новими змінними – відхиленнями від деякого номінального режиму ($y = y - u_n$, $u = u - u_n$), початок координат переноситься в точку номінального режиму і функція F розкладається в ряд Тейлора в околицях цієї точки по частковим похідним. В результаті лінеаризації отримуємо наступну систему лінійних рівнянь у відхиленнях:

$$A_0(t)y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \dots + A_n(t)y = B_0(t)u^{(m)} + B_1(t)y^{(m-1)} + \dots + B_m(t)u.$$

Порядок системи рівнянь рівний n по порядку похідній $y^{(n)}(t)$, $n \geq m$ (при $n < m$ системи технічно не реалізуються). Оскільки всіма частиними похідними є або постійні матриці, або матриці, залежні тільки від часу, то отримане рівняння є або система лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами ($A_j(t) = a_j = \text{const}$, $B_j(t) = b_j = \text{const}$), або система із змінними коефіцієнтами, залежно від номінальної траєкторії.

У разі постійних коефіцієнтів система називається *стаціонарною*. Як правило, вхідні і вихідні величини об'єкту – скалярні функції, при цьому рівняння (3.1) приймає вигляд:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 y^{(m-1)} + \dots + b_m u. \quad (3.2)$$

де a_j , b_j – постійні коефіцієнти (параметри) моделі, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, n – порядок моделі, $0 \leq m < n$. Вирішення рівнянь таких стаціонарних об'єктів відносно $y(t)$ є головним об'єктом досліджень в *класичній теорії автоматичного керування*.

Система, для якої $u(t) \equiv 0$, називається *автономною*. Опис автономної системи дається однорідним диференціальним рівнянням вигляду

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0.$$

3.2.3. Передавальна функція системи.

Основний метод дослідження лінійних систем з постійними коефіцієнтами є перетворення Лапласа. За нульових початкових умов, після перетворення Лапласа

$$L[a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y] = L[b_0 u^{(m)} + b_1 y^{(m-1)} + \dots + b_m u].$$

$$(a_0 p^{(n)} + a_1 p^{(n-1)} + \dots + a_n) Y(p) = (b_0 p^{(m)} + b_1 p^{(m-1)} + \dots + b_m) U(p),$$

$$Y(p) = L[y(t)] = \int_0^{\infty} \exp(-pt) y(t) dt,$$

$$U(p) = L[u(t)] = \int_0^{\infty} \exp(-pt) u(t) dt.$$

Для лінійного рівняння перетворення Лапласа відношення вихідного сигналу $Y(p)$ до вхідного сигналу $U(p)$ за нульових початкових умов не залежить від самих сигналів і називається *передавальною функцією системи* $W(p)$:

$$Y(p) = U(p) (b_0 p^{(m)} + b_1 p^{(m-1)} + \dots + b_m) / (a_0 p^{(n)} + a_1 p^{(n-1)} + \dots + a_n),$$

$$W(p) = (b_0 p^{(m)} + b_1 p^{(m-1)} + \dots + b_m) / (a_0 p^{(n)} + a_1 p^{(n-1)} + \dots + a_n), \quad (3.3)$$

$$Y(p) = W(p) U(p).$$

Передавальна функція $W(p)$ залежить тільки від самих диференціальних рівнянь і володіє властивістю лінійності:

Якщо $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$, то $U(p) = W(p) Y(p) = W(p) (Y_1(p) + Y_2(p)) = W(p) Y_1(p) + W(p) Y_2(p) = U_1(p) + U_2(p)$.

Якщо $Y(p) = c Y(p)$, то $U(p) = W(p) Y(p) = c W(p) Y(p)$.

У загальному випадку замкнута система регулювання із ЗЗ має структуру, наведену на рис. 3.5, де використовуються наступні позначення сигналів:

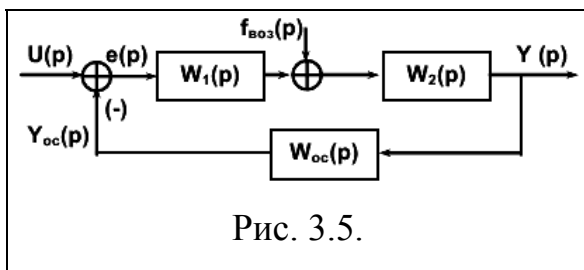


Рис. 3.5.

$$Y(p) = W(p)e(p); \quad W(p) = W_1(p)W_2(p);$$

$$Y_{oc}(p) = W_{oc}(p)Y(p); \quad e(p) = U(p) - Y_{oc}(p).$$

Вираз вихідного сигналу стану системи через вхідний сигнал керування має вигляд:

$$Y(p) = W(p)(U(p) - W_{oc}(p)Y(p));$$

$$Y(p)(1 \pm W(p)W_{oc}(p)) = W(p)U(p).$$

Звідси головна передавальна функція замкненої системи:

$$W_{zc}(p) = Y(p)/U(p) = W(p)/[1 \pm W(p)W_{oc}(p)].$$

Знак плюс або мінус визначається типом ЗЗ (негативний або позитивний). Відповідно, вихідний сигнал з урахуванням сигналу збурюючої дії $f(t)$, який підсумовується з правою частиною виразу (3.2):

$$Y(p) = W_{zc}(p)U(p) + W_f(p)f(p),$$

де $W_f(p)$ – передавальна функція по збуренню.

У замкнутій системі передавальна функція по збуренню визначається як відношення вихідної величини, перетвореної по Лапласу, до функції збурюючої дії, перетвореної по Лапласу за нульових початкових умов. Збурююча дія може бути прикладена до будь-якої точки системи:

$$W_f(p) = Y(p)/f(p) = W_2(p)/[1 + W_{oc}(p)W(p)].$$

Передавальна функція по похибці:

$$W_e(p) = e(p)/U(p) = 1/[1 + W(p) W_{oc}(p)].$$

Передавальна функція по похибці – основний засіб дослідження точності САК. З урахуванням збурюючої дії:

$$e(p) = W_e(p)U(p) + W_{ef}(p)f(p),$$

де $W_{ef}(p)$ – передавальна функція по похибці і збуренню (від збурення до похибки):

$$W_{ef}(p) = e(p)/f(p) = -W_2(p)W_{oc}(p)/[1 + W(p) W_{oc}(p)].$$

Передавальна функція по ЗЗ:

$$W_{Yoc}(p) = Y_{oc}(p)/U(p) = W(p) W_{oc}(p)/[1 + W(p) W_{oc}(p)].$$

3.2.4. Типові ланки САК.

Поліноми чисельника і знаменника передавальної функції (3.3) можна розкласти на прості множники по їх корінню:

$$W(p) = N(p)/P(p) = \mu [(p-p_1^q) \dots (p-p_m^q)] / [(p-p_1^3) \dots (p-p_n^3)],$$

де $\mu = b_0/a_0$ – константа, p_i^q – множина коріння чисельника $N(p)=0$, p_i^3 – множина коріння знаменника $P(p)=0$.

Коріння чисельника передавальної функції називаємо *нулями*, коріння знаменника – *полюсами*. При речовому корінні дужки залишаємо без зміни. Комплексно зв'язане коріння об'єднуємо в квадратурні поліноми з речовинними

коефіцієнтами: $(p-\alpha+j\beta)(p-\alpha-j\beta)=p^2-2\alpha p+\beta^2+\alpha^2$.

Після такого представлення в чисельнику і знаменнику буде деяка кількість дужок першого і другого порядку з речовими числовими коефіцієнтами, кожен з яких можна розглядати, як елементарну передавальну функцію, що практично реалізується через речові коефіцієнти. Якщо винести зі всіх дужок вільні члени і об'єднати їх добуток в загальний множник K , то отримаємо рівняння:

$$W(p) = K [W_1(p) \dots W_z(p)],$$

де $z=n+m$, якщо все коріння речові, $z < n+m$, якщо є комплексне коріння.

Коефіцієнт K прийнято називати коефіцієнтом посилення системи. Відмітимо, що $W(0) = K = b_m/a_n$, тобто його числове значення рівне коефіцієнту посилення на нульовій частоті.

Класифікація ланок проводиться по вигляду їх передавальних функцій, незалежно від виконання (механічні, гідравлічні, електричні тощо). Передавальні функції типових ланок, з яких синтезуються системи, зазвичай мають чисельник або знаменник, рівний одиниці. Нижче приводяться вирази передавальних функцій $W(p)$ основних типових ланок систем:

1. K – підсилювальна ланка.
2. p – диференціююча ланка.
3. $1/p$ – інтегруюча ланка (інтегратор).
4. $K/(Tp+1)$ – інерційна (аперіодичне) ланка.
5. $K/(T^2p+2dTp+1)$ – коливальна ланка.
6. $K(Tp+1)$ – форсуюча ланка.
7. $K(T^2p+2dTp+1)$ – форсуюча ланка 2-го порядку.

Тут T – певний часовий коефіцієнт (постійна часу).

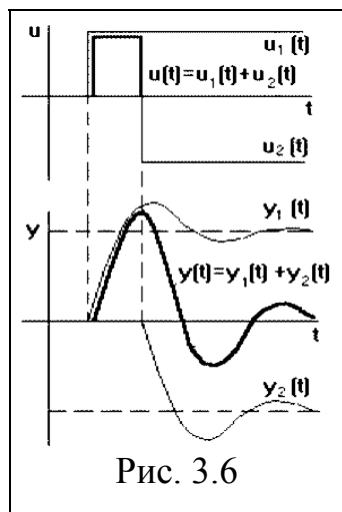
Ланки 2, 6 і 7 не є такими, що реалізуються в строгому сенсі.

3.2.5. Типові вхідні дії.

Для оцінки динамічних властивостей системи і окремих ланок прийнято досліджувати їх реакцію на типові вхідні дії. Найбільш поширеними типовими

діями є ступінчаста, імпульсна і гармонійна. Будь-який сигнал $u(t)$, що має складну форму, можна розкласти на суму типових дій $u_i(t)$ і на підставі принципу суперпозиції отримати результуючу зміну вихідної величини $y(t)$ у вигляді суми реакцій системи на кожну з складових.

Одинична сходінка. Особливе значення в теорії автоматичного керування має ступінчаста дія: $1(t) = 1$ при $t \geq 0$, $1(t) = 0$ при $t < 0$ ($u_1(t)$ на рис. 3.6). Решта всіх дій може бути зведена до неї. Так, наприклад, імпульсний сигнал може бути представлений двома ступінчастими сигналами однакової величини протилежними по знаку, поданими один за іншим через інтервал часу Δt ($u(t)$ на рис. 3.6).



Перетворення Лапласа для одиничної сходінки:

$$1(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) dt = 1/p.$$

Лінійно наростаючою дією ($t(t)=t$ при $t \geq 0$, $t(t)=0$ при $t < 0$) є інтеграл за часом від одиничної сходінки:

$$t(t) = \int_0^t 1(\tau) d\tau, \quad 1(t) = d t(t) / dt.$$

Перетворення Лапласа:

$$t(p) = \int_0^{\infty} t \exp(-pt) dt = 1/p^2.$$

Експоненціальна функція $\exp(\alpha t)$. Перетворення Лапласа:

$$L[\exp(\alpha t)] = \int_0^{\infty} \exp(\alpha t) \exp(-pt) dt = 1/(p-\alpha).$$

Вираз справедливий і при будь-якому комплексному α .

Гармонійні дії $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$. На основі формули Ейлера $\exp(j\omega t) = \cos \omega t + j \sin \omega t$ відповідно маємо $\cos \omega t = \text{Re} \exp(j\omega t)$, $\sin \omega t = \text{Im} \exp(j\omega t)$. Перетворення Лапласа:

$$L[\sin \omega t] = L[\text{Im} e^{j\omega t}] = \text{Im} L[e^{j\omega t}] = \text{Im} (1/(p-j\omega)) = \text{Im}((p+j\omega)/(p^2+\omega^2)) = \omega/(p^2+\omega^2).$$

$$L[\cos \omega t] = \text{Re} L(e^{j\omega t}) = \text{Re} (1/(p-j\omega)) = \text{Re}((p+j\omega)/(p^2+\omega^2)) = p/(p^2+\omega^2).$$

Дельта - функція $\delta(t)$ – математична модель дуже короткої кінцевої дії великої потужності (одиничний імпульс). Визначення $\delta(t)$ -функції дається через

інтеграл згортки з будь-якою іншою інтегрованою функцією $x(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) x(t) dt = x(t_0).$$

Звідси, при $x(t)=1$: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-pt) dt = 1$, $L[\delta(t)] = 1$.

Одиничний імпульс фізично є дуже вузьким імпульсом, ширина якого прагне до нуля, а висота – до нескінченності, що обмежує одиничну площу. Дельта-функція пов'язана з одиничною ступінчастою і лінійно-наростаючою функцією виразом:

$$\delta(t) = d1(t) / dt = d^2 t(t) / dt^2.$$

3.3. Часові характеристики САК

3.3.1. Поняття часових характеристик.

Залежність зміни вихідної величини системи від часу при подачі на її вхід одиничної дії (*імпульсу Діраку*) за нульових початкових умов називається імпульсним відгуком системи або *імпульсною перехідною характеристикою* $h(t)$. Цю функцію називають також *функцією ваги*. Оскільки системи керування є системами, що фізично реалізуються, імпульсний відгук систем є односторонньою (*каузальною*) функцією ($h(t)=0$ при $t<0$).

Як відомо з теорії сигналів і систем, відгук системи на одиничний імпульс визначається згорткою:

$$h(t) \otimes \delta(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = h(t).$$

Вихідний сигнал в кожен момент часу t_i залежить не тільки від вхідного сигналу у цей момент часу, але й від сигналів на вході у всі попередні моменти часу $t_i-\tau$ з “вагою”, рівною значенням функції $h(\tau)$, тобто в даному випадку від сигналу $h(t)$ при $t=0$.

Перетворення Лапласа згортки функцій відображається добутком їх зображень:

$$h(p) = W(p) L[\delta(t)] = W(p) 1 = W(p).$$

Насправді дельта-функція в чисто теоретичному плані не реалізується. Реальні імпульсні дії на системи завжди кінцеві по величині і тривалості. Але якщо їх тривалість достатньо мала в порівнянні з часом перехідного процесу в системі (тривалістю перехідної характеристики в межах заданої похибки), то вхідну дію можна вважати наближенням до дельта-функції з деяким масштабним коефіцієнтом і застосовувати для оцінки перехідних процесів в системі.

Не менше значення в САУ приділяється перехідній характеристиці $H(t)$, реакції системи на одиничну ступінчасту дію. Її зображення Лапласа:

$$H(p) = W(p)/p.$$

Перехідна і імпульсна перехідна характеристики є вичерпними характеристиками системи і будь-якої її ланки за нульових початкових умов. По ним можна однозначно визначити вихідну величину при довільній вхідній дії.

3.3.2. Експериментальне визначення часових параметрів.

Експериментальне визначення часових параметрів системи і окремих її ланок можна проводити подачею одиничних імпульсних сигналів або одиничних ступенів на їх входи з вимірюванням реакції на виходах. Якщо на вхід подати $d(t) \approx \delta(t)$ і зареєструвати на виході $h_d(t) \approx h(t)$, то зображення Лапласа передавальної функції визначиться виразом:

$$L[h_d(t)] = W_d(p) \approx W(p).$$

Відповідно, при подачі на вхід ступінчастої функції $1(t)$ реєструється перехідна функція $H(t)$ і обчислюється $W(p)$:

$$W(p) = L[dH(t)/dt].$$

Для вхідної довільної дії $u(t)$ при $t \geq 0$ перехідний процес на виході ланки за нульових початкових умов при відомих функціях $H(t)$ або $h(t)$ рівний:

$$y(t) = u(0)H(t) + \int_0^t H(\tau) u(t-\tau) d\tau, \quad y(t) = \int_0^t h(\tau) u(t-\tau) d\tau.$$

3.3.3. Фізична реалізованість.

Передавальна функція є такою, що фізично реалізовується, якщо можливе створення пристрою або програми, які дозволяють реально отримати або обчислити вихід блоку з такою передавальною функцією при реальних типових вхідних сигналах і їх комбінаціях. На виході систем не повинно з'являтися прагнучих до нескінченності значень сигналів в кінцеві моменти часу при подачі на вхід кінцевих сигналів.

Свідомо фізично не реалізовується передавальна функція (3.3) з порядком чисельника вищим порядку знаменника. Строго кажучи, фізично не реалізовується і функція з порядком чисельника рівним порядку знаменника. У першому випадку після ділення чисельника на знаменник виділяється, крім іншого, декілька ідеальних диференціюючих ланок. У другому випадку при діленні чисельника на знаменник виділяється підсилювальна ланка.

Відмітимо, що навіть ідеальний підсилювач не може бути фізично реалізований, не говорячи вже про ідеальну диференціюючу ланку, оскільки в обох випадках частотна характеристика системи не прагне до нуля на високих частотах.

3.4. Частотні характеристики САК

3.4.1. Поняття частотних характеристик.

Поняття частотних характеристик (ЧХ) є найважливішим поняттям, широко вживаним в теорії керування. Методи, засновані на застосуванні частотних характеристик, є найбільш зручними в інженерній практиці в класі систем з одним входом і виходом.

Функція $W(j\omega)$, яка рівна відношенню вихідного сигналу до вхідного при зміні вхідного сигналу по гармонійному закону, називається частотною передавальною функцією. Вона може бути отримана шляхом заміни p на $j\omega$ у виразі $W(p)$. У більш загальному формулюванні частотну передавальну функцію мож-

на представити у вигляді відношення частотних спектрів вихідного і вхідного сигналу:

$$W(j\omega) = Y(j\omega)/U(j\omega) = W(p)|_{p=j\omega}.$$

Частотна передавальна функція лінійної ланки є зображенням Фур'є його імпульсної функції і може визначатися по інтегральному перетворенню:

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

Для односторонніх функцій $h(t)$, $W(j\omega)$ є комплексна функція, яку іноді називають амплітудно-фазо-частотною характеристикою (АФЧХ):

$$W(j\omega) = A(\omega) \exp(j\varphi(\omega)) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

де $P(\omega)$ – речова ЧХ, $Q(\omega)$ – уявна ЧХ, $A(\omega)$ – амплітудна частотна характеристика (АЧХ), $\varphi(\omega)$ – фазова частотна характеристика (ФЧХ). АЧХ дає відношення амплітуд вихідного і вхідного сигналів, ФЧХ – зсув по фазі вихідної величини щодо вхідної:

$$A(\omega) = U_m / Y_m = |W(j\omega)| = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2},$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(Q(\omega)/P(\omega)).$$

3.4.2. Годограф.

Годограф, наведений на рис. 3.7, є стандартним методом відображення

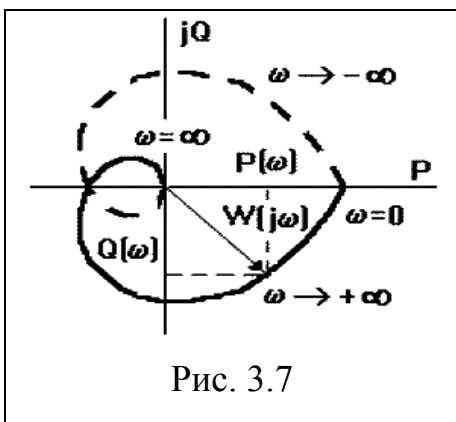


Рис. 3.7

АФЧХ на комплексній площині з координатами $\text{Re}W(\omega)$ і $\text{Im}W(\omega)$. Параметром на кривій годографа є частота, що змінюється в інтервалі від 0 до ∞ . Для довільної частоти ω радіус вектор в точці $W(j\omega)$ показує амплітуду вихідного сигналу, а кут $\varphi(\omega)$ – зсув фази між вихідним і вхідним сигналом. Іноді $W(j\omega)$ називають комплексним коефі-

цієнтом передачі, маючи на увазі, що АФЧХ є узагальненням звичайного коефіцієнта посилення K на випадок його залежності від частоти і фазового зсуву, також залежного від частоти. Комплексно зв'язані гілки АФЧХ, що відрізня-

ються знайомий j , дзеркальні щодо речової осі.

Для частотного аналізу систем застосовується також роздільна побудова графіків АЧХ і ФЧХ, якщо в тому з'являється необхідність.

3.4.3. Логарифмічні частотні характеристики.

У САК широко використовуються логарифмічні амплітудна (ЛАЧХ) і фазова (ЛФЧХ) частотні характеристики (рис. 3.8), тобто графіки АЧХ і ФЧХ в логарифмічних координатах. Вони виходять шляхом логарифмування передавальної функції:

$$\ln[W(j\omega)] = \ln[A(\omega) \exp(j\varphi(\omega))] = \ln[A(\omega)] + \ln[\exp(j\varphi(\omega))] = L(\omega) + \varphi(\omega).$$

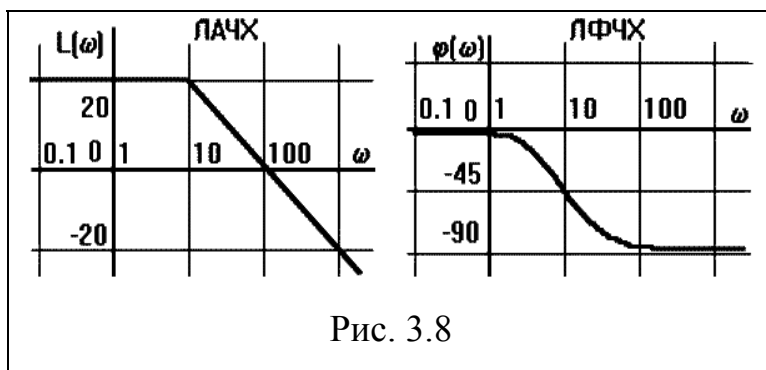


Рис. 3.8

ЛАЧХ отримують з першого доданку, який з міркувань масштабування множить на 20, і використовують десятковий логарифм, тобто $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$. Величина $L(\omega)$ відкладається по осі ординат в децибелах. Зміні сигналу в 10 разів відповідає зміна його рівня на 20 дБ.

По осі абсцис відкладається частота ω в логарифмічному масштабі. Тобто одиничним проміжкам по осі абсцис відповідає зміна ω в 10 разів. Такий інтервал називається декадою. Оскільки $\lg(0) = -\infty$, то вісь ординат проводять довільно.

ЛФЧХ, що отримується з другого доданку, відрізняється від ФЧХ тільки масштабом по осі ω . Величина $\varphi(\omega)$ відкладається по осі ординат в градусах або радіанах. Для елементарних ланок вона не виходить за межі: $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

ЛФЧХ, що отримується з другого доданку, відрізняється від ФЧХ тільки масштабом по осі ω . Величина $\varphi(\omega)$ відкладається по осі ординат в градусах або радіанах. Для елементарних ланок вона не виходить за межі: $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

ЧХ є вичерпними характеристиками системи. Знаючи ЧХ системи можна відновити її передавальну функцію і визначити параметри.

3.5. Характеристики елементарних ланок систем

Елементарними ланками називаються прості складові частини (блоки) системи, поведінка яких описується рівняннями алгебри або диференціальними рівняннями 1-2-го порядків:

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_0 u'(t) + b_1 u(t).$$

Передавальна функція елементарної ланки має вигляд:

$$W(p) = L[(b_0 u'(t) + b_1 u(t))] / L[(a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t))].$$

3.5.1. Безінерційна (пропорційна, підсилювальна) ланка.

Для такої ланки у будь-який момент часу вихідна величина пропорційна вхідній. І у статиці, і в динаміці описується рівнянням:

$$y(t) = k u(t).$$

Безінерційна ланка передає сигнал без спотворення і зміщення в часі, але змінений в k раз. Реальні ланки можуть бути віднесені до даного типу умовно, оскільки завжди володіють інерційністю. Проте, якщо перехідний процес в деяких елементах протікає за час, малий в порівнянні з часом перехідного процесу системи в цілому, то ці елементи можуть вважатися безінерційними.

Динамічний параметр k називають коефіцієнтом посилення. Перехідна характеристика (ПХ) повторює ступінчасту вхідну дію $1(t)$, змінену (збільшену або зменшену) в k раз (рис. 3.9):

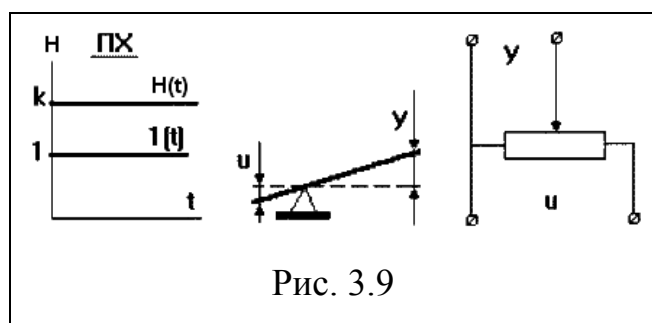


Рис. 3.9

Динамічний параметр k називають коефіцієнтом посилення. Перехідна характеристика (ПХ) повторює ступінчасту вхідну дію $1(t)$, змінену (збільшену або зменшену) в k раз (рис. 3.9):

$$H(t) = k 1(t).$$

При $k = 1$ ланка передає вхідний сигнал на вихід, а при $k = -1$ інвертує вхідний сигнал. Передавальна функція ланки рівна коефіцієнту пропорційності:

$$W(p) = k.$$

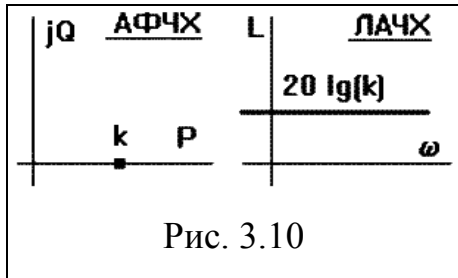
Функція ваги є імпульсною функцією, площа якої рівна k :

$$h(t) = k \delta(t).$$

Амплітудно-фазо-частотна характеристика АФЧХ: $W(j\omega) = k$.

АЧХ: $A(\omega) = k$. ФЧХ: $\varphi(\omega) = 0$. ЛАЧХ: $L(\omega) = 20 \lg k$.

Деякі ЧХ показані на рис. 3.10. Ланка пропускає всі частоти однаково із збільшенням амплітуди в k раз і без зсуву по фазі.



Деякі реальні ланки можуть розглядатися як безінерційні з певною точністю (жорсткий механічний важіль, механічний редуктор, потенціометр, широкопasmовий електронний підсилювач тощо). Багато датчиків сигналів (потенціометри, індукційні тощо) також зазвичай розглядаються як безінерційні.

3.5.2. Аперіодична інерційна ланка першого порядку.

Ця ланка описується диференціальним рівнянням: $T \, dy/dt + y(t) = k \, u(t)$.

Передавальна функція ланки: $W(p) = k/(Tp+1)$.

Динамічні властивості визначаються значеннями двох величин k і T . T – постійна часу, k – коефіцієнт передачі (посилення) ланки. Перехідна функція:

$$H(p) = W(p) \, 1(p) = k/[p(Tp+1)].$$

$$H(t) = k (1 - \exp(-t/T)).$$

Перехідний процес інерційної ланки експоненціальний – типовий для систем першого порядку (рис. 3.11). Вихідна величина ланки в перехідному режимі з деякою кінцевою швидкістю, визначуваною величиною T , слідує за зміною вхідної величини (властивість інерційності). Сигнал на виході ланки наростає по експоненті, тому ланку називають аперіодичною. При $t \rightarrow \infty$ сигнал досягає сталого значення $k1(t)$.

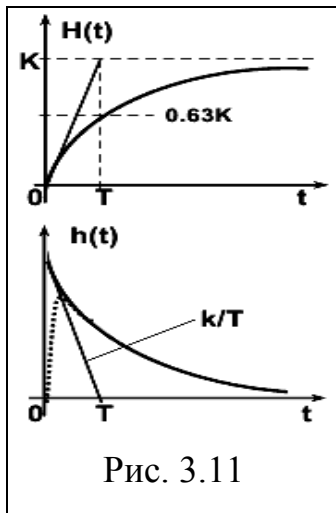


Рис. 3.11

Вагова функція знаходиться диференціюванням перехідної характеристики:

$$h(t) = (k/T) \exp(-t/T) 1(t).$$

Множник $1(t)$ визначає існування функції при $t \geq 0$ і зазвичай опускається (мається на увазі за умовчанням).

По перехідній характеристиці можна визначити передавальний коефіцієнт, рівний сталому значенню

$H(t)$, і постійну часу T по точці перетину дотичної до кривої на початку координат з її асимптотою. Дотична при $t=0$ рівна k/T , а при $t=T$ значення $H(t)=0.63k$.

Чим більше T , тим більше тривалість перехідного процесу. Практично зазвичай приймають, що перехідний процес закінчується при t порядку $3T$, що відповідає 95% сталого значення. Імпульсна функція $h(t)$ також має дотичну k/T при $t=0$, яка перетинає лінію сталого значення 0 в точці $t=T$. Характерний стрибок амплітуди в початковий момент часу, що виникає із-за наявності на вході δ -функції. Оскільки ідеального стрибка бути не може, то спостерігатиметься процес, позначений на рис. 3.11 пунктиром.

Годограф (рис. 3.12) описує півколо з самою низькою точкою на частоті

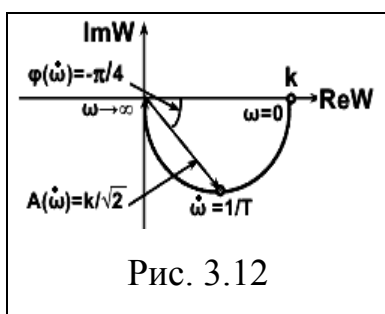


Рис. 3.12

$1/T$, при цьому фазовий зсув рівний $\pi/4$, коефіцієнт посилення АЧХ рівний $0.707k$. При зміні частоти від 0 до ∞ радіус-вектор АЧХ монотонно убуває від значення k до 0. Повна АФЧХ для позитивних і негативних частот є колом.

АФЧХ інерційної ланки (рис. 3.13) :

$$W(j\omega) = k/(Tj\omega + 1) = k(Tj\omega - 1) / [(Tj\omega + 1)(Tj\omega - 1)] =$$

$$= k [1/(T^2\omega^2 + 1) - jT\omega/(T^2\omega^2 + 1)] = k \exp(-j \arctg T\omega) / \sqrt{T^2\omega^2 + 1}.$$

ЛАЧХ і ЛФЧХ інерційної ланки:

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg k - 10 \lg(T^2\omega^2 + 1).$$

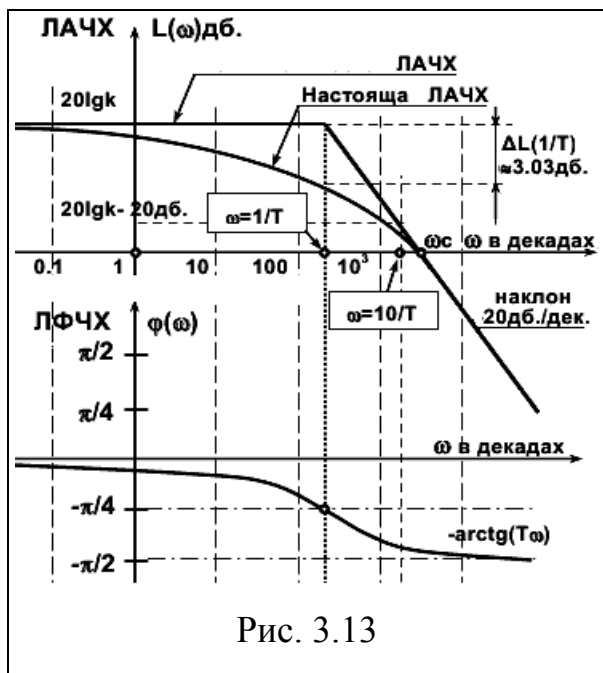


Рис. 3.13

Коливання малих частот ($\omega < 1/T$) пропускаються ланкою з коефіцієнтом передачі, близьким до значення k . Коливання великих частот проходять з сильним ослабленням амплітуди. Чим менше інерційність ланки (менше T), тим більше амплітудна характеристика по своїх значущих значеннях витягнута по осі частот (ширше смуга пропускання).

Щоб спростити використання

ЛАЧХ, вводять поняття *асимптотичних* ЛАЧХ, тобто кусочно-постійних функцій, що не сильно відрізняються від істинних, які застосовуються не тільки для інерційної ланки, але й для будь-яких складніших передавальних функцій. Перехід до асимптотичної ЛАЧХ виконуємо в наступному порядку (див. рис. 3.13).

Замінюємо дійсну ЛАЧХ ламаною асимптотичною лінією. Виділимо області низьких і високих частот, окремо розглянемо поведінку ЛАЧХ в цих областях і оцінимо максимальну похибку, що виникає на межі областей.

Область низьких частот: $T^2\omega^2 \ll 1$ і можна нехтувати виразом $T^2\omega^2$. Отримуємо горизонтальну пряму: $L(\omega) = 20\lg k$.

Область високих частот: $T^2\omega^2 \gg 1$ і значенням 1 можна нехтувати. Отримуємо рівняння прямої з нахилом $20\text{дБ}/\text{декаду}$ в логарифмічних координатах: $L(\omega) = 20\lg k - 20\lg T\omega$.

Злам асимптотичної ЛАЧХ є на $\omega = 1/T$ (сполучена частота), де похибка максимальна, не залежить від k і T і рівна приблизно -3дБ :

$$\Delta L = 20\lg k - 20\lg k + 10\lg(T^2\omega^2 + 1) = 10\lg 2 \approx -3.03 \text{ дБ.}$$

Рівень -3дБ прийнято вважати межею смуги пропускання.

ЛФЧХ асимптотично прагне до нуля при зменшенні ω до нуля (чим менше частота, тим менше спотворення сигналу по фазі) і до $-\pi/2$ при зростанні ω

до нескінченності. Перегин кривої на сполученій частоті при $\varphi(\omega) = -\pi/4$. ЛФЧХ всіх аперіодичних ланок мають однакову форму і можуть бути побудовані по типовій кривій з паралельним зсувом уздовж осі частот.

Для всіх ланок першого порядку характерний нахил ЛАЧХ ± 20 дБ/дек і максимальний поворот фази $\pm \pi/2$.

При достатньо великих T ланка на початковій ділянці може розглядатися як інтегруюча ланка, при малих T – як безінерційна ланка. Приклади аперіодичної ланки: термопара, електродвигун, чотириполюсник з опору і ємкості або опору і індуктивності.

3.5.3. Інтегруюча (астатична) ланка.

Ідеальна інтегруюча ланка описується диференціальним рівнянням першого порядку:

$$dy/dt = k u(t),$$

тобто швидкість зміни вихідної величини пропорційна значенню вхідного сигналу.

Загальне рішення: $y(t) = y(0) + \int_0^t k u(\tau) d\tau$.

Передавальна функція ланки: $W(p) = k/p$.

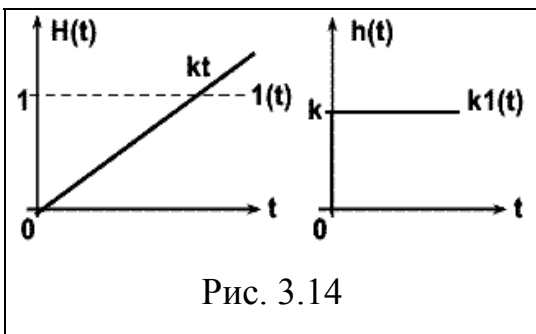


Рис. 3.14

Перехідна характеристика при $u(t) = 1(t)$ і нульових початкових умовах (рис. 3.14):

$$H(t) = k t(t) = k \int_0^t 1(\tau) d\tau. \quad H(p) = k/p^2.$$

Вагова функція при $u(t) = \delta(t)$ і нульових початкових умовах (див рис. 3.14):

$$h(t) = k 1(t); \quad h(p) = k/p.$$

АФЧХ інтегратора: $W(j\omega) = k/j\omega = -jk/\omega = k \exp(-j\pi/2)/\omega$.

Інтегратор ослабляє високі частоти пропорційно частоті і необмежено підсилює низькі частоти. Годограф АФЧХ (рис. 3.15) розташований уздовж негативної уявної осі. ФЧХ для позитивних частот має постійне значення $-\pi/2$, тобто всі частоти ланка пропускає із запізнюванням по фазі на 90° . Радіус-вектор АЧХ

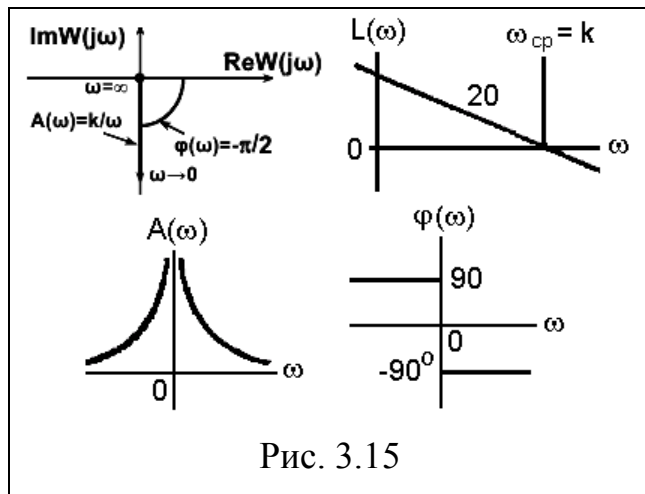


Рис. 3.15

при зміні частоти від 0 до ∞ монотонно убуває від значення ∞ , прагнучи до 0. Коефіцієнт посилення нескінченно малих частот теоретично необмежений.

ЛАЧХ інтегратора:

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg k - 20 \lg \omega.$$

Логарифмічна характеристика є прямою з негативним нахилом 20 дБ/дек, яка проходить через точку 0 дБ на частоті $\omega=k$.

При $k = 1$ ланкою є "чистий" інтегратор $W(p) = 1/p$. Інтегруюча ланка необмежено "накопичує" вхідну дію. Приклади інтегруючих ланок: електродвигун, поршневий гідравлічний демпфер, електрична ємкість тощо.

3.5.4. Інтегруюча ланка з уповільненням.

Ця ланка (рис. 3.16) описується диференціальним рівнянням: $T \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = k u(t)$.

Передавальна функція ланки: $W(p) = k/[p(Tp+1)]$.

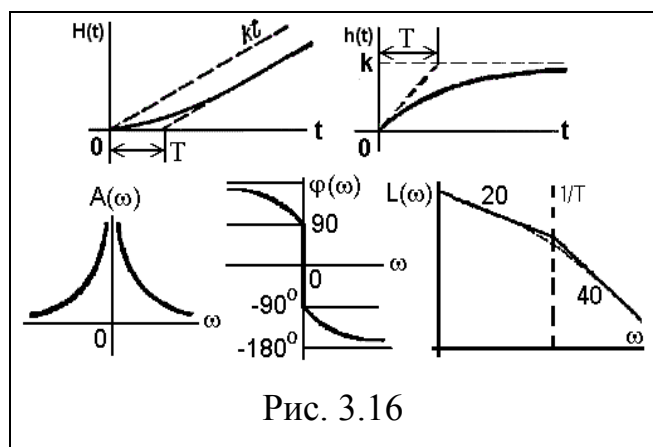


Рис. 3.16

Для знаходження часових характеристик ланки зручно представити передавальну функцію у вигляді суми:

$$W(p) = k/p - kT/(1+Tp).$$

Відповідно, вирішення рівняння складатиметься у вигляді суми рі-

шень для ідеальної інтегруючої ланки і аперіодичної ланки першого порядку.

Перехідна характеристика:

$$H(t) = k[1 - T(1 - \exp(-t/T))] 1(t).$$

Вагова функція:

$$h(t) = k[1 - \exp(-t/T)] 1(t).$$

Частотна характеристика ланки:

$$L(\omega) = 20 \lg [k/(\omega \sqrt{1 + (\omega T)^2})].$$

Графіком є дві прямі з негативними нахилами 20 дБ/дек (при $\omega < 1/T$) і 40 дБ/дек ($\omega > 1/T$).

3.5.5. Ідеальна диференціююча ланка.

Вихідна величина ланки пропорційна швидкості зміни вхідної величини (похідної від вхідної величини), а рівняння динаміки має вигляд: $y(t) = k \, du(t)/dt$.

Передавальна функція: $W(p) = kp$. При $k = 1$ ланка здійснює чисте диференціювання $W(p) = p$.

Ідеальну диференціюючу ланку реалізувати неможливо, оскільки величина сплеску вихідної величини при подачі на вхід одиничної ступінчастої дії не може бути нескінченно великою.

Близький до ідеальної ланки операційний підсилювач в режимі диференціювання (рис. 3.17).

Перехідна характеристика: $H(t) = k1'(t) = k \delta(t)$.

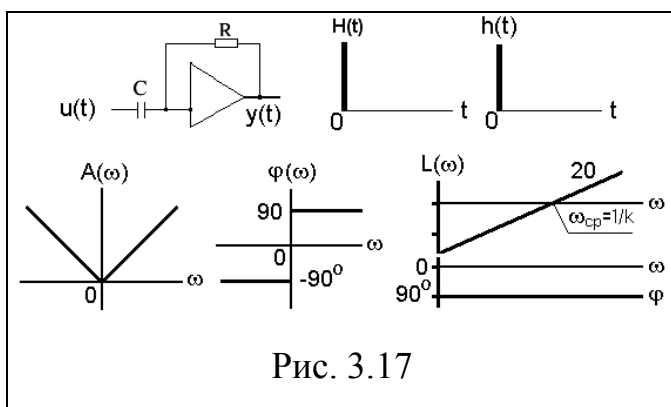


Рис. 3.17

Імпульсна характеристика:

$$h(t) = k \, d\delta(t)/dt.$$

Передавальна функція:

$$W(j\omega) = kj\omega.$$

3.5.6. Диференціююча ланка з уповільненням.

На практиці використовують реальні диференціюючі ланки, що здійснюють наближене диференціювання вхідного сигналу. Реальна диференціююча ланка є послідовним з'єднанням двох типових ланок – ідеального диференціюючого k_p і інерційного $1/(T_p+1)$. У кінцевому діапазоні робочих частот характеристики такої ланки можуть бути скільки завгодно близькі до ідеальних.

Ланка описується рівнянням: $T \, dy(t)/dt + y(t) = k \, du(t)/dt$.

Передавальна функція: $W(p) = k_p / (T_p+1)$.

При малих T ланку можна розглядати як ідеальну диференціюючу.

Перехідна характеристика: $H(t) = (k/T) \exp(-t/T) \, 1(t)$.

Імпульсна характеристика: $h(t) = [k\delta(t)/T - (k/T^2) \exp(-t/T)] \, 1(t)$.

По перехідній характеристиці, що має вид експоненти (рис. 3.18), можна визначити передавальний коефіцієнт і постійну часу T .

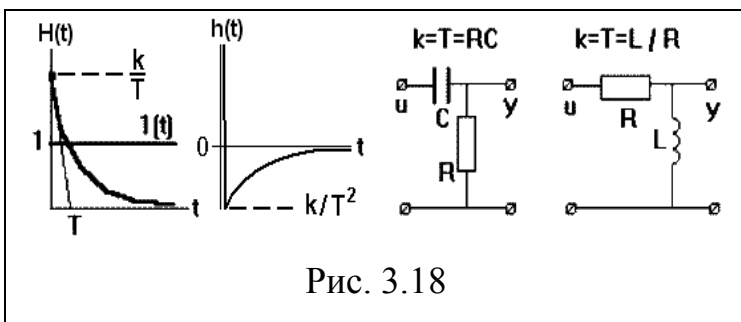


Рис. 3.18

Прикладами ланок є чотирьохполюсники з опору і ємкості або опору і індуктивності. Диференціюючі ланки застосовуються для поліпшення динамічних властивостей САК.

Частотна передавальна функція:

$$W(j\omega) = kj\omega / (j\omega T + 1).$$

Годограф ланки (рис. 3.19) описує півколо з радіусом, прагнучим до нескінченності, при $T \rightarrow 0$. При цьому годограф притискається до позитивної уявної піввісі і прагне до годографа ідеальної диференціюючої ланки. Частота $\omega = 1/T$ вважається максимальною, до якої реальна ланка може братися за близьку до ідеальної.

ЧХ ланки наведені на рис. 3.20. В області високих частот реальна ланка пропускає

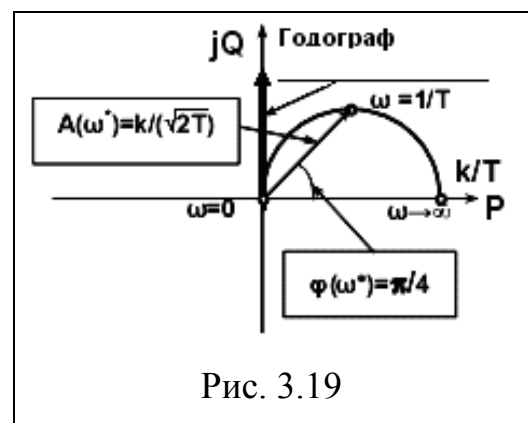


Рис. 3.19

сигнал гірше, ніж ідеальна. При $\omega \rightarrow \infty$ коефіцієнт передачі ланки прагне до k/T . Фазові зсуви, що вносяться ланкою, є найбільшими при низьких частотах. На високих частотах фазовий зсув прагне до нуля при $\omega \rightarrow \infty$.

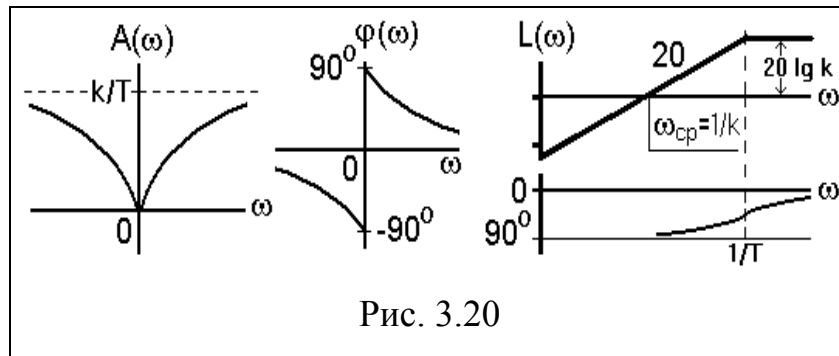


Рис. 3.20

3.5.7. Аперіодична ланка другого порядку.

Диференціальне рівняння ланки має вигляд:

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\rho T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t),$$

де ρ – коефіцієнт (декремент) загасання (демпфування).

Передавальна функція:

$$W(p) = 1/(T^2 p^2 + 2\rho T p + 1).$$

Ланка буде аперіодичною другого порядку, якщо коріння речове, або коливальною, якщо коріння комплексне. Коріння характеристичного рівняння визначається виразом:

$$p_{1,2} = (-\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1})/T.$$

Якщо $\rho \geq 1$, то знаменник $W(p)$ має два речових кореня і може бути розкладений на два співмножники:

$$T^2 p^2 + 2\rho T p + 1 = (T_3 p + 1) (T_4 p + 1),$$

$$T_{3,4} = T (\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}).$$

Перехідна характеристика і вагова функція (рис. 3.21):

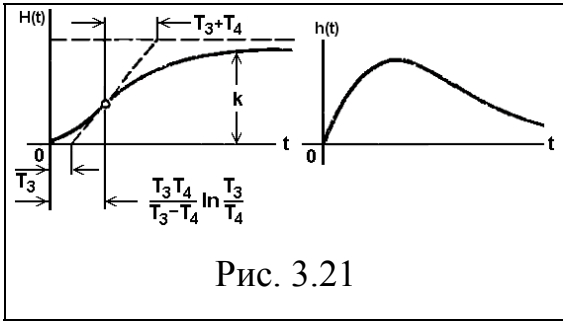


Рис. 3.21

$$H(t) = k(1 - (T_3/(T_3 - T_4)) \exp(-t/T_3) + (T_4/(T_3 - T_4)) \exp(-t/T_4)) 1(t);$$

$$h(t) = [k/(T_3 - T_4)] (\exp(-t/T_3) - \exp(-t/T_4)) 1(t).$$

Така ланка еквівалентна двом послідовно включеним аперіодичним ланкам першого порядку із загальним коефіцієнтом передачі k і постійними часу T_3 і T_4 .

Амплітудна частотна характеристика:

$$A(\omega) = k / [\sqrt{1 + (\omega T_3)^2} \sqrt{1 + (\omega T_4)^2}].$$

Фазова характеристика: $\varphi(\omega) = -\arctg \omega T_3 - \arctg \omega T_4$.

3.5.8. Коливальна ланка.

При $\rho < 1$ коріння полінома знаменника $W(p)$ аперіодичної ланки другого порядку комплексно зв'язані. Перехідна характеристика є виразом, що характеризує затухаючий коливальний процес із загасанням ρ (можливі значення від 0 до 1) і частотою $\omega_0 = 1/T$, тобто перехідний процес є затухаючими коливаннями щодо сталого значення (рис. 3.22).

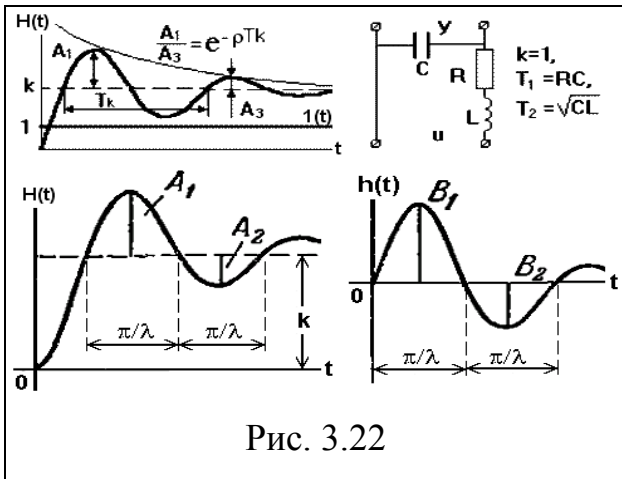


Рис. 3.22

значенню перехідної функції. Прикладами коливальної ланки можуть служити пружина, що має заспокійливий пристрій, електричний коливальний контур з активним опором тощо.

При $\rho = 0$ коливання носять незгасаючий характер.

Аналitична формула перехідної

характеристики ланки (рис. 3.22):

$$H(t) = k[1 - \exp(-\gamma t) (\cos \lambda t + (\gamma/\lambda) \sin \lambda t)] 1(t),$$

$$\gamma = (\lambda/\pi) \ln (A_1/A_2), \quad \gamma = \rho/\omega_0, \quad \lambda = \omega_0 \sqrt{1 - \rho^2}.$$

Імпульсна функція:

$$h(t) = (k\omega_0^2/\lambda) \exp(-\gamma t) \sin(\lambda t) 1(t).$$

Знаючи характеристики реального пристрою можна визначити його параметри як коливальної ланки. Постійна часу T і коефіцієнт загасання:

$$T = T_k / \sqrt{4\pi^2 - \ln^2(A_1/A_3)}, \quad \rho = \ln(A_1/A_3) / \sqrt{4\pi^2 - \ln^2(A_1/A_3)},$$

де T_k – період коливань, A_1 і A_3 – амплітуди двох сусідніх напівколивань одного знаку щодо сталого значення (див. рис. 3.22).

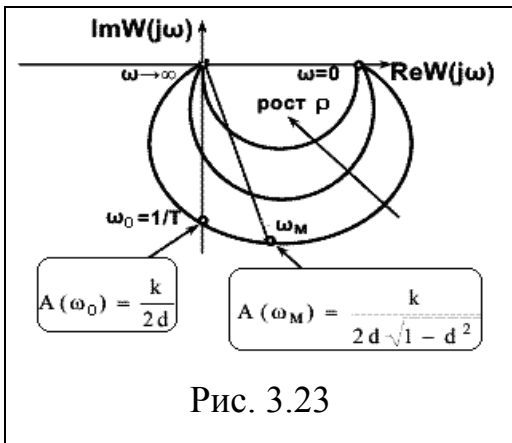


Рис. 3.23

АФЧХ коливальної ланки:

$$W(j\omega) = k / [-T^2\omega^2 + 2\rho Tj\omega + 1].$$

Годограф (рис. 3.23) описує криву, що заходиться в третьому квадранті. На частоті ω_0 є фазовий зсув $-\pi/2$, але максимум амплітуди досягається на меншій частоті $\omega_M = \omega_0 \sqrt{1-2\rho^2}$.

ЛАЧХ коливальної ланки (рис. 3.24):

$$L(\omega) = 20 \lg k - 10 \lg((1-T^2\omega^2)^2 + 4\rho^2 T^2\omega^2).$$

При $\rho < 0.707$ АЧХ ланки має резонансний пік на частоті

$$\omega_m = \omega_0 \sqrt{1-2\rho^2}.$$

Висота піку тим більше, чим менше параметр загасання:

$$A(\omega_m) = k / [2\rho \sqrt{1-\rho^2}].$$

Асимптотична ЛАЧХ коливальної ланки на низьких частотах до частоти $\omega_1 = 1/T$ співпадає з віссю абсцис ($T^2\omega^2 \ll 1$, $L(\omega) \cong 20 \lg k$), при подальшому збільшенні частоти йде з нахилом -40 дБ/дек. Тобто високі частоти коливальна ланка "завалює" сильніше, ніж аперіодична ланка.

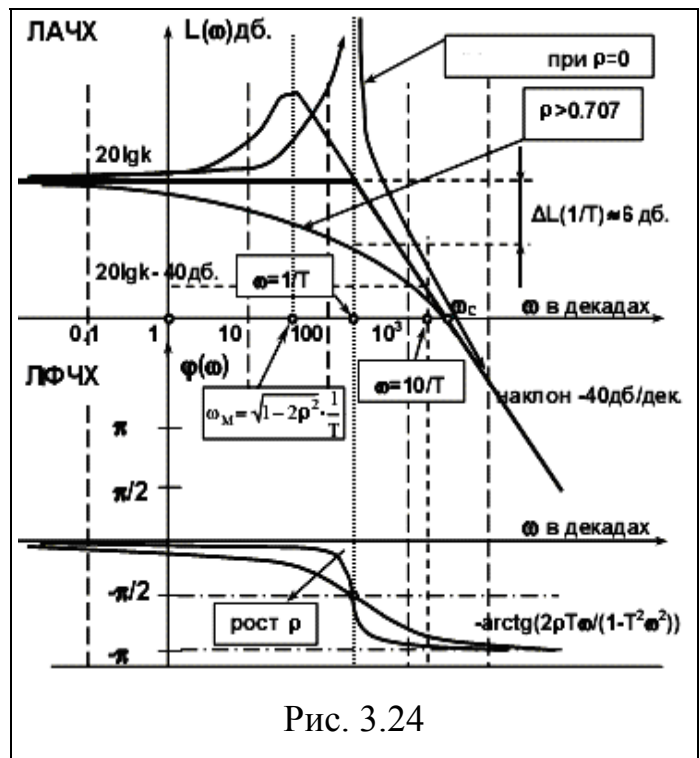


Рис. 3.24

Реальна ЛАЧХ при $\omega \approx \omega_1$ значно відрізняється від асимптотичної. Це відмінність тим істотніше, чим менше коефіцієнт демпфування ρ . У граничному

випадку $\rho = 0$ отримуємо ланку, у якій при $\omega \approx \omega_1$ амплітуда вихідних коливань прагне до нескінченності.

ЛФЧХ при малих частотах асимптотично прагне до нуля. При збільшенні частоти до нескінченності вихідний сигнал повертається по фазі щодо вхідного на кут, що прагне до -180° .

Нахил ЛАЧХ ± 40 дБ/дек і максимальний поворот фази до $\pm\pi$ характерні для всіх ланок другого порядку.

3.6. Побудова моделей вхід-вихід

Модель вхід-вихід будується по відомих рівнянням окремих компонентів (блоків, ланок). Процедура зводиться до перетворення системи диференціальних рівнянь, що описують поведінку окремих блоків, до єдиного рівняння системи керування.

3.6.1. Прості з'єднання блоків.

Можливі три способи з'єднання блоків: послідовне, паралельне і зустрічно-паралельне або з'єднання із ЗЗ.

Послідовне з'єднання блоків. Послідовним називають таке з'єднання ланок, при якому вихідна величина попередньої ланки є вхідною для подальшої (рис. 3.25). При відомих передавальних функціях ланок, можна записати:

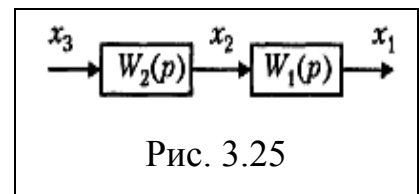


Рис. 3.25

$$X_2(p) = W_2(p) X_3(p), \quad X_1(p) = W_1(p) X_2(p) = W_1(p)W_2(p)X_3(p).$$

$$W(p) = W_1(p) W_2(p).$$

Таким чином, систему з необмеженої кількості ланок, включених послідовно, можна замінити однією еквівалентною ланкою з передавальною функцією $W(p)$ рівною добутку передавальних функцій ланок.

Розглянемо послідовне з'єднання аперіодичної ланки (з одиничним коефіцієнтом передачі $W_1(p) = 1/(Tp+1)$) і ідеальної диференціюючої ланки ($W_2(p) = kp$). Передавальна функція

$$W(p) = kp/(Tp+1),$$

що повністю співпадає з передавальною функцією реальної диференціюючої ланки.

Паралельне з'єднання блоків. При паралельному з'єднанні ланок на всі входи подається одна і та ж величина, а вихідна величина рівна сумі вихідних величин окремих ланок (рис. 3.26):

$$X_2(p) = W_1(p) X_4(p), \quad X_3(p) = W_2(p) X_4(p).$$

$$X_1(p) = X_2(p) + X_3(p) = (W_1(p) + W_2(p)) X_4(p).$$

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p).$$

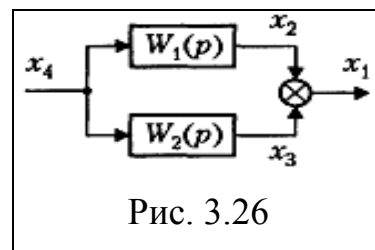


Рис. 3.26

З останнього виразу виходить, що паралельне з'єднання ланок еквівалентне одній ланці з передавальною функцією, рівній сумі передавальних функцій, що входять в з'єднання ланок. Перехідна характеристика:

$$H(t) = \sum_{i=0}^n H_i(t).$$

Побудова перехідної характеристики паралельного з'єднання полягає в побудові перехідних характеристик окремих ланок на одному графіку і підсумовуванні їх ординат для одних і тих же значень часу.

Приклад: ПІ-регулятор – паралельне з'єднання пропорційної ($W_1(p)=k_n$) і інтегруючої ланок (k_n/p). Передавальна функція

$$W(p) = (k_n p + k_i)/p.$$

Система з негативним зворотним зв'язком. При зустрічно-паралельному з'єднанні ланок на вхід ланки окрім вхідної подається ще й вихідна величина через спеціальну ланку ЗЗ. На рис. 3.27 ланка $W_1(p)$ складає прямий ланцюг, який охоплений ЗЗ ланкою $W_2(p)$. При цьому, якщо сигнал x_3 віднімається з вхідного сигналу x_4 , то ЗЗ називається *негативним*, а якщо підсумовується, то ЗЗ – *позитивний*. Для негативного ЗЗ можна записати:

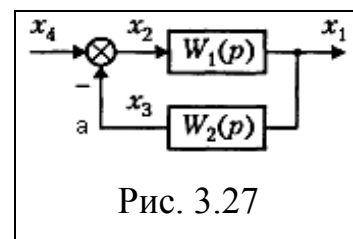


Рис. 3.27

$$X_1(p) = W_1(p) X_2(p), \quad X_3(p) = W_2(p) X_1(p), \quad X_2(p) = X_4(p) - X_3(p).$$

Вирішуючи ці три рівняння відносно $X_1(p)$, знаходимо:

$$X_1(p) = X_4(p) W_1(p) / (1 + W_1(p)W_2(p)).$$

Передавальна функція

$$W(p) = W_1(p) / (1 + W_1(p)W_2(p)). \quad (3.4)$$

Отримана передавальна функція може інтерпретуватися як передавальна функція послідовно сполучених ланок з передавальною функцією $W_1(p)$ і системи з передавальною функцією:

$$\Phi(p) = 1 / (1 + W_{pc}),$$

де $W_{pc} = W_1(p)W_2(p)$ – передавальна функція розімкненої системи, наприклад, в точці “а”.

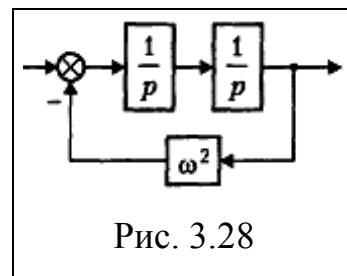
При обхваті будь-якої ланки одиничним ЗЗ (тобто при $W_2(p) = 1$) розімкнена система перетвориться в замкнуту з передавальною функцією (з виразу (3.4)):

$$W(p) = W_1(p) / (1 + W_1(p)).$$

З іншого боку, якщо у виразі (3.4) забезпечити високий коефіцієнт посилення в ланцюзі прямого зв'язку ($W_1(p) \rightarrow \infty$), то 1 в знаменнику можна нехтувати і властивості ланки визначаються тільки властивостями ланцюга ЗЗ:

$$W(p) = 1 / W_2(p).$$

Приклад. Нехай є консервативна ланка (рис. 3.28) – подвійний інтегратор, що має передавальну функцію $W_1(p) = 1/p^2$, з негативним ЗЗ, утвореним пропорційною ланкою з $W_2(p) = 1/\omega^2$. Використовуючи формулу (3.4), знаходимо:



$$W(p) = 1 / (p^2 + \omega^2) = k / (T^2 p^2 + 1),$$

де $k = 1/\omega^2$, $T = 1/\omega$.

3.6.2. Передавальні функції систем керування.

Система керування без зворотного зв'язку (розімкнена система), складається з послідовно сполученого регулятора і ОК (рис. 3.29).

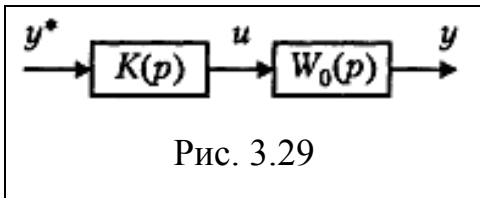


Рис. 3.29

Нехай ОК описується операторним рівнянням

$$Y(p) = W_0(p) U(p),$$

а регулятор представлений виразом

$$U(p) = K(p) y^*(p),$$

де $y(t) \leftrightarrow Y(p)$ – вихідна змінна, $u(t) \leftrightarrow U(p)$ – керуюча дія, $y^*(t) \leftrightarrow y^*(p)$ – задаюча дія (вхід системи), $W_0(p)$ и $K(p)$ – передавальні функції (довільні інтегро-диференційні оператори).

Використовуючи правило побудови моделі послідовно сполучених блоків, знаходимо рівняння

$$y(t) \leftrightarrow Y(p) = W(p) y^*(p),$$

що зв'язує вихідну змінну $y(t)$ і вхідну змінну через передавальну функцію розімкненої системи $W(p) = W_0(p)K(p)$.

Замкнута система керування, тобто система, представлена ОК і регулятором відхилення (рис. 3.30):

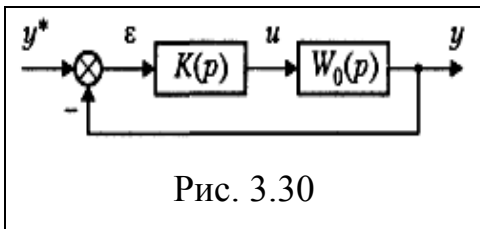


Рис. 3.30

$$U(p) = K(p)\varepsilon(p),$$

$$\varepsilon(p) \leftrightarrow \varepsilon(t) = y^*(t) - y(t),$$

де $\varepsilon(t)$ – розузгодження (відхилення). Використовуючи правило (3.4), знаходимо модель замкнутої системи у вигляді:

$$Y(p) = W(p) y^*(p),$$

$$W(p) = K(p)W_0(p) / (1 + K(p)W_0(p)).$$

Замикання системи приводить до зміни знаменника її передавальній функції – характеристичного полінома системи, а отже, і коріння полінома (полів систем).

Контрольні запитання

1. Дайте визначення понять «автоматичне керування» і «система автоматичного керування».

2. Яка структура САК?
3. Сформулюйте принципи керування.
4. Сформулюйте види систем керування.
5. У чому різниця між статичним і астатичним регуляторами?
6. У чому суть динамічних систем?
7. Розкрийте суть передатної функції системи.
8. Розкрийте поняття часових характеристик системи.
9. Розкрийте поняття частотних характеристик системи.
10. Які особливості аперіодичних ланок?
11. Які особливості інтегруючих ланок?
12. Які особливості диференціюючих ланок?
13. Які принципи побудови моделей вхід-вихід САК?

Глава 4. СТІЙКІСТЬ І ЯКІСТЬ САК

Найважливішим завданням аналізу динамічних систем керування є рішення питання про їх стійкість. Технічне поняття стійкості САК відображає властивість технічної системи не тільки стабільно працювати в нормальних режимах, але і "не йти у рознос" при відхиленні параметрів системи від номінала і впливі на систему дестабілізуючих дій, тобто наявності або відсутності в системі здатності повертатися до рівноважного стану, з якого вона виводиться збурюючими або керуючими діями. Стійкість системи – проста технічна вимога у ряді складніших вимог, пов'язаних з показниками якості і точності САК. Властивість стійкості може бути виражена числовими показниками, які можуть бути обчислені і пов'язані з іншими показниками якості і точності системи.

4.1. Критерії стійкості САК

4.1.1. Поняття стійкості системи.

Стежача система знаходиться в стані рівноваги, якщо за відсутності дії на неї збурюючих чинників похибка регулювання (різниця між заданим і фактичним станом системи) прагне до нуля. Під *стійкістю* розуміється здатність динамічної системи повертатися в рівноважний стан (положення рівноваги) після закінчення дії збурення, що порушило цю рівновагу. Нестійка система після дії збурення неперервно віддаляється від рівноважного стану або починає здійснювати навколо нього коливання з наростаючою амплітудою.

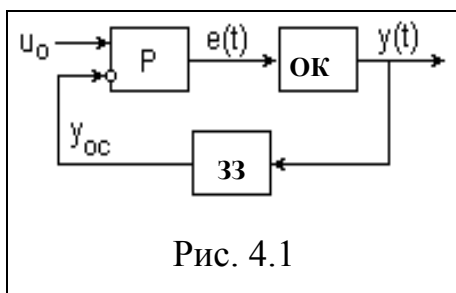


Рис. 4.1

Виникнення нестійких (що розходяться) коливань в системі можна прослідкувати на прикладі стежачої системи із зворотним зв'язком (рис. 4.1). Допустимо, що в сталому стані рівноваги при опорному сигналі u_0 на регуляторі P вихідний стан ОК рівний $y_{уст}$. Цей стан підтримується сигналом розузгодження $e_{уст}$, який формується в регуляторі P по різниці опорного сигналу і сигналу $ЗЗ$ $y_{ос-уст}$, тобто

$e_{уст} = u_0 - y_{oc-уст}$. У перший момент включення системи через інерційність ЗЗ $y_{oc} = 0$, а, отже, $e(t) \gg e_{уст}$, що викликає наростання вихідної величини $y(t)$, яка прагнучиме до $y(t) \gg y_{уст}$ принаймні до тих пір, поки сигнал ЗЗ не почне зменшувати значення $e(t)$. Проте значно збільшена величина $y(t)$ через ЗЗ передається на вхід регулятора системи і може настільки істотно зменшити значення $e(t)$, що це може призвести до подальшого зниження величини вихідного сигналу до значень $y(t) \ll y_{уст}$, тобто до виникнення коливального процесу щодо рівноважного стану. При несприятливому співвідношенні параметрів системи коливальний процес може бути незгасаючим і таким, що навіть розходиться. Приклад такого процесу в концертній акустиці добре відомий – свист з динаміків, якщо коефіцієнт ЗЗ від динаміків на мікрофони на певних частотах стає позитивним.

Стійкість лінійної системи визначається не характером збурення, а структурою самої системи. Говорять, що *система стійка "в малому"*, якщо визначений факт наявності стійкості, але не визначені її межі. Система *стійка "у великому"*, коли визначені межі стійкості і реальні відхилення не виходять за ці межі. Відповідно, й завдання дослідження систем на стійкість може бути поставлено двояко:

- 1) чи стійка система при заданому значенні її параметрів;
- 2) у яких діапазонах можна змінювати параметри системи, не порушуючи її стійкості.

Друга постановка завдання про стійкість має місце при наладці і експлуатації САК.

Відповідно до класичного методу вирішення диференціального рівняння для системи шукається у вигляді:

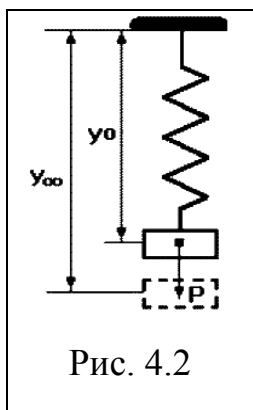
$$y(t) = y_{св}(t) + y_{вн}(t).$$

Тут $y_{св}(t)$ – вільна складова, загальне вирішення однорідного диференціального рівняння з нульовою правою частиною:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

тобто всі зовнішні дії зняті, і стан системи визначаються лише власною структурою.

Функція $y_{\text{вын}}(t)$ є частковим вирішенням неоднорідного диференціального рівняння, під яким розуміється рівняння з ненульовою правою частиною. Фізично це означає, що до системи прикладена зовнішня дія $u(t)$. Тому друга складова загального рішення називається вимушеною. Вона визначає вимушений сталий режим роботи системи після закінчення перехідного процесу.



Можна провести аналогію між САК і пружиною, коливання якої описуються аналогічним диференціальним рівнянням (рис. 4.2). Відтягнемо пружину, а потім відпустимо, надавши їй самій собі. Пружина коливатиметься відповідно до вільної складової вирішення рівняння, характер коливань визначатиметься тільки структурою самої пружини. Якщо підвісити до пружини груз, то на вільні коливання накладеться зовнішня сила P .

Після загасання коливань, що описуються тільки вільною складовою загального рішення, система перейде в новий сталий режим, який характеризується вимушеною складовою $y_{\text{вын}} = y(t \rightarrow \infty)$. Якщо зовнішня дія змінюватиметься по синусоїдальному закону $P = P_0 \sin(\omega t + \varphi)$, то після загасання перехідного процесу система здійснюватиме вимушені коливання з тією ж частотою, що й сила, яка вимушує, тобто $y_{\text{вын}} = y_{\text{max}} \sin(\omega t + \varphi)$.

Таким чином, під стійкістю розуміється властивість системи повертатися в стан рівноваги після виведення її з цього стану і припинення зміни задаючої або збурюючої дії.

Тільки стійка система є працездатною. Основи строгої теорії стійкості динамічних систем були розроблені акад. А.М. Ляпуновим в роботі «Загальне завдання про стійкість руху» (1892 р.). Поняття про стійкість, витікаючі з цієї роботи, полягають в наступному.

Якщо система описується лінійним диференціальним рівнянням, то її стійкість не залежить від величини збурення. Лінійна система, стійка при малих збуреннях, буде стійка і при великих. Нелінійні системи можуть бути стійкі при малих збуреннях і нестійкі при великих.

Про стійкість нелінійних систем при малих збуреннях можна судити по їх

лінеаризованих рівняннях, при великих збуреннях необхідно користуватися нелінійними рівняннями динаміки. У більшості практичних випадків системи, стійкі при малих відхиленнях, виявляються стійкими й при достатньо великих відхиленнях, можливих в процесі експлуатації.

Проблема стійкості зазвичай виникає в замкнутих САК із-за впливу ЗЗ. Тому надалі стійкість досліджується на прикладах замкнутих систем, хоча методи дослідження стійкості універсальні.

4.1.2. Умова стійкості САК.

Стосовно сигналів в САК часткове рішення для вимушеної складової зазвичай має простий вигляд, що не впливає на стійкість. Питання стійкості зводиться до з'ясування стійкості вільного руху системи і вимагає аналізу характеру вирішення рівняння вільного руху, складеного відносно відхилення вихідної величини $y(t)$ від сталого стану.

Як відомо, передавальна функція будь-якої лінійної динамічної системи може бути приведена до вигляду:

$$W(p) = K(p)/H(p) = [b_0p^m + b_1p^{m-1} + \dots + b_{m-1}p + b_m] / [a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n], \quad (4.1)$$

де a і b – постійні коефіцієнти, які є дійсними числами і виражаються через конкретні фізичні параметри елементів системи. Поліном $K(p)$ може не містити членів з оператором p і бути добутком коефіцієнтів передачі ланок, створюючих систему.

Найважливішою властивістю виразу (4.1) є умова $n \geq m$, тобто порядок полінома $H(p)$ знаменника передавальної функції не нижче за порядок полінома $K(p)$ її чисельника. Ця умова витікає з фізичних властивостей ланок реальних динамічних систем.

З виразу (4.1) передавальної функції системи можна отримати диференціальне рівняння системи в цілому як в розімкненому, так і в замкнутому стані.

Рівняння розімкнених систем. Якщо вираз (4.1) є передавальною функцією розімкненої системи, то вираз

$$y(p) H(p) = u(p) K(p), \quad (4.2)$$

буде операторним рівнянням розімкненої системи (рівняння в зображеннях змінних). Поклавши в (4.2) $u(p)=0$, отримаємо операторне рівняння вільного руху в розімкненій лінійній динамічній системі:

$$y(p) H(p) = 0. \quad (4.3)$$

Переходячи в (4.3) до оригіналів, тобто від операторного рівняння до диференціального, і позначивши $y(t)=x$, отримуємо диференціальне рівняння вільного руху в розімкненій лінійній динамічній системі

$$a_0 d^n x/dt^n + a_1 d^{n-1} x/dt^{n-1} + \dots + a_{n-1} dx/dt + a_n = 0 \quad (4.4)$$

Характеристичним рівнянням, відповідним диференціальному рівнянню (4.4), буде

$$H(p) = 0, \quad a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (4.5)$$

Звідси слідує: прирівняний нулю знаменник передавальної функції розімкненої лінійної динамічної системи є характеристичним рівнянням, відповідним диференціальному рівнянню розімкненої системи. У зв'язку з цим многочлен $H(p)=0$ називається *характеристичним оператором системи*.

Рівняння замкнутих систем. Хай (4.1) є передавальною функцією розімкненої системи. Для замкнутої системи через негативний головний ЗЗ маємо $u(t) = -y(t)$, і (4.2) приймає вид $H(p) y(p) = -K(p) y(p)$. Операторне рівняння вільного руху в замкнутій системі:

$$[K(p)+H(p)]y(p) = 0, \quad (4.6)$$

де $K(p)$, $H(p)$ – відповідно чисельник і знаменник передавальної функції розімкненої системи; $y(p)$ – зображення координати системи в точці її замикання.

На підставі (4.6) можна записати характеристичне рівняння, відповідне диференціальному рівнянню вільного руху в замкнутій системі

$$K(p) + H(p) = 0.$$

З урахуванням того, що $W_{oc}(p) = 1$, передавальна функція замкнутої системи:

$$W_{zc}(p) = W(p)/[1 + W(p)],$$

де $W(p)=K(p)/H(p)$ – передавальна функція розімкненої системи. Тоді:

$$W_{zc}(p) = K(p)/[K(p) + H(p)] = K(p)/H_{zc}(p).$$

На цій підставі характеристичне рівняння замкнутої системи можна записати у вигляді $H_{zc}(p) = 0$.

Таким чином, прирівняна нулю сума полінома чисельника і полінома знаменника передавальної функції розімкненої системи або прирівняний нулю поліном знаменника передавальної функції замкнутої системи є характеристичним рівнянням, відповідним диференціальному рівнянню вільного руху в замкнутій системі.

Коріння характеристичних рівнянь систем може бути або дійсними, або попарно комплексно зв'язаними. Вирішення однорідного рівняння виражається через коріння характеристичного рівняння і коефіцієнти перед експонентами, які можуть бути обчислені через вирахування:

$$y_{cb}(t) = \sum_{n=1}^N C_n \exp(p_n t). \quad (4.7)$$

Умова стійкості систем по Ляпунову формулюється так: *у стійкій системі вільна складова вирішення рівняння динаміки, записаного у відхиленнях, повинна прагнути до нуля, тобто затухати.*

З формули (4.7) неважко вивести умову стійкості лінійних динамічних систем: *лінійна система буде стійка, якщо все дійсне коріння і всі дійсні частини комплексного коріння характеристичного рівняння, відповідного початковому диференціальному рівнянню вільного руху системи, будуть негативним, що дає затухаючі по експоненті рішення. Якщо є чисто уявне коріння, то в перехідному процесі будуть гармонійні незгасаючі компоненти.*

Таким чином, дослідження стійкості системи зводиться до визначення знаків дійсних частин коріння характеристичного рівняння системи. Але вирішення рівнянь четвертої і вищих ступенів може зустрічати утруднення. Тому застосовуються непрямі методи аналізу стійкості без визначення коріння характеристичного рівняння. Правила, що дозволяють судити про знаки коріння характеристичного рівняння без його рішення, називаються *критеріями стійкості*. Їх можна розділити на *алгебраїчні* (засновані на складанні по даному харак-

теристичному рівнянню по певних правилах виразів алгебри, по яких можна судити про стійкість САК) і частотні (засновані на дослідженні частотних характеристик).

Перевірку факту негативності речових частин коріння можна виконувати трьома способами:

- обчисливши коріння безпосередньо, з використанням готових програм;
- пов'язавши розташування коріння з коефіцієнтами характеристичного рівняння для подальшого аналітичного дослідження;
- судити про стійкість по частотних характеристиках САК.

Перші два способи називають алгебраїчними, останній – частотним. У інженерній практиці необхідно мати ефективні і зручні правила перевірки стійкості. Сам по собі критерій не зобов'язаний бути необхідною і достатньою умовою.

Кожному негативному речовому корню α_i відповідає експоненціально за-

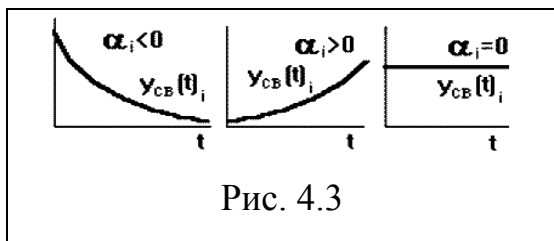


Рис. 4.3

тухаюча в часі складова $y_{cb}(t)_i$ і кожному позитивному корню, що експоненціально розходиться (або нульовому) відповідає $y_{cb}(t)_i = \text{const}$ (рис. 4.3).

Пара комплексно зв'язаного коріння з негативною дійсною частиною ви-

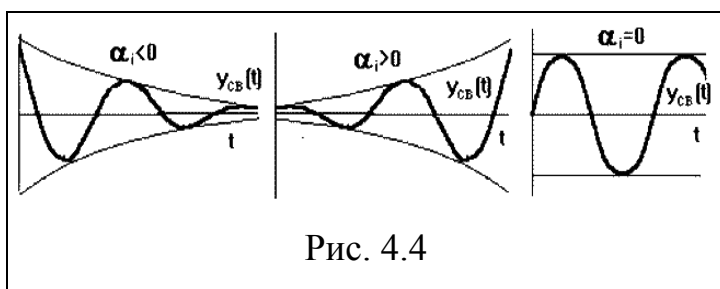


Рис. 4.4

значає затухаючі коливання з частотою ω_i , при позитивній дійсній частині – коливання, що розходяться, при нульовій – незгасаючі (рис. 4.4).

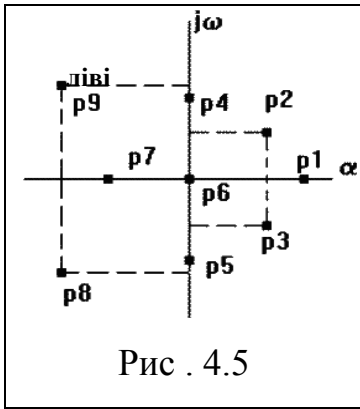


Рис . 4.5

Виходячи з розташування на комплексній площині, коріння з негативними дійсними частинами називається лівим, з позитивними – правими (рис. 4.5). Тому умову стійкості лінійної САК можна сформулювати таким чином: *для того, щоб система була стійка, необхідно і достатньо, щоб все коріння її характеристичного рівняння було лівим.* Якщо хоч би один корінь правий, то система нестійка. Якщо один з коріння рівний нулю, а решта лівих, то система знаходиться на межі аперіодичної стійкості. Якщо рівні нулю дійсні частини однієї або декількох пар комплексно зв'язаного коріння, то система знаходиться на межі коливальної стійкості.

4.1.3. Алгебраїчні критерії стійкості.

Необхідна умова стійкості. Якщо все коріння характеристичного рівняння ліве (дійсні частини всього коріння негативні), то всі коефіцієнти рівняння мають один знак, тобто $\{a_n \gg 0\}$ одночасно. Рівність коефіцієнтів нулю не допускається (межа стійкості). Доказ дуже простий і полягає в розкладанні полінома на прості множники – дужки. Ці дужки можуть бути речові або комплексно-зв'язані. Об'єднаємо останні в пари і перемножимо, при цьому в дужках немає жодного негативного числа, а, отже, знак всіх членів характеристичного рівняння визначатиметься знаком коефіцієнта a_0 . Надалі розглядатимемо тільки рівняння, де $a_0 > 0$. Інакше рівняння множиться на -1.

Розглянута умова при порядку системи більше 2 є необхідною, але не достатньою умовою, і застосовується для відсіювання свідомо нестійких систем. Необхідні і достатні умови дають критерії алгебри Рауса і Гурвіця.

4.1.4. Критерій Рауса.

Використовується у вигляді алгоритму, по якому заповнюється спеціальна таблиця з використанням коефіцієнтів характеристичного рівняння:

- 1) у першому рядку записуються коефіцієнти рівняння з парними індексами в порядку їх зростання;
- 2) у другому рядку – аналогічно коефіцієнти з непарними індексами;
- 3) решта елементів таблиці визначається по формулі: $c_{k,i} = c_{k+1,i-2} - r_i c_{k+1,i-1}$, де $r_i = c_{1,i-2}/c_{1,i-1}$, $i \geq 3$ – номер рядка, k – номер стовпця;
- 4) число рядків таблиці на одиницю більше порядку характеристичного рівняння.

Щоб САК була стійка, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти першого стовпця таблиці Рауса $c_{11}, c_{12}, c_{13}, \dots$ були позитивними. Якщо це не виконується, то система нестійка, а кількість правого коріння рівна числу змін знаку в першому стовпці.

r_i	$i \backslash k$	1	2	3	4
-	1	$c_{11} = a_0$	$c_{21} = a_2$	$c_{31} = a_4$...
-	2	$c_{12} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{32} = a_5$...
$r_3 = c_{11}/c_{12}$	3	$c_{13} = c_{21} - r_3 c_{22}$	$c_{23} = c_{31} - r_3 c_{32}$	$c_{33} = c_{41} - r_3 c_{42}$...
$r_4 = c_{12}/c_{13}$	4	$c_{14} = c_{22} - r_4 c_{23}$	$c_{24} = c_{32} - r_4 c_{33}$	$c_{34} = c_{42} - r_4 c_{43}$...
...

Перевага – критерій простий у використанні незалежно від порядку характеристичного рівняння. Він зручний для використання на ЕОМ. Його недолік – мала наочність, важко судити про ступінь стійкості системи, наскільки далеко стоїть вона від межі стійкості.

4.1.5. Критерій Гурвіця.

Гурвиць запропонував інший критерій стійкості. З коефіцієнтів характеристичного рівняння будується визначник Гурвіця Δ по алгоритму:

- 1) по головній діагоналі зліва направо виставляються всі коефіцієнти характеристичного рівняння від a_1 до a_n ;

2) від кожного елемента діагоналі вгору і вниз добудовуються стовпці визначника таким чином, щоб індекси убували зверху вниз (рис. 4.6);

3) на місце коефіцієнтів з індексами менше нуля або більше n ставляться

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Рис. 4.6

нулі.

Щоб САК була стійка, необхідно і достатньо, щоб всі коефіцієнти характеристичного рівняння і все n головних діагональних мінорів матриці Гурвиця були позитивні. Число визначників Гурвиця

рівне порядку характеристичного рівняння n .

Критерій Гурвиця застосовують при $n \leq 5$. При великих порядках зростає число визначників, і процес стає трудомістким. Недолік критерію Гурвиця – мала наочність. Перевага – зручність для реалізації на ЕОМ. Його часто використовують для визначення впливу одного з параметрів САК на її стійкість. Так рівність нулю головного визначника $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} = 0$ говорить про те, що система знаходиться на межі стійкості. При цьому або $a_n = 0$ – при виконанні решти умов система знаходиться на межі аперіодичної стійкості, або передостанній мінор $\Delta_{n-1} = 0$ – при позитивності решти всього мінору система знаходиться на межі коливальної стійкості. Параметри САК визначають значення коефіцієнтів рівняння динаміки, отже, зміна будь-якого параметра K_i впливає на значення визначника Δ_{n-1} . Досліджуючи цей вплив можна знайти, при якому значенні K_i визначник Δ_{n-1} стане рівний нулю. Це і буде граничне значення досліджуваного параметра, після якого система стає нестійкою.

4.2. Частотні критерії стійкості САК

Частотні методи дослідження стійкості засновані на зв'язку розташування коріння характеристичного полінома $D(p)$ з годографом цього полінома на комплексній площині, тобто з графіком комплексної функції $D(j\omega)$ при зміні ω від 0 до ∞ . Це графоаналітичні методи, що дозволяють по вигляду ЧХ САК судити про їх стійкість. Їх перевага – в простій геометричній інтерпретації, наочності і

у відсутності обмежень на порядок диференціального рівняння.

4.2.1. Принцип аргументу.

Запишемо характеристичний поліном САК у вигляді

$$D(p) = a_0 (p-p_1) (p-p_2) \dots (p-p_n) = 0,$$

Його коріння: $p_i = a_i + j\omega_i = |p_i| \exp(j \arg(p_i))$, де $\arg(p_i) = \arg(p_i) = \arctg(\omega_i/a_i) + k\pi$, $|p_i|$ – значення модулів коріння.

Кожен корінь можна зобразити вектором на комплексній площині (рис. 4.7,а), тоді різниця $p-p_i$ зобразиться різницею векторів (рис. 4.7,б), де p – довільне число. Якщо міняти значення p довільним чином, то кінець вектора $p-p_i$ переміщатиметься по комплексній площині, а його початок залишатиметься нерухомим, оскільки p_i – це конкретне незмінне значення. В окремому випадку, якщо на вхід системи подавати гармонійні коливання з різною частотою ω , то $p = j\omega$, а характеристичний поліном приймає вигляд:

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega - p_1) (j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n).$$

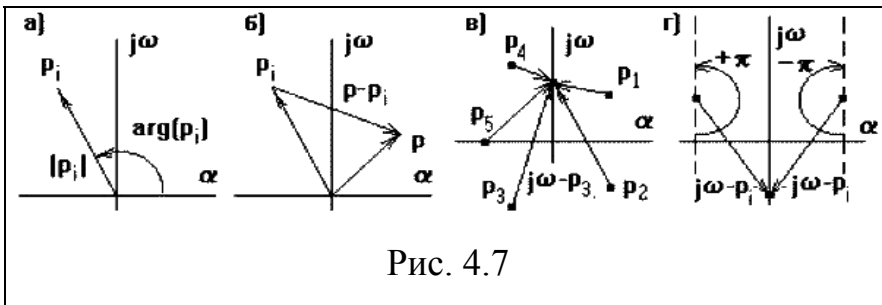


Рис. 4.7

При цьому кінці векторів $j\omega - p_i$ знаходяться на уявній осі (рис. 4.7,в). Якщо міняти ω від $-\infty$ до $+\infty$, то

кожен вектор $j\omega - p_i$ буде повертатися щодо свого початку p_i на кут $+\pi$ для лівого і $-\pi$ для правого коріння (рис. 4.7,г).

Характеристичний поліном можна представити у вигляді

$$D(j\omega) = |D(j\omega)| \exp(j \arg(D(j\omega))),$$

де $|D(j\omega)| = a_0 |j\omega - p_1| |j\omega - p_2| \dots |j\omega - p_n|$, $\arg(D(j\omega)) = \arg(j\omega - p_1) + \arg(j\omega - p_2) + \dots + \arg(j\omega - p_n)$.

Хай з n коріння m - праві, а $n-m$ - ліві, тоді кут повороту вектора $D(j\omega)$ при зміні ω от $-\infty$ до ∞ рівний

$$\Delta \arg(D(j\omega)) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - p_i) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = (n - m)\pi - m\pi,$$

або при зміні ω від 0 до $+\infty$:

$$\Delta \arg(D(j\omega)) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = (n - 2m)(\pi/2).$$

Звідси витікає правило: зміна аргументу вектора D при зміні частоти від $-\infty$ до $+\infty$ рівно різниці між числом лівого і правого коріння рівняння $D(p) = 0$, помноженому на π , а при зміні частоти від 0 до $+\infty$ ця різниця умножається на $\pi/2$.

Це і є принцип аргументу. Він покладений в основі всіх частотних критеріїв стійкості. Ми розглянемо два найбільш поширених критерії: критерій Михайлова і критерій Найквіста.

4.2.2. Критерій стійкості Михайлова.

Оскільки для стійкої САК число правого коріння $m = 0$, то кут повороту вектора $D(j\omega)$ складе

$$\Delta \arg(D(j\omega)) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n\pi/2 \quad (4.8)$$

САК буде стійка, якщо вектор $D(j\omega)$ при зміні частоти від 0 до $+\infty$ обернеться на кут $n\pi/2$. При цьому кінець вектора опише криву, звану годографом Михайлова. Для побудови годографа вираз (4.5) записується із заміною p на $j\omega$ у формі:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = D(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

де $P(\omega)$ – речова частина, як сума всіх членів характеристичного рівняння, що містять j в парних ступенях, Q – уявна частина виразу. Годограф починається на позитивній піввісі при $D(0) = a_n$, і, при зміні частоти від 0 до ∞ , послідовно проходить проти годинникової стрілки n квадрантів комплексної площини, з відходом в нескінченність в n -ом квадранті (рис. 4.8,а).

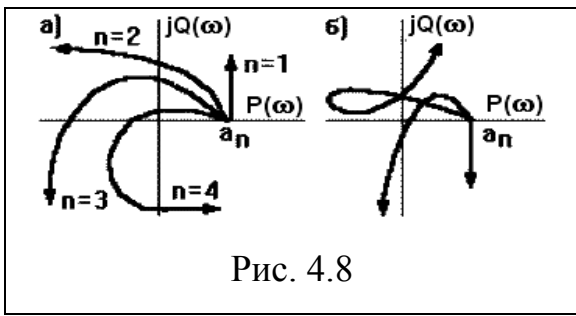


Рис. 4.8

Якщо це правило порушується (наприклад, число прохідних кривою квадратів не рівне n , або порушується послідовність проходження квадрантів (рис. 4.8,б)), то така САК нестійка – це і є необхідна і достатня умова стійкості по критерію Михайлова.

Критерій зручний своєю наочністю і використовується, якщо відоме рівняння замкнутої САК. Якщо крива проходить поблизу початку координат, то САУК знаходиться поблизу межі стійкості, і навпаки.

4.2.3. Критерій стійкості Найквіста.

Цей критерій заснований на зв'язку властивості стійкості замкнутої системи з формою АФЧХ розімкненої стійкої системи. Розімкненою системою є всі послідовно сполучені блоки від входу системи до точки замикання ЗЗ (рис. 4.9). Дослідження розімкненої САК простіше, ніж замкнутої, і її можна проводити експериментально.

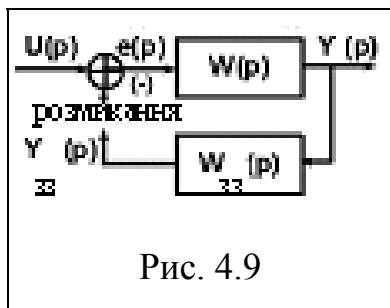


Рис. 4.9

Передавальна функція W_{pc} розімкненої САК:

$$W_{pc}(j\omega) = K_{pc}(j\omega)/H_{pc}(j\omega),$$

з кутом повороту фази відповідно до виразу (4.8):

$$\Delta \arg H_{pc}(j\omega) = n\pi/2, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (4.9)$$

АФЧХ замкнутої системи описується виразом:

$$W_{zc}(j\omega) = W_{pc}(j\omega) / [1 + W_{pc}(j\omega)].$$

Позначимо знаменник цього виразу через $W_1(j\omega)$:

$$W_1(j\omega) = 1 + W_{pc}(j\omega) = 1 + K_{pc}(j\omega)/H_{pc}(j\omega) = H(j\omega)/H_{pc}(j\omega), \quad (4.10)$$

де $H(j\omega) = K_{pc}(j\omega) + H_{pc}(j\omega)$ – характеристичний поліном замкнутої системи при $p=j\omega$.

Відповідно до властивостей передавальних функцій порядок полінома $H(p)$ не перевищує порядку полінома $H_{pc}(p)$, оскільки $H(p) = K_{pc}(p) + H_{pc}(p)$, а порядок полінома $K_{pc}(p)$ менше порядку полінома $H_{pc}(p)$. Тому критерій Михайлова для замкнутої системи відповідає виразу:

$$\Delta \arg H(j\omega) = (n - 2m) \pi/2, \quad 0 \leq \omega \leq \infty.$$

де m – число правого коріння системи, що має в замкнутому стані характеристичний поліном $H(p)=0$.

З (4.10) слідує:

$$\Delta \arg W_1(j\omega) = \Delta \arg H(j\omega) - \Delta \arg H_{pc}(j\omega).$$

З урахуванням (4.9):

$$\Delta \arg W_1(j\omega) = (n - 2m) (\pi/2) - n\pi/2 = -m\pi.$$

У стійкій замкнутій системі правого коріння в характеристичному рівнянні немає, тобто $m=0$, а, отже, умовою стійкості замкнутої системи буде:

$$\Delta \arg W_1(j\omega) = 0. \quad (4.11)$$

Умова (4.11) виконується тільки тоді, коли крива $W_1(j\omega)$ при зміні частоти від 0 до ∞ не охоплює початку координат комплексної площини. Дійсно, тільки в цьому випадку результуючий поворот вектора $W_1(j\omega)$ при зміні ω від 0 до ∞ буде рівний нулю, оскільки зростання кута $\varphi(\omega)$, обумовлене рухом вектора $W_1(j\omega)$ в позитивному напрямі (проти годинникової стрілки), компенсуватиметься таким же убуттям $\varphi(\omega)$, обумовленим рухом вектора $W_1(j\omega)$ в негативному напрямі (за годинниковою стрілкою).

Як видно з (4.10), перехід на комплексній площині від годографа вектора $W_1(j\omega)$ до годографа вектора АФЧХ розімкненої системи $W_{pc}(j\omega)$ здійснюється зсувом кривої $W_1(j\omega)$ вліво на -1, оскільки $W_{pc}(j\omega) = W_1(j\omega) - 1$. З урахуванням цієї операції, отримуємо наступне формулювання амплітудно-фазового критерію стійкості Найквіста: лінійна динамічна система, що стійка в розімкненому стані, стійка і в замкнутому стані, якщо АФЧХ розімкненої системи $W_{pc}(j\omega)$ при зміні частоти від 0 до ∞ не охоплює на комплексній площині точку з координатами $(-1; j0)$ (рис. 4.10, годограф 2).

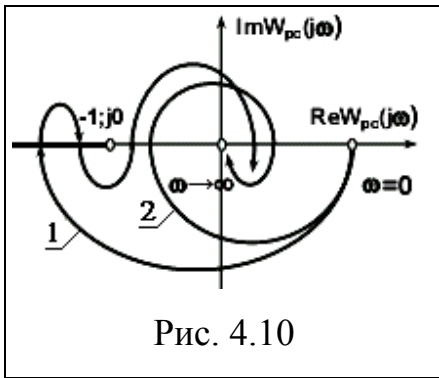


Рис. 4.10

Більш загальне формулювання критерію Найквіста відноситься до систем, що мають так звану АФЧХ другого роду (рис. 4.10, годограф 1), коли $W_{pc}(j\omega)$ перетинає (необмежену кількість разів) речову вісь лівіше за точку $Re W_{pc}(\omega) = -1$. Вважатимемо позитивним перехід годографа через речову вісь, якщо він здійснюється зверху вниз, і негативним, якщо він здійснюється від низу до верху.

Для таких годографів критерій Найквіста формулюється в наступному вигляді: лінійна динамічна система, що стійка в розімкненому стані, стійка і в замкнутому стані, якщо при зміні частоти від 0 до ∞ різниця між числом позитивних переходів годографа АФЧХ розімкненої системи через ділянку речової осі $(-1; -\infty)$ і числом негативних переходів рівна нулю. З цієї умови видно, що система, стійка в розімкненому стані і АФЧХ, що має, у формі кривій 1 на рис. 4.10, стійка і в замкнутому стані.

На рис. 4.11,а наведені АФЧХ розімкнених САК, стійких в замкнутому стані, на рис. 4.11,б – замкнута САК нестійка.

На рис. 4.11,в і 4.11,г показані АФЧХ розімкнених астатичних САК, відповідно стійких і нестійких в замкнутому стані. Їх особливість в тому, що

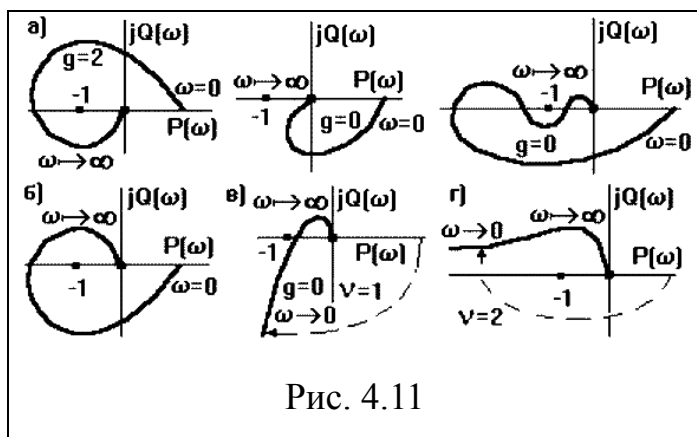


Рис. 4.11

АФЧХ при $\omega \rightarrow 0$ йде в нескінченність. В цьому випадку при використанні критерію Найквіста її в думках замикають на речову вісь по дузі кола нескінченно великого радіусу.

Критерій Найквіста наочний.

Він дозволяє не тільки виявити, чи стійка САК, але й, у випадку, якщо вона нестійка, намалювати заходи по досягненню стійкості.

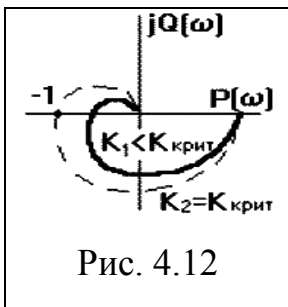
4.3. Запас стійкості САК

4.3.1. Поняття структурної стійкості.

АФЧХ астатичних САК може бути нестійкою з двох причин: невідповідний склад динамічних ланок і невідповідні значення параметрів ланок.

САК, нестійкі з першої причини, називаються *структурно нестійкими*. Це означає, що зміною параметрів САК не можна добитися її стійкості, потрібно міняти її структуру.

Наприклад, якщо САУК складається з будь-якої кількості інерційних і коливальних ланок, вона має вигляд, показаний на рис. 4.12. При збільшенні коефіцієнта посилення САК K кожна точка її АФЧХ віддаляється від початку координат, поки при деякому значенні $K_{\text{крит}}$ АФЧХ не перетне точку $(-1, j0)$. При подальшому збільшенні K , САК буде нестійка. І, навпаки, при зменшенні K такої САК, в принципі, можна зробити стійкою, тому її називають *структурно стійкою*.

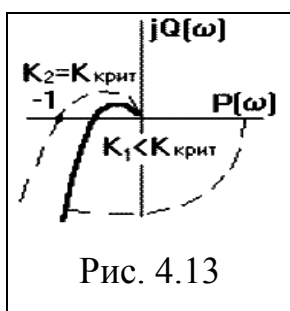


динат, поки при деякому значенні $K_{\text{крит}}$ АФЧХ не перетне точку $(-1, j0)$. При подальшому збільшенні K , САК буде нестійка. І, навпаки, при зменшенні K такої САК, в принципі, можна зробити стійкою, тому її називають *структурно стійкою*.

Якщо САК астатична, то n – порядок астатизму, рівний кількості послідовно включених інтеграторів. При їх розмиканні характеристичне рівняння системи має нульове коріння, тому при $\omega \rightarrow \infty$ АФЧХ прагне до ∞ (рис. 4.11,в і 4.11,г).

Наприклад, нехай $W_p(p) = K/(p(Tp+1))$, тоді АФЧХ розімкненої САК:

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega T + 1)} = \frac{K}{j\omega - \omega^2 T} = \frac{K\omega^2 T - jK\omega}{\omega^2 + \omega^4 T^2} = P(\omega) + jQ(\omega).$$



Оскільки порядок знаменника більше порядку чисельника, то при $\omega \rightarrow 0$ маємо $P(\omega) \rightarrow \infty$, $Q(\omega) \rightarrow -j\infty$. Подібна АФЧХ представлена на рис. 4.13. Оскільки АФЧХ терпить розрив, важко сказати, чи охоплює вона точку $(-1, j0)$. В цьому випадку користуються наступним прийомом: якщо АФЧХ терпить розрив, йдучи в нескінченність при $\omega \rightarrow 0$, її

доповнюють в думках півколом нескінченного радіусу, що починається на пози-

тивній речовій піввісі і продовжується до АФЧХ в негативному напрямі. Після цього можна застосувати критерій Найквіста. Як видно з рисунка, САК, що має одну інтегруючу ланку, є структурно стійкою.

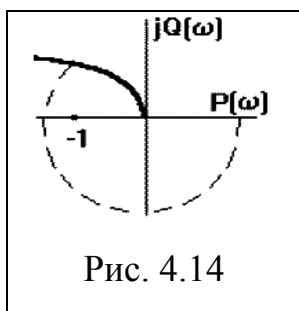


Рис. 4.14

Якщо САК має дві інтегруючі ланки (порядок астатизму 2), її АФЧХ йде в нескінченність в другому квадранті (рис. 4.14). Наприклад, нехай $W_p(p) = K/(p^2(Tp+1))$, тоді АФЧХ САК:

$$W(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2(j\omega T + 1)} = \frac{K}{-\omega^2 - j\omega^3 T} = \frac{-K\omega^2 + jK\omega^3 T}{\omega^4 + \omega^6 T^2} = P(\omega) + jQ(\omega).$$

При $\omega \rightarrow 0$ маємо $P(\omega) \rightarrow -\infty$, $Q(\omega) \rightarrow j\infty$. Така САК не буде стійкою ні при яких значеннях параметрів, тобто вона *структурно нестійка*.

Структурно нестійку САК можна зробити стійкою, включивши в неї ланки (наприклад, диференціюючі), що коректують, або змінивши структуру САК, наприклад, за допомогою місцевих ЗЗ.

4.3.2. Поняття запасу стійкості.

В умовах експлуатації параметри системи по тих або інших причинах можуть мінятися в певних межах (старіння, температурні коливання тощо). Ці коливання параметрів можуть призвести до втрати стійкості системи, якщо вона працює поблизу межі стійкості. Тому прагнуть спроектувати САК таким чином, щоб вона працювала далеко від межі стійкості. Ступінь цього видалення називають *запасом стійкості*.

Згідно критерію Найквіста, чим далі АФЧХ від критичної точки $(-1, j0)$, тим більше запас стійкості. Розрізняють запаси стійкості по модулю і по фазі.

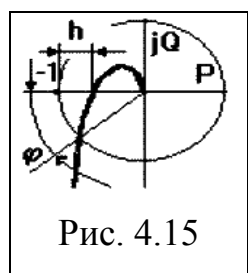


Рис. 4.15

Запас стійкості по модулю характеризує віддалення годографа АФЧХ розімкненою САК від критичної точки у напрямі речової осі і визначається відстанню h від критичної точки до точки перетину годографом осі абсцис (рис. 4.15).

Запас стійкості по фазі характеризує віддалення годог-

рафа від критичної точки по дузі кола одиничного радіусу і визначається кутом φ між негативним напрямом речової піввісі і променем, проведеним з початку координат в точку перетину годографа з одиничним колом.

Як вже наголошувалось, із зростанням коефіцієнта передачі розімкненої

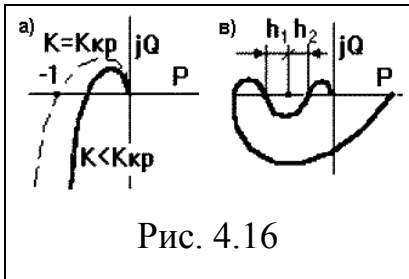


Рис. 4.16

САК росте модуль кожної точки АФЧХ і при деякому значенні $K = K_{кр}$ АФЧХ пройде через критичну точку (рис. 4.16,а) і потрапить на межу стійкості, а при $K > K_{кр}$ замкнута САК стане нестійка. Проте у разі АФЧХ типу 1 (рис. 4.10) (виходять із-за наявності

внутрішніх ЗЗ) не тільки збільшення, але і зменшення K може привести до втрати стійкості замкнутих САК (рис. 4.16,б). В цьому випадку запас стійкості визначається двома відрізками h_1 і h_2 , увязаними між критичною точкою і АФЧХ.

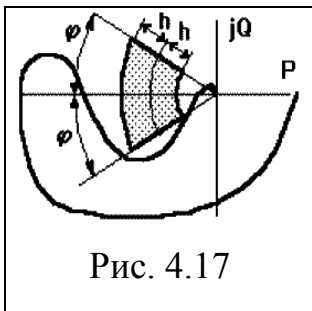


Рис. 4.17

Зазвичай при створенні САК задаються необхідними запасами стійкості h і φ , за межі яких він виходити не повинен. Ці межі виставляються у вигляді сектора, що викреслюється навколо критичної точки, в якій АФЧХ розімкненої САК входить не повинна (рис. 4.17).

4.3.3. Аналіз стійкості по ЛЧХ.

Оцінку стійкості по критерію Найквіста зручніше проводити по ЛЧХ розімкненої САК. Очевидно, що кожній точці АФЧХ відповідатимуть певні точки ЛАЧХ і ЛФЧХ.

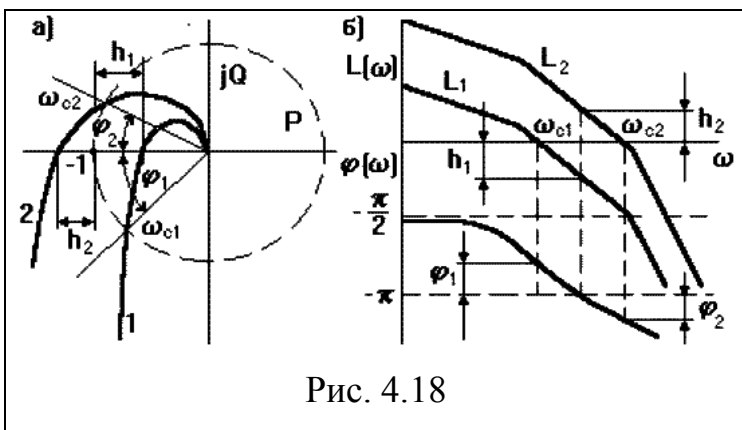


Рис. 4.18

Хай відомі ЧХ двох розімкнених САК (1 і 2), що відрізняються одна від одної тільки коефіцієнтом передачі $K_1 < K_2$. Хай перша САК стійка в замкнутому стані, друга ні (рис. 4.18).

Якщо $W_1(p)$ – передавальна функція першої САК, то передавальна функція другої САК $W_2(p) = K \cdot W_1(p)$, де $K = K_2/K_1$. Другу САК можна представити послідовним ланцюжком з двох ланок з передавальними функціями K (безінерційна ланка) і $W_1(p)$, тому результуючі ЛЧХ будуються як сума ЛЧХ кожної з ланок. Тому ЛАЧХ другої САК: $L_2(\omega) = 20 \lg K + L_1(\omega)$, а ЛФЧХ: $\varphi_2(\omega) = \varphi_1(\omega)$.

Перетинам АФЧХ речової осі відповідає значення фази $\varphi = -\pi$. Це відповідає точці перетину ЛФЧХ $\varphi = -\pi$ лінії координатної сітки. При цьому, як видно на АФЧХ, амплітуди $A_1(\omega) < 1$, $A_2(\omega) > 1$, що відповідає на ЛАЧХ значенням $L_1(\omega) = 20 \lg A_1(\omega) < 0$ и $L_2(\omega) > 0$.

Порівнюючи АФЧХ і ЛФЧХ можна укласти, що система в замкнутому стані буде стійка, якщо значенню ЛФЧХ $\varphi = -\pi$ відповідатимуть негативні значення ЛАЧХ і навпаки. Запасам стійкості по модулю h_1 і h_2 , визначеним по АФЧХ відповідають відстані від осі абсцис до ЛАЧХ в точках, $\varphi = -\pi$, але в логарифмічному масштабі.

Особливими точками є точки перетину АФЧХ з одиничним колом. Частоти ω_{c1} и ω_{c2} , при яких це відбувається, називають *частотами зрізу*.

В точках перетину $A(\omega) = 1 \Rightarrow L(\omega) = 0$ – ЛАЧХ перетинає горизонтальну вісь. Якщо при частоті зрізу фаза АФЧХ $\varphi_{c1} > -\pi$ (рис. 4.18,а крива 1), то замкнута САК стійка. На рис. 4.18,б це виглядає так, що перетину ЛАЧХ горизонтальної осі відповідає точка ЛФЧХ, розташована вище за лінію $\varphi = -\pi$. І, навпаки, для нестійкої замкнутою САК (мрис. 4.18,а крива 2) $\varphi_{c2} < -\pi$, тому при $\omega = \omega_{c2}$ ЛФЧХ проходить нижче за лінію $\varphi = -\pi$. Кут $\varphi_1 = \varphi_{c1} - (-\pi)$ є запасом стійкості по фазі. Цей кут відповідає відстані від лінії $\varphi = -\pi$ до ЛФЧХ.

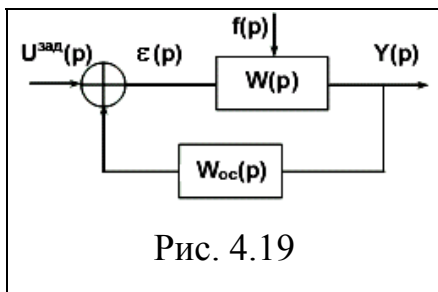
Виходячи з сказаного, критерій стійкості Найквіста по логарифмічних ЧХ, у випадках, коли АФЧХ тільки один раз перетинає відрізок речової осі $[-\infty; -1]$, можна сформулювати так: для того, щоб замкнута САК була стійка необхідно і достатньо, щоб частота, при якій ЛФЧХ перетинає лінію $\varphi = -\pi$, була більше частоти зрізу.

Якщо АФЧХ розімкненою САК має складний вигляд, то ЛФЧХ може кі-

лька разів перетинати лінію $\varphi = -\pi$. В цьому випадку застосування критерію Найквіста декілька ускладнюється. Проте у багатьох випадках дане формулювання критерію Найквіста виявляється достатнім.

4.4. Точність САК

Поняття точності є центральним в теорії автоматичного керування, оскільки дозволяє кількісно виразити показники якості САК. Розрізняють точність, що розглядається в перехідному процесі, – динамічна точність, і точність в сталому режимі – статична точність.



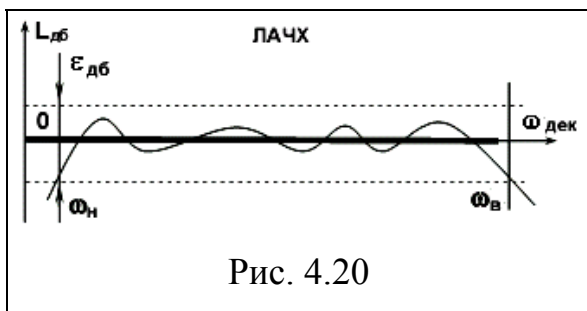
Найпростіше розглянути поняття точності на прикладі стежачої системи (рис. 4.19). Для цього найкращим чином застосовна передавальна функція похибки, що дозволяє записати сигнал похибки при будь-якому виді задаючої дії:

$$\varepsilon(p) = W_\varepsilon(p) U^{\text{зад}}(p) + W_{\varepsilon f}(p) f(p).$$

4.4.1. Статична точність.

Статична точність в стежачій системі визначається при гармонійній входній дії з використанням передавальної функції похибки:

$$\varepsilon(p) = W_\varepsilon(p) U^{\text{зад}}(p), \quad W_\varepsilon(p) = 1/(1+W(p)).$$



Розглянемо ЛЧХ системи в сталому режимі при гармонійній входній дії (рис. 4.20). Жирною лінією показаний ідеальний випадок абсолютно точної системи. Реальна ЧХ відрізняється від ідеальної і в деякій смузі (ω_n, ω_v) не виходить за межі

допуску ε . Таке ж міркування справедливе і для ФЧХ. Задавши допустимі межі точності по амплітуді і по фазі, отримуємо область частот, де гарантується дана точність – це смуга пропускання. Задаючи необхідну робочу частоту по приве-

дених вище формулах можна обчислити похибку на цій частоті при гармонійній дії.

Загальний спосіб підвищення точності (у статичному і динамічному режимах) – забезпечення наступних оцінок:

$W_{zc}(p) = W(p)/(1+W(p)) \approx 1$ – міра точності відтворення задаючої дії в замкнутій системі;

$W_c(p) = 1/(1+W(p)) \approx 0$ – міра похибки стеження.

Один з основних способів підвищення точності – збільшення коефіцієнта k розімкненої системи. При збільшенні k обидві наближені рівності оцінок виконуються все більш точно, що говорить про загальне підвищення точності, причому це підвищення точності відбувається при будь-якій $W(p)$.

Проте це не означає, що можна таким чином досягти будь-якої бажаної точності. Тут починає позначатися одна з фундаментальних суперечностей в рамках теорії стійкості – суперечність між точністю системи і запасом стійкості. При надмірному збільшенні k можлива втрата стійкості замкнутої системи. Годограф Найквіста, що не охоплює крапку $(-1; j0)$, але що проходить, наприклад, з 3 квадранта в другий, при збільшенні k "роздувається" відносно початку координат і починає охоплювати цю точку, тобто порушується умова критерію стійкості Найквіста. Підвищення точності завжди призводить до зменшення запасу стійкості по амплітуді.

Конкретні значення точності аналізованої САК проводяться розкладанням $W_\varepsilon(p)$ в ряд Тейлора в околицях $p=0$ і аналізом коефіцієнтів цього ряду.

4.4.2. Динамічна точність.

Динамічна точність відноситься до складніших завдань аналізу САК, оскільки вимагає вивчення всього перехідного процесу. При достатньо великому значенні модуля АФЧХ в розімкненій системі передавальна функція прямої гілки має мале значення, передавальна функція замкнутої системи в основному визначатиметься ланцюгом ЗЗ. Якщо коефіцієнт передачі розімкненої системи

багато більше одиниці $W(p)W_{oc}(p) \gg 1$ и $|W(p)| \gg 1$, то для замкнутої системи можна прийняти:

$$W_{zc}(p) = W(p)/(1+W(p)W_{oc}(p)) \approx 1/W_{oc}(p),$$

що істотно спрощує аналіз системи.

Для підвищення динамічної точності системи зазвичай використовується принцип комбінованого керування по задаючій дії (принцип інваріантності).

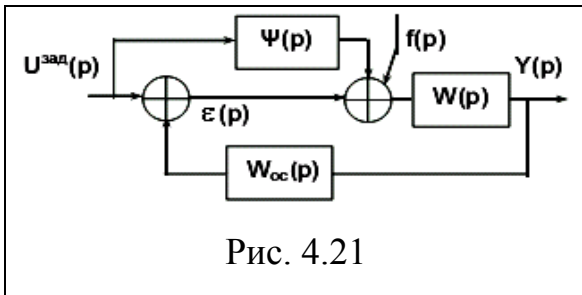


Рис. 4.21

Додамо в стандартну структуру системи додаткову передавальну функцію $\Psi(p) \approx 1/(W(p)W_{oc}(p))$ так, щоб сигнал похибки взагалі не залежав від задаючої дії (рис. 4.21). Це можна виконати введенням

в систему додаткової гілки проходження сигналу, і підібрати коефіцієнт передачі в цій гілці таким чином, щоб компенсувати небажаний сигнал. Аналогічна операція може бути виконана й на збурюючу дію $f(p)$.

4.5. Якість САК

4.5.1. Показники якості САК.

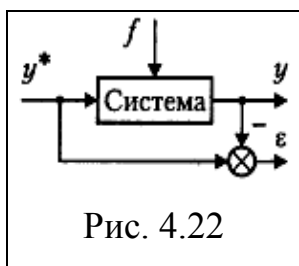
Вимога стійкості для САК належить до необхідних, але не може вважатися достатньою. Система може бути стійкою, тобто її перехідний процес носить затухаючий характер, але час загасання настільки великий або похибка в сталому режимі настільки велика, що практично дана система не може бути використана. Тому система повинна бути не тільки стійкою, але мати певний перехідний процес, а похибки в сталих режимах не повинні перевищувати допустимі.

Характер перехідного процесу лінійної системи на відміну від стійкості залежить не тільки від параметрів системи, але й від виду збурюючої (задаючої) дії і початкових умов. Щоб порівнювати системи по характеру перехідного процесу, з можливих дій вибирають типові або найбільш несприятливі і визначають криву перехідного процесу за нульових початкових умов. Як типові дії зазвичай приймають одиничну ступінчасту дію, одиничний імпульс, лінійно наростаючу

дію, синусоїдальну. Для більшості систем найбільш несприятливою є дія виду одиничної ступінчастої функції $\alpha(t) = 1(t)$. Реакція системи на одиничну ступінчасту дію за нульових початкових умов, як відомо, називається перехідною функцією системи. Для стежачих систем зазвичай розглядають перехідну функцію $H(t)$, викликану зміною задаючої дії $1(t)$, а для систем стабілізації перехідну функцію $H_f(t)$, викликану зміною збурюючої дії $f(t)$.

Показники якості перехідного процесу дають уявлення про поведінку системи тільки в перехідному режимі. Точність системи в сталих режимах оцінюється за допомогою статичних і динамічних похибок. Ці похибки аналогічно можна назвати показником якості системи в сталих режимах. Сукупність показників якості перехідного процесу і сталих режимів називається показниками якості системи в цілому.

Вважається, що система володіє необхідною якістю, якщо її показники якості не перевищують заданих значень, визначених призначенням системи.



Розглянемо поведінку системи керування (рис. 4.22), призначеної для вирішення завдання стеження – дотримання заданого закону зміни вихідний змінної $y(t)$. Останнє виражається у вигляді цільової умови:

$$y(t) \rightarrow y^*(t), \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0, \quad (4.12)$$

$$\varepsilon(t) = y^*(t) - y(t),$$

де $\varepsilon(t)$ – похибка (розузгодження) системи. При ненульових початкових розузгодженнях система повинна з часом забезпечити з деякою мірою точності збіг вхідного (задаючого) $y^*(t)$ і вихідного $y(t)$ сигналів (усунення похибки $\varepsilon(t)$).

Миттєве усунення виникаючих розузгоджень $\varepsilon(t)$ в реальних системах неможливе через інерційність систем регулювання і обмежень, що накладаються на керуючі дії. Практично нездійсненно й абсолютно точне виконання асимптотичних умов (4.12) через діючі збурення і дестабілізуючі чинники. Вказані міркування призводять до необхідності введення спеціальних показників якості, що характеризують ефективність рішення тієї або іншої задачі керування.

Вихідна змінна збуреної системи визначається сумою вільних і вимушених складових руху:

$$y(t) = y_{св}(t) + y_{в}(t),$$

де через стійкість системи виконується умова

$$y_{св}(t) \rightarrow 0, \quad y_{в}(t) \rightarrow y_y(t), \quad (4.13)$$

Умови (4.13) відповідають перехідному режиму системи, по закінченню якого система "переходить" в сталий режим $y_y(t)$.

Залежно від властивостей системи перехідний режим може виявитися достатньо швидким або повільним, монотонним або таким, що коливає. Для оцінки поведінки системи в перехідному режимі вводяться динамічні показники якості, тобто чисельні оцінки швидкодії і коливальності системи (час перехідного процесу, загасання, перерегулювання тощо).

Найпростіше оцінити якість перехідного режиму *автономної* системи, для якої вимушена складова відсутня. У сталому режимі вихідна змінна системи в ідеальному випадку повинна бути ідентична задаючій дії, що відповідає нульовому значенню сталої похибки.

Існує ряд універсальних прийомів, що дозволяють одночасно оцінити динамічні і/або точнісні показники системи, до яких відносяться методика оцінки якості по перехідній функції, оцінка по інтегральних критеріях тощо.

4.5.2. Показники якості перехідного процесу.

Перехідна функція системи оцінюється за допомогою сукупності характеристик, званих показниками якості перехідного процесу. Прийнято використовувати наступні стандартні показники якості перехідного процесу, відбиті на типовому графіку 1 перехідного процесу в стежачій системі із ступінчастою задаючою дією (рис. 4.23):

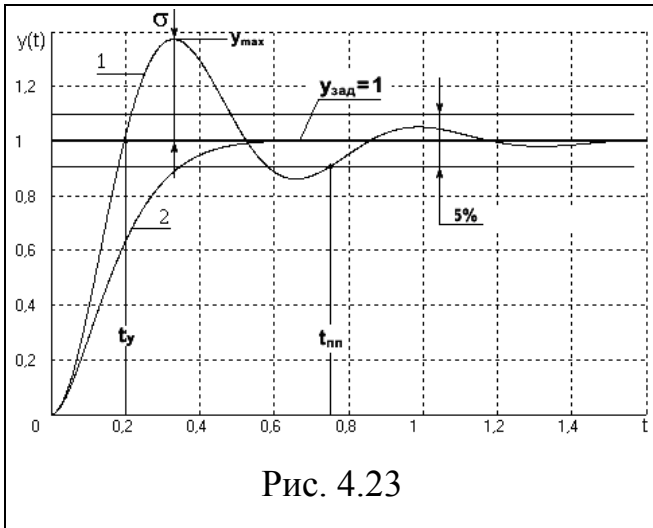


Рис. 4.23

▪ $t_{пп}$ – час перехідного процесу, після закінчення якого відхилення керованої величини $y(t)$ щодо заданого (сталого) значення $y_{зад}$ по абсолютному значенню стає (і залишається надалі) менше певної заданої величини $\epsilon_{уст}$. Зазвичай приймається $\epsilon_{уст} = \delta y_{зад}$, $\delta = 0.05$. Час регулювання характеризує швидкість загасання пе-

рехідного процесу.

- t_y – час встановлення, проміжок часу, за який керована величина вперше досягає свого сталого значення, характеризує швидкість процесу керування.
- $\epsilon_{уст}$ – стала похибка (статична точність, $\epsilon_{уст} = e(\infty) = 1 - y_{уст}$). Якщо $\epsilon_{уст} = 0$, то система астатична.
- $\sigma\%$ – відносне перерегулювання ($\sigma = (y_{max} - y_{зад})/y_{зад}$). Зазвичай вимагають, щоб значення σ було менше 18%. Перерегулювання характеризує коливальні властивості процесів. При нульовому значенні σ процес носить монотонний характер (графік 2 на рис. 4.23), а при достатньо великих σ наближається до незгасаючого коливального руху.
- n – число коливань за час перехідного процесу (≤ 3).

Як відомо, чим далі полюси характеристичного рівняння системи знаходяться від межі стійкості (зліва від уявної осі комплексної площини), тим вище швидкість протікання перехідних процесів в системі. Для кількісної оцінки швидкодії систем використовується також поняття *ступеня стійкості*, якою називається позитивне число, відповідне відстані від уявної осі до найближчого до неї кореня p_i :

$$\alpha = -\min \operatorname{Re} p_i, \quad i = [1, n].$$

У загальному випадку, цій умові відповідає пара комплексно зв'язаного коріння $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ з відповідною найбільш повільною коливальною складовою:

$$y_i(t) = A \exp(-\alpha t) \sin(\beta t + \varphi).$$

Звідси, по загасанню коливального процесу $\exp(-\alpha t)$ неважко визначити час перехідного процесу по заданій величині δ :

$$t_{\text{пн}} \approx (1/\alpha) \ln (1/\delta).$$

Знак наближеності в даному випадку відображає той факт, що інші складові загального рішення (4.7) також можуть внести певну частку до значення $t_{\text{пн}}$, особливо, якщо речові частини їх полюсів близькі по значенням до мінімального значення α .

По перехідній характеристиці і значенню сталої похибки (похибки при $t \gg t_{\text{пн}}$) можна оцінити точність системи в режимі стабілізації – при постійній вхідній або заданій дії $y^*(t) = \text{const}$.

Ці показники пов'язані із запасами стійкості по амплітуді і по фазі. Тому, забезпечення стандартних показників якості забезпечує необхідну стійкість. Значення показників можуть бути легко визначені, навіть аналітично. Завдання забезпечення показників можна розглянути як оптимізаційне. Як правило, це завдання виявляється багатокритерійним і достатньо важким для вирішення, зокрема, чисельними методами.

При синтезі САК в системі зазвичай виділяються незмінна частина і змінна частина, в яку можна вносити корективи. Незмінна частина системи задає можливість отримання гарантованої якості. Звичайну якість системи можна істотно підвищити, проте це завдання синтезу істотно складніше, ніж завдання моделювання і аналізу системи. Класичним методом підвищення якості системи є метод діаграм В.В. Солодовникова. Практичне завдання оптимізації зазвичай виконується з використанням пристроїв, що корегують.

4.5.3. Послідовний корегуючий пристрій.

Передавальна функція розімкненої скорегованої системи рівна початковій, помноженій на передавальну функцію коректора. Корегуючий пристрій включається послідовно в контур системи в будь-якому місці. Для дослідження ідеально підходять ЛАЧХ, оскільки вони складаються при послідовному з'єднанні.

ЛАЧХ і ЛФЧХ коректора знаходяться у вигляді різниці бажаних і наявних ЧХ системи.

Типовим послідовним пристроєм, що корегує, є ПІД-регулятор. Ці регулятори випускаються в широкому асортименті і в різноманітних реалізаціях, включаючи програмну на контролерах.

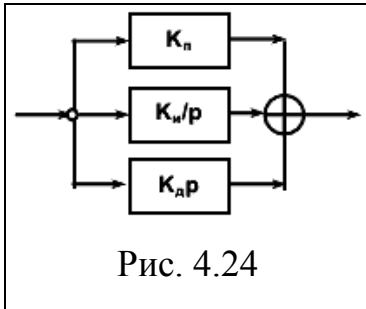


Рис. 4.24

ПІД-регулятор (рис. 4.24) має три паралельні канали: підсилювач з коефіцієнтом k_p , інтегратор з коефіцієнтом k_i , диференціатор з коефіцієнтом k_d . Підсилювач дозволяє змінити коефіцієнт посилення системи і зменшити сталу похибку: $e_{уст} = 1/(1+k_p k)$. Інтегратор підвищує порядок астатизму на 1. Збільшення k_d підвищує запас стійкості і згладжує перехідний процес, тому диференціальну складову називають демпфуванням.

Таким чином, за допомогою інтегральної і пропорційної складових можна забезпечити перший порядок астатизму і бажану статичну точність в збиток запасу стійкості, а диференціальна складова підвищує запас стійкості.

4.5.4. Паралельний корегуючий пристрій.

Такий пристрій має вид місцевого негативного ЗЗ (рис. 4.25). Для синтезу

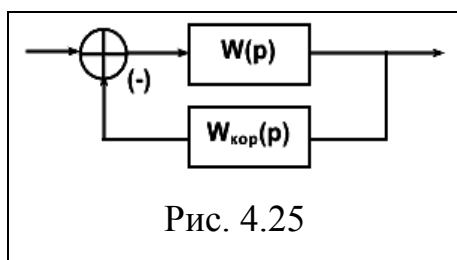


Рис. 4.25

паралельних пристроїв, що корегують, використовувати ЛЧХ менш зручно, чим для послідовних. Існує ряд інженерних методів розрахунку паралельних коректорів (наприклад, метод діаграм Нікольса). Можна просто обчислювати

$W_{kop}(p)$, що корегує, по бажаній $W_{zc}(p)$:

$$W_{kop}(p) = (W(p) - W_{zc}(p)) / (W(p)W_{zc}(p)).$$

Одна з двох передавальних функцій $W_{kop}(p)$ або $W_{zc}(p)$ зазвичай не є (строго кажучи) такою, що фізично реалізовується. Проте, завжди можна вибрати достатньо близьку функцію, що реалізовується.

4.5.5. Метод Солодовникова.

Метод Солодовникова дозволяє побудувати ланку, що корегує, для наявної системи таким чином, щоб забезпечити необхідні типові показники якості і запас стійкості по амплітуді і фазі. Метод заснований на наявному зв'язку між ЧХ і перехідною функцією:

$$H(t) = (2/\pi) \int_0^{\infty} (P(\omega)/\omega) \sin(\omega t) d\omega,$$

де $P(\omega)$ – речова частина АФЧХ $W(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)$.

В.В. Солодовников довів, що в будь-якій САК є наступні залежності між основними показниками якості перехідного процесу і $P(\omega)$:

- $\sigma\% > 18\%$, якщо є "горб", тобто $P_{\max} > P_0$;
- $\sigma\% < 18\%$, якщо немає горба;
- $\sigma\% = 0$, якщо похідна $dP/d\omega < 0$ і монотонно убиває. Вимога монотонного убивання часто накладає невиправдані обмеження на конструкцію, досить забезпечувати $\sigma\% < 18\%$.

Діаграми Солодовникова встановлюють зв'язок між $\sigma\%$, $t_{пп}$, P_{\max} і ω_c – частотою зрізу системи, тобто тією частотою, де посилення системи рівне 1 або $L(\omega_c) = 0$.

Область істотних частот (ω_n , ω_b) – це та частина ЧХ, яка в основному визначає якість системи. Діапазон ЛАЧХ для області істотних частот від +26дБ до -16дБ. Рівень +26дБ відповідає посиленню $K=20$ і відповідній сталій похибці $e_{уст} = 1/(1+K) \approx 0.05$, тобто нижня частота області істотних частот визначається статичною точністю $e_{уст} \approx 0.05$ при ступінчастій вхідній дії. Лівіше за частоту ω_n ЛАЧХ не нижче +26дБ, якщо не вимагається астатизму, або має нахил залежно від порядку астатизму. Рівень -16дБ відповідає трохи впливу високочастотних складових перехідного процесу на рівні $\approx 10\%$. Нахил ЛАЧХ в області істотних частот повинен бути -20дБ/дек. На діаграмі Солодовникова по горизонталі відкладена другорядна величина P_{\max}/P_0 , яка в даний час використовується рідко, а по вертикальних осях відкладені $\sigma\%$, $t_{пп}$ и ω_c .

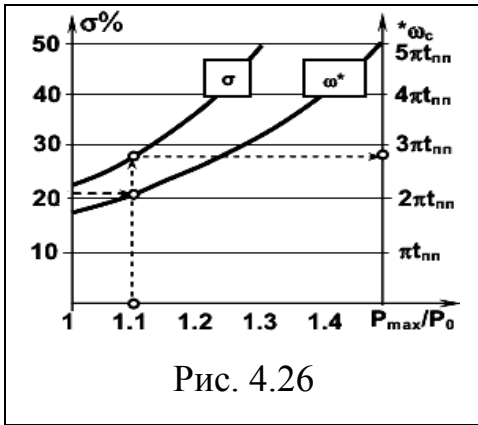


Рис. 4.26

Використовувати діаграми Солодовникова (рис. 4.26) можна по-різному. Зазвичай застосовується така методика. Уточнюють, які показники якості можуть бути сформульовані замовником, і решта параметрів, необхідних для побудови пристрою, що корегує, визначає по діаграмах Солодовникова. По графіках можна, наприклад,

визначити при заданому перерегулюванні і часі перехідного процесу частоту зрізу системи: $(\sigma\%, t_{пп}) \rightarrow \omega_c, n, \Delta A, \Delta\phi$. Причому останні три параметри забезпечуються автоматично. Тоді алгоритм синтезу САК при початково заданих $\sigma\%$, $t_{пп}$ може бути, наприклад, таким:

- по діаграмах визначаємо ω_c (вираз ω_c через $t_{пп}$);
- будуємо область істотних частот, що дає нам основну частину бажаної ЛАЧХ. Добудовуємо високочастотну частину довільно і низькочастотну частину, виходячи з необхідного порядку астатизму;
- синтезуємо послідовну корегуючу ланку, що забезпечує ЛАЧХ. Використання методики Солодовникова гарантує показники якості замкнутої системи і запаси стійкості по амплітуді на рівні $\Delta A\% = 200$ (коефіцієнт посилення може бути збільшений в два рази), і по фазі на рівні $\Delta\phi = 35^\circ$.

4.5.6. Програми аналізу якості процесів керування.

Сучасні інструментальні засоби аналізу і синтезу систем керування представлені безліччю різних спеціалізованих програмних пакетів і комплексів, які дозволяють в діалоговому режимі виконувати операції над матрицями і поліномами, обчислювати часові і частотні характеристики, будувати кореневі годографи, аналізувати чутливість і стійкість, перевіряти керованість і спостережність системи, знаходити її полюси і нулі, порівнювати перехідні процеси в системі по інтегральних критеріях і знаходити кращий, визначати параметри і характеристики стохастичних сигналів на вході і на виході системи, складати і перетворювати математичні моделі досліджуваної системи.

Ці програмні засоби володіють розвиненим сервісом, що дозволяє будувати і порівнювати графіки декількох процесів, зображати взаємні залежності, фазові криві і портрети, будувати характеристики і діаграми, зображати і перетворювати структурні моделі системи, при цьому графічні побудови можуть бути виконані в дво- і тривимірному уявленні.

Відомі фірмові і університетські програмні пакети аналізу і синтезу систем керування: LSAP – США (Ліверморська національна лабораторія) Tutsim – США (Станфордський університет); Cladp – Великобританія (Кембрідж); Keddc – Німеччина (Рурський університет); Matrix - фірми Integrated Systems Inc.; SIMULINK в середовищі Matlab відомої фірми Math Works Inc.; Mars – Україна (Інститут кібернетики). Серед інструментальних програмних засобів відомі розробки Академії авіаційного і космічного приладобудування, Санкт-Петербург; Московського інженерно-фізичного інституту; Московського державного технічного університету; Інституту проблем управління РАН, Москва.

Програмні комплекси Tutsim, Matrix, SIMULINK дозволяють досліджувати моделі будь-яких динамічних систем, які випробовують будь-які зовнішні дії. Комплекси забезпечують команди зміни структури моделі, її параметрів, вихідних блоків і діапазонів даних, що розраховуються; команди одиночного і багатократного запуску, останову і продовження процесу моделювання з виводом графіків і числових даних на екран, принтер або у файл; команди графічного сервісу, що дозволяють зображати осі, сітку, маркіровку, коментарі до графіків, будувати фазові криві або взаємозалежності тощо. Комплекси мають в своєму розпорядженні різні функціональні блоки для моделювання будь-яких неперервних і дискретних, лінійних і нелінійних динамічних систем, що випробовують детерміновані і стохастичні дії.

Контрольні запитання

1. Розкрийте суть поняття «стійкість системи».
2. У чому полягає умова стійкості САК?

3. Наведіть приклади алгебраїчних критеріїв стійкості.
4. У чому полягає принцип аргумента в частотному критерії стійкості?
5. Наведіть приклади частотних критеріїв стійкості.
6. Розкрийте суть поняття «структурна стійкість САК».
7. Розкрийте суть поняття «запас стійкості САК».
8. У чому полягає статична і динамічна точність САК?
9. Які показники характеризують якість САК?
10. Як працюють послідовні та паралельні корегуючі пристрої?
11. В чому полягає метод Солодовнікова?

Глава 5. ДИСКРЕТНІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ

Системи, в структурі яких використовуються контролери, мікропроцесори, ЕОМ та інші цифрові пристрої, відносяться до категорії *дискретних систем*. Дискретні системи відрізняються від неперервних тим, що серед сигналів, що діють в системі, є сигнали, дискретні по своїй фізичній природі або отримані з неперервних шляхом квантуванням по рівню, за часом, або одночасно по рівню і за часом. Сигнали, квантовані по рівню, мають місце в релейних системах, квантовані за часом – в імпульсних системах. *Цифровими* називають системи, в яких діють сигнали, квантовані і за часом, і по рівню, тобто у вигляді цифрових кодів.

Класичним прикладом дискретних САК є системи, що використовують в контурі керування цифрові регулятори. Неперервний сигнал розузгодження, що поступає на вхід регулятора, перетворюється в послідовність імпульсів цифрового коду сигналу похибки. Ця послідовність перетворюється відповідно до закону регулювання в іншу послідовність імпульсів, яка цифроаналоговим пристроєм перетворюється у вихідний неперервний сигнал регулятора.

5.1. Математичний опис систем дискретного керування

Дискретні сигнали описуються функціями дискретної змінної. Для опису дискретних систем використовуються гратчасті функції і різницеві рівняння. Гратчасті функції є аналогами неперервних функцій, що описують неперервні системи, а різницеві рівняння є аналогами диференціальних рівнянь.

5.1.1. Гратчаста функція.

Гратчастою функцією називається функція, що виходить в результаті заміни неперервної змінної на дискретну незалежну змінну, визначену в дискретні моменти часу kT , $k = 0, 1, 2, \dots$. Неперервній функції $x(t)$ відповідає гратчаста функція $x(kT)$, де T – період квантування, при цьому неперервна функція є огибаю-

чою гратчастої функції. При заданому значенні періоду квантування T неперервній функції $x(t)$ відповідає однозначна гратчаста функція $x(kT)$. Проте зворотної однозначної відповідності між гратчастою і неперервною функцією не існує, оскільки через ординати гратчастої функції можна провести безліч огинаючих.

Відліки за шкалою часу зручно вести в цілочисельних одиницях періоду квантування T . З цією метою замість змінної t неперервної функції введемо нову змінну $\tau=t/T$, при цьому неперервній функції $x(\tau)$ відповідатиме гратчаста функція $x(k) \equiv x_k$.

5.1.2. Теорема відновлення Котельникова-Шеннона.

Процедура перетворення сигналу неперервного часу $x(t)$ до дискретного вигляду, квантованого за часом, називається дискретизацією. Така процедура відображає як реальні процеси, що проходять в цифрових системах керування, так і математичні операції, що використовуються в різних сферах теорії інформації. В результаті дискретизації виходить імпульсна послідовність $x(kT)$ (гратчаста функція), яка при $t = kT$ співпадає з початковим сигналом:

$$x(kT) = x(t)|_{t=kT}$$

і не визначена в усі інші моменти часу (тобто між відліками k). Втрати інформації при квантуванні залежать від величини інтервалу квантування T (частоти квантування $2\pi/T$).

Вибір інтервалу T зазвичай здійснюється з міркувань теоретичної можливості точного відновлення початкового сигналу по імпульсній послідовності (дискретній вибірці). Згідно теоремі Котельникова-Шеннона, якщо спектр сигналу $x(t)$ обмежений максимальною частотою ω_{\max} , то точне відновлення функції $x(t)$ теоретично можливо за умови, що інтервал дискретизації T рівний:

$$T < \pi/\omega_{\max}.$$

5.1.3. Різницеві рівняння.

Зв'язок між значеннями гратчастої функції при різних значеннях аргумен-

ту визначається за допомогою кінцевих різниць, які є аналогами похідних в диференціальних рівняннях.

Різницею першого порядку (або першою різницею) називається різниця між подальшим дискретним значенням гратчастої функції і її поточним значенням:

$$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k).$$

Різниця першого порядку характеризує швидкість зміни гратчастої функції і, отже, є аналогом першої похідної неперервної функції.

Різниця другого порядку визначається як різниця двох сусідніх різниць першого порядку:

$$\begin{aligned} \Delta^2 x(k) &= \Delta x(k+1) - \Delta x(k) = [x(k+2) - x(k+1)] - [x(k+1) - x(k)] = \\ &= x(k+2) - 2x(k+1) + x(k). \end{aligned}$$

Продовжуючи аналогічно, для *різниці будь-якого m -го порядку* матимемо:

$$\Delta^m x(k) = \Delta^{m-1} x(k+1) - \Delta^{m-1} x(k).$$

$$\Delta^m x(k) = \sum_{n=0}^m (-1)^n x(k+m-n) \frac{m!}{[k!(m-n)!]}.$$

5.1.4. Дискретизація автономних систем.

Під дискретизацією системи мається на увазі перетворення її неперервної динамічної моделі до дискретної форми опису – одній з форм різницевих рівнянь. При цьому передбачається, що в моменти $t = kT$ імпульсні сигнали $x(kT)$ отриманої дискретної моделі з певним ступенем точності повторюють значення сигналів $x(t)$ початкової неперервної системи.

З використанням різницевих рівнянь математичний опис лінійних імпульсних систем приводиться до вигляду:

$$a_m \Delta^m x(k) + a_{m-1} \Delta^{m-1} x(k) + \dots + a_0 x(k) = 0, \quad (5.1)$$

де рівняння (5.1) є лінійним різницеvim рівнянням з постійними коефіцієнтами a_m ($m=0, 1, 2, \dots$), – аналог однорідного лінійного диференціального рівняння при описі неперервних динамічних систем. Рішення (5.1) дає значення дискретної змінної $x(k)$ для кожного періоду квантування. Рівняння (5.1) можна записати у

вигляді:

$$\sum_{n=0}^m c_n x(k+n) = 0.$$

Таким чином, в дискретній системі (5.1) процеси в квантовані моменти часу $t = kT$ точно співпадають з процесами в початковій неперервній системі. Оскільки вирішення дискретної системи в проміжні моменти часу не визначені, то коректний перехід до дискретної форми передбачає вибір інтервалу квантування T відповідно до теореми Котельникова-Шеннона.

5.1.5. Дискретне z-перетворення.

У теорії імпульсних систем для вирішення різницевих рівнянь використовується дискретне перетворення Лапласа і його модифікація – дискретне z-перетворення.

Перетворення Лапласа для неперервної функції $x(t)$:

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) \exp(-pt) dt.$$

При переході до дискретної функції $x(kT)$, замінюючи інтеграцію підсумовуванням, отримаємо:

$$X(p) = T \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \exp(-pkT).$$

Введемо нову змінну $z = \exp(pt)$:

$$X(z) = T \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}.$$

Цим рівнянням є дискретне перетворення Лапласа, в якому вираз

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} \quad (5.2)$$

називається z-перетворенням. Воно лежить в основі методу вирішення різницевих рівнянь. Як видно з цих виразів, дискретне перетворення Лапласа $X(z)$ відрізняється від z-перетворення наявністю нормуючого множника T .

При аналізі неперервних систем перетворення Лапласа дозволяє перейти від диференціальних рівнянь до простішої алгебри та істотно спростити аналіз динаміки дискретних систем.

У виразі (5.2) функція $x(kT)$ називається оригіналом гратчастої функції, а $X(z)$ – її зображенням. Для зворотного переходу від зображення до оригіналу (для знаходження початкової гратчастої функції по її зображенню) використовується зворотне z -перетворення:

$$x(kT) = (1/2\pi j) \int X(z) z^{k-1} dz.$$

Експоненціальна залежність матриць рівнянь стану неперервної і дискретної систем дозволяє зробити важливий висновок про зв'язок їх власних значень, а значить і коріння відповідних характеристичних поліномів. Коріння p_i характеристичного полінома неперервної системи пов'язане з корінням z_i характеристичного полінома еквівалентної дискретної системи співвідношенням:

$$z_i = \exp(Tp_i). \quad (5.3)$$

У загальному випадку, відображення (5.3) не однозначне, і декільком різним значенням p_i може відповідати одне і те ж значення z_i . Взаємно-однозначна відповідність коріння неперервної і еквівалентної дискретної систем виконується тільки при інтервалі дискретизації, що задовольняє теоремі Котельникова-Шеннона.

5.1.6. Перетворювач неперервного сигналу в цифровий код.

Аналого-цифровий перетворювач (АЦП) здійснює три операції: дискретизацію сигналу в часі, квантування по рівню і кодування. Дискретизація в часі полягає у вимірюванні неперервної величини $x(t)$ в дискретні моменти часу $t_k = k\Delta t$, $\Delta t = \text{const}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, і здійснюється імпульсним елементом. На виході імпульсного елемента виходить гратчаста функція $x(t_k)$. Період квантування за часом залежить від спектральної характеристики неперервного сигналу і визначається теоремою Котельникова-Шеннона.

Процес квантування гратчастої функції $x(t_k)$ по рівню можна представити як проходження сигналу $x(t_k)$ через нелінійний елемент з багатоступінчатою релейною характеристикою – квантувальник по рівню (рис. 5.1). В результаті квантування по рівню точно зміряні значення сигналу $x(t_k)$ замінюються наближеними найближчими дискретними значеннями $x_k \equiv x(k) \cong x(t_k)$, тобто процес ква-

нтування по рівню рівносильний округленню сигналу $x(t_k)$ до цілих значень. Крок квантування δ_k характеризує точність перетворювача.

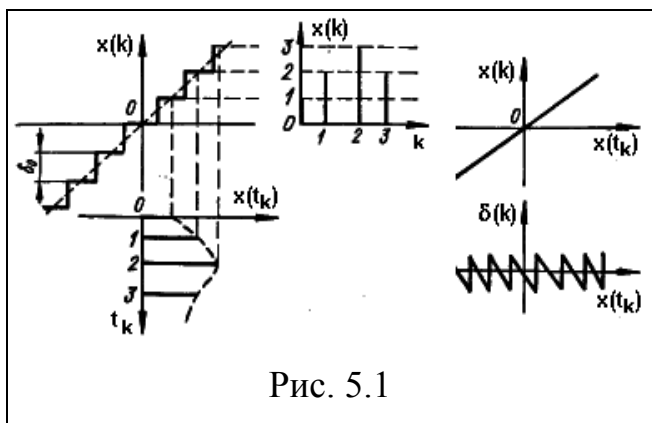


Рис. 5.1

Врахування квантування по рівню приводить до необхідності розгляду нелінійних цифрових систем. Аналіз систем спрощується, якщо елемент з багатоступінчатою релейною характеристикою представити у вигляді паралельного з'єднання лінійно-

го підсилювального елемента з коефіцієнтом $K = 1$, характеристика якого зображена на рис. 5.1 справа, і нелінійного елемента з характеристикою $\delta(k)$, рівній різниці між лінійною і релейною характеристиками. В цьому випадку квантований по рівню сигнал можна представити, як суму точного сигналу $x(t_k)$ і додаткового сигналу $\delta(k)$, обмеженого по величині половиною ступеня квантування.

Перш ніж сигнал $x(k)$ поступає на цифровий обчислювальний пристрій (ЦОП) системи, здійснюється його кодування – перетворення в цифровий код $x_{ц}(k)$. Якщо в ЦОП використовується двійкова система числення, то за допомогою кодуєчого пристрою кожен імпульс, що поступає з квантователя по рівню, перетвориться в двійковий цифровий код, відповідний амплітуді цього імпульсу. Двійкові числа представляються у вигляді послідовності імпульсів, розділених інтервалом часу τ . Кожному розряду двійкового числа відводиться інтервал часу τ' на виставляння кодів 0 або 1 (звичайно відсутність або наявність певного рівня напруги).

На ЦОП числа можуть поступати послідовним або паралельним кодом. У першому випадку розряди числа йдуть послідовно один за одним по одному каналу, як правило, починаючи з молодшого. Одне число від іншого відділяється спеціальним маркерним імпульсом. Мінімальний інтервал T передачі числа рівний $n\tau$, де n – кількість розрядів числа. При паралельному коді всі розряди числа поступають одночасно (паралельно) по декількох каналах, число яких рівне

числу розрядів. Оскільки при кодуванні сигналу не відбувається зміни (перетворення) інформації, то передавальна функція кодуючого пристрою рівна одиниці.

5.1.7. Цифровий обчислювальний пристрій.

ЦОП можна розглядати як дискретний пристрій, що перетворює вхідні послідовності чисел $x_c(k)$ у вихідну $y_c(k)$ відповідно до закладеної програми обчислень, що є алгоритмом переробки інформації. У дискретній лінійній системі зв'язок між входом і виходом (вхідною і вихідною дискретними послідовностями значень сигналу – відліками), задається лінійним оператором перетворення TL:

$$y(k\Delta t) = TL \{x(kT)\}.$$

Цей вираз відображає короткий запис лінійного різницевого рівняння:

$$\sum_{m=0}^M a_m y(kT-mT) = \sum_{n=0}^N b_n x(kT-nT), \quad (5.4)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$ – порядковий номер відліків, T – інтервал дискретизації сигналу, a_m и b_n – речові або, в загальному випадку, комплексні коефіцієнти. Покладемо $a_0 = 1$, що завжди може бути виконане відповідним нормуванням рівняння (5.4), і, приймаючи надалі $T = 1$, тобто переходячи до числової нумерації цифрових послідовностей значень сигналів, приведемо його до вигляду:

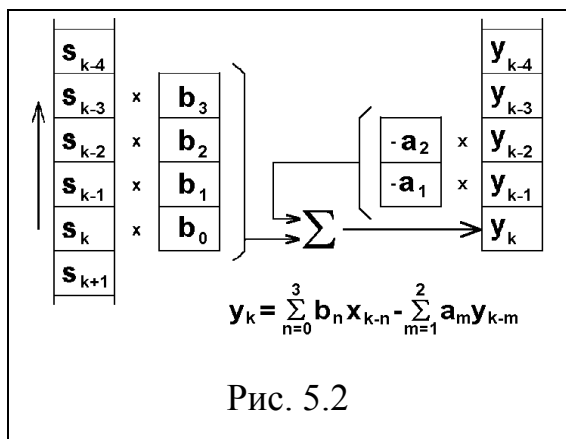
$$y(k) = \sum_{n=0}^N b_n x(k-n) - \sum_{m=1}^M a_m y(k-m). \quad (5.5)$$

ЦОП, які описуються повним різницеvim рівнянням (5.5), в теорії цифрової обробки даних прийнято називати рекурсивними цифровими фільтрами (РЦФ), оскільки в обчисленні поточних вихідних значень беруть участь не тільки вхідні дані, але й значення вихідних даних фільтрації, обчислені в попередніх циклах розрахунків. З урахуванням останнього чинника рекурсивні фільтри називають також фільтрами із зворотним зв'язком, позитивним або негативним залежно від знаку суми коефіцієнтів a_m . По суті, структура рекурсивного фільтру складається з двох складових: нерекурсивної частини b_n , обмеженої в роботі

поточними і "минулими" значеннями вхідного сигналу, і рекурсивної частині a_m , яка працює тільки з "минулими" значеннями вихідного сигналу. Техніка обчислень для РЦФ наведена на рис. 5.2.

5.1.8. Передавальні функції ЦОП.

Застосовуючи z-перетворення до обох частин рівності (5.4), з урахуванням зсуву функцій ($y(k-m) \Leftrightarrow z^{-m} Y(z)$), отримуємо:



$$Y(z) \sum_{m=0}^M a_m z^{-m} = X(z) \sum_{n=0}^N b_n z^{-n},$$

де $X(z), Y(z)$ – відповідні z-зображення вхідного і вихідного сигналу. Звідси, вважаючи $a_0 = 1$, отримуємо в загальній формі функцію зв'язку виходу фільтру з його

входом – рівняння передавальної функції системи в z-області:

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \sum_{n=0}^N b_n z^{-n} / (1 + \sum_{m=1}^M a_m z^{-m}). \quad (5.6)$$

Для нерекурсивних ЦОП, при нульових коефіцієнтах a_m :

$$H(z) = \sum_{n=0}^N b_n z^{-n}.$$

При проектуванні фільтрів початковою, як правило, є частотна передавальна функція фільтру $H(\omega)$, по якій обчислюється її Z-образ $H(z)$ і зворотним переходом в простір сигналів визначається алгоритм обробки даних. У загальній формі для вихідних сигналів фільтру:

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z),$$

$$Y(z) \cdot (1 + \sum_{m=1}^M a_m z^{-m}) = X(z) \sum_{n=0}^N b_n z^{-n},$$

$$Y(z) = X(z) \sum_{n=0}^N b_n z^{-n} - Y(z) \sum_{m=1}^M a_m z^{-m}.$$

Після зворотного Z-перетворення ці вирази приймуть вигляд:

$$y(k) = \sum_{n=0}^N b_n x(k-n) - \sum_{m=1}^M a_m y(k-m). \quad (5.7)$$

При подачі на вхід фільтру одиничного імпульсу δ_o , що має z -образ $\delta(z) = z^{-n} = 1$, сигнал на виході фільтру буде імпульсною реакцією фільтру $y(k) \equiv h(k)$, при цьому:

$$H(z) = Y(z)/\delta(z) = Y(z) = TZ[y(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k},$$

тобто передавальна функція фільтру є z -образом (результатом z -перетворення TZ) її імпульсної реакції. При зворотному z -перетворенні передавальної функції відповідно отримуємо імпульсну характеристику фільтру: $h(k) \Leftrightarrow H(z)$.

Якщо функція $H(z)$ представлена кінцевим степеневим поліномом, то зворотне z -перетворення здійснюється визначенням коефіцієнтів по степенях z . Передавальна функція РЦФ також може бути представлена степеневим поліномом прямим діленням чисельника на знаменник правої частини виразу (5.6), проте результат при цьому може виявитися як кінцевим, так і нескінченним, тобто система може мати або кінцеву (КІХ), або нескінченну (НІХ) імпульсну характеристику. Практично використовувані рекурсивні фільтри зазвичай є НІХ-фільтрами при кінцевому числі членів полінома (5.7).

Система стійка, якщо за будь-яких початкових умов її реакція на будь-яку обмежену дію також обмежена. Критерієм стійкості є абсолютна збіжність відліків імпульсного відгуку системи:

$$\sum_n |h(n)| < \infty.$$

Аналіз стійкості може бути проведений по передавальній функції. У стійкій системі передавальна функція не повинна мати особливих точок (полісів) і поза одиничним кругом на z -площині. Звідси необхідна і достатня умова стійкості імпульсних систем – модулі коріння передавальної функції (5.6) повинні бути менше 1 (поліси передавальної функції системи усередині одиничного круга на z -площині). Чим менше значення модулів коріння, тим більше запас стійкості системи.

5.1.9. Частотні характеристики ЦОП.

Від z -образів сигналів і передавальних функцій підстановкою $z = \exp(j\omega T)$ можна перейти до Фур'є-образів функцій, тобто до частотних спектрів сигналів і частотної характеристики цифрових систем, а точніше – до функцій їх спектральної щільності.

Передавальна частотна функція (частотна характеристика при $a_0=1$):

$$H(\omega) = A(\omega)/B(\omega) = \sum_{n=0}^N b_n \exp(-j\omega n T) / [1 + \sum_{m=1}^M a_m \exp(-j\omega m T)].$$

Частотна характеристика системи є Фур'є-образом його імпульсної реакції, і навпаки. При $T = 1$:

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \exp(-j\omega n),$$
$$h(n) = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) \exp(j\omega n) d\omega.$$

У загальному випадку $H(\omega)$ є комплексною функцією, модуль якої $A(\omega)$ є АЧХ, а аргумент $\varphi(\omega)$ – ФЧХ:

$$A(\omega) = |H(\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2 H(\omega) + \text{Im}^2 H(\omega)}$$
$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(-\text{Im} H(\omega)/\text{Re} H(\omega)).$$

Вибір знаку фазового кута орієнтований на каузальні системи з негативним часовим запізнюванням сигналів. Допустимо, що система здійснює тільки зсув сигналу $x(t)$ управо по часовій осі, тобто $y(t)=x(t-\tau)$. Для перетворення Фур'є функції $y(t)$ маємо (при $\omega = 2\pi f t$):

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \exp(-j2\pi f t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) \exp(-j2\pi f t) dt =$$
$$= \exp(-j2\pi f \tau) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt = \exp(-j2\pi f \tau) X(f).$$

Звідси:

$$H(f) = Y(f)/X(f) = \exp(-j2\pi f \tau), \quad |H(f)| = 1, \quad \varphi_h(f) = -2\pi f \tau.$$

З останньої рівності виходить, що фаза є пряма з негативним тангенсом кута нахилу $-2\pi f \tau$. Відповідно, для всіх каузальних фільтрів, що здійснюють перетворення з певною затримкою сигналу на виході, при виконанні операції над

частотними складовими сигналу має місце:

$$Y(f) = H(f) X(f) = |H(f)| \exp(j\varphi_h(f)) |X(f)| \exp(j\varphi_x(f)) = |H(f)| |X(f)| \exp\{j [\varphi_h(f) + \varphi_x(f)]\},$$

$$|Y(f)| = |H(f)| |X(f)|, \quad \varphi_y(f) = \varphi_h(f) + \varphi_x(f).$$

З урахуванням негативного знаку $\varphi_h(f)$ фазової характеристики каузальних фільтрів маємо зсув в "мінус" всіх частотних складових сигналу і відповідну затримку вихідного сигналу щодо вхідного.

5.2. Моделі лінійних дискретних систем

5.2.1. Математичні моделі дискретних систем.

Математичні моделі дискретних систем керування описують поведінку цих систем тільки в квантовані моменти часу: t_k , $k = 0, 1, 2, \dots$. Дискретним представленням неперервних сигналів $u(t)$, $y(t)$, $x(t)$ є послідовності: $\{u(t_k)\}$, $\{y(t_k)\}$, $\{x(t_k)\}$.

Математичні моделі дискретних систем встановлюють взаємозв'язок між цими послідовностями.

Дискретні автоматичні системи керування містять в своїй структурі цифрову (дискретну) і аналогову (неперервну) частини. Для узгодження цих частин в системі використовуються аналогово-цифровий і цифроаналоговий перетворювачі (АЦП і ЦАП). АЦП ставить у відповідність неперервній функції $f(t)$, $t \geq t_0$ послідовність $\{f(t_k)\} = f(kT)$, $T = \text{const}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, яку називають ґратчастою функцією f_k . У свою чергу, ЦАП здійснює перетворення послідовності $\{f_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ в деяку неперервну функцію, яка є апроксимацією початкової функції $f(t)$, $t \geq t_0$. Часто використовують кусочно-постійну апроксимацію, тому такий перетворювач називають екстраполятором, або фіксатором нульового порядку.

5.2.2. Побудова дискретного представлення неперервної системи.

Нехай неперервна система представлена своєю зовнішньою моделлю:

$$A_0 y^{(n)}(t) + A_1 y^{(n-1)}(t) + A_2 y^{(n-2)}(t) + \dots + A_n y(t) = u(t). \quad (5.8)$$

При достатньо малому кроці квантування, дискретизацію цієї моделі можна виконати з необхідною точністю шляхом заміни диференціалів кінцевими різницями:

$$y'(t) = dy(t_k)/dt = \Delta y(t_k)/T = T^{-1} (y(t_{k+1}) - y(t_k)),$$

$$y''(t) = d^2y(t_k)/d^2t = \Delta^2 y(t_k)/T^2 = T^{-1} (\Delta y(t_{k+1}) - \Delta y(t_k)) = T^{-2} (y(t_{k+2}) - 2y(t_{k+1}) + y(t_k)),$$

... і так далі.

Після підстановки в (5.8) дискретна зовнішня модель системи приймає кі-нечно-різницевий вигляд, який після алгебраїчних перетворень переводиться в рекурентну форму з постійними коефіцієнтами моделі a_i :

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + a_2 y(k+n-2) + \dots + a_n y(k) = u(k).$$

У загальному випадку функція $u(k)$ також може бути поліномом:

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = b_1 u(k+n-1) + \dots + b_n u(k). \quad (5.9)$$

Рух дискретної моделі, представленої в різницевому вигляді, складається з двох рухів: власного і вимушеного (під дією зовнішнього збурення). Власний рух – вирішення однорідного різницевого рівняння системи (при нульовій правій частині). Загальний вид цього рішення визначається як лінійна форма від власних чисел системи:

$$y(k) = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k + \dots + C_n \lambda_n^k,$$

де C_i – коефіцієнти лінійної форми, які обчислюються через початкові стани системи; λ_i – просте дійсне коріння характеристичного рівняння системи:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

Приклад. Неперервна система описується диференціальним рівнянням:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u(t); \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0,5.$$

Виконаємо з кроком квантування $T = 0,1$ різницеву дискретизацію рівняння:

$$100(y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)) + 50(y(k+1) - y(k)) + 6y(k) = u(k).$$

Після перетворень отримаємо шукану дискретну модель в рекурентному вигляді:

$$y(k+2) - 1,5 y(k+1) + 0,56 y(k) = 0,01 u(k).$$

Характеристичне рівняння системи:

$$\lambda^2 - 1,5 \lambda + 0,56 = 0.$$

Коріння рівняння: $\lambda_1 = 0.8, \lambda_2 = 0.7$. Відповідно, власний рух моделі:

$$y(k) = C_0 0.8^k + C_1 0.7^k.$$

Постійні C_0, C_1 знайдемо, використовуючи координати початкового стану системи:

$$y(0) = C_0 + C_1 = 1; \quad y(1) = C_0 0.8 + C_1 0.7.$$

Значення $y(1)$ визначимо, використовуючи першу різницю:

$$y'(0) = 10 (y(1) - y(0)) = 0.5. \quad y(1) = 1.05$$

Звідси: $C_0 = 3.5, C_1 = -2.5$. $y(k) = 3.5 0.8^k - 2.5 0.7^k$.

5.2.3. Операторна форма моделі.

Операторна форма моделі (5.9) може бути отримана введенням в розгляд оператора зсуву z :

$$z^i y(k) = y(k+i).$$

При цьому рівняння (5.9) легко перетвориться до вигляду:

$$\mathbf{a}(z) y(k) = \mathbf{b}(z) u(k), \quad (5.10)$$

$$\mathbf{a}(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

$$\mathbf{b}(z) = b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n.$$

Оператор $\mathbf{a}(z)$ називається характеристичним поліномом системи (5.9), а комплексні числа $z^i, i = (1, n)$ – коріння характеристичного рівняння $\mathbf{a}(z)=0$, називаються *полюсами* системи. Коріння алгебраїчного рівняння $\mathbf{b}(z)=0$ називаються *нулями* системи.

З виразу (5.10) виходить операторне рівняння зв'язку змінних $y(k)$ та $u(k)$ і оператор передавальної функції дискретної системи:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{W}(z) \mathbf{u}(k), \quad (5.11)$$

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{b}(z)/\mathbf{a}(z).$$

Збурююча дія $f(k)$ впливу на ОК зовнішнього середовища розглядається як додатковий вхідний сигнал, при цьому лінійна модель дискретної системи приймає вигляд:

$$\begin{aligned} a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = \\ = b_1 u(k+n-1) + \dots + b_n u(k) + d_1 f(k+n-1) + \dots + d_n f(k). \end{aligned} \quad (5.12)$$

де d_i – коефіцієнти, що визначають вплив збурення $f(k)$ на процеси в системі. Після відповідних перетворень отримуємо операторну форму моделі (5.12):

$$\mathbf{a}(z) \mathbf{y}(k) = \mathbf{b}(z) \mathbf{u}(k) + \mathbf{d}(z) \mathbf{f}(k).$$

$$\mathbf{d}(z) = d_1 z^{n-1} + \dots + d_{n-1} z + d_n.$$

$$y(k) = W(z)u(k) + W_f(z) f(k),$$

$$W_f(z) = d(z)/a(z).$$

де $W_f(z)$ – передавальна функція системи по збурюючій дії $f(k)$.

5.2.4. Рішення різницевих рівнянь.

Форма (5.9) представлення моделей дає простий шлях для отримання рекурентного рішення, тобто процедури знаходження поточних значень $y(k)$ по відомих значеннях функцій y і u в попередні моменти дискретного часу k . Підставляючи в різницеве рівняння $k+n=k$ (или $n=0$) запишемо:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_n u(0).$$

У загальному випадку, аналітичне вирішення рівняння (5.9):

$$y(k) = y_{св}(k) + y_{в}(k).$$

Вираз містить вимушену складову $y_{в}(k)$, відповідну реакції системи на вхідну дію $u(k)$, і вільну складову $y_{св}(k)$, відповідну рішенням однорідного різницевого рівняння (автономної дискретної системи):

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = 0$$

за початкових умов $y(0), y(-1), \dots, y(-n+1)$.

Поведінка системи і вільна складова перехідного процесу залежать від полюсів системи z_i , які в загальному випадку представлені комплексно-зв'язаними парами:

$$z_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i, \quad z_{i,i+1} = M_i \exp(\pm j\varphi_i), \quad M_i = |z_{i,i+1}|, \quad \varphi_i = \arg z_{i,i+1}.$$

$$y_{св}(k) = C_1 z_1^k + C_2 z_2^k + \dots + C_n z_n^k,$$

де C_i – невизначені коефіцієнти, залежні від початкових умов.

Дійсному невід'ємному кореню, для якого $\alpha_i > 0, \beta_i = 0$ та $\varphi_i = 0$, відповідає аперіодична складова перехідного процесу (мода) $y(k) = C_i M_i^k$, а дійсному негативному кореню, для якого $\alpha_i < 0, \beta_i = 0$, а $\varphi_i = \pi$, – коливальна мода $y(k) =$

$C_i M_i^k \cos k\pi$.

Парам комплексно-зв'язаного коріння характеристичного полінома $z_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$, відповідають коливальні складові

$$y_{i,i+1} = A_i M_i^k \cos (k\varphi_i - \varphi_i),$$

де A_i, φ_i – параметри, залежні від початкових умов. Якщо при деяких початкових значеннях має місце тотожність

$$y_{св}(k) = y^* = \text{const}, \quad k \geq 0,$$

то значення $y = y^*$ називається положенням рівноваги системи.

Вимушена складова перехідного процесу визначається вхідною дією $u(k)$.

5.2.5. Сталий режим.

Розглянемо поведінку моделі системи при постійній вхідній дії $u(k) = \text{const}$ і сталу складову перехідного процесу $y = y_y = \text{const}$. У сталому (статичному) режимі для будь-яких i виконується $y_y(k+i) = y_y$ і $u(k+i) = u(k)$, з виразу (5.9) знаходимо статичну характеристику дискретної системи:

$$y_y = (b_1 + \dots + b_n) u(k) / (1 + a_1 + \dots + a_n) = Ku, \quad (5.13)$$

де K – статичний коефіцієнт. Умовою існування статичної характеристики є $1 + a_1 + \dots + a_n \neq 0$. Дискретна система, що задовольняє цій умові, називається *статичною*.

Зіставляючи (5.13) і (5.11), знайдемо

$$(b_1 + \dots + b_n) / (1 + a_1 + \dots + a_n) = W(1) = b(1)/a(1).$$

Отже, $W(1) = K$ і в статичному режимі система описується рівнянням:

$$y_y = W(1) u.$$

5.2.6. Елементарні ланки дискретних систем.

Як елементарні ланки виділимо прості блоки дискретної системи, що описуються різницевиими рівняннями 1-2-го порядків і що задовольняють умові

$$|z_i| = |\lambda_i \{A\}| \leq 1.$$

Елементарні ланки першого порядку задаються рівняннями

$$y(k+1) + ay(k) = bu(k). \quad (5.14)$$

Передавальна функція ланки і її полюс:

$$W(z) = b/(z+a), \quad z_1 = -a.$$

Вирішення рівняння (5.14):

$$y(k) = y_{cb}(k) + y_b(k) = (-a)^k y_0 + b \sum_{i=0}^{k-1} (-a)^{k-i-1} u(i).$$

При $b=1$ і $a=0$ отримуємо ланку чистого запізнювання (елемент затримки):

$$y(k+1) = u(k), \quad W(z) = 1/z.$$

При $a = -1$ отримуємо ланку, що підсумовує (дискретний інтегратор):

$$y(k+1) = y(k) + bu(k), \quad W(z) = b/(z-1).$$

Останнє рівняння є дискретним аналогом інтегруючої ланки і має рішення:

$$y(k) = y(0) + b \sum_{i=0}^{k-1} u(i).$$

Проаналізуємо вільні складові перехідних процесів ланок першого порядку для різних значень параметра a (різних значень полюсів $z_1 = -a$). Для цього розглянемо автономну систему

$$y(k+1) + ay(k) = 0, \quad y_0 = y(0).$$

Рішення рівняння:

$$y(k) = (-a)^k y_0,$$

Різні реалізації функції при $y_0 = 1$ наведені на рис. 5.3.

При $z_1 = a = 0$ отримуємо $y(k) = 0, k > 0$, тобто з довільного початкового положення y_0 процес сходиться до нульового (рівноважного стану) за один крок.

При $z_1 = -a \in (0,1)$ маємо $(-a)^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, і отримуємо аперіодичний затухаючий процес: $y(k) \rightarrow 0$. Ланка асимптотично стійка.

При $z = -a = 1$ (ланка, що підсумовує) знаходимо $y(k) = y_0, k > 0$. Ланка нейтрально стійка.

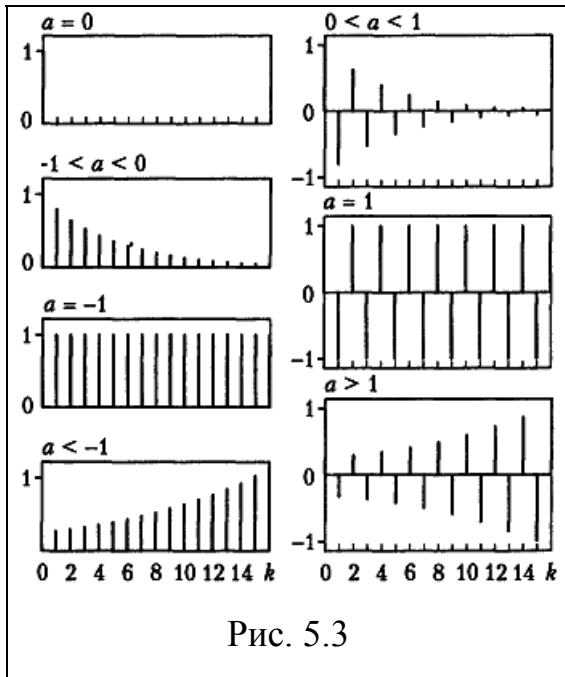


Рис. 5.3

Нарешті, якщо $z_1 = -a > 1$, то при $k \rightarrow \infty$, $(-a)^k \rightarrow \infty$, і отримуємо аперіодичний процес, що розходиться: $|y(k)| \rightarrow \infty$. Ланка нестійка.

При негативних значеннях $z_1 = -a$ перехідні процеси набувають коливального характеру. При $z_1 = -a \in (-1, 0)$ отримуємо $(-a)^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, і згасаючий коливальний процес: $y(k) \rightarrow 0$. Ланка асимптотично стійка.

При $z_1 = -a = -1$, $y(k) = \pm y_0$, $k > 0$,

отримуємо незгасаючий коливальний процес. Ланка нейтрально стійка.

Нарешті, при $z_1 = -a < -1$ знаходимо, що при $k \rightarrow \infty$, $|(-a)^k| \rightarrow \infty$, і отримуємо коливальний процес, що розходиться (нестійкий): $|y(k)| \rightarrow \infty$.

До дискретних ланок другого порядку відносяться *коливальна* і *консервативна* ланки.

Коливальна ланка описується рівнянням

$$y(k+2) - 2M y(k+1) \cos \varphi + M^2 y(k) = b u(k) \sin \varphi,$$

де $M \in (0, 1)$, $\varphi \in (0, \pi/2)$.

Передавальна функція цієї ланки і її комплексно-зв'язані полюси:

$$W(z) = b \sin \varphi / (z^2 - 2M z \cos \varphi + M^2), \quad z_{1,2} = M \exp(\pm j\varphi).$$

Ланка асимптотично стійка і має статичну характеристику

$$y = b \sin \varphi / (1 - 2M \cos \varphi + M^2).$$

Консервативна ланка (дискретний осцилятор) описується рівнянням

$$y(k+2) - 2 y(k+1) \cos \varphi + y(k) = b u(k) \sin \varphi,$$

де $\varphi \in (0, \pi/2)$.

Передавальна функція і її полюси:

$$W(z) = b \sin \varphi / (z^2 - 2 z \cos \varphi + 1^2), \quad z_{1,2} = \exp(\pm j\varphi).$$

Ланка нейтрально стійка і не має статичної характеристики.

Розглянемо вільні складові перехідних процесів ланок другого порядку

для різних значень параметра M .

Рівняння автономної системи:

$$y(k+2) - 2M y(k+1) \cos \varphi + M^2 y(k) = 0,$$

з початковими значеннями $y(0) = 1$ і $y(-1) = M^{-1} \cos \varphi$.

Рішення рівняння мають вигляд

$$y(k) = M^k \cos \varphi k.$$

Перехідні процеси системи представлені на рис. 5.4. Якщо $\varphi < \pi/2$, то по-

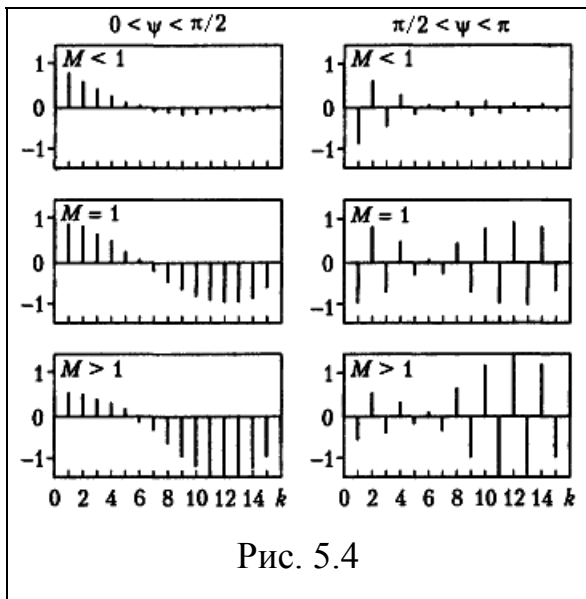


Рис. 5.4

люси системи мають позитивні дійсні частини: $\text{Re } z_{1,2} > 0$. При $M \in (0,1)$ (коливальна ланка) отримуємо коливальні процеси, що сходяться, при $M = 1$ (осцилятор) – незгасаючий коливальний процес, а при $M > 1$ – коливальні процеси, що розходяться.

Аналогічно поведуться і системи, для яких $\pi/2 < \varphi < \pi$, що відповідає негативним дійсним полюсам: $\text{Re } z_{1,2} < 0$. Ос-

новною відмінністю таких систем є двочастотний коливальний режим, викликаний перемиканням знаку вихідної змінної на кожному кроці k .

5.2.7. Стійкість дискретних систем.

Як і для систем неперервного часу, під стійкістю дискретної системи розуміють її здатність повертатися в положення рівноваги після закінчення дії зовнішніх чинників. Розглядається вільний рух керованої системи, або рух автономної системи за ненульових початкових умов.

Автономна система описується рівняннями

$$a(z)y(k) = 0, \quad a(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad y_y = y^* = 0. \quad (5.15)$$

Поняття стійкості лінійних дискретних систем практично повністю ідентичні відповідним поняттям неперервних систем. Критерії стійкості дискретних систем легко виводяться з відповідних положень неперервної теорії, якщо взяти

до уваги, що полюси z_i дискретної системи пов'язані з полюсами p_i еквівалентної неперервної моделі співвідношенням $z_i = \exp(Tp_i)$. Тому обмежимося розглядом тільки властивості асимптотичної стійкості.

Стійкість по виходу (технічна стійкість) визначається характером зміни вихідної змінної $y(k)$, тобто властивостями рішень системи (5.15). Система називається асимптотично стійкою, якщо виконується умова

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |y(k)| = 0.$$

Основний метод дослідження стійкості дискретних систем передбачає використання кореневих критеріїв.

Дискретна система асимптотично стійка тоді і тільки тоді, коли модулі всіх коренів (полюсів) характеристичного рівняння системи менше 1, тобто $|z_i| < 1, i=(1,n)$.

Іншими словами, полюси системи на комплексній площині повинні знаходитися усередині круга одиничного радіусу, при цьому коло одиничного радіусу є межею стійкості. Наявність хоч би одного кореня поза одиничним кругом робить дискретну систему нестійкою. Поява одного дійсного або пари двох комплексно-зв'язаних коренів на одиничному колі за умови розташування решти коренів усередині круга говорить про нейтральну стійкість дискретної системи (стійкості по Ляпунову).

5.2.8. Якість дискретних систем керування.

Як і для систем неперервного часу, показники якості дискретних систем призначені для оцінки динамічних властивостей системи, що виявляються в перехідних режимах, і для визначення точності системи, що характеризується похибками в сталому режимі, тобто після закінчення перехідних процесів.

Динамічні показники якості характеризує поведінка вільних складових перехідного процесу замкнутої системи керування або процесів автономної системи. Останні розглядаються як рішення скалярного різницевого рівняння (5.15). Природно, що розглядаються тільки стійкі системи.

Динамічні показники якості дискретних систем визначаються аналогічно показникам систем неперервного часу і можуть бути знайдені з використанням тих же підходів за умови виконання теореми Котельникова-Шеннона для вибору інтервалу дискретизації T при переході до дискретної форми опису системи.

Швидкість протікання дискретних процесів визначається значеннями модулів полюсів системи $|z_i| = \exp(-\alpha_i T)$. Значення $|z_i|$ зменшуються із збільшенням модулів дійсних частин полюсів неперервної системи α_i , що рівносильно збільшенню швидкодії, тобто зменшенню часу перехідного процесу $t_{\text{пн}}$. Це служить підставою для введення (по аналогії з неперервними системами) поняття ступеня стійкості дискретної системи як радіусу розподілу її полюсів на комплексній площині.

Ступенем стійкості дискретної системи називається позитивне число

$$\eta = \max |z_i|, \quad i = (1, n).$$

Швидкість протікання процесів зростає при наближенні полюсів на початок координат комплексної площини. Груба оцінка часу перехідних процесів дискретної системи по ступеню стійкості η (тільки по найповільнішій складовій перехідного процесу) виконується по формулі:

$$t_{\text{пн}} \approx 3T/\ln \eta.$$

Контрольні запитання

1. У чому суть теореми відновлення Котельникова-Шеннона?
2. Розкрийте суть дискретизації систем і формування їх різницевих рівнянь.
3. У чому полягає z -перетворення?
4. Який вигляд має передатна функція ЦОП?
5. У чому полягає побудова дискретного представлення неперервних систем?
6. Наведіть властивості елементарних ланок дискретних систем.
7. Які умови стійкості дискретних систем?

Глава 6. ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

6.1. Роль методів теорії оптимальних процесів

У загальному процесі проектування технічних систем керування можна виділити проблеми двох типів:

1. Проектування системи керування, направленою на досягнення поставленого завдання (формування траєкторій, режимів тощо), яке можна назвати проектуванням рухів.

2. Проектування конструктивних і міцнісних схем, які забезпечують реалізацію загальних характеристик і конкретних режимів роботи, що пов'язане з вибором ресурсів, необхідних для вирішення поставлених завдань.

Проблеми першого типу вирішуються найефективніше і строго на основі загальних методів математичної теорії оптимальних процесів (ТОП) керування.

Значення математичної ТОП керування полягає в тому, що вона дає єдину методологію вирішення вельми широкого круга завдань оптимального проектування і керування, усуває недостатню спільність колишніх часткових методів і сприяє впровадженню результатів та методів, отриманих в суміжних областях.

6.1.1. Загальна задача оптимального керування і її математична модель.

Початкова інформація для вирішення завдань оптимального керування міститься в постановці задачі. При цьому задача керування може формулюватися в змістовних термінах, які часто носять розпливчатий характер. Проте для застосування математичних методів необхідне чітке і строге формулювання задачі, яке б усувало можливі невизначеності і двозначності та одночасно робило б задачу математично коректною. З цією метою для загальної задачі необхідне адекватне їй математичне формулювання, зване математичною моделлю задачі оптимізації.

Математична модель (ММ) – достатньо повний математичний опис динамічної системи і процесу керування в рамках вибраного ступеня наближення і деталізації.

Повна ММ загального завдання оптимізації керування складається з ряду часткових ММ:

- процесу керованого руху;
- наявних ресурсів і технічних обмежень;
- показника якості процесу керування;
- керуючих дій.

Таким чином, ММ загальної задачі керування характеризується сукупністю певних математичних співвідношень між її елементами (диференціальних рівнянь, обмежень типу рівності і нерівностей, функцій якості, початкових і граничних умов тощо). У ТОП встановлюються загальні умови, яким повинні задовольняти елементи ММ для того, щоб відповідна математична задача оптимізації була б:

- чітко визначена;
- мала б сенс, тобто не містила умов, що приводять до відсутності рішення.

При цьому, формулювання задач і їх ММ в процесі дослідження не залишаються незмінними, а знаходяться у взаємодії один з одним (рис. 6.1).

Зазвичай первинне формулювання ММ зазнають значні зміни в кінці дослідження. Таким чином, побудова адекватної ММ нагадує ітераційний процес, в ході якого уточнюється як постановка найзагальнішого завдання, так і формулювання ММ. Важливо підкреслити, що для одного і того ж завдання ММ може бути не єдиною (різні системи координат і так далі). Тому необхідний пошук такого варіанту ММ, для якої рішення і аналіз задачі були б найбільш прості.

Важливим кроком в постановці і рішенні загальної задачі керування є вибір критерію оптимальності. В деяких випадках формальний вираз оптимальності системи допускає декілька еквівалентних формулювань. У таких випадках

успіх і простота отриманого рішення багато в чому визначається вибраною формою критерію оптимальності. Після побудови ММ процесу керування подалше її дослідження і оптимізація проводяться математичними методами.

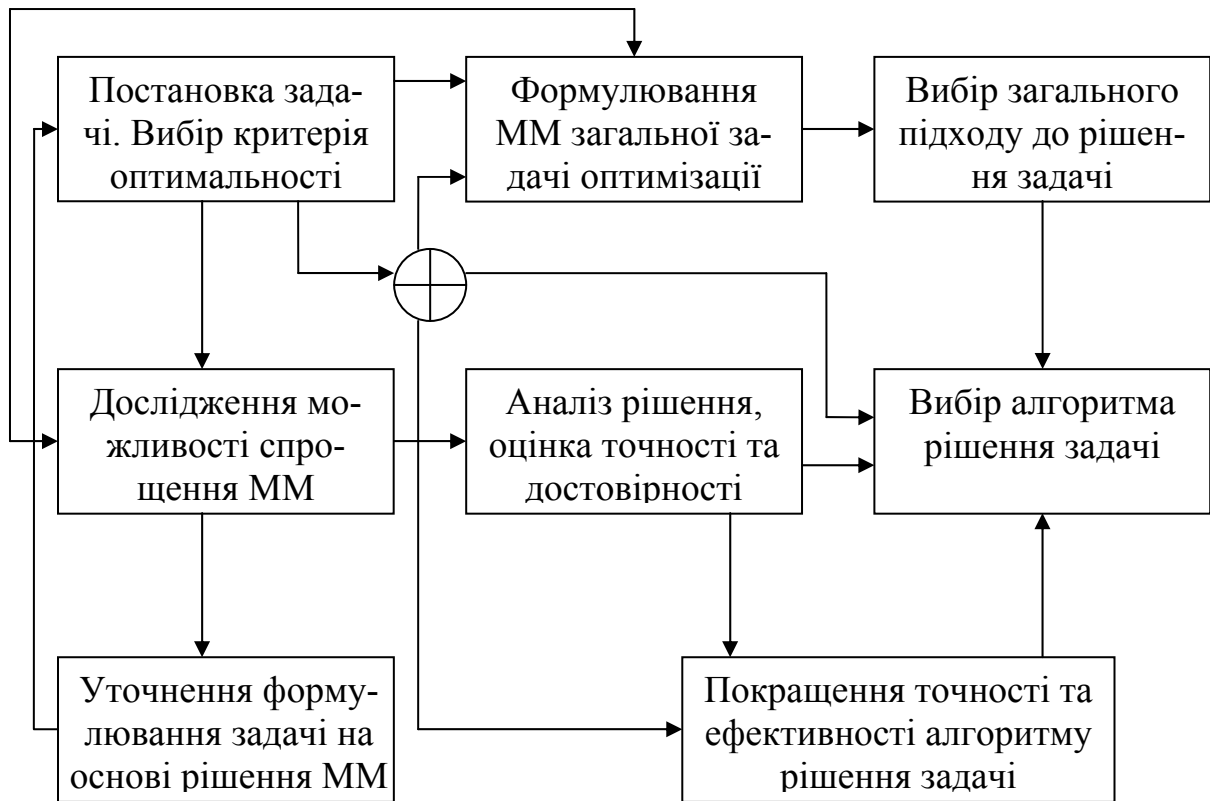


Рис. 6.1. Схема вирішення задач оптимізації

6.1.2. Класифікація методів теорії оптимальних процесів.

Методи ТОП можна умовно розділити на прямі і непрямі. *Непрямі* методи зводять задачу оптимізації динамічних характеристик системи, які є *функціоналами*, до вирішення відомих математичних проблем. До непрямих методів відносяться:

1. Принцип максимуму Л.С. Понтрягіна і метод множників Лагранжа класичного варіаційного числення. Принцип максимуму зводить рішення задачі оптимізації функціоналів до вирішення відомих завдань – максимізації або мінімізації деякої спеціальної функції кінцевого числа змінних у поєднанні з рішенням крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР)

першого порядку. У класичному варіаційному численні завдання оптимізації функціонала зводиться до рішення крайової задачі для системи ЗДР. Принцип максимуму особливо зручний для вирішення оптимізаційних задач, оскільки дозволяє найбільш простим чином врахувати різного роду обмеження на величини керуючих змінних і фазових координат (змінних стану). Класичне варіаційне числення зручніше в завданнях, що описуються ЗДР більш загального вигляду (зокрема, не дозволених відносно похідних) і не містять обмежень у вигляді нерівностей на керуючі і фазові змінні.

2. Принцип оптимальності, покладений в основу динамічного програмування Р. Беллмана і метод Гамільтона-Якобі класичного варіаційного числення. У цих методах завдання оптимізації функціонала зводиться до вирішення системи нелінійних диференціальних рівнянь в часткових похідних першого порядку з відповідними граничними умовами.

Прямі методи ТОП зводять задачу оптимізації функціонала до побудови мінімізуючої (або максимізуючої) послідовності, на підставі якої за допомогою граничного переходу може бути отримане точне рішення задачі. До прямих методів відносяться методи, засновані на зведенні завдань оптимізації функціоналів до завдань на умовний екстремум функцій кінцевого числа змінних, різні варіанти градієнтних методів.

У разі застосування непрямих і прямих методів, рішення задачі оптимізації може відшукуватися або в аналітичній, або в числовій формах.

Рішення в квадратурі (за винятком лінійних системи з квадратичним критерієм якості) можуть бути знайдені лише для завдань в спрощеній постановці.

Чисельні методи на сучасному етапі розвитку обчислювальної математики володіють спільністю, порівняною із спільністю аналітичних методів. Хоча при їх використанні виникають певні проблеми, пов'язані з оцінками швидкості збіжності, стійкості, похибками округлень, обмеженою розрядністю тощо.

6.1.3. Умови і проблема існування оптимального керування.

Розглянуті в даному розділі необхідні умови оптимальності керування для

різного типу задач оптимізації отримані на основі використання аналітичних непрямих методів оптимізації і утворюють сукупність функціональних співвідношень, якій обов'язково повинно задовольняти екстремальне рішення.

При виводі їх зроблено істотне для подальшого застосування припущення *про існування оптимального керування*. Іншими словами, якщо оптимальне рішення існує, то воно обов'язково задовольняє приведеним (необхідним) умовам. Проте цим же необхідним умовам можуть задовольняти й інші рішення, що не є оптимальними (подібно до того, як необхідній умові $\frac{df}{dx} = 0$ мінімуму функції однієї змінної задовольняють, наприклад, точки максимуму і точки перегину функції $f(x)$). Тому, якщо знайдене рішення задовольняє необхідним умовам оптимальності, то це ще не означає, що воно є оптимальним.

Після того, як знайдено будь-яке рішення, що задовольняє необхідним умовам, доцільно перевірити, чи є воно дійсно оптимальним в сенсі початкової постановки задачі.

Аналітичні умови, здійснимість яких на отриманому рішенні гарантує його оптимальність, називаються *достатніми умовами*.

У загальному випадку застосування необхідних умов оптимальності було б більш обґрунтованим, якби для даної задачі можна було встановити факт існування (або існування і єдиності) оптимального керування.

Проблема існування, єдиність оптимального керування складається з двох питань:

1. Існування допустимого керування (тобто керування, яке належить заданому класу функцій), що задовольняє заданим обмеженням і переводить систему із заданого початкового стану в заданий кінцевий стан.

2. Існування в класі допустимих керувань оптимального керування і його єдиність.

Необхідно застерегти від висновків про існування оптимального керування на підставі того факту, що вирішується «фізичне» завдання. Насправді, при застосуванні методів ТОП доводиться мати справу з ММ. Необхідною

умовою адекватності опису фізичного процесу ММ якраз і є існування рішення для ММ. Оскільки при формуванні ММ вводяться різного роду спрощення, вплив яких на існування рішень важко передбачити, доказ існування є окремою математичною проблемою.

Таким чином:

- з існування оптимального керування витікає існування, принаймні, одного керування, що задовольняє необхідним умовам оптимальності; з існування керування, що задовольняє необхідним умовам оптимальності, не витікає існування оптимального керування;
- з існування оптимального керування і єдиності керування, що задовольняє необхідним умовам, витікає єдиність оптимального керування; з існування і єдиності оптимального керування не виходить єдиність керування, що задовольняє необхідним умовам оптимальності.

6.1.4. Результати оптимального керування.

ТОП є основою єдиної методології проектування оптимальних рухів технічних, економічних і інформаційних систем. В результаті застосування методів ТОП до завдань конструювання різних систем можуть бути отримані:

- 1) оптимальні по тому або іншому критерію часові програми зміни керуючих дій і оптимальні значення постійних керування параметрів (проектних, настроювальних), з урахуванням різного роду обмежень на їх значення;
- 2) оптимальні траєкторії, режими з урахуванням обмежень на область їх розташування;
- 3) оптимальні закони керування у формі зворотного зв'язку, що визначають структуру контура системи керування (рішення задачі синтезу керування);
- 4) граничні значення ряду характеристик або інших критеріїв якості, які потім можна використовувати як еталон для порівняння з іншими системами;
- 5) вирішення краєвих завдань попадання з однієї точки фазового простору в іншу, зокрема, завдання попадання в задану область;
- 6) оптимальні стратегії попадання в деяку рухому область.

6.1.5. Умови раціонального застосування методів оптимізації.

Методи оптимізації керування раціонально застосувати:

1) у складних технічних системах, де відшукування прийнятних рішень на основі досвіду скрутно. Практика показує, що оптимізація малих підсистем може приводити до великих втрат в критерії якості об'єднаної системи. Краще приблизно вирішити задачу оптимізації системи в цілому (хай в спрощеній постановці), чим точно для окремої підсистеми;

2) у нових задачах, в яких відсутній досвід формування задовільних характеристик процесу керування. У таких випадках формулювання оптимального завдання часто дозволяє встановити *якісний характер керування*;

3) на можливо ранній стадії проектування, коли є велика свобода вибору. Після визначення великої кількості проектних рішень система стає недостатньо гнучкою і подальша оптимізація може не дати істотного виграшу;

4) при необхідності визначити напрям зміни керування і параметрів, що дають найбільшу зміну критерію якості (визначення градієнта якості).

Слід зазначити, що для добре вивчених і довго експлуатованих систем методи оптимізації можуть давати невеликий виграш, оскільки знайдені з досвіду практичні рішення зазвичай наближаються до оптимальних.

6.2. Поняття математичної теорії оптимального керування

6.2.1. Математичні моделі. Змінні стану (фазові координати) керованого процесу.

ММ завдання оптимізації процесу керування складається з ряду часткових ММ, включаючи ММ керованого процесу, обмежень на величини керуючих дій і на можливе розташування на траєкторії, математичний опис показника ефективності (критерію якості) процесу керування тощо.

Основні елементи загальної ММ задачі оптимізації процесу керування приведені в табл. 6.1.

Математична задача оптимізації процесу керування вважається повністю визначеною (коректно поставленою), якщо точно описані всі елементи ММ, представлені в табл. 6.1.

Таблиця 6.1. Етапи побудови ММ задачі оптимізації для детермінованих систем з неперервним часом

Етап	Зміст етапу	Елементи ММ	Примітки
1	2	3	4
I	Неформальний опис задачі і її аналіз; вибір і обґрунтування ступеня точності і деталізації опису системи фізичними теоріями. Фізична постановка задачі.	Формулювання розглянутого випадку або вузької задачі дослідження в змістовних термінах. Встановлення фізичних законів, яким підкоряються різні об'єкти задач.	Готують дані, на основі яких надалі будується ММ і формулюються специфічні допущення, що дозволяють використовувати математичні допущення.
II	Формування ММ. Математична постановка задачі. Вибір і перерахування змінних стану (фазових координат), області їх визначення і інтервалу часу, на якому доцільно розглядати керований процес. Вибір системи (або систем) координат, в яких доцільно розглядати процеси руху і керування.	<i>Вектор стану</i> (фазових координат) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{x} \in X^n \subset R^n$, $\dim(\mathbf{x}) = n$ - розмірність фазового простору. Область визначення \mathbf{x} : X^n . Відрізок часу $T = \{t, t_0 \leq t \leq t_1\}$	На базі I етапу вибір фазових координат для конкретного завдання не є єдиним (наприклад, він залежить від вибору системи координат).
	Встановлення загальних законів, яким підкоряється еволюція стану даної системи. Оцінка області їх застосовності (області визначення). Вибір і перерахування керуючих змінних на області їх визначення, а також керованих параметрів і збурень.	<i>Диференціальне рівняння руху</i> $\mathbf{x} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$; $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$; Область визначення \mathbf{f} : $t \in T, \mathbf{x} \in X^n, \mathbf{y} \in Y^{m_1}$. <i>Керуючі змінні</i> $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T, \mathbf{u} \in U^m \subset R^m$. <i>Керовані параметри (проектні)</i> $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \mathbf{a} \in A^r \subset R^r$; <i>Збурення</i>	Тут \mathbf{y} – вектор поки невизначених елементів в правій частині рівнянь руху. Вектор невизначених елементів \mathbf{y} або стає керуванням \mathbf{u} , або відомою функцією (t, \mathbf{x}) , або керованим параметром \mathbf{a} . У стохастичних завданнях \mathbf{w} – випадкові функції

	Аналіз технічних обмежень на значення керуючих дій, фазові координати і керовані параметри.	$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_s)^T, \mathbf{w} \in W^s \subset R^s;$ $m + r + s = m_1.$ <i>Обмеження типу рівності</i> $\Psi(t, \mathbf{x}) = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_\mu)^T = 0;$ $\mathbf{k}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}) = (k_1, k_2, \dots, k_\nu)^T = 0.$ <i>Обмеження типу нерівностей.</i>	ції. Іноді обмеження представляють у вигляді: $\mathbf{u} \in U^m \subset \tilde{U}^m; \mathbf{x} \in X^n \subset \tilde{X}^n;$ $\mathbf{a} \in A^r \subset \tilde{A}^r$ де U^m, X^n, A^r - замкнуті області обмеження .
	Вибір функціональних класів для керувань і траєкторій. Визначення допустимих траєкторій, керувань і керованих параметрів.		Зазвичай $u(t)$ - кусочно-неперервні обмеження функції часу t ; $x(t)$ - неперервні кусочно-гладкі функції часу.
	Формулювання початкових і граничних умов (цілі еволюції системи).	<i>Умова типу</i> $\mathbf{g}(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1), \mathbf{a}) =$ $= (g_1, g_2, \dots, g_l)^T = 0$ $(l \leq 2n + 2 + r);$ $\mathbf{h}(t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{a}) = (h_1, h_2, \dots, h_{l_1})^T = 0;$ $\mathbf{g}(t_1, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{a}) = (g_1, g_2, \dots, g_{l_2})^T = 0.$	Формулюються також вільні граничні умови
	Вибір показника оцінки якості керування, направленою на досягнення поставленої мети.	<i>Різного роду функціонали</i> $J[\mathbf{u}, \mathbf{a}],$ визначені на рішеннях системи.	
	Вибір обчислювального оператора (max, min, max min, min max), застосування якого до показника якості є математичним виразом технічного розуміння оптимальності системи. Фіксація аргументів цього оператора (u, a, t тощо). Формулювання задач оптимізації.	$\max_{\mathbf{u} \in U} J[\mathbf{u}];$ $\min_{\mathbf{u} \in U} J[\mathbf{u}];$ $\min_{\mathbf{u} \in U} \max_{t \in T} J[\mathbf{u}];$ $\min_{\mathbf{u} \in U} \max_{\mathbf{w} \in W} J[\mathbf{u}, \mathbf{w}]$	
III	Коректування технічною постановкою задачі.	<i>Число змінних, вид рівнянь, критерій, граничні умови тощо.</i>	Аналітичні труднощі, вивчення сформульованої моделі можуть змусити піти на подальші спрощення.
	Еквівалент перетворення ММ для зруч-	<i>Перехід до нових фазових або керуючих змінних, гра-</i>	Використання методів штрафних функцій, реду-

	ності застосування аналітичних або чисельних методів вирішення задач оптимізації.	<i>ничних умов тощо.</i>	кції до простіших завдань тощо.
	Зміна ММ для зручності обчислень. Формулювання понять «практично оптимальної системи», «практичної точності отримання результату» в конкретній задачі.		Проводиться на базі змістовного (етап I) і математичного (етап II) формулювань задач.

У основі ММ задачі оптимального керування лежить ММ керованого процесу. Ця модель ґрунтується на понятті змінних стану (фазових координат), які вводяться в завдання таким чином.

Нехай керована система S може *ідеалізуватися* настільки, що в кожен фіксований момент часу спостереження $t = t'$ на інтервалі $T = \{t, t_0 \leq t \leq t_1\}, t' \in T$ її властивості можуть бути описані кінцевою множиною дійсних чисел $x_1(t'), x_2(t'), \dots, x_n(t')$, які розглядаються як компоненти деякого вектора $\mathbf{x}(t) = (x_1(t'), x_2(t'), \dots, x_n(t'))^T$.

При зміні моменту часу спостереження змінюється і вектор \mathbf{x} , що може бути викликане прикладеними до об'єкту діями. Якщо і при $t > t'$ властивості системи як і раніше повністю описуються вектором

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$$

і якщо n - найменша кількість величин $x_i(t')$, за допомогою яких виявляється можливим передбачити значення $\mathbf{x}(t)$ при всіх $t > t'$ по відомим значенням $x(t')$ і відомим на T значенням прикладених дій, то вектор $\mathbf{x}(t)$ називається *вектором стану* (детермінованої) системи S у момент t (або вектором фазових координат).

Величини x_i називаються *компонентами вектора стану*, або фазовими координатами.

Множина всіх можливих станів $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ у різні моменти

часу $t \in T$ утворюють n -мірний простір станів (n -мірний фазовий простір), точка $\mathbf{x} \in X^n$ є зображуючою точкою (ЗТ) цього простору.

Вектор $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, t)^T$, тобто стан у момент t , називається подією (фазою). Множина всіх можливих подій \mathbf{z} утворює простір $Z^{n+1} \subset R^{n+1}$ подій. Точка $\mathbf{z} \in Z^{n+1}$ є точкою простору зображуючих подій.

6.2.2. Керування.

Система S називається *керованою на відрізку* (одне з визначень керованості) $[t_0, t_1]$, якщо її поведінка при $t > t_0$ залежить тільки від початкового стану ($t = t_0, \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$), майбутньої поведінки деякого змінного вектора \mathbf{u} (входу системи)

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T, m \geq 1,$$

званого *керуючим вектором* (або просто керуванням) \mathbf{u} і постійного вектора

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)^T, r \geq 0,$$

званого *вектором керованих параметрів* (проектних).

Вектор \mathbf{u} приймає значення з деякої множини U^m m -мірного простору R^m з координатами u_1, u_2, \dots, u_m . Ця множина може бути всім простором R^m або його частиною $U^m \subset R^m$. U^m – найчастіше компактна множина простору R^m .

Множина U^m називається *множиною допустимих значень керування*.

6.2.3. Еволюція стану системи.

Зміна стану (еволюція) системи S на часовому інтервалі $T = \{t, t_0 \leq t \leq t_1\}$ часто з хорошим ступенем наближення описується системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}), \quad (6.1)$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор стану; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ – вектор керувань; $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)^T$ – вектор проектних параметрів.

Система (6.1) утворює істотну частину ММ динамічної системи S . Тут у

ММ формальною ознакою змінної стану \mathbf{x} є наявність її похідної $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ у лівій частині системи. Змінна керування \mathbf{u} входить тільки в праву частину системи (6.1) і не зустрічається під знаком похідної (це формальна ознака керуючої змінної).

Передбачається, що вектор-функція $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a})$ визначена для будь-яких значень $\mathbf{x} \in X^n, \mathbf{u} \in U^m, \mathbf{a} \in A^r, t \in T$, неперервна по сукупності змінних $t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}$ і неперервно диференційована по \mathbf{x}, \mathbf{a} . Гладкість є достатньо жорсткою вимогою і може бути замінена вимогою вимірності і обмеженості. Оскільки поведінка вектора \mathbf{u} може бути довільною (за винятком умови $\mathbf{u} \in U^m$) і, крім того, можна довільно вибрати постійний вектор $\mathbf{a} \in A^r$, то система рівнянь (6.1) визначає керований процес. Хід керованого процесу буде визначений на деякому інтервалі $t_0 \leq t \leq t_1$, якщо на цьому інтервалі вектор \mathbf{u} заданий в одній з двох форм:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))^T; \quad (6.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t), \dots, v_m(\mathbf{x}, t))^T. \quad (6.3)$$

Вектор-функцію $\mathbf{u}(t)$ називають *програмним (часовим) керуванням*, а вектор-функцію $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ - *координатним керуванням* або *законом керування*. Закон керування (6.3) фізично виражає відомий принцип зворотного зв'язку, згідно якому величина керуючої дії визначається на підставі вимірювання поточного стану системи \mathbf{x} і, можливо, моменту часу t .

Кожному вибору векторів керованих параметрів \mathbf{a} і керування \mathbf{u} (вигляду (6.2) (6.3)) і кожному початковому стану (t_0, \mathbf{x}_0) відповідає по (6.1) часова послідовність станів $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$, яка називається *фазовою траєкторією* (поведінкою, еволюцією, рухом) системи S . Пара вектор-функцій $\{\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t)\}$ або $\{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}(t)\}$ називається *процесом керування* або *режимом*.

6.2.4. Функціонал. Критерій якості керування.

Величина $J[u(t)]$ називається *функціоналом* функції $u(t)$ на відрізку $t_0 \leq t \leq t_1$, якщо кожній функції $u(t), t \in [t_0, t_1]$, що належить деякому класу функцій, поставлено у відповідність певне число

$$(f(a), f'(x), \int_0^t f(t)dt, \max_{t_0 \leq t \leq t_1} f(t) \text{ і так далі}) \in R.$$

Таким чином, функціонал $J[u(t)]$ – це відображення, в якому роль незалежної змінної (функціонального аргументу) грає функція $u(t)$. При цьому $J[u(t)]$ залежить від сукупності всіх значень, що приймаються функцією $u(t)$ на відрізку $[t_0, t_1]$, і може розглядатися як функція нескінченного числа незалежних змінних.

Для кожного фіксованого кінцевого моменту часу $t_1 = t_1'$ стан $\mathbf{x}(t_1')$ системи S , рухомої з початкового стану (t_0, \mathbf{x}_0) відповідно до рівняння (6.1), є одночасно векторним функціоналом (тобто вектором, компонентами якого є функціонали) від керування $\mathbf{u}(t)$ і вектор-функцією від вектора \mathbf{a} і вектора початкових умов $\mathbf{x}_0(t_0)$. Критерії якості процесів керування є функціоналами.

Достатньо загальна форма критерію якості в ТОП має вигляд

$$J[\mathbf{u}(t), \mathbf{a}] = \Phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{a}) dt, \quad (6.4)$$

де $\mathbf{x}(t)$ задовольняє системі (6.1); $\mathbf{u}(t)$ – деяке вибране керування; \mathbf{a} – керований параметр. Зокрема, кожен з координат $x_i(t)$ системи (6.1) можна записати як

$$x_i(t) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x_i(t), u(t), a) dt + x_i(t_0), i = \overline{1, n}.$$

6.2.5. Автономні системи.

Якщо праві частини (6.1) і функції Φ і f_0 у (6.4) від часу явно не залежать, то відповідна задача називається *автономною*:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a});$$

$$J[\mathbf{u}(t), \mathbf{a}] = \Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}) dt.$$

Автономні системи інваріантні щодо зсуву уздовж осі t , тому для автономних систем важлива тільки тривалість процесу $t_1 - t_0$ і можна покласти $t_0 = 0$.

6.2.6. Допустиме програмне керування.

Вектор-функція $\mathbf{u}(t)$ називається допустимим програмним керуванням в задачі, якщо:

а) $\mathbf{u}(t)$ належить до вибраного класу в більшості практичних застосувань кусочно-неперервних по t на інтервалі $[t_0, t_1]$ функцій, тобто може мати лише кінцеве число точок розриву першого роду;

б) значення $\mathbf{u}(t)$ належать заданій множині U_m для всіх $t \in [t_0, t_1]$.

Кусочно-неперервні керування відповідають припущенню про «безінерційність».

Якщо бажано врахувати «інерцію», то слід шукати керування в класі неперервних кусочно-гладких функцій $\mathbf{u}(t)$. Такий клас допустимих керувань іноді зводиться до попереднього шляхом введення нового безінерційного керування $\bar{\mathbf{u}}(t)$, пов'язаного зі «старим» керуванням $\mathbf{u}(t)$ співвідношенням

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}} \in U^m,$$

де $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$;

$$\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m)^T. \quad (6.5)$$

Якщо U_m - замкнута і обмежена область, то це означає, що введені обмеження на значення перших похідних від вектор-функції $\mathbf{u}(t)$.

Кусочно-неперервним функціям $\bar{\mathbf{u}}(t)$ відповідають кусочно-гладкі функції $\mathbf{u}(t)$ в силу (6.5). Таким чином, в новій задачі $\mathbf{u}(t)$ стає змінною стану, керованою за допомогою $\bar{\mathbf{u}}(t)$ через систему (6.5).

Якщо умову $\mathbf{u} \in U^m$ у новій задачі можна зняти, то задача зводиться до попередньої для кусочно-неперервного керування $\bar{\mathbf{u}} \in U^m$. Інакше слід звернутися до задачі оптимізації з обмеженнями на фазові координати. На рис. 6.2 наведені приклади керувань, що належать як до класу кусочно-неперервних функцій, так і до інших класів.

Розгляд допустимих керувань в класі кусочно-неперервних функцій пояснюється тим, що для оптимізації функціоналів на цьому класі функцій розроб-

лений відповідний математичний апарат – принцип максимуму.

Для кожного допустимого керування $\mathbf{u}(t)$ через зроблені припущення відносно $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ існує єдине абсолютно-неперервне вирішення системи $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$, яке задовольняє системі (6.1) майже усюди на $[t_0, t_1]$ (тобто за винятком кінцевого числа або рахункової множини точок розриву функції $\mathbf{u}(t)$) і при $t = t_0$ приймає задане значення $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$.

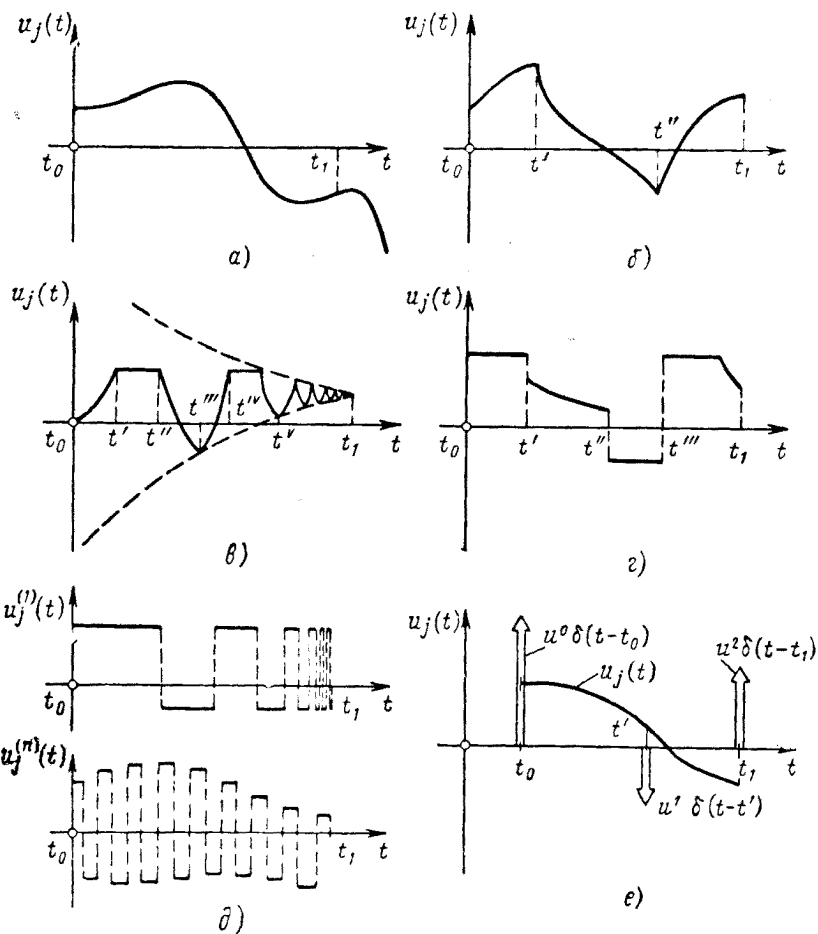


Рис. 6.2. Приклади керувань $u_j(t)$ різних класів функцій:

гладке (а), - кусочно-гладке неперервне (б) та неперервне (в) (у околиці $u_j(t)$ t недиференційована) керування; кусочно-неперервне (г) керування та керування (д), що не є кусочно-неперервним u'_j , але містить нескінченне число перемикань в околиці t_1 ; $u_j^2(t)$ - елемент послідовності, що сходиться до функції, розривної в кожній точці $[t_0, t_1]$; е - керування, що містить 5-функцій Дирака; $\bar{u}^2, \bar{u}_1, \bar{u}_2$ – константи

6.2.7. Допустимий закон керування.

Закон керування $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ є допустимим на $\mathbf{x} \in X^n, t \in [t_0, t_1]$, якщо

- 1) $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \in U^m, \forall t \in T = [t_0, t_1], \mathbf{x} \in X^n$;
- 2) $\mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{u}(t)$,

де $\mathbf{x}(t)$ – траєкторія системи S ; $\mathbf{u}(t)$ – допустиме програмне керування при законі керування $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

Вектор \mathbf{a} керованих параметрів називається допустимим, якщо його значення належать заданій множині $A^r \subset R^r$.

6.2.8. Допустимі траєкторії і процеси.

Фазова траєкторія $\mathbf{x}(t)$ системи S називається допустимою, якщо:

а) вона отримана з рішення системи диференціальних рівнянь при допустимому керуванні $\mathbf{u}(t)$ або при допустимому законі керування $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$;

б) значення $\mathbf{x}(t)$ належать заданій області X^n простору станів \bar{X}^n .

Керований процес (\mathbf{x}, \mathbf{u}) називається допустимим, якщо в ньому під дією допустимого керування $\mathbf{u}(t)$ або допустимого закону керування $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ реалізується допустима траєкторія.

6.2.9. Граничні умови. Краєва задача.

Мета керованого процесу (\mathbf{x}, \mathbf{u}) полягає в переході системи S з деякого заданого при $t = t_0$ початкового стану $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ у заданий кінцевий стан $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ за час $T = t_1 - t_0$.

Всі компоненти векторів $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ і моменти часу t_0, t_1 обов'язково повинні бути фіксованими, деякі можуть залишатися незаданими (*вільними*). У загальному випадку система S в початковий і кінцевий моменти часу може знаходитися в станах, що описуються рівняннями виду

$$\mathbf{h}(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{a}) = (h_1, h_2, \dots, h_l)^T = 0; \quad (6.6)$$

$$\mathbf{g}(t_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) = (h_1, h_2, \dots, h_l)^T = 0 \quad (6.7)$$

або більш загальними рівняннями вигляду

$$\mathbf{g}(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) = (g_1, g_2, \dots, g_l)^T = 0, \quad (6.8)$$

де $l_1 + l_2 \leq 2n + 2 + r; l \leq 2n + 2 + r$.

Рівняння (6.6) і (6.7), що зазвичай описують (при фіксованому керованому параметрі a) поверхню розмірності $(n+1-l_2)$ і $(n+1-l_1)$ і $(u-l_2)$ у просторі (t, \mathbf{x}) , називаються *роздільними граничними умовами* для кінців фазової траєкторії. Приклади граничних умов приведені на рис. 6.3.

Рівняння (6.8) називаються *змішаними граничними умовами*. Якщо значення фазових координат у момент t_0 (або t_1) не фіксуються, то граничні умови для лівого (або правого) кінця траєкторії називаються *вільними*. Роздільні умови вигляду (6.6) і (6.7) часто називають *рухомими граничними умовами*.

Визначення рівнянь $\mathbf{u}(t)$, при яких вирішення системи (6.1) задовольняє умовам (6.6) і (6.7), називається *двоточною крайовою задачею*.

Перехід початкового стану \mathbf{x}_0 в кінцевий стан \mathbf{x}_1 на заданому відрізку $[t_0, t_1]$ не завжди можливий. Проте, якщо знайдеться хоч би одна пара векторів $\{\mathbf{u}(\mathbf{t}), \mathbf{a}\}$ або $\{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \mathbf{a}\}$, що здійснює вказаний перехід, то зазвичай існують і інші пари векторів, що реалізують цей же самий перехід. В цьому випадку кожній парі $\{\mathbf{u}(\mathbf{t}), \mathbf{a}\}$ відповідає певне значення критерію якості $J[\mathbf{u}, \mathbf{a}]$. Можна ставити задачу про відшукування таких $\{\mathbf{u}(t), \mathbf{a}\}$, які мінімізують або максимізують цей критерій.

6.3. Постановка основної задачі оптимального керування

Основна задача оптимального програмного керування у формі часової програми (6.2) для системи (6.1) з критерієм (6.4) і крайовими умовами (6.8) формулюється таким чином.

Серед усіх допустимих на відрізку $[t_0, t_1]$ програмних керувань $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \in U^m$ і керованих параметрів $\mathbf{a} \in A^r$, що переводять точку (t_0, \mathbf{x}_0) у точку (t_1, \mathbf{x}_1) , знайти такі, для яких функціонал (6.4) на рішеннях системи (6.1) прийме

найменше (найбільше) значення з виконанням умов (6.8).

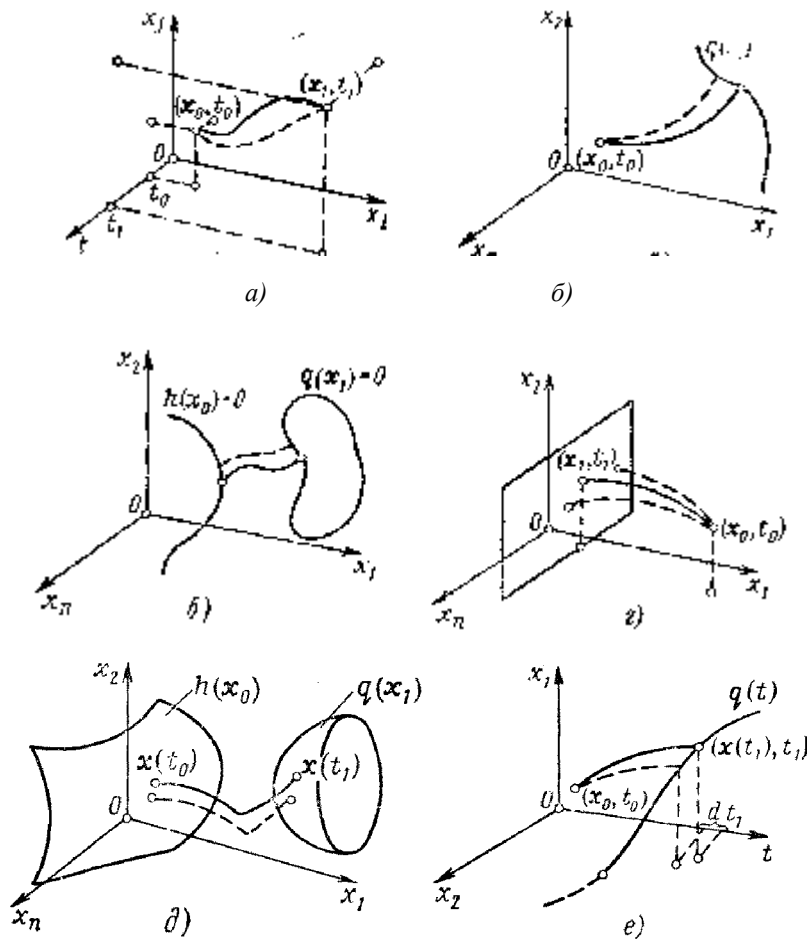


Рис. 6. 3. Приклади граничних умов:

a - лівий і правий кінці фазової траєкторії закріплені; *б* - лівий кінець закріплений, правий - вільний; *в* - лівий і правий кінці рухомі; *г* - лівий кінець закріплений, правий - вільний, окрім координати x_1 ; *д* - загальний випадок рухомих граничних умов; *е* - граничні умови в задачі зустрічних рухів;
 — оптимальна траєкторія; - - - - довільна траєкторія

Керування $\mathbf{u}(t)$, що вирішує цю задачу, називається оптимальним (програмним) керуванням, а вектор \mathbf{a} – оптимальним параметром.

Якщо пара $\{\mathbf{u}^*(t), \mathbf{a}^*\}$ доставляє абсолютний мінімум функціоналу $J[\mathbf{u}(t), \mathbf{a}]$ на рішеннях системи (6.1), то виконується співвідношення

$$J_{\min} = J^* = J[\mathbf{u}^*(t), \mathbf{a}^*] \leq J[\mathbf{u}(t), \mathbf{a}] \quad (6.9)$$

для $\forall \mathbf{u} \in U^m, \mathbf{a} \in A^r$, що є допустимими і що здійснюють заданий перехід з виконанням умови (6.8). Аналогічне визначення має місце для абсолютного максимуму (із заміною знаку нерівності на \geq).

З визначення абсолютного мінімуму (6.9) виходить, що абсолютне мінімальне значення функціонала $J^* = J[\mathbf{u}^*, \mathbf{a}^*]$ є єдиним, чого не можна стверджувати, взагалі кажучи, про оптимальне керування $\mathbf{u}^*(t)$ і оптимальний параметр \mathbf{a}^* .

6.3.1. Основна задача оптимального координатного керування.

Основне завдання оптимального координатного керування відоме в теорії оптимальних процесів як *проблема синтезу оптимального закону керування*, а в деяких задачах – як *задача про оптимальний закон поведінки*.

Завдання синтезу оптимального закону керування для системи (6.1) з критерієм (6.4) і краєвими умовами (6.6) і (6.7), де для спрощення передбачається, що функції f_0, f, h, g, Φ від вектора \mathbf{a} не залежать, формулюється таким чином.

Серед всіх допустимих законів керування $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ знайти такий, що для будь-яких початкових умов (t_0, \mathbf{x}_0) з (6.6) при підстановці цього закону в (6.1) і в (6.4) здійснюється заданий перехід (6.7) і критерій якості $J[\mathbf{u}]$ приймає найменше (найбільше) значення.

6.3.2. Оптимальні траєкторії.

Траєкторія системи (6.1), відповідна оптимальному керуванню $\mathbf{u}^*(t)$ або оптимальному закону $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$, називається оптимальною траєкторією. Сукупність оптимальних траєкторій $\mathbf{x}^*(t)$ і оптимального керування $\mathbf{u}^*(t)$ утворює оптимальний керований процес $\{\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)\}$.

Встановлено, що за відсутності вектора \mathbf{a} керованих параметрів f_0, f, h, g, Φ завдання програмного і координатного керування еквівалентні.

Оскільки закон оптимального керування $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$ має форму закону керування із зворотним зв'язком, то він залишається оптимальним для будь-яких значень початкових умов (t_0, \mathbf{x}_0) і будь-яких координат \mathbf{x} .

На відміну від закону $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$ програмне оптимальне керування $\mathbf{u}^*(t)$ є оптимальним лише для тих початкових умов, для яких воно було обчислене. При зміні початкових умов мінятиметься і функція $\mathbf{u}^*(t)$. У цьому полягає важлива, з погляду практичної реалізації системи керування, відмінність закону оптимального керування $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$ від програмного оптимального керування $\mathbf{u}^*(t)$ оскільки вибір початкових умов на практиці ніколи не може бути зроблений абсолютно точно.

6.3.3. Властивості оптимальних керувань і оптимальних траєкторій.

1. Всяка частина оптимальної траєкторії (оптимального керування) також, у свою чергу, є оптимальною траєкторією (оптимальним керуванням). Ця властивість математично формулюється таким чином.

Нехай $\mathbf{u}^*(t), t_0 \leq t \leq t_1$ – оптимальне керування для вибраного функціонала $J[\mathbf{u}]$, відповідне переходу із стану (t_0, \mathbf{x}_0) у стан (t_1, \mathbf{x}_1) по оптимальній траєкторії $\mathbf{x}^*(t)$. Числа t_0, t_1 і вектор \mathbf{x}_0 – фіксовані, а вектор \mathbf{x}_1 , взагалі кажучи, вільний. На оптимальній траєкторії $\mathbf{x}^*(t)$ вибираються точки $\mathbf{x}^*(\tau_0)$ і $\mathbf{x}^*(\tau_1)$, відповідні моментам часу $t = \tau_0, t = \tau_1$, де $t_0 \leq \tau_0 \leq \tau_1 \leq t_1$. Тоді керування $\mathbf{x}^*(t)$ на відрізку $[\tau_0, \tau_1]$ є оптимальним, відповідним переходу із стану $\mathbf{x}^*(\tau_0)$ у стан $\mathbf{x}^*(\tau_1)$, а дуга $[\mathbf{x}^*(\tau_0), \mathbf{x}^*(\tau_1)]$ є оптимальною траєкторією S .

Таким чином, якщо початковий стан системи є $\mathbf{x}^*(\tau_0)$ і початковий момент часу $t = \tau_0$, то незалежно від того, яким чином прийшла система до цього стану, її оптимальним подальшим рухом буде дуга траєкторії $\mathbf{x}^*(t), \tau_0 \leq t \leq \tau_1$, що є частиною оптимальної траєкторії між крапками (t_0, \mathbf{x}_0) і (t_1, \mathbf{x}_1) . Ця умова є необхідною і достатньою властивістю оптимальності процесу і служить основою динамічного програмування.

Примітка. Приведене коротке формулювання основної властивості оптимальних траєкторій не повинне тлумачитися дуже широко. Вимога, щоб початкова і кінцева точки траєкторій лежали на оптимальній траєкторії в ті ж моменти часу τ_0, τ_1 , що і точки оптимальної траєкторії, або щоб вільний правий кінець x'_1 траєкторії порівняння закінчувався в той же момент t_1 , що і кінець оптимальної траєкторії, є істотними. Без їх виконання ця властивість, взагалі кажучи, не має місця. Так, якщо задані тільки початкова точка $x_0 = x(t_0)$ і моменти часу t_0 і τ_0 , а $x(\tau_0)$ вільний, то відрізок траєкторії $x^*(t), \tau_0 \leq t \leq \tau_1$ може і не бути оптимальним. В цьому випадку оптимальним може бути, взагалі кажучи, інший відрізок $x'(t)$ (рис. 6.4).

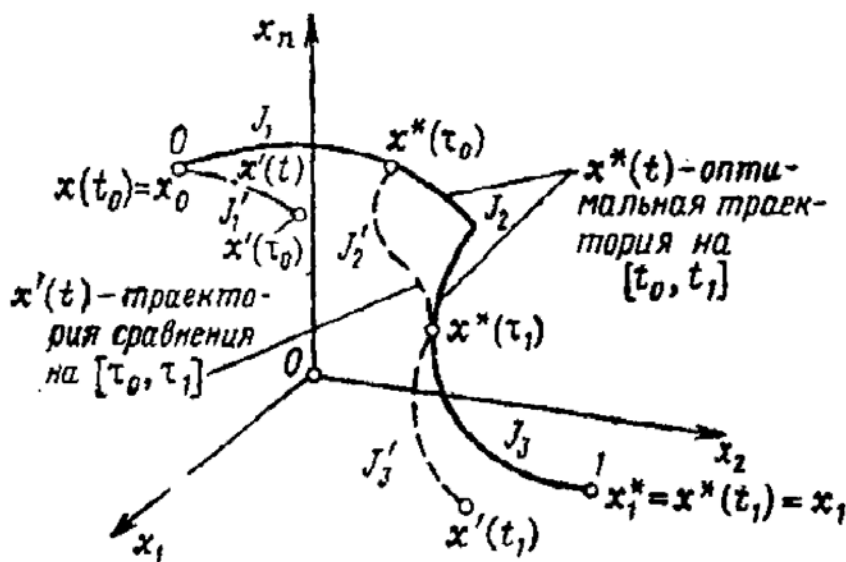


Рис. 6.4. Основна властивість оптимальних траєкторій:

$J'_2 > J_2$; $J_i, J'_i, (i=1,2,3)$ – значення функціонала на ділянках оптимальної траєкторії і на траєкторіях порівняння відповідно

2. Автономні системи інваріантні щодо зсуву уздовж осі t . Це означає, що якщо $u^*(t), t_0 \leq t \leq t_1$ здійснює перехід $x_0 \rightarrow x_1$ і додає функціоналу $J[u]$ значення J^* , то при будь-якому дійсному τ керування $u^*(t+\tau), t_0 - \tau \leq t \leq t_1$ також здійснює перехід $x_0 \rightarrow x_1$ і додає функціоналу $J[u]$ значення J^* .

6.3.4. Геометрична інтерпретація основної задачі оптимального керування.

Основною задачею оптимального керування при закріплених кінцях можна дати наступне еквівалентне геометричне формулювання.

Нехай при $t = t_0$ заданий початковий стан $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, а при $t = t_1$ – кінцевий стан $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$, де t_0, t_1, x_0, x_1 – фіксовані значення. Тоді у функціоналі $J[\mathbf{u}]$ (6.4) доданок $\Phi(t_0, t_1, x_0, x_1)$ є відомим числом Φ_0 .

Введемо нову змінну x_0 , закон зміни якої має вигляд

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}) \quad (6.10)$$

з початковою умовою

$$x_0(t_0) = x_{00} = \Phi_0.$$

Приєднаємо цю змінну до системи (6.1). Тоді, при $t = t_0$ система знаходиться в точці $(x_0(t_0), x_0(t_0), \dots, x_n(t_0))^T$, а при $t = t_1$ – в точці $(x_0(t_1), x_1(t_1), \dots, x_n(t_1))^T$, де

$$x_0(t_1) = \Phi_0 + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}) dt = J[\mathbf{u}].$$

Таким чином, якщо в $(n + 1)$ -мірному просторі точок (x_0, \mathbf{x}) провести через точку $(0, x_1)$ пряму Π паралельно осі $0x_0$, то рішення системи (6.1), (6.10) проходить при $t = t_1$ через точку на прямій Π з координатою $x_0(t_1) = J$.

Тепер основне завдання оптимального програмного керування формулюється геометрично як на рис. 6.5.

У $(n + 1)$ -мірному фазовому просторі $(x_0, x_1, \dots, x_n)^T$ дані:

- 1) при $t = t_0$ точка (Φ_0, \mathbf{x}_0) ;
- 2) пряма Π , паралельна осі $0x_0$ і що проходить через точку $(0, x_1)$.

Серед всіх допустимих програмних керувань $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{t})$, що володіють тією властивістю, що відповідне рішення $(x_0(t), \mathbf{x}(t))$ системи (6.1), (6.10) з початковою умовою $(\Phi_0, x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))^T$ перетинає при $t = t_1$ пряму Π , знайти таке, для якого точка перетину з прямою Π має найменшу (найбільшу) координату

$$x_0(t_1) = J.$$

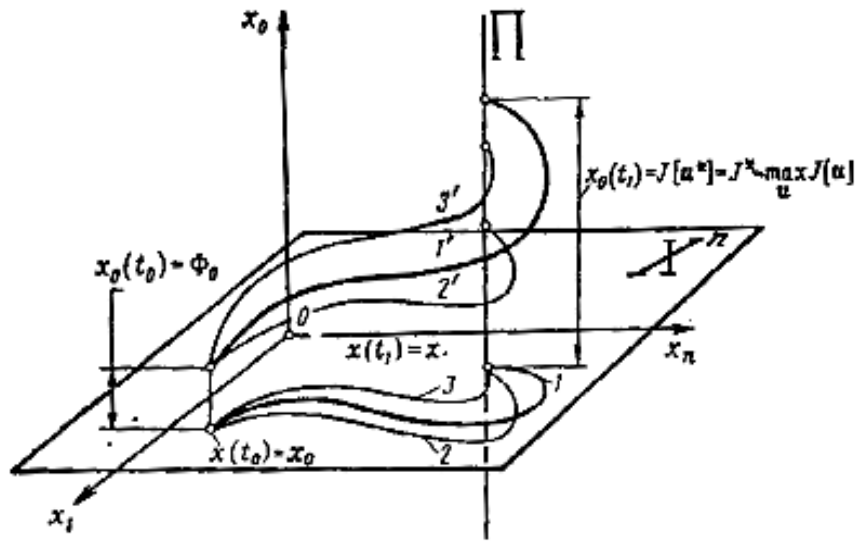


Рис. 6.5. Геометричне формулювання основної задачі оптимального керування:

1 – оптимальна траєкторія; 1' – зміна критерію якості J упродовж оптимальної траєкторії; 2, 3 – неоптимальні траєкторії, що проходять через точки $(x_0, t_0), (x_1, t_1)$; 2', 3' – зміна критерію якості J упродовж неоптимальних траєкторій

6.4. Принцип максимуму

6.4.1. Формулювання задачі.

Нехай дані:

- система диференціальних рівнянь руху

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}), \quad (6.11)$$

де $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a})$ визначені для всіх $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \tilde{X}^n \subset R^n$, $t_0 \leq t \leq t_1$, $\mathbf{u} \in U^m$, $\mathbf{a} \in A^r$, неперервні по сукупності змінних $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a})$ і неперервно диференційовані по (\mathbf{x}, \mathbf{u}) ;

- співвідношення, яким задовольняють початкові (t_0, \mathbf{x}_0) і кінцеві (t_1, \mathbf{x}_1) фази руху системи (6.11):

$$g_j(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) = 0; \quad (j = 1, 2, \dots, l < 2n + 2 + r), \quad (6.12)$$

де функції g_j неперервно диференційовані по всіх своїх аргументах;

- критерій якості керування (функціонал)

$$J[\mathbf{u}(t), \mathbf{a}] = \Phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}) dt, \quad (6.13)$$

де Φ, f_0 володіють всіма необхідними похідними.

Множина U^m є замкнутою і обмеженою областю евклідова m -мірного простору R^m . Функція $\mathbf{u}(t)$ вважається допустимою, якщо вона кусочно-неперервна і її значення належать множині U^m : $\mathbf{u}(t) \in U^m$, тобто таке керування u_i , кожне з яких неперервно для всіх даних t , за винятком лише кінцевого числа моментів часу, де функція $u_i(t)$ може терпіти розриви першого роду.

Відзначимо, що, за визначенням розривів першого роду, в точці розриву передбачається існування кінцевих меж:

$$u(\tau - 0) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau \\ t < \tau}} u(t), u(\tau + 0) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau \\ t > \tau}} u(t).$$

6.4.2. Допоміжні побудови.

Вводяться:

- залежний від часу вектор зв'язаних координат (вектор-функція множників Лагранжа)

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))^T; \quad (6.14)$$

- постійний вектор $\boldsymbol{\mu}$:

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l)^T; \quad (6.15)$$

- допоміжні функції (гамільтоніан задачі оптимізації і функція Лагранжа)

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}) + \lambda_0 f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}), \quad (6.16)$$

$$L(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{j=1}^l \mu_j g_j(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}) + \lambda_0 \Phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}); \quad (6.17)$$

- система диференціальних рівнянь, зв'язана до (6.11), (6.13) і що визначає зміну вектора $\boldsymbol{\lambda}(t)$,

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{\partial f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a})}{\partial x_i}; \quad (i = \overline{0,1}). \quad (6.18)$$

Зауваження. Система лінійних диференціальних рівнянь $\dot{\mathbf{y}} = B(t)\mathbf{y}$ називається *зв'язаною* для системи $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$, якщо $B(t) = -A^T(t)$ і розмірність векторів \mathbf{x} і \mathbf{y} (а також матриць $B(t)$ і $A(t)$) однакові. Таким чином, система (6.18) є фактично зв'язаною до лінеаризованої системи (6.11) (6.20):

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)} \delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)} \delta \mathbf{u}(t),$$

де $\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)$ – деяка опорна траєкторія і опорне керування, відповідно.

За допомогою функції H початкова система рівнянь (6.1) записується у вигляді

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}), \quad (i = \overline{0,1}). \quad (6.19)$$

Індексу $i=0$ відповідає нова змінна $x_0(t)$, визначувана скалярним рівнянням

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}), \quad (6.20)$$

з початковою умовою

$$x_0(t_0) = x_{00} = \Phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}). \quad (6.21)$$

Система рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^T = \tilde{\mathbf{f}}; \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= - \left(\frac{\partial H}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)^T = - \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right) \boldsymbol{\lambda}, \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

де $H = \boldsymbol{\lambda}^T \tilde{\mathbf{f}}, \partial \tilde{\mathbf{f}} / \partial \mathbf{x}$ – матриця Якобі, $\tilde{\mathbf{x}} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $\tilde{\mathbf{f}} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$; $\mathbf{x} \in \tilde{X}^{n+1}$, називається *канонічною системою* диференціальних рівнянь, пов'язаною з основною задачею.

6.4.3. Принцип максимуму Л.С. Понтрягіна.

Нехай $\mathbf{u}^*(t) = (u_1^*(t), \dots, u_m^*(t))^T, t \in [t_0, t_1]$ – таке допустиме керування,

$\mathbf{a}^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_r^*)^T$ – таке допустиме значення вектора параметрів, що відповідна ним траєкторія $\mathbf{x}^*(t)$ системи (6.11) задовольняє умовам (6.12) для кінців.

Для оптимальності (у сенсі мінімуму) критерію якості (6.13) керування $\mathbf{u}^*(t)$, траєкторії $\mathbf{x}^*(t)$ і вектора керованих параметрів \mathbf{a}^* необхідне існування такого ненульового змінного вектора $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))^T$, $\lambda_0(t) = \text{const} \geq 0$ (зазвичай можна приймати $\lambda_0 = 1$, див. слідство 2, п. 6.4.4) і такого постійного вектора $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l)^T$, що виконуються наступні умови:

1. Вектор-функції $\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t)$ і вектор \mathbf{a}^* задовольняють системі

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1^*}{dt} &= \frac{\partial H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*)}{\partial \lambda_i}, \\ \frac{d\lambda_i}{dt} &= \frac{\partial H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*)}{\partial x_i}, \\ (i &= \overline{0, n}). \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

2. Функція $H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*)$ змінного $\mathbf{u} \in U^m$ при кожному $t \in [t_0, t_1]$, тобто при фіксованих \mathbf{x}^* , $\boldsymbol{\lambda}$ і при фіксованому векторі \mathbf{a}^* досягає при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$ мінімуму:

$$H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*) = H^*(t, \mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*) = \min_{\mathbf{u} \in U^m} H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*). \quad (6.24)$$

Випадок максимуму функціонала $J[\mathbf{u}, \mathbf{a}]$ зводиться до завдання в даній постановці шляхом розгляду функціонала $J_1[\mathbf{u}, \mathbf{a}] = -J[\mathbf{u}, \mathbf{a}]$.

Зауваження. На відміну від класичного формулювання принципу максимуму Л.С. Понтрягіна в даному випадку операція \max в (6.24) замінена на \min . Відповідно до такої заміни необхідну умову (6.24) можна було б назвати принципом мінімуму. Слід звернути увагу, що в даному випадку $\lambda_0 \geq 0$, тоді як в класичному формулюванні $\lambda_0 \leq 0$.

Таким чином, оптимальне керування визначається як

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*) = \arg \min_{\mathbf{u} \in U^m} H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*). \quad (6.25)$$

Принцип максимуму, отже, стверджує, що оптимальне керування $\mathbf{u}^*(t)$ у

кожен момент часу t мінімізує проекцію фазової швидкості $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ керованого процесу (тобто проекцію швидкості ЗГ $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{X}^{n+1}$) на напрям, що задається вектором $\boldsymbol{\lambda}(t)$. Нагадаємо, що

$$H = \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i = \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \boldsymbol{\lambda}^T \tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a})$$

– скалярний добуток векторів $\boldsymbol{\lambda}(t)$ і $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}$.

3. Зв'язані змінні λ_i і функція $H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{a}^*)$ є неперервними уздовж оптимальної траєкторії (аналог умови *Ерדмана-Весрштраса* класичного варіаційного числення).

4. Умова трансверсальності. Для кінцевих точок (t_0, \mathbf{x}_0) і (t_1, \mathbf{x}_1)

$$\left[H \delta t - \sum_{i=0}^n \lambda_i \delta x_i \right]_{t_0}^{t_1} + dL + \sum_{\rho=1}^r \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H}{\partial a_\rho} \delta a_\rho dt = 0. \quad (6.26)$$

Тут dL – повна варіація функції $L(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{a})$, визначуваною рівнянням (6.17):

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t_0} \delta t_0 + \frac{\partial L}{\partial t_1} \delta t_1 + \sum_{i=0}^n \frac{\partial L}{\partial x_i(t_0)} \delta x_i(t_0) + \sum_{i=0}^n \frac{\partial L}{\partial x_i(t_1)} \delta x_i(t_1) + \sum_{\rho=1}^r \frac{\partial L}{\partial a_\rho} \delta a_\rho, \quad (6.27)$$

де $\delta t_0, \delta t_1, \delta x_i(t_0), \delta x_i(t_1), \delta a_\rho$ – довільні варіації кінцевих точок і параметрів.

Узагальнені умови трансверсальності (6.26) з урахуванням виразу (6.27) приводять через незалежність $\delta t_0, \delta t_1, \delta x_i(t_0), \delta x_i(t_1), \delta a_\rho$ до наступних $2n + 2 + r$ співвідношення:

$$\left(-H + \frac{\partial L}{\partial t_0} \right)_{t_0} \delta t_0 = 0; \quad (6.28)$$

$$\left(-H + \frac{\partial L}{\partial t_1} \right)_{t_1} \delta t_1 = 0; \quad (6.29)$$

$$\left(\lambda_i + \frac{\partial L}{\partial x_i} \right)_{t_0} \delta x_i(t_0) = 0, (i = \overline{1, n}); \quad (6.30)$$

$$\left(-\lambda_i + \frac{\partial L}{\partial x_i} \right)_{t_1} \delta x_i(t_1) = 0, (i = \overline{1, n}); \quad (6.31)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial a_\rho} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H}{\partial a_\rho} dt \right) \delta a_\rho = 0, (\rho = \overline{1, r}). \quad (6.32)$$

Якщо будь-яка кінцева умова $x_i(t_0), x_i(t_1)$ або параметр a_ρ закріплені (не варіюються), то відповідна варіація дорівнює нулю: $\delta z = 0$ ($z = t_0, t_1, x_i(t_0), x_i(t_1), a_\rho$). Якщо будь-яка кінцева умова $x_i(t_0), x_i(t_1)$ або параметр a_ρ вільні, то рівний нулю коефіцієнт при вільній варіації δz у (6.30)-(6.32).

Таким чином, сукупність умов, що виражають принцип максимуму (6.23), (6.25) і умов трансверсальності (6.26), дають необхідні умови оптимальності програмного керування.

Умови принципу максимуму дозволяють серед множини всіх траєкторій і керувань, що переводять систему з (t_0, \mathbf{x}_0) у (t_1, \mathbf{x}_1) , виділити ті окремі, взагалі кажучи, ізольовані траєкторії і керування, які можуть бути оптимальними.

У формулюванні принципу максимуму бере участь $2n + 2 + m + 1$ невідомих функцій $x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t); \lambda_0(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t); u_1(t), \dots, u_m(t)$, для визначення яких є $(n + 1)$ диференціальних рівнянь фізичної системи (6.11), (6.20), $(n + 1)$ диференціальних рівнянь зв'язаної системи (6.18) і m кінцевих співвідношень для u_j , витікаючих з (6.24).

Отже, для $(2n + 2 + m)$ невідомих функцій є $(2n + 2 + m)$ співвідношень. Якщо відомі всі початкові умови

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_0 = \tilde{\mathbf{x}}(t_0) &= (\Phi, x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0))^T; \\ \boldsymbol{\lambda}_0 = \boldsymbol{\lambda}(t_0) &= (\lambda_0(t_0), \lambda_1(t_0), \lambda_2(t_0), \dots, \lambda_n(t_0))^T \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

і фіксоване значення керованого параметра \mathbf{a} , то систему (6.23) можна проінтегрувати. Проте, початковий і кінцевий моменти часу t_0, t_1 , початкове і кінцеве значення вектора фазових координат $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0}), \mathbf{x}_1 = (x_{11}, \dots, x_{n1})$, початкове і кінцеве значення вектора зв'язаних змінних $\boldsymbol{\lambda}_0 = (1, \lambda_{10}, \dots, \lambda_{n0}), \boldsymbol{\lambda}_1 = (1, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{n1})$, постійний вектор $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l)$ і вектор керованих параметрів $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ для оптимального рішення заздалегідь невідомі. Вони можуть

бути визначені з умов трансверсальності (6.28)- (6.32) і граничних умов (6.12). Насправді, для визначення $(2 + 4n + 1 + r)$ невідомих $t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \lambda_0, \lambda_1, \mu, \mathbf{a}$ є дві умови (6.28), (6.29), $2n$ умов (6.30), (6.31), r умов (6.32) і l умов (6.12); крім того, $2n$ співвідношень вигляду $\mathbf{x}(t_1) = \varphi_1(t_0, t_1, \lambda_0, \mathbf{x}_0)$, $\lambda(t_1) = \varphi_2(t_0, t_1, \lambda_0, \mathbf{x}_0)$ будуть отримані в результаті інтегрування системи (6.23). Таким чином, для отриманого крайового завдання є достатнє число співвідношень, що дозволяють вважати її, принаймні, теоретично вирішуваною. Необхідно також відзначити, що принцип максимуму дає глобальний мінімум.

6.4.4. Наслідки принципу максимуму.

1. Безпосереднім наслідком системи (6.23) і умови (6.24) є виконання між точками розриву функції $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ співвідношення

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (6.34)$$

Це умова для автономних систем (тобто систем, не залежних явно від t) приводить до першого інтеграла: $H = \text{const}$ уздовж всієї оптимальної траєкторії.

2. В більшості практичних випадків $\lambda_0 > 0$ (так званий нормальний випадок), і тому без порушення спільності через однорідність функції H по змінним λ_i можна прийняти $\lambda_0 = 1$.

Примітка. Із-за однорідності H по λ_i керування \mathbf{u} з (6.25) визначається не самими величинами λ_i , а їх відносинами до однієї з них, наприклад, до λ_0 . Це еквівалентно прийняттю $\lambda_0 = 1$. Випадок $\lambda_0 = 0$ є особливим (анормальним) і тут не розглядається.

3. Умови (6.24), (6.25) принципу максимуму дозволяють знайти оптимальні значення всіх m компонент вектора \mathbf{u} .

Якщо мінімум H по \mathbf{u} досягається у внутрішній точці множини U^m і функції f_i , що диференційовані по \mathbf{u} , то u_j^* визначаються з умови

$$\left. \frac{\partial H}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = 0, \quad (j = \overline{1, m}). \quad (6.35)$$

Ця умова разом з (6.23) утворює умову Ейлера-Лагранжа класичного варіаційного числення для завдання (6.11)- (6.13).

Примітка. Мінімум H по u далеко не завжди досягається у внутрішній точці множини U^m , а в тих випадках, коли він досягається у внутрішній точці, остання не обов'язково є стаціонарною (рис. 6.6).

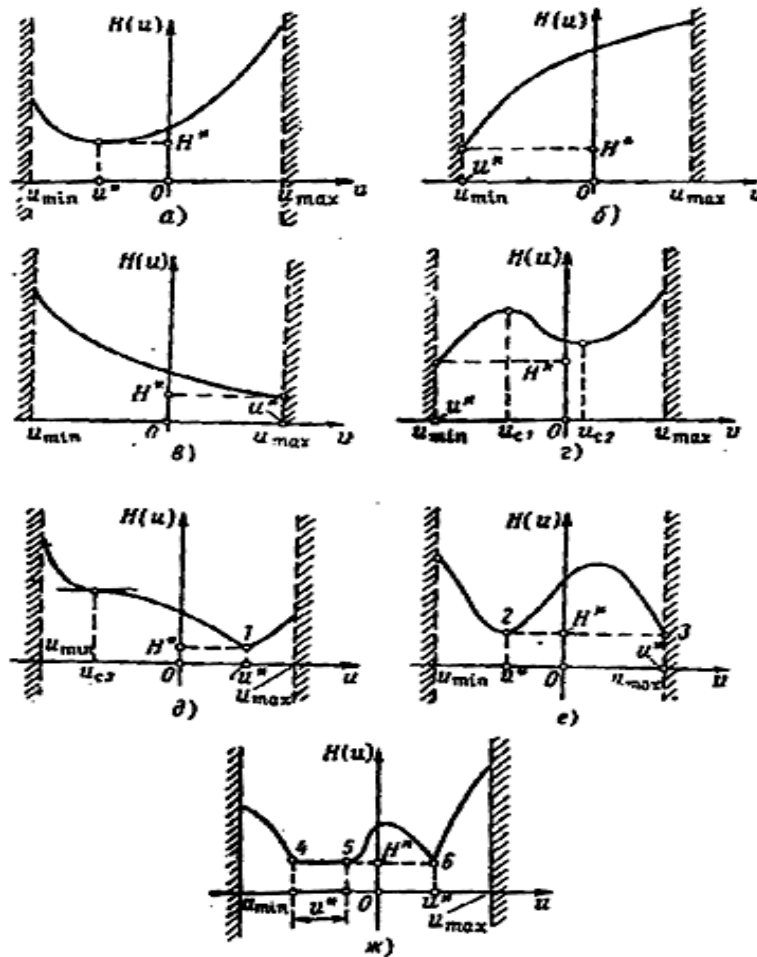


Рис. 6.6. Типи мінімізуючих точок:

a – внутрішній $\min H(u)$ в стаціонарній точці; $б, в$ – граничний $\min H(u)$; $г$ – граничний $\min H(u)$; u_{c1}, u_{c2} – стаціонарні точки локальних \max і \min ; $д$ – внутрішній $\min H(u)$ в кутовій точці; u_{c3} – точка перегину; $е$ – дві ізолювані мінімізуючі точки 2 і 3; $ж$ – нестрогий $\min H(u)$ на відріжку 4 – 5 і ізолюваний $\min H(u)$ в точці 6

Типи мінімізуючих точок досить різноманітні. З них особливо слід зазначити випадки нестрогого мінімуму, оскільки принцип максимуму не дозволяє

для них однозначно визначити \mathbf{u}^* . Цей випадок в теорії оптимального керування є *особливим*.

Якщо функція H досягає мінімального значення в точці на межі Γ_{U^m} області U^m , то умова (6.35) не є більше необхідною в цій точці. При цьому можливі три випадки:

а) множина U^m описується системою зв'язків у вигляді рівності

$$\chi_s(u_1, u_2, \dots, u_m) = 0; (s = 1, 2, \dots, v < m), \quad (6.36)$$

тоді мінімум H за умов (6.36) знаходиться методом невизначених множників Лагранжа;

б) множина U^m задана системою нерівностей

$$\aleph_{s_1}(u_1, u_2, \dots, u_m) \leq 0 (s_1 = 1, 2, 3, \dots), \quad (6.37)$$

тоді завдання зводиться на кожному кроці інтегрування до проблеми нелінійного програмування;

в) множина U^m є обмеженою областю, що не має меж (наприклад, замкнутою двовимірною поверхнею типу сфери або еліпсоїда в тривимірному просторі). Для всякої неперервної функції $H(u)$, що має неперервні часткові похідні, заданої на замкнутій поверхні і вираженої через параметричні координати цієї поверхні, точка максимуму H по цих параметричних координатах належить до рішень (6.35), де роль u_j грають параметричні координати поверхні.

Приклад. Нехай $H(u_1, u_2, u_3)$ задана на сфері. Тоді заміна $u_1 = r \sin \theta \cos \varphi$, $u_2 = r \sin \theta \sin \varphi$, $u_3 = r \cos \theta$ приводить до $H(u_1, u_2, u_3) = \tilde{H}(\theta, \varphi, r)$ – періодичної функції з періодом 2π по $\bar{\theta}$, φ і в точці мінімуму $H = \tilde{H}$ має місце рівність:

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi} = 0.$$

4. Умова (6.35) визначає лише внутрішню стаціонарну точку функції H . Якщо $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$ задовольняє системі (6.35) і надає мінімум функції $H(\mathbf{u})$, то повинні бути виконані необхідні умови другого порядку: матриця часткових похідних другого порядку функції $H(\mathbf{u})$

$$H_{uu} = \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right\} (i, j = \overline{1, m}) \quad (6.38)$$

повинна бути ненегативно визначеною в точці \mathbf{u}^* мінімуму функції $H(u)$.

Позитивна визначеність матриці H_{uu} при виконанні умов (6.35) в точці \mathbf{u}^* є достатньою умовою для відносного (але не абсолютного!) мінімуму $H(u)$ в цій точці. Умова (6.38) ненегативної визначеності матриці H_{uu} є умовами Лежандра-Клебша класичного варіаційного числення.

Перевірка позитивної визначеності матриці H_{uu} може проводитися по критерію Сильвестра: для позитивної визначеності матриці H_{uu} необхідно і достатньо, щоб її кутовий мінор був позитивним. Зокрема, для позитивно визначеної матриці H_{uu} виконується умова

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right\} \Big|_{\mathbf{u}^*} > 0, \quad (6.39)$$

що є аналогом умови Гільберта *неособливості* (невироджуваності) варіаційної задачі (див. п. 6.6.4).

5. Приведене формулювання принципу максимуму залишається справедливим і для випадку, коли область U^m залежить явним чином від часу t :

$$U^m = U^m(t).$$

Зауваження. Принцип максимуму є, взагалі кажучи, лише необхідною умовою. Будь-яке допустиме оптимальне керування, якщо воно існує, задовольняє принципу максимуму. Проте не всяке допустиме керування, що задовольняє принципу максимуму, є оптимальним. Тому після визначення керування на основі необхідних умов слід переконатися в його оптимальності. Для цього служать достатні умови оптимальності.

В деяких *випадках* принцип максимуму є не тільки необхідною, але й достатньою умовою оптимальності керування $\mathbf{u}(t)$. Нехай, наприклад, знайдено допустиме керування $\mathbf{u}^*(t)$, яке переводить заданий початковий стан $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ лінійної щодо фазових координат системи

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{u}, t), \quad \mathbf{u} \in U^m, \quad (6.40)$$

де U^m – замкнута обмежена множина; $A(t)$, $\mathbf{h}(\mathbf{u}, t)$ – неперервні функції t, \mathbf{u} ; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, що переводять систему у заданий кінцевий стан $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$. Введемо таку систему початкових значень зв'язаних змінних

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = (\lambda_{00}, \lambda_{10}, \dots, \lambda_{n0})^T, \quad \lambda_{00} > 0,$$

що $\mathbf{u}^*(t)$ мінімізує в кожен момент t функцію

$$H = \lambda_{00} h_0(\mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{h}(\mathbf{u}, t)$$

по всіх $\mathbf{u} \in U^m$, де $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -A^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) - \lambda_{00} \frac{\partial f_0^T(\mathbf{x}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x}}$.

Тоді керування $\mathbf{u}^*(t)$ мінімізує на траєкторіях $\mathbf{x}^*(t)$ системи (6.40), що проходять через $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$, критерій якості

$$J[\mathbf{u}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} [f_0(\mathbf{x}, t) + h_0(\mathbf{u}, t)] dt,$$

якщо тільки $f_0(\mathbf{x}, t)$ є однозначною опуклою функцією \mathbf{x} для всіх $t \in [t_0, t_1]$.

Зауваження. Функція $f_0(\mathbf{x}, t)$ називається опуклою вниз по \mathbf{x} при $t \in [t_0, t_1]$,

якщо для всіх $\mathbf{x} \in R^n$, $\bar{\mathbf{x}} \in R^n$: $\frac{\partial f_0(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) + f_0(\mathbf{x}, t) \leq f_0(\bar{\mathbf{x}}, t)$.

6.5. Метод динамічного програмування

6.5.1. Задача синтезу оптимального закону керування.

Для синтезу оптимального закону керування систем із зворотним зв'язком, оптимальних замкнутих контурів керування, оптимальних законів наведення і так далі більш натуральним є інший підхід, ніж використаний при вирішенні задач, описаних в п. 6.4.

На відміну від рівнянь Ейлера–Лагранжа і принципу максимуму Понтрягіна, що використовують часове представлення оптимального керування (у формі $u^* = u(t)$) для одиничного об'єкту керування, цей підхід розглядає оптимальне керування у формі закону $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(t)$ (координатне керування, керування у

формі зворотного зв'язку) для множини однорідних об'єктів, які відрізняються різними початковими станами.

Послідовне застосування описуваного підходу до задач оптимального керування приводить для неперервних процесів до диференціального рівняння (нелінійному) в часткових похідних першого порядку типу рівняння Гамільтона–Якобі.

Один з можливих способів отримання цього рівняння полягає у використанні принципу оптимальності динамічного програмування. Динамічне програмування є досить загальним методом, розробленим для вирішення загальних задач багатоетапного вибору (тобто задач, в яких результати попередніх операцій можна використовувати для керування ходом майбутніх операцій).

6.5.2. Принцип оптимальності динамічного програмування.

Принцип оптимальності. У основі динамічного програмування лежить сформульований Р. Беллманом принцип оптимальності: «Оптимальна політика має ту властивість, що які б не були початковий стан і спочатку прийняте рішення, подальші рішення повинні складати оптимальну політику щодо стану, який вийшов в результаті первинного прийнятого рішення». Або, оптимальне керування не залежить від того, яким чином прийшла система до даного стану при $t = t'$ (тобто не залежить від «передісторії» руху) і для майбутніх моментів часу повністю визначається лише станом системи в даний момент часу.

Як окремий випадок в динамічному програмуванні розглядаються задачі керування неперервними процесами (основна задача оптимального координатного керування).

Коротке формулювання задачі. Нехай дана система рівнянь руху

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (6.41)$$

де $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \in U^m$; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X^n$; $\mathbf{f} = (f_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \dots, f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}))^T$ і граничні умови

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1. \quad (6.42)$$

Потрібно синтезувати закон оптимального керування $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$, що мінімізує значення функціонала

$$J[t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}] = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt. \quad (6.43)$$

Необхідні умови. Нехай в $(n + 1)$ -мірному просторі є деяка область $G(\mathbf{x}, t)$ початкових значень \mathbf{x}_0, t_0 ($(\mathbf{x}_0, t_0) \in G(\mathbf{x}, t)$), для кожної точки якої існує оптимальне (у сенсі мінімуму $J[t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}]$) керування $\mathbf{u}^*(t)$, що переводить ці початкові точки в деяку фіксовану точку $(\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1, t_1)$; \mathbf{x}_1, t_1 – задані. На таких оптимальних керуваннях мінімальне значення критерію якості (6.43) залежатиме лише від початкових значень \mathbf{x}_0, t_0 . Таким чином

$$J_{\min} = J^* = V(t_0, \mathbf{x}_0),$$

де $V(t_0, \mathbf{x}_0)$ – деяка функція $(n+1)$ змінних $t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}$.

Маючи на увазі довільну точку області $G(\mathbf{x}, t)$, надалі, в цілях спрощення запису, нижній індекс «0» опускаємо.

Таким чином, функція $V(t, \mathbf{x})$ – мінімальне значення критерію якості (6.43) на оптимальних траєкторіях системи (6.41), що починаються в точці (t, \mathbf{x}) і закінчуються у фіксованій точці (t_1, \mathbf{x}_1) .

$$V(t, \mathbf{x}) = \min_{\mathbf{u} \in U^m} \int_t^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \quad (6.44)$$

на траєкторіях (6.1) з (t, \mathbf{x}) в (t_1, \mathbf{x}_1) .

Функція $V(t, \mathbf{x})$ є аналогом «дії» в аналітичній механіці і «екстремального інтеграла» в класичному варіаційному численні.

Якщо функція $V(t, \mathbf{x})$ існує і є такою, що неперервно диференціюється по (t, \mathbf{x}) , то вона задовольняє основному рівнянню динамічного програмування, яке є необхідною і достатньою умовою, – диференціальному рівнянню в часткових похідних першого порядку (рівнянню Гамільтона–Беллмана)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{\mathbf{u} \in U^m} H(t, \mathbf{x}, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{u}) = 0 \quad (6.45)$$

з граничною умовою

$$V(t, \mathbf{x}_1) = 0. \quad (6.46)$$

Тут

$$H(t, \mathbf{x}, V_x, \mathbf{u}) = f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + V_x \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (6.47)$$

де $V_x = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$ (див. табл. 6.2).

Рівняння (6.45) аналогічно рівнянню Гамільтона-Якобі класичного варіаційного числення – достатня умова:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathbf{H}(t, \mathbf{x}, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}) = 0, \quad (6.48)$$

де функція \mathbf{H} отримана в результаті підстановки у функцію $H(t, \mathbf{x}, V_x, \mathbf{u})$, керування $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}, V_x)$, знайденого з умови стаціонарності цієї функції

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0 \quad (j = \overline{1, m}). \quad (6.49)$$

З (6.45) можна визначити оптимальний закон керування

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(t, \mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{u} \in U^m} H\left(t, \mathbf{x}, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{u}\right) = \mathbf{u}^*\left(t, \mathbf{x}, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right). \quad (6.50)$$

Геометричний сенс умови (6.50) пояснений на рис. 6.7.

Якщо функція $V(t, \mathbf{x})$ знайдена шляхом рішення рівняння (6.45) з умовою (6.46), то проблема синтезу вирішена, оскільки для відомої функції $V(t, \mathbf{x})$ маємо

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*\left(t, \mathbf{x}, \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right) = \mathbf{v}^*(t, \mathbf{x}). \quad (6.51)$$

Подібно до того, як принцип максимуму Понтрягіна надає зручну форму і уточнює умову Веєрштраса (див. п. 6.6.3) для основної задачі оптимального програмного керування у разі замкнутої області значень керування U^m , так і рівняння Гамільтона–Беллмана є уточненням і узагальненням рівняння Гамільтона–Якобі. Уточнення полягає в тому, що замість умови стаціонарності $\partial H / \partial \mathbf{u} = 0$ там, де воно не відповідає істоті справи, в (6.45) використовується

умова $\min_{\mathbf{u} \in U^m} H\left(t, \mathbf{x}, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{u}\right)$.

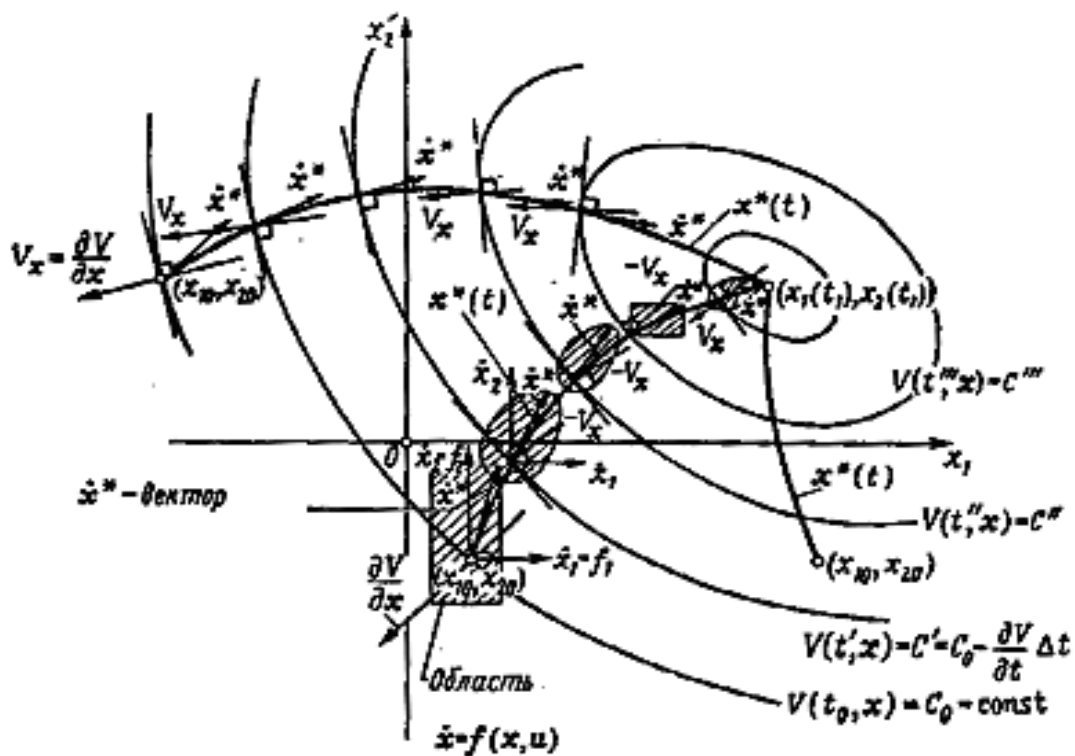


Рис. 6.7. Геометричний сенс умови $\min_{u \in U^m} H(t, \mathbf{x}, V_x, \mathbf{u}) = \min_{u \in U^m} [V_x f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})]$:

$$V(t, \mathbf{x}) = \min_{u \in U^m} J[u(t)], \quad V_x = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, \quad n = m = 2, \quad f_0 = 0; \quad \dot{\mathbf{x}}^* - \text{оптимальна фазова}$$

швидкість; $\dot{\mathbf{x}}^* = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*)$; $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x})$ – оптимальне керування;

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{u \in U^m} H(t, \mathbf{x}, V_x, \mathbf{u}); \quad \mathbf{x}^* - \text{оптимальна траєкторія.}$$

У наведеній умові (6.45) вимога неперервної диференційованості (гладкості) функції $V(t, \mathbf{x})$ є істотною. Але, на відміну від принципу максимуму, де стверджується існування необхідної для нього вектор-функції $\lambda(t)$, існування гладкого потенціалу $V(t, \mathbf{x})$ в методі динамічного програмування не доводиться. Це знижує цінність необхідної умови (6.45), оскільки для негладкої функції $V(t, \mathbf{x})$ важко зберегти необхідність її в повному об'ємі.

6.5.3. Необхідна умова.

Уточнена необхідна умова для основної задачі оптимального координатного керування на основі принципу оптимальності, частково вільна від вимоги неперервної диференційованості функції $V(t, \mathbf{x})$, формулюється таким чином.

Нехай краєві умови мають вигляд

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{q}(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0. \quad (6.52)$$

Функціонал, що мінімізується, має вигляд

$$J[t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}] = \Phi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \quad (6.53)$$

і визначений на траєкторії системи (6.41) з керуванням $\mathbf{u}(t) \in U^m(t, \mathbf{x})$.

Закон керування $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ вважається допустимим, якщо $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t))$, $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t)) \in U^m(t, \mathbf{x})$, і є кусочно-неперервним.

Якщо керування $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ доставляє мінімум функціоналу J , то йому відповідає оптимальна траєкторія $\mathbf{x}^*(t)$.

Нехай

$$V(t_0, \mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u} \in U^m} \left\{ \Phi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \right\} = \Phi(t_1, \mathbf{x}^*(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) dt, \quad (6.54)$$

тоді $V(t_0, \mathbf{x}_0) \leq \Phi(t_1, \mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt$, де $\mathbf{u}(t)$ довільне.

Необхідні умови. Передбачається, що шукане оптимальне керування $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ існує. Тоді можна встановити необхідні умови для основної задачі оптимального координатного керування.

Нехай в області G простору станів X^n виконуються наступні умови:

1. Для $\mathbf{x} \in G$ у момент t функція

$$H\left(t, \mathbf{x}, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{u}\right) = f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^n f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

має абсолютний мінімум по \mathbf{u} , тобто $\min_{\mathbf{u}} H = H^*(t, \mathbf{x}, V_x)$ при $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, V_x)$ по всіх допустимих $\mathbf{u}(t) \in U^m(t, \mathbf{x})$, де $V_x = \partial V / \partial \mathbf{x}$ – градієнт $V(t, \mathbf{x})$.

2. Рішення $\mathbf{x}(t)$ системи (6.41) існує і є неперервною функцією для всіх допустимих $\mathbf{u}(t) \in U^m(t, \mathbf{x})$.

3. Функція $f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ неперервна по t .

4. Функція $V_t(t, \mathbf{x}) = \partial V / \partial t$ неперервна по t і \mathbf{x} ; вектор-функції $V_t(t, \mathbf{x})$ і

$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ або неперервні по t і \mathbf{x} , або мають рівні ліву і праву межі для скалярного добутку $V_x \mathbf{f}$ уздовж будь-якої траєкторії $\mathbf{x}(t)$ системи (6.41):

$$\lim_{t \rightarrow t_0+0} [V_x(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \mathbf{u}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0-0} [V_x(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \mathbf{u}(t)].$$

5. Існує оптимальний рух для кожного початкового $x_0 \in G$ у деякий стан, що задовольняє умові $\mathbf{q}(t_1, \mathbf{x}_1) = 0$, і причому такий, що траєкторія не виходить з G .

6. Кожна точка в G , що не задовольняє умові $\mathbf{q}(t, \mathbf{x}) = 0$, має околицю, цілком лежачу в G .

Тоді функція $V(t, \mathbf{x})$ в області G задовольняє рівнянню Гамільтона–Беллмана

$$\min_{\mathbf{u} \in U^m} \left\{ \left[\frac{dV}{dt} \right]_{\mathbf{u}} + f_0(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \right\} = 0 \quad (6.55)$$

або

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u} \in U^m} \left\{ \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + V_x(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \right\} = \\ & = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \min_{\mathbf{u} \in U^m} H(t, \mathbf{x}, V_x(t, \mathbf{x}), \mathbf{u}) = \\ & = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + H^*(t, \mathbf{x}, V_x(t, \mathbf{x})) = 0 \end{aligned}$$

з граничною умовою

$$V(t, \mathbf{x}) = \Phi(t, \mathbf{x}).$$

на гіперповерхні $q(t, \mathbf{x}) = 0$. Тут позначено $H^*(t, \mathbf{x}, V_x(t, \mathbf{x})) = \min_{\mathbf{u} \in U^m} H(t, \mathbf{x}, V_x(t, \mathbf{x}), \mathbf{u})$;

$\left[\frac{dV}{dt} \right]_{\mathbf{u}}$ – повна похідна уздовж траєкторії, що реалізовується під дією керування \mathbf{u} .

ня \mathbf{u} .

Оскільки при відомій функції $V(t, \mathbf{x})$

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u} \in U^m} H = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, V_x(t, \mathbf{x})) = \mathbf{v}^*(t, \mathbf{x}),$$

то знайдене рішення $V(t, \mathbf{x})$ рівняння (6.55) одночасно дає вирішення проблеми синтезу оптимального закону керування.

Зауваження.

1. Вимога 4 спричиняє за собою неперервність функції $\left[\frac{dV}{dt} \right]_{\mathbf{u}}$ і $V(t, \mathbf{x})$ за часом t .

2. Коли V_t, V_x і f_i неперервні по t і \mathbf{x} , рівнянням (6.55) є рівняння Гамільтона-Якобі.

Загальна послідовність дій, якої доцільно дотримуватися при рішенні задачі синтезу оптимального закону керування методом динамічного програмування, представлена в табл. 6.2.

Таблиця 6. 2. Послідовність дій при використанні методу динамічного програмування

Крок	Дія
1	Утворюється функція H , в якій зв'язані змінні λ_i замінюються на компоненти вектора $\frac{dV}{d\mathbf{x}} = \text{grad}_{\mathbf{x}} V(t, \mathbf{x}) = V_x = \left(\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial x_n} \right),$ тобто $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, V_x) = V_x \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$
2	Мінімізується $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, V_x)$ по $\mathbf{u} \in U^m$ і знаходиться залежність керування \mathbf{u}^* від компонент вектора V_x : $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, V_x, t) = \arg \min_{\mathbf{u} \in U^m} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, V_x)$
3	Знаходиться мінімальне значення H^* шляхом підстановки в H значення $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, V_x)$: $H^*(t, \mathbf{x}, V_x) = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, V_x), V_x)$
4	Вирішується диференціальне рівняння в часткових похідних Гамільтона-Беллмана $H^*(t, \mathbf{x}, V_x) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ з відповідною граничною умовою для функції $V(t, \mathbf{x})$ $V(t, \mathbf{x}) = \Phi(t, \mathbf{x})$ на гіперповерхні $\mathbf{q}(t, \mathbf{x}) = 0$
5	Підставляючи результати кроку 4 у вираз для $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, V_x)$, отримуємо закон керування із зворотним зв'язком $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^* \left(t, \mathbf{x}, \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)$

6.5.4. Процедура методу динамічного програмування.

Приклад. Розглянемо синтез оптимального закону керування для лінійної системи з квадратичним критерієм якості. (*Проблема аналітичного конструювання оптимальних авіопілотів*).

Нехай нестационарна лінійна система описується векторним лінійним диференціальним рівнянням

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u} + C\mathbf{f}(t) \quad (\text{I})$$

з початковою умовою

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (\text{II})$$

де t_1 – фіксовано; t_0, \mathbf{x}_0 – відомі величини (які, проте, спеціально не вибираються), і нехай критерій якості має вигляд

$$\begin{aligned} J[\mathbf{u}] = & \mathbf{I}_1^T \mathbf{x}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{x}_1^T R_1 \mathbf{x}_1 + \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{I}_2^T(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{I}_3^T(t) \mathbf{u} + \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T Q(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T N(t) \mathbf{u} + \mathbf{u}^T N^T(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T P(t) \mathbf{u})] dt. \end{aligned} \quad (\text{III})$$

Тут $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$; $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$; $C, A(t)$ – матриці розмірності $n \times n$; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1(t_1)$; $B(t), N(t)$ – матриці розмірності $n \times m$; $R_1, Q(t)$ – позитивно напіввизначені симетричні матриці розмірності $n \times n$; $P(t)$ – позитивно визначена симетрична матриця розмірності $m \times m$; $P(t)$ – відома функція часу; $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2(t)$ – n -мірні вектори; $\mathbf{I}_3(t)$ – m -мірний вектор.

Нагадаємо, що симетрична матриця Q називається *позитивно напіввизначеною*, якщо всі її власні значення ненегативні або якщо відповідна їй квадратична форма ненегативна, тобто $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} \geq 0$ для всіх $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \neq 0$. Для того, щоб матриця Q була позитивно напіввизначеною, необхідно і достатньо, щоб весь головний (а не тільки кутові!) мінор був ненегативний:

$$Q \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} \geq 0 \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n; \quad p = \overline{1, n}).$$

Передбачається, що на значення керуючого вектора \mathbf{u} не накладається будь-яких обмежень, а матриці $Q(t), N(t), P(t)$ такі, що виконується умова

$$Q(t) - N(t)P^{-1}(t)N^T(t) \geq 0,$$

що гарантує відсутність зв'язаних точок в даній задачі.

Необхідно знайти закон керування із зворотним зв'язком $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$, що мінімізує критерій $J[\mathbf{u}]$.

Відмітимо, що значення вектора фазових координат \mathbf{x} при $t = t_1$ не задані (тобто дана задача належить до задач оптимального керування з вільним правим кінцем).

Нехай $V(t, \mathbf{x})$ – мінімальне значення критерію якості $J[\mathbf{u}]$ при русі системи (I) з довільної початкової точки (t, \mathbf{x}) (нижній індекс «0» опущений) на відріжку часу $[t, t_1]$, $t \leq t_1$:

$$J^* = J_{\min} = V(t, \mathbf{x}) = \min_{\mathbf{u}} J[\mathbf{u}].$$

При рішенні задачі методом динамічного програмування доцільно керуватися послідовністю дій, викладеною в зведенні загальних процедур (див. табл. 6.2). Відповідно до неї складаємо функцію $H(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})$ (гамільтоніан) для даного завдання

$$\begin{aligned} H(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) &= f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \\ &= \mathbf{I}_2^T \mathbf{x} + \mathbf{I}_3^T \mathbf{u} + \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{P} \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{c} \mathbf{f}) \end{aligned}$$

і замінюємо зв'язаний вектор $\boldsymbol{\lambda}^T$ на градієнт $V_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})$ (градієнт $\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = V_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})$ вважається вектором-рядком) функції $V(t, \mathbf{x})$ по \mathbf{x} :

$$H(t, \mathbf{x}, V_{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \mathbf{I}_2^T \mathbf{x} + \mathbf{I}_3^T \mathbf{u} + \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{P} \mathbf{u}) + V_{\mathbf{x}} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{c} \mathbf{f}).$$

Диференціальне рівняння Гамільтона-Беллмана (6.45) в даному випадку має вигляд

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{\mathbf{u}} \left\{ \mathbf{I}_2^T \mathbf{x} + \mathbf{I}_3^T \mathbf{u} + \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{P} \mathbf{u}) + V_{\mathbf{x}} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{c} \mathbf{f}) \right\} = 0 \quad (\text{IV})$$

де функція $V(t, \mathbf{x})$ задовольняє граничній умові:

$$V(t_1, \mathbf{x}) = \mathbf{I}_1^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x}. \quad (\text{V})$$

Оскільки, по припущенню, $P(t)$ – позитивно визначена матриця, то міні-

мум $H(t, \mathbf{x}, V_x, \mathbf{u})$) досягається в стаціонарній точці, де $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0$:

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u}} H(t, \mathbf{x}, V_x, \mathbf{u}) = -P^{-1}[\mathbf{I}_3 + N^T \mathbf{x} + B^T V_x^T]. \quad (\text{VI})$$

Підставляючи тепер отриманий вираз для \mathbf{u}^* у (VI), знаходимо остаточний вид основного диференціального рівняння динамічного програмування (в даному випадку це буде диференціальне рівняння Гамільтона–Якобі, оскільки \mathbf{u}^* знайдено з умови стаціонарності H):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + V_x A \mathbf{x} - \frac{1}{2} V_x B P^{-1} \mathbf{I}_3 - V_x B P^{-1} N^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} V_x B P^{-1} B^T V_x^T + \\ + V_x C \mathbf{f} + I_2^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{I}_3^T P^{-1} \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_3^T P^{-1} N^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{I}_3 P^{-1} B^T V_x^T + \\ + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T N P^{-1} N^T \mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (\text{VII})$$

Доведено, що в лінійних системах з квадратичним критерієм якості при зроблених припущеннях щодо матриць $Q(t)$, $P(t)$, $N(t)$, R_1 рішення рівняння (VII) з крайовою умовою (V) існує і його можна шукати у вигляді

$$V(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T R(t) \mathbf{x} + \mathbf{q}^T(t) \mathbf{x} + r(t) \quad (\text{VIII})$$

де $R(t)$ – симетрична матриця розмірності $n \times n$; $\mathbf{q}(t)$ – n -мірний вектор; $r(t)$ – скаляр.

Часткові похідні функції $V(t, \mathbf{x})$, записаної у формі (VIII), мають вигляд

$$\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \dot{R}(t) \mathbf{x} + \dot{\mathbf{q}}^T(t) \mathbf{x} + \dot{r}(t); \quad (\text{IX})$$

$$V_x^T(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = R(t) \mathbf{x} + \mathbf{q}(t); \quad \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}^T R + q^T. \quad (\text{X})$$

Підставляючи вирази (IX) і (X) в рівняння (VII) і враховуючи, що:

1) при одночасному множенні довільної матриці M зліва і справа на вектор \mathbf{x} має місце співвідношення $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T (M + M^T) \mathbf{x}$ (тобто відбувається виділення симетричній частині $\frac{1}{2} (M + M^T)$ матриці M);

2) скалярний добуток володіє властивістю транспонованості $\mathbf{y}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$, отримаємо

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \mathbf{x}^T [\dot{R} + R(A - BP^{-1}N^T) + (A - BP^{-1}N^T)^T R + Q - NP^{-1}N^T - \\
& - RBP^{-1}B^T R] \mathbf{x} + [\dot{\mathbf{q}}^T + \mathbf{q}^T (A - BP^{-1}N^T) - \mathbf{I}_3^T P^{-1} B^T R - \mathbf{q}^T BP^{-1} B^T R - \\
& - \mathbf{I}_3^T P^{-1} N^T + \mathbf{I}_2^T + (C\mathbf{f})^T R] \mathbf{x} + \dot{r} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T BP^{-1} B^T \mathbf{q} - \mathbf{I}_3^T P^{-1} B^T \mathbf{q} + \mathbf{q}^T C\mathbf{f} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{I}_3^T P^{-1} \mathbf{I}_3 = 0.
\end{aligned} \tag{XI}$$

Оскільки умова (XI) повинна виконуватися тотожно для будь-яких значень \mathbf{x} і оскільки при $t = t_1$ для будь-яких значень \mathbf{x} повинне виконуватися тотожно наступне співвідношення [див. (V) і (VIII)]

$$\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \mathbf{q}^T(t_1) \mathbf{x} + r(t_1) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T R_1 \mathbf{x} + \mathbf{I}_1^T \mathbf{x},$$

тоді для визначення матриці $R(t)$ вектора $\mathbf{q}(t)$ і скаляра $r(t)$ отримуємо наступні рівняння і граничні умови

$$1. \quad \begin{aligned} & \dot{R} + R(A - BP^{-1}N^T) + (A - BP^{-1}N^T)^T R - RBP^{-1}B^T R + Q - \\ & - NP^{-1}N^T = \dot{R} + RA + A^T R - (RB + N)P^{-1}(N^T + B^T R) + Q = 0; \end{aligned} \tag{XII}$$

$$R(t_1) = R_1. \tag{XII'}$$

$$2. \quad \begin{aligned} & \dot{\mathbf{q}}^T + \mathbf{q}^T (A - BP^{-1}N^T) - \mathbf{I}_3^T P^{-1} B^T R - \mathbf{q}^T BP^{-1} B^T R - \\ & - \mathbf{I}_3^T P^{-1} N^T + \mathbf{I}_2^T + (C\mathbf{f})^T R = 0; \end{aligned} \tag{XIII}$$

$$\mathbf{q}^T(t_1) = \mathbf{I}_1^T. \tag{XIII'}$$

$$3. \quad \dot{r} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T BP^{-1} B^T \mathbf{q} - \mathbf{I}_3^T P^{-1} B^T \mathbf{q} + \mathbf{q}^T C\mathbf{f} - \frac{1}{2} \mathbf{I}_3^T P^{-1} \mathbf{I}_3 = 0; \tag{XIV}$$

$$r(t_1) = 0. \tag{XIV}$$

Отримані рівняння слід інтегрувати в зворотному часі від $t = t_1$ до $t = t_0$.

Оптимальний закон керування із зворотним зв'язком має вигляд

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) = -P^{-1}(t)[B^T(t)R(t) + N^T(t)\mathbf{x} + B^T(t)\mathbf{q}(t) + \mathbf{I}_3(t)]. \tag{XV}$$

Рішення деяких інших завдань оптимального керування для лінійних систем з квадратичним критерієм якості наведені в табл. 6.3 (Додаток 1). У п.п. (рядках) 1–7 цієї таблиці наведені постановка і рішення задачі синтезу оптимального закону керування за вільних граничних умов на правому кінці траєкторії, а в п. 8 – постановка і рішення задачі за заданих граничних умов на правому кінці. У пп. 1–6, 8 розглядаються однорідні лінійні системи, в п. 7 – неоднорідна

лінійна система. У п. 1 дано рішення задачі синтезу для нестационарної лінійної системи і нестационарного квадратичного критерію якості при фіксованому кінцевому інтервалі часу процесу керування, в п. 2 – для стаціонарної (незалежної явно від t) системи і стаціонарного критерію якості при фіксованому кінцевому інтервалі часу процесу керування, в п. 3 – для стаціонарної системи і стаціонарного критерію якості на необмеженому інтервалі часу ($[0, \infty]$), у п. 4 – для нестационарної системи і нестационарного квадратичного критерію більш загального вигляду, ніж в пп. 1-3 (критерій містить перехресні члени типу $x^T Nu$). У п. 5 наведено рішення задачі, яка в певному значенні еквівалентна задачі п. 4 (див. 5-й стовпець таблиці), в п. 6 дано рішення для оптимізації відхилення системи від заданої бажаної поведінки, в п. 7 розглянутий випадок синтезу оптимального закону керування для неоднорідної лінійної системи, в п. 8 – синтез оптимального закону керування за заданих граничних умов на правому кінці і квадратичному критерію більш загального вигляду. Деякі з наведених в табл. 6.3 (Додаток 1) рішень (пп. 1-4, 6, 7) є окремими випадками розглянутого вище завдання.

6.6. Класичне варіаційне числення

Завдання, в яких рівняння руху не приведені до форми Коші (тобто не записані у вигляді диференціальних рівнянь першого порядку, визначених відносно похідних), а керуючі функції $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ явно не введені (і з будь-яких причин таке введення неможливе або небажано), можна вирішувати методами класичного варіаційного числення.

Відзначимо, що з погляду обчислень завжди бажано привести систему рівнянь до форми Коші, оскільки саме для такої системи розроблені ефективні алгоритми чисельного інтегрування.

6.6.1. Задача Больца, Маєра, Лагранжа.

Задача Больца. Одне з найбільш загальних формулювань для задач з од-

норазовими інтегралами і додатковими умовами полягає в наступному.

Нехай клас траєкторій визначається:

1) кривими $\mathbf{x}(t)$ з координатами $x_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$), $t_0 \leq t \leq t_1$;

2) параметрами a_j ($j = \overline{1, r}$), які можна розглядати як деякі постійні координати кривої $C: \mathbf{z}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{a})^T$ у $(n+r)$ -мірному просторі $\mathbf{z} = (x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_r)^T$.

Нехай криві $(\mathbf{x}(t), \mathbf{a})$ задовольняють рівнянням руху (або рівнянням зв'язків, взагалі кажучи, неінтегрованим) вигляду

$$F_j = (t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{a}) = 0; (j = \overline{1, m} < n) \quad (6.56)$$

і умовам

$$I_k = \Phi_k(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{a}) + \int_{t_0}^{t_1} f_k(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{a}) dt = 0 \quad (k = \overline{1, \rho}), \quad (6.57)$$

де $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)^T$.

Необхідно знайти криву з вказаного класу траєкторій, яка мінімізує функціонал

$$J = \Phi(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, t_1, \mathbf{a}) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{a}) dt. \quad (6.58)$$

Задача Маєра. Це завдання формально виходить із завдання Больца при $f \equiv 0$, $f_k \equiv 0$; ($k = \overline{1, \rho}$). В цьому випадку краєві умови (6.57) стають загальними граничними умовами, число яких повинно бути $\rho = 2n + r + 2$. Якщо фіксований вектор параметрів \mathbf{a} , то число мір свободи σ системи диференціальних рівнянь (6.56), рівне різниці між числом залежних змінних і числом незалежних диференціальних рівнянь, яке для завдання Майєра рівне: $\sigma = n - m$.

Задача Лагранжа. Ця задача витікає із завдання Больца при $\Phi \equiv 0$, $f_k \equiv 0$; ($k = \overline{1, \rho}$).

Зв'язки вигляду (6.57) при $\Phi_k = \Phi_k(\mathbf{a})$, тобто при $\int_{t_0}^{t_1} f_k(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{a}) dt = -\Phi_k(\mathbf{a})$,

де всі або частина компонент вектора \mathbf{a} фіксована, називаються *ізопериметрич-*

ними. Якщо $f_k \equiv 0$, то зв'язки типу (6.57) задають рухомі граничні умови. Якщо зв'язки типу (6.57) мають вигляд

$$\begin{aligned}\Phi_{k_1} &\equiv x_{k_1}(t_0) - x_{k_1 0} = 0 \quad (k_1 = \overline{1, n}); \\ \Phi_{k_2} &\equiv x_{k_2}(t_1) - x_{k_2 1} = 0 \quad (k_2 = \overline{1, n}); \\ \Phi_{2n+1} &\equiv t_0 - t_{00} = 0, \quad \Phi_{2n+2} \equiv t_1 - t_{10},\end{aligned}$$

де $x_{k_1 0}, \dots, t_{10}$ – задані числа, то граничні умови називаються *закріпленими*.

Якщо $k_1 = \overline{1, n}$; $k_2 = \overline{1, n^1 < n}$; $t_0 - t_{00} = 0$; то n^1 кінців закріплено, а решта умов називається *вільними* граничними умовами.

Якщо граничні умови $\Phi_k(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, t_1) = 0$ при ($f_k = 0$, $k = \overline{1, \rho}$) можна розбити на дві групи $\Phi_{k_1}(t_0, \mathbf{x}_0) = 0$; $\Phi_{k_2}(t_1, \mathbf{x}_1) = 0$; $k_1 = \overline{1, \rho}$, $k_2 = \rho_1 + 1, \dots, \rho$, $\rho_1 < n$ і якщо $\Phi \equiv q(t_1, \mathbf{x}_1) - h(t_0, \mathbf{x}_0)$, то завдання називається з *розділеними умовами* для кінців.

Загальні умови (6.57) називаються *змішаними* граничними умовами.

6.6.2. Перша необхідна умова екстремуму функціонала в задачі Больца.

Перша необхідна умова екстремуму складається з:

- правила множників Лагранжа;
- рівнянь Ейлера–Лагранжа;
- умов Ердмана–Веєрштрасса;
- умов трансверсальності.

Нехай мінімізуюча крива $C: \{\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \mathbf{a}\}$ допускає в будь-якій точці слабкі (малі як по $\mathbf{x}(t)$, так і по $\dot{\mathbf{x}}(t)$ варіації $\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)$; $\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t)$) по будь-яких сумісних із зв'язками (6.56) напрямках в просторі X^n , $\mathbf{x} \in X^n$ і функції f, f_k, Φ, Φ_k володіють неперервними похідними до третього порядку. Тоді необхідні умови екстремуму формулюються таким чином.

Правило множників Лагранжа: існують функції $\mu_0, \mu_k, \lambda_j(t)$ і функції

$$F = \mu_0 f + \sum_{k=1}^{\rho} \mu_k f_k + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) F_j(t, x, \dot{x}, a); \quad (6.59)$$

$$L = \mu_0 \Phi(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{\rho} \mu_k \Phi_k(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{a}) \quad (6.60)$$

такі, що множники $\mu_0 \geq 0$, μ_k – постійні і рішення початкової задачі на умовний екстремум лежить серед рішень задачі на безумовний екстремум для допоміжного функціонала $\bar{J} = L + \int_{t_0}^{t_1} F dt$.

Завжди можна вважати $\mu_0 = 1$, за винятком особливих випадків.

Рівняння Ейлера–Лагранжа. Між кутовими точками (див. (6.64)) мінімізуючої кривої: $C: \{\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \mathbf{a}\}$ виконуються рівняння Ейлера–Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(F - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i F_{\dot{x}_i} \right) = F_t; \quad (6.61)$$

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}_i} = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \quad (6.62)$$

де $F_{x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}$; $F_{\dot{x}_i} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$; $F_t = \frac{\partial F}{\partial t}$.

Зауваження. Рівняння (6.61) є наслідком (за умови, що всі $x_i(t)$ мають другі похідні) і для функцій F , що не містять явно t , приводить до першого інтеграла

$$F - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i F_{\dot{x}_i} = C \quad (6.63)$$

в силу (6.65)-(6.66), неперервному під час переходу через кутову точку.

Рішення $\mathbf{x}(t)$ рівняння Ейлера–Лагранжа називаються *екстремаліями* незалежно від того, чи є вони такими, що мінімізують, максимізують або сідловими кривими для функціонала J із зв'язками (6.56)-(6.57).

Умови Ердмана–Веєрштрасса. Величини $F - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i F_{\dot{x}_i}$ і $F_{\dot{x}_i}$ ($i = \overline{1, n}$) неперервні упродовж кривою $C: \{\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \mathbf{a}\}$. Зокрема, якщо при $t = t'$ крива C має кутову точку, тобто хоч би по одній компоненті $x_i(t)$ має місце розриви (першого роду) в похідній:

$$\dot{x}_i^- = \left. \frac{dx_i(t)}{dt} \right|_{t=t'-0} \neq \left. \frac{dx_i(t)}{dt} \right|_{t=t'+0} = \dot{x}_i^+, \quad (6.64)$$

то справедливі співвідношення

$$F_{\bar{x}} = \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right|_{\dot{x}_i = \dot{x}_i^-} = \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right|_{\dot{x}_i = \dot{x}_i^+} = F_{\dot{x}_i^+} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (6.65)$$

$$F - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i F_{\dot{x}_i} = \left(F - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i F_{\dot{x}_i} \right) \Big|_{\dot{x}_i = \dot{x}_i^-} = \left(F - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i F_{\dot{x}_i} \right) \Big|_{\dot{x}_i = \dot{x}_i^+} = F^+ - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^+ F_{\dot{x}_i^+}, \quad (6.66)$$

де $F^- = F(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{a}) \Big|_{\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}^-}$; $F^+ = F(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{a}) \Big|_{\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}^+}$; $\dot{\mathbf{x}}^+ = (\dot{x}_1^+, \dot{x}_2^+, \dots, \dot{x}_n^+)^T$; $\dot{\mathbf{x}}^- = (\dot{x}_1^-, \dot{x}_2^-, \dots, \dot{x}_n^-)^T$.

Умова трансверсальності. Кінцеві точки 0 і 1 кривої C : $\{\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \mathbf{a}\}$ такі, що рівність

$$\left[\left(F - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i F_{\dot{x}_i} \right) dt + \sum_{i=1}^n F_{\dot{x}_i} dx_i \right]_0^1 + dL + \sum_{j=1}^r \int_{t_0}^{t_1} F_{a_j} da_j dt = 0 \quad (6.67)$$

виконується тотожно для $dt_0, dt_1, dx_{i0} = dx_i(t_0), dx_{i1} = dx_i(t_1), da_j$ (тобто для всіх довільних і незалежних значень вказаних варіацій кінців траєкторій і варіацій параметрів). Тут dL – повний диференціал функції $L(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1), \mathbf{a}, \boldsymbol{\mu}_k)$:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t_0} dt_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_{i0}} dx_{i0} + \frac{\partial L}{\partial t_1} dt_1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_{i1}} dx_{i1} + \sum_{j=1}^r \frac{\partial L}{\partial a_j} da_j. \quad (6.68)$$

Зауваження. Якщо $t_0 = t_0(\mathbf{a}), t_1 = t_1(\mathbf{a})$, то $dt_0 = \sum_{j=1}^r \frac{\partial t_0(\mathbf{a})}{\partial a_j} da_j$, $dt_1 = \sum_{j=1}^r \frac{\partial t_1(\mathbf{a})}{\partial a_j} da_j$.

Через незалежність величин $dt_0, dt_1, dx_{i0}, dx_{i1}$ умова (6.67) еквівалентна $2n + 2 + r$ рівностей вигляду

$$\left(F - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i F_{\dot{x}_i} + \frac{\partial L}{\partial t} \right)_{t=t_1} dt_1 = 0, \dots, \left(F_{\dot{x}_i} + \frac{\partial L}{\partial x_i} \right)_{t=t_1} dx_{i1} = 0 \quad (i = \overline{1, n}); \quad (6.69)$$

$$\left(F - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i F_{\dot{x}_i} + \frac{\partial L}{\partial t} \right)_{t=t_0} dt_0 = 0, \dots, \left(F_{\dot{x}_i} + \frac{\partial L}{\partial x_i} \right)_{t=t_0} dx_{i0} = 0 \quad (i = \overline{1, n}); \quad (6.70)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial a_j} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial a_j} dt \right) da_j = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \quad (6.71)$$

число яких достатнє для того, щоб спільно з рівняннями (6.56), (6.57), (6.62) визначити бракуючі значення $\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\mu}_k$ ($k = \overline{1, \rho}$), $\boldsymbol{\lambda}_j(t)$ ($j = \overline{1, m}$), $x_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$), a_j ($j = \overline{1, r}$).

6.6.3. Друга необхідна умова мінімуму функціонала в задачі Больца (умова Веєрштраса).

Для допустимої кривої $C: \{\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \mathbf{a}\}$, що реалізовує мінімум в задачі Больца, завжди існує така система множників μ_k ($k = \overline{1, \rho}$), $\lambda_j(t)$ ($j = \overline{1, m}$), що для кривої C з цими множниками виконується правило множників (див. п. 6.6.2), а для всякого елемента $(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ (у тому числі і в кутових точках) кривої C функція Веєрштраса $E(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \dot{\mathbf{X}})$:

$$E(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \dot{\mathbf{X}}) = F(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \dot{\mathbf{X}}) - F(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}) - \sum_{i=1}^n (\dot{X}_i - \dot{x}_i) F_{\dot{x}_i}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}) \quad (6.72)$$

задовольняє нерівності

$$E(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \dot{\mathbf{X}}) \geq 0. \quad (6.73)$$

Нерівність (6.73) має місце при всіх можливих допустимих елементах $(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \dot{\mathbf{X}})$, не співпадаючих з елементами $(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})$ кривої C , але що задовольняють умовам

$$F_j(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{a}) = 0; \quad (j = \overline{1, m}).$$

Якщо мінімізуюча крива $C: \{\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \mathbf{a}\}$ нормальна, то система множників $\mu_0 = 1, \mu_k, \lambda_j(t); (j = \overline{1, m}, k = \overline{1, \rho})$ – єдина і умова Вейерштраса для цієї системи виконується.

6.6.4. Третя необхідна умова мінімуму в задачі Больца (умова Лежандра–Клебша).

Якщо крива $C: \{\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \mathbf{a}\}$ реалізує мінімум в задачі Больца, то завжди знайдеться така система множників μ_0, μ_k ($k = \overline{1, \rho}$), $\lambda_j(t)$ ($j = \overline{1, m}$), що для цієї кривої C задовольняється правило множників, а для всякого її елемента $(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n F_{\dot{x}_i \dot{x}_k}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}) \xi_i \xi_k \geq 0 \quad (6.74)$$

при будь-яких $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, що задовольняють рівнянням

$$\sum_{i=1}^n F_{j,\dot{x}_j}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \xi_i = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (6.75)$$

$$\text{де } F_{j\dot{x}_i} = \frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}_i}; \quad F_{\dot{x}_i \dot{x}_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k}.$$

У даній задачі важливу роль грає матриця

$$\begin{bmatrix} F_{\dot{x}_i \dot{x}_k} & F_{\gamma \dot{x}_i} \\ F_{\alpha \dot{x}_k} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\dot{x}\dot{x}} & F_{\dot{x}} \\ (F_{\dot{x}})^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.76)$$

$$\text{де } (i, k = \overline{1, n}), \quad F_{\dot{x}} = \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)}; \quad F_{\dot{x}\dot{x}} = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k} \right] \quad (\alpha, \gamma = \overline{1, m}).$$

Визначник цієї матриці називається *визначником Гільберта*. Варіаційні задачі з відмінним від нуля визначником Гільберта називаються *регулярними (невиродженими)*.

6.6.5. Четверта необхідна умова в задачі Больца (умова Якобі–Маєра–Кнезера).

Умова Якобі–Маєра–Кнезера носить нелокальний (інтегральний) характер і характеризує екстремальність всієї кривої в цілому на основі розгляду поведінки екстремалей, лежачих в малій околиці від даної екстремалі.

Умова Якобі–Маєра–Кнезера. Щоб екстремаль $C: \{\mathbf{x}(t)\}$ доставляла на відрізку $[t_0, t_1]$ мінімум функціоналу в задачі Больца, необхідно, щоб відрізок $[t_0, t_1]$ не містив точок, зв'язаних з t_0 .

Зв'язана точка. Вважається, що екстремаль $C: \{\mathbf{x}(t)\}$ має на інтервалі (t_0, t_1) точку \tilde{t} , $t_0 < \tilde{t} < t_1$, зв'язану з t_0 , якщо існує послідовність екстремалей, які виходять з тієї ж початкової точки $(t_0, \mathbf{x}(t_0))$ і нескінченно близьких до даної екстремалі $\mathbf{x}(t)$. Ця послідовність така, що кожна з її екстремалей перетинає дану екстремаль $\mathbf{x}(t)$ і послідовність точок перетину має точку \tilde{t} своєю межею. Зв'язана точка $(\tilde{t}, \mathbf{x}(\tilde{t}))$ є точкою дотику екстремалі $\mathbf{x}(t)$ з обвідною сімейства екстремалей, в яку дана екстремаль $\mathbf{x}(t)$ включена (відмітимо, що обвідна може вироджуватися в точку). Це показує, що в зв'язаній точці $(\tilde{t}, \mathbf{x}(\tilde{t}))$ відстань між даною екстремаллю $\mathbf{x}(t)$ і довільною близькою екстремаллю $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, що виходить з

тієї ж початкової точки $(t_0, \mathbf{x}(t_0))$, є величиною вищою за перший порядок малості в порівнянні з вказаною відстанню поза зв'язаною точкою $(\tilde{t}, \mathbf{x}(\tilde{t}))$ (тобто при $t_0 \leq t < \tilde{t}$).

Методи визначення зв'язаних точок вельми трудомісткі. Зокрема, вони можуть ґрунтуватися на обчисленні визначників Маєра–Кнезера.

Для завдання Маєру (див. п. 6.6.1) із закріпленими кінцями

$$F_j(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (6.77)$$

де t_0, t_1 – задані числа,

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \hat{\mathbf{x}}(t_1) = \hat{\mathbf{x}}_1 = (x_1(t_1), \dots, x_{n-1}(t_1))^T, \quad (6.78)$$

де $\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{x}}_1$ – задані вектори, і з функціоналом

$$J = \Phi(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = x_n(t_1) \quad (6.79)$$

зв'язана точка \tilde{t} може бути обчислена як момент часу, в який обертається в нуль визначник Кнезера:

$$D(\tilde{t}, \lambda_0) = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}{\partial(\lambda_{10}, \lambda_{20}, \dots, \lambda_{n-1,0})} \Big|_{t=\tilde{t}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1(t, \lambda_0)}{\partial \lambda_{10}} & \dots & \frac{\partial x_1(t, \lambda_0)}{\partial \lambda_{n-1,0}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_{n-1}(t, \lambda_0)}{\partial \lambda_{10}} & \dots & \frac{\partial x_{n-1}(t, \lambda_0)}{\partial \lambda_{n-1,0}} \end{vmatrix} \Big|_{t=\tilde{t}} = 0, \quad (6.80)$$

$$\lambda_0 = (\lambda_{10}, \lambda_{20}, \dots, \lambda_{n-1,0})^T; \quad (6.81)$$

де $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \lambda_0) = (x_1(t, \lambda_0), \dots, x_{n-1}(t, \lambda_0))$ – екстремаль, що задовольняє при $\lambda = \lambda_0$ заданим умовам (6.78).

Зауваження. При застосуванні чисельних методів рішення крайової задачі іноді (наприклад, в методі Ньютона) одночасно з основною екстремаллю $\mathbf{x}(t)$ обчислюється $(n-1)$ додаткових екстремалей $\mathbf{x}^{n-1}(t)$, лежачих в близькій околиці до основної і що виходять з тієї ж точки (початкової) (t_0, \mathbf{x}_0) по незалежних напрямках (відповідним незалежним початковим умовам для множників Лагранжа λ_0). В цьому випадку можна стверджувати, що точка \tilde{t} буде зв'язаною з точкою t_0 у сформульованій вище задачі, якщо в точці \tilde{t} визначник

$$\Delta(\tilde{t}, \lambda_0) = \left| \begin{array}{cccc} x_1(t) - x_1^{(1)}(t), & x_2(t) - x_2^{(1)}(t), & \dots, & x_{n-1}(t) - x_{n-1}^{(1)}(t) \\ x_1(t) - x_1^{(2)}(t), & x_2(t) - x_2^{(2)}(t), & \dots, & x_{n-1}(t) - x_{n-1}^{(2)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1(t) - x_1^{(n-1)}(t), & x_2(t) - x_2^{(n-1)}(t), & \dots, & x_{n-1}(t) - x_{n-1}^{(n-1)}(t) \end{array} \right|_{t=\tilde{t}} \quad (6.82)$$

представляє нескінченно малу величину вищого порядку, ніж при $t_0 \leq t \leq \tilde{t}$.

6.7. Задача Лагранжа і оптимальне керування

6.7.1. Принцип Лагранжа для задачі Лагранжа.

Задачею Лагранжа називається наступна екстремальна задача в просторі $\Xi = C^1(\Delta, \mathbf{R}^n) \times C(\Delta, \mathbf{R}^r) \times \mathbf{R}^2$:

$$B_0(\mathbf{x}(\bullet), \mathbf{u}(\bullet), t_0, t_1) \rightarrow \inf'; \quad (6.83)$$

$$\Phi(\mathbf{x}(\bullet), \mathbf{u}(\bullet), t_0, t_1) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \varphi(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = 0; \quad (6.84)$$

$$B_i(\mathbf{x}(\bullet), \mathbf{u}(\bullet), t_0, t_1) \leq 0, \quad i = \overline{1, m'}, \quad (6.85)$$

де

$$B_i(\mathbf{x}(\bullet), \mathbf{u}(\bullet), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt + \Psi_i(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1)), \quad i = \overline{0, m}. \quad (6.86)$$

Тут Δ – заданий кінцевий відрізок $t_0, t_1 \in \Delta$; $f_i: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$ – функції $n+r+1$ змінних; $\Psi_i: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ – функції $2n+2$ змінних; $\varphi: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^n$ – вектор-функція $n+r+1$ змінних.

Обмеження (6.84) називається диференціальним зв'язком, вектор-функція $\mathbf{x}(\bullet) = (x_1(\bullet), \dots, x_n(\bullet))$ – фазовою змінною, вектор-функція $\mathbf{u}(\bullet) = (u_1(\bullet), \dots, u_r(\bullet))$ – керуванням.

Четвірка $(\mathbf{x}(\bullet), \mathbf{u}(\bullet), t_0, t_1)$ називається *керованим процесом* в задачі Лагранжа, якщо $\mathbf{x}(\bullet) \in C^1(\Delta, \mathbf{R}^n)$, $\mathbf{u}(\bullet) \in C(\Delta, \mathbf{R}^r)$, $t_0, t_1 \in \text{int} \Delta, t_0 < t_1$, і усюди на відрізку $[t_0, t_1]$ виконується диференціальний зв'язок (6.84), і *допустимим керованим процесом*, якщо крім того виконані обмеження (6.85), (6.86).

Допустимий керований процес $\hat{\xi} = (\hat{\mathbf{x}}(\bullet), \hat{\mathbf{u}}(\bullet), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ називається оптимальним (у слабкому сенсі) процесом, або слабким мінімумом в завданні (6.83), як-

що існує таке $\delta > 0$, що для будь-якого допустимого керованого процесу $\xi = (\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), t_0, t_1)$, що задовольняє умові $\|\xi - \hat{\xi}\|_{\Xi} < \delta$, виконана нерівність $\mathbf{V}(\xi) \geq \mathbf{V}(\hat{\xi})$.

Правило рішення.

1. Скласти функцію Лагранжа:

$$A(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), t_0, t_1; \mathbf{p}(\cdot), \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p}(t)(\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})) \right) dt + \sum_{i=0}^m \lambda_i \Psi_i(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1)),$$

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m), \mathbf{p}(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n).$$

2. Виписати необхідні умови оптимальності в слабкому сенсі процесу

$$\hat{\xi} = (\hat{\mathbf{x}}(\cdot), \hat{\mathbf{u}}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1):$$

а) стаціонарності по x – рівняння Ейлера:

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_x(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^m \lambda_i \hat{f}_{ix}(t) - \mathbf{p}(t) \hat{\varphi}_x(t) \forall t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$$

для лагранжиана

$$L = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p}(t)(\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}));$$

б) трансверсальності по x :

$$\hat{L}_x(\hat{t}_k) = (-1)^k \hat{l}_{x(t_k)} \Leftrightarrow p(\hat{t}_k) = (-1)^k \sum_{i=0}^m \lambda_i \hat{\Psi}_{ix(t_k)}, \quad k = 0, 1$$

для термінанти

$$l = \sum_{i=0}^m \lambda_i \hat{\Psi}_i(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1));$$

в) стаціонарності по u :

$$\hat{L}_u(t) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^m \lambda_i \hat{f}_{iu}(t) + \mathbf{p}(t) \hat{\varphi}_u(t) = 0 \quad \forall t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1];$$

г) стаціонарності по t_k :

$$\hat{A}_{t_k} = 0 \Leftrightarrow (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^m \lambda_i \hat{f}_i(\hat{t}_k) + \sum_{i=0}^m \lambda_i (\hat{\Psi}_{it_k} + \Psi_{ix(t_k)} \dot{\hat{x}}(\hat{t}_k)) = 0, \quad k = 0, 1$$

(умова стаціонарності по t_k виписується тільки для рухомих кінців);

д) доповнюючій нежорсткості

$$\lambda_i B_i(\hat{\xi}) = 0, \quad i = \overline{1, m'};$$

е) позитивності

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{0, m'}.$$

3. Знайти допустимі керовані процеси, для яких виконуються умови п. 2 з множниками Лагранжа λ і $p(\bullet)$, одночасно не рівними нулю. При цьому буває корисно окремо розглянути випадки $\lambda_0 = 0$ і $\lambda_0 \neq 0$. У другому випадку можна покласти λ_0 , рівним одиниці або будь-якій іншій позитивній константі.

4. Серед всіх знайдених в п. 3 допустимих екстремальних процесів відшукати рішення або довести, що рішення немає.

Пропонуємо перевірити, що правило рішення складене в повній відповідності із загальним принципом Лагранжа.

Набір умов для знаходження оптимального процесу є повним. Дійсно, для визначення невідомих $x(\bullet), p(\bullet), u(\bullet)$ ми маємо систему з диференціальних рівнянь (6.84) і умов б), в). Визначаючи з останнього (зрозуміло, коли це можна зробити, наприклад, якщо виконані умови теореми про неявну функцію) $u(\bullet)$ через $x(\bullet)$ і $p(\bullet)$, ми отримуємо систему з $2n$ скалярних диференціальних рівнянь. Її загальне рішення залежить від $2n$ довільних постійних і ще від множників Лагранжа λ_i , серед яких m незалежних. Додаючи сюди ще t_0 і t_1 , отримуємо всього $2n+m+2$ невідомих. Для їх визначення ми маємо $2n$ умов трансверсальності б), m умов доповнюючої нежорсткості і заданих обмежень (3) і дві умови стаціонарності по t_k . Таким чином, число невідомих співпадає з числом рівнянь. (Зрозуміло, що рішення отриманої системи рівнянь вказана обставина не гарантує.)

6.7.2. Принцип максимуму у формі Лагранжа.

Завданням оптимального керування (у понтрягінській формі) називатимемо наступне завдання в просторі $KC^1(\Delta, R^n) \times KC(\Delta, R^r) \times R^2$:

$$B_0(\mathbf{x}(\bullet), \mathbf{u}(\bullet), t_0, t_1) \rightarrow \inf; \quad (6.87)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \quad (6.88)$$

$$\mathbf{u}(t) \in U \forall t \in [t_0, t_1]; \quad (6.89)$$

$$B_i(\mathbf{x}(\bullet), \mathbf{u}(\bullet), t_0, t_1) \leq 0, \quad i = \overline{1, m'}, \quad (6.90)$$

$$B_i(\mathbf{x}(\bullet), \mathbf{u}(\bullet), t_0, t_1) \neq 0, \quad i = \overline{m'+1, m'}, \quad (6.91)$$

де $B_i(\mathbf{x}(\bullet), \mathbf{u}(\bullet), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt + \Psi_i(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1))$, $i = \overline{0, m}$. Тут Δ – заданий кінцевий відрізок $t_0, t_1 \in \Delta$; $f_i: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$ – функції $n+r+1$ змінних;

$\Psi_i: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ – функції $2n+2$ змінних; $\varphi: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^n$ – вектор-функція $n+r+1$ змінних; U – довільна множина з \mathbf{R}^r . Окремим випадком завдання (6.87) є завдання, в якому один з кінців або навіть обидва закріплені.

Вектор-функція $\dot{\mathbf{x}}(\bullet)$ називається фазовою змінною, $\mathbf{u}(\bullet)$ – керуванням. Рівняння (6.88), зване диференціальним зв'язком, повинне виконуватися в усіх точках неперервності керування $\mathbf{u}(\bullet)$ на інтервалі (t_0, t_1) (ця множина позначатиметься через T).

Четвірка $(\mathbf{x}(\bullet), \mathbf{u}(\bullet), t_0, t_1)$ називається керованим процесом в задачі оптимального керування, якщо $\mathbf{x}(\bullet) \in C^1(\Delta, \mathbf{R}^n)$, $\mathbf{u}(\bullet) \in C(\Delta, \mathbf{R}^r)$, виконуються диференціальний зв'язок (6.88) і обмеження типу включення (6.89). Керований процес є допустимим, якщо, крім того, виконуються співвідношення (6.90) і (6.91).

Допустимий керований процес $\hat{\xi} = (\hat{\mathbf{x}}(\bullet), \hat{\mathbf{u}}(\bullet), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ називається (локально) оптимальним (або ще говорять оптимальним в сильному сенсі процесом), якщо існує $\delta > 0$ таке, що для всякого допустимого керованого процесу $\xi = (\mathbf{x}(\bullet), \mathbf{u}(\bullet), t_0, t_1)$, для якого

$$\|(\mathbf{x}(\bullet), t_0, t_1) - (\hat{\mathbf{x}}(\bullet), \hat{t}_0, \hat{t}_1)\|_{C(\Delta, \mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^2} < \delta$$

виконується нерівність $B_0(\xi) \geq B_0(\hat{\xi})$.

Правило рішення.

1. Скласти функцію Лагранжа:

$$A(\mathbf{x}(\bullet), \mathbf{u}(\bullet), t_0, t_1; \mathbf{p}(\bullet), \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p}(t)(\dot{\mathbf{x}} - \varphi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})) \right) dt + \sum_{i=0}^m \lambda_i \Psi_i(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1)),$$

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m), \mathbf{p}(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^{n^*}).$$

2. Виписати необхідні умови оптимальності процесу $\hat{\xi} = (\hat{\mathbf{x}}(\cdot), \hat{\mathbf{u}}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$:

а) стаціонарності по x – рівняння Ейлера:

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_x(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{p}}(t) = \sum_{i=0}^m \lambda_i \hat{f}_{ix}(t) - \mathbf{p}(t) \hat{\phi}_x(t)$$

для лагранжиана

$$L = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p}(t)(\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}));$$

б) трансверсальності по x :

$$\hat{L}_x(\hat{t}_k) = (-1)^k \hat{l}_{x(t_k)} \Leftrightarrow p(\hat{t}_k) = (-1)^k \sum_{i=0}^m \lambda_i \hat{\Psi}_{ix_k}, \quad k = 0, 1$$

для термінанти

$$l = \sum_{i=0}^m \lambda_i \hat{\Psi}_i(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1));$$

в) оптимальності по u – принцип максимуму в лагранжевій формі:

$$\begin{aligned} \min_{u \in U} \hat{L}(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t), \mathbf{u}) &= \hat{L}(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \min_{u \in U} \left(\sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}) - \mathbf{p}(t) \boldsymbol{\phi}(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}) \right) = \\ &= \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) - \mathbf{p}(t) \boldsymbol{\phi}(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) \end{aligned}$$

або в гамільтоновій (понтрягінській) формі у вигляді принципу максимуму:

$$\max_{u \in U} H(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t)) = H(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), \mathbf{p}(t)),$$

де $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ – функція Понтрягіна;

г) стаціонарності по t_k :

$$\begin{aligned} \hat{A}_{t_k} = 0 &\Leftrightarrow (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^m \lambda_i \hat{f}_i(\hat{t}_k) + \sum_{i=0}^m \lambda_i (\hat{\Psi}_{it_k} + \Psi_{ix(t_k)} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(\hat{t}_k)) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \hat{H}(\hat{t}_k) = (-1)^{k+1} \hat{l}_{t_k}, \quad k = 0, 1 \end{aligned}$$

(умова стаціонарності випикується тільки для рухомих кінців);

д) доповнюючій нежорсткості $\lambda_i B_i(\hat{\xi}) = 0, \quad i = \overline{1, m'}$;

е) позитивності $\lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{0, m'}$.

3. Знайти допустимі керовані процеси, для яких виконуються умови п. 2 з

множниками Лагранжа λ і $p(\bullet)$, одночасно не рівними нулю. При цьому буває зручно окремо розглянути випадки $\lambda_0 = 0$ і $\lambda_0 \neq 0$. У другому випадку можна покласти λ_0 рівним одиниці або будь-якій іншій позитивній константі.

4. Відшукати рішення серед знайдених допустимих екстремальних процесів або показати, що рішення немає.

Можна показати, що описане вище правило рішення знаходиться в повній відповідності з принципом Лагранжа зняття обмежень.

На закінчення слід зазначити, що відсутність методів вибору функціоналів, що оптимізуються, стримує застосування методів теорії оптимальних процесів при вирішенні прикладних задач. Це пов'язано з труднощами побудови математичних критеріїв, що визначають властивості перехідних процесів в замкнених динамічних системах.

У даному розділі не розглядався круг питань, пов'язаних з побудовою оптимальних керувань системами, що функціонують в умовах невизначеності стохастичної або нечіткої природи (вони розглянуті в гл. 7 і частині III).

Контрольні питання

1. Розкажіть про роль теорії оптимальних процесів при вирішенні технічних завдань.

2. Дайте характеристику загальної задачі керування. Які математичні моделі і чому вона повинна включати?

3. Дайте характеристику прямим і непрямим методам теорії оптимальних процесів.

4. Перерахуйте умови раціональності застосування методів оптимізації.

5. Дайте загальну характеристику результатам, які можуть бути отримані унаслідок застосування методів теорії оптимальних процесів.

6. Розкажіть про необхідні і достатні умови в теорії оптимальних процесів.

7. Розкажіть про проблему існування оптимальних керувань.

8. Що таке фазові координати?

9. Розкажіть про еволюцію системи і її опис за допомогою диференціальних рівнянь руху.
10. Функціонал. Критерій якості керування.
11. Які системи називаються автономними?
12. Розкажіть про допустимі програмні керування.
13. Розкажіть про допустимий закон керування.
14. Допустимі траєкторії і процеси. Граничні умови. Краєва задача. Види краєвих умов.
15. Основне завдання оптимального координатного керування.
16. Оптимальні траєкторії.
17. Основні властивості оптимальних керувань і оптимальних траєкторій.
18. Геометрична інтерпретація основної задачі.
19. Приведіть формулювання принципу максимуму.
20. Розкажіть про наслідки принципу максимуму.
21. Принцип оптимальності динамічного програмування.
22. Ослаблена необхідна умова.
23. Задача Больца, Маєра, Лагранжа; привести формулювання.
24. Перша необхідна умова екстремуму функціонала в задачі Больца.
25. Друга необхідна умова мінімуму функціонала в задачі Больца (умова Веєрштраса).
26. Третя необхідна умова мінімуму в задачі Больца (умова Лежандра-Клебша)
27. Четверта необхідна умова в задачі Больца (умова Якобі-Маєра-Кнезера).

Глава 7. ФІЛЬТРАЦІЯ І СТОХАСТИЧНЕ КЕРУВАННЯ В ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

7.1. Випадкові процеси в САК

У реальних системах є завади (збурення), що діють в каналах передачі інформації. Часто немає ніякої, окрім статистичної, інформації про ці чинники, що примушує вважати ці змінні випадковими величинами із заздалегідь невідомими законами розподілу. Так виникає завдання керування в умовах невизначеності. Тут є два аспекти: саме керування в умовах невизначеності та завдання боротьби із завадами.

7.1.1. Моделі випадкових сигналів в САК.

Випадкові процеси і сигнали, що відображають їх, вважатимемо функціями часу, які приймають випадкові значення. У кожен момент часу значення випадкового процесу є випадкова величина $x(t)$. Основною характеристикою випадкової величини у момент часу t є функція $p(x,t)$ – щільність ймовірності у момент t . Щільність ймовірності визначає функції математичного очікування і дисперсії випадкових величин:

$$Mx(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) p(x,t) dx, \quad Dx(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - Mx(t))^2 p(x,t) dx.$$

Для опису статистичного взаємозв'язку значень $x(t)$ в різні моменти часу вводяться кореляційна функція сигналу $x(t)$:

$$Kx(t1,t2) = M[(x(t1) - Mx(t1)) (x(t2) - Mx(t2))]$$

і взаємна кореляційна функція сигналів $x(t)$ і $y(t)$:

$$Kxy(t1,t2) = M[(x(t1) - Mx(t1)) (y(t2) - My(t2))].$$

Відзначимо, що $Kx(t,t) = Dx(t)$, тобто при $t1 = t2 = t$ це є дисперсія у момент часу t .

Стаціонарним випадковим процесом називається такий випадковий процес, для якого кореляційна функція залежить не від абсолютних значень $t1$ і $t2$, а тільки від їх різниці $\tau = t1 - t2$: $K(t1,t2) = K(t1 - t2) = K(\tau)$. Дисперсія і математич-

не очікування для стаціонарного випадкового процесу є константами. Стаціонарний випадковий процес для САК не міняє своїх статистичних характеристик за час життя системи.

Спектральна щільність $S(\omega)$ по частоті ω стаціонарного випадкового процесу є інтеграл (перетворення) Фур'є від кореляційної функції $K(\tau)$. Відповідно, кореляційна функція $K(\tau)$ є зворотне перетворення Фур'є спектральної щільності $S(\omega)$:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \exp(-j\omega t) dt, \quad K(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Спектральна щільність випадкового процесу описує розкладання потужності процесу по гармонійних складових. Можна виразити дисперсію через інтеграл від спектральної щільності. Це означає, що дисперсія є сумарна потужність випадкового процесу, розподілена по частоті:

$$D = K(0) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega.$$

7.1.2. Фільтрація завод.

Вважатимемо, що в САК заводи можуть бути в двох основних місцях: завада в каналі керування (до керування додається завада W) і завада в каналі вимірювання (вихідний сигнал вимірюється з заводою V). Найбільш загальне завдання фільтрації шуму – максимально можливе придушення обох завод.

Якщо розглянути шумовий сигнал з нескінченним рівномірним спектром, то йому відповідатиме кореляційна функція у вигляді δ -функції:

$$S(\omega) = \sigma^2 = \text{const}; \quad K(\tau) = (\sigma^2/2\pi) \delta(\tau); \quad D = K(0) = \infty.$$

Ці три рівняння описують "білий шум" з інтенсивністю σ^2 . Ясно, що такий сигнал не може бути фізично реалізований через нескінченну потужність. Можна, проте, реалізувати скільки завгодно близький до цього випадковий процес, званий "рожевим шумом". Формально рожевий шум виходить при пропусканні білого шуму через будь-яку реальну ланку. При цьому обмежується спектр сигналу, оскільки ніяка реальна ланка не може пропускати нескінченну смугу частот. В результаті, у реального рожевого шуму може бути скільки за-

вгодно широкий, але убуваючий спектр, а його кореляційна функція може швидко убувати, що означає малий зв'язок значень процесу в різні моменти часу.

Задачу фільтрації завад вирішуватимемо як оптимальну, тобто шукатимемо умови найбільшого придушення завад. Завади вважатимемо випадковими процесами з відомими кореляційними функціями (спектральними характеристиками). Алгоритми керування і фільтрації можуть бути реалізовані окремо і їх одночасне функціонування в замкнутій системі не заважає один одному. Іншими словами, оптимальний фільтр можна розраховувати окремо від регулятора в тому сенсі, що характеристичне рівняння замкнутої системи виявляється рівним додатку рівнянь підсистеми регулювання і підсистеми фільтрації.

При аналізі і синтезі фільтрів використовується аддитивна модель вхідного сигналу: $u(t)=s(t)+q(t)$, де $s(t)$ – корисна складова сигналу керування, $q(t)$ – складова шумів і завад. Синтез оптимальних фільтрів проводиться з використанням відомої апріорної інформації як про сигнали, які необхідно виділяти, так і про шуми і завади. Як правило, використовується інформація про природу корисного сигналу і шуму, про їх спектральний склад, про кореляційні і взаємні кореляційні характеристики. Наявність певних особливостей (відмінностей) в характеристиках сигналу і шуму дозволяє реалізувати фільтр взагалі і оптимальний фільтр зокрема. Якщо такі особливості відсутні, постановка завдання стає некоректною.

За наявності завад абсолютно точне виділення корисного сигналу методами лінійної фільтрації, як правило, неможливо. Результат фільтрації

$$z(t) = h(\tau) \otimes u(t-\tau), \quad (7.1)$$

де $h(\tau)$ – імпульсна перехідна функція (відгук) фільтра, відрізняється від $s(t)$ на величини $\varepsilon(t)=z(t)-s(t)$, які є значеннями похибки відтворення корисного сигналу по координатах t . Якість фільтру оцінюється середнім значенням квадрата величини $\varepsilon(t)$:

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{[z(t) - s(t)]^2}. \quad (7.2)$$

Вираз (7.2) дає можливість визначити функцію $h(\tau)$ фільтру по критерію мінімуму середнього квадратичного відхилення вихідного сигналу від його дійсної або заданої форми.

7.1.3. Фільтр Вінера-Колмогорова.

Фільтр Вінера-Колмогорова є оптимальним фільтром формування з вхідного сигналу $u(t)$ вихідного сигналу $z(t)$ при відомій формі корисного сигналу $s(t)$, який міститься у вхідному сигналі в сумі з шумами. Як критерій його оптимізації використовується середнє квадратичне відхилення сигналу $z(t)$ на виході фільтру від заданої форми сигналу $s(t)$. Підставимо рівняння згортки (7.1) в розкритій формі інтегральної згортки у вираз (7.2) і отримаємо відхилення ε^2 вихідного сигналу $z(t)$ від заданої форми вихідного сигналу $s(t)$:

$$\varepsilon^2 = \overline{[\int u(t-\tau)h(\tau) d\tau - s(t)]^2}. \quad (7.3)$$

Мінімум виразу (7.3) визначає функцію імпульсного відгуку $h(t)$ оптимального фільтру. При цьому для оптимального фільтру дійсний вираз:

$$h(t) \otimes K_u(\tau) = K_{zu}(\tau). \quad (7.4)$$

Іншими словами, згортка функції відгуку оптимального фільтру з функцією автокореляції вхідного сигналу повинна бути рівна функції взаємної кореляції вихідного і вхідного сигналів.

Відзначимо, що $K_u(\tau) = R_u(\tau) + R_q(\tau)$, де R_u – функція автокореляції сигналу, R_q – функція автокореляції шуму, а $K_{zu}(\tau) = B_{zs}(\tau) + B_{zq}(\tau)$, де B_{zs} – функція взаємної кореляції сигналів $z(t)$ і $s(t)$, B_{zq} – функція взаємної кореляції сигналу $z(t)$ і завад $q(t)$. Підставляючи дані вирази в (7.4), отримуємо:

$$h(t) \otimes [R_u(\tau) + R_q(\tau)] = B_{zs}(\tau) + B_{zq}(\tau). \quad (7.5)$$

7.1.4. Частотна характеристика фільтру.

Частотна характеристика фільтру знаходиться перетворенням Фур'є лівої і правої частини рівняння (7.5):

$$H(\omega)[W_u(\omega) + W_q(\omega)] = W_{zs}(\omega) + W_{zq}(\omega),$$

$$H(\omega) = [W_{zs}(\omega) + W_{zq}(\omega)] / [W_s(\omega) + W_q(\omega)], \quad (7.6)$$

де $W_s(\omega) \Leftrightarrow R_s(\tau)$ і $W_q(\omega) \Leftrightarrow R_q(\tau)$ – енергетичні спектри (щільність потужності) сигналу і завади, $W_{zs}(\omega) \Leftrightarrow B_{zs}(\tau)$ – взаємний енергетичний спектр вхідного і вихідного сигналів, $W_{zq}(\omega) \Leftrightarrow B_{zq}(\tau)$ – взаємний енергетичний спектр вихідного сигналу і завади.

Зазвичай має місце статистична незалежність корисного сигналу, а, отже, і сигналу $z(t)$, від шумів, при цьому $B_{zq} = 0$ і фільтр називають *оптимальним по згладжуванню шумів* при заданій формі вихідного сигналу:

$$H(\omega) = W_{zs}(\omega) / [W_s(\omega) + W_q(\omega)], \quad (7.7)$$

Фільтр (7.7) оптимальний в тому сенсі, що максимізував відношення потужності сигналу до потужності шуму по всьому інтервалу сигналу, але не в кожній індивідуальній точці.

Вирази (7.6)-(7.7) досить наочно демонструють фізичний сенс формування передавальної функції фільтру. При відтворенні сигналу частотна функція взаємної кореляції вхідного сигналу з вихідним W_{zs} (щільність взаємної потужності) повторює частотну функцію автокореляції W_s (щільність потужності сигналу). Щільність потужності статистичних шумів W_q розподілена по частотному діапазону рівномірно, на відміну від щільності потужності сигналу W_s , яка, залежно від форми сигналу, може займати будь-які частотні інтервали спектрального діапазону. На частотах, де зосереджена основна енергія сигналу, має місце $W_s(\omega) \gg W_q(\omega)$ і $H(\omega) \Rightarrow 1$ (як мінімум, більше 0.5). Там, де значення $W_s(\omega)$ стає менше $W_q(\omega)$, коефіцієнт передачі фільтру стає менше 0.5, і в межі $H(\omega)=0$ на всіх частотах, де повністю відсутні частотні складові сигналу.

Таким чином, оптимальні фільтри враховують особливості спектрального складу сигналів і здатні формувати передавальні функції будь-якої складності на виділення корисних частот сигналів з будь-яких діапазонів спектру з максимальних придушенням шумів на всіх частотах спектрального діапазону, що не містять корисних сигналів. При цьому межі посилення-придушення встановлюються автоматично по заданому рівню шумів.

7.2. Постановка загальної задачі стохастичного керування

Розглянемо задачу оптимального в певному значенні керування на підставі не цілком достовірних вимірювань, яке в широкому сенсі представляє повний математичний опис реальних задач керування.

При створенні регуляторів і систем керування спочатку застосовувався детермінований підхід. Тільки приблизно з 1960 р. почалося інтенсивне дослідження завдань керування із стохастичних позицій. Одним з перших розглядів такого завдання було зроблено Ленінгом і Беттіном, які представили результати, засновані, головним чином, на теорії оцінювання з мінімальною середньоквадратичною похибкою. Фундаментальний внесок до розвитку теорії стохастичного керування внесли Беллман і Фельдбаум.

7.2.1. Базова задача і структура системи керування.

У основі теорії керування лежить припущення про існування деякої «системи», якою необхідно керувати для досягнення певної мети. При цьому вхідні сигнали, що керують, як правило, формуються на основі недосконалих спостережень деяких змінних, що описують систему, а стратегія керування базується на апріорній інформації про характеристики системи і також на передісторії зміни вхідних і вихідних змінних (рис. 7.1).

Надалі аналізуватимемо тільки дискретні системи, що обумовлене, в першу чергу, їх поширеністю в сучасній практиці. При цьому, їх аналіз може бути виконаний за допомогою математичного апарату, простішого в порівнянні з випадком неперервних стохастичних систем.

Розглянемо математичну модель системи, представленої на рис. 7.1. Динаміка системи описується нелінійним різницеvim рівнянням

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (7.8)$$

Тут шум w для зручності аналізу приймається аддитивним. Вектор стану x має розмірність n , а вектор керування u – розмірність p . В загальному випадку ймо-

вірнісна модель для початкового стану x_0 і вектора збурень w_k приймається відомою, за винятком декількох невідомих параметрів.

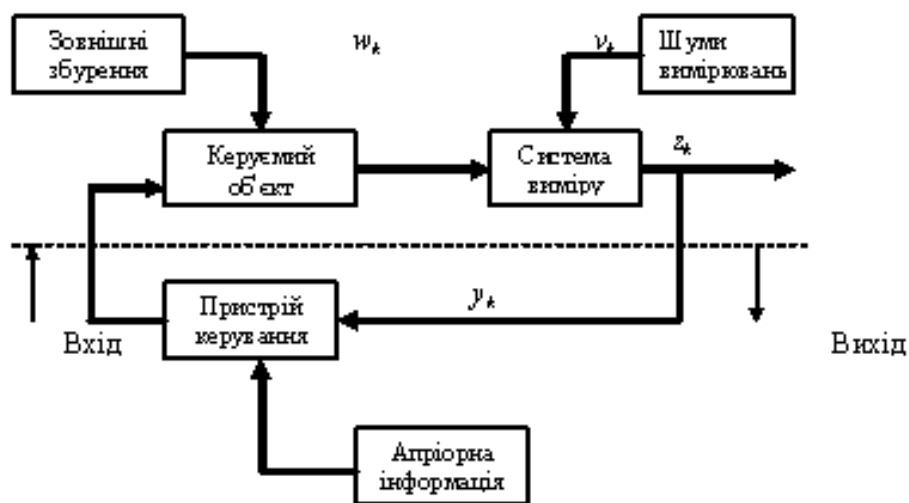


Рис. 7.1. Узагальнена структура системи керування

Як правило, приймається, що ці змінні мають розподіл Гауса. Такий, що

$$E[x_0] = \mu_0, E[w_k] = 0 \text{ для усіх } k, E[(x_0 - \mu_0)(x_0 - \mu_0)^T] = M_0,$$

$$E[x_0 w_k^T] = 0 \text{ для усіх } k, E[w_k w_j^T] = Q_k \delta_{kj},$$

де $E[*]$ – оператор обчислення математичного очікування.

Тобто, послідовність збурень, що діють на об'єкт, є білим шумом і не залежить від початкового стану системи.

Вимірювальна система описується алгебраїчними рівняннями відносно змінних стану. Вектор вимірювань (розмірності m) визначається співвідношенням

$$z_k = h_k(x_k) + v_k, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (7.9)$$

Як і в рівнянні (7.8), завада v для зручності приймається аддитивною. Надалі буде розглянутий випадок системи вимірювань типу $h_k(x_k, v_k)$. Приймається також, що завада має нульове математичне очікування, є білою послідовністю Гауса, не залежить від початкового стану і для неї

$$E[w_k] = 0 \text{ для усіх } k, E[v_k v_j^T] = R_k \delta_{kj} \text{ для усіх } k,$$

$$E[v_k x_0^T] = 0 \text{ для усіх } k, E[v_k w_j^T] = 0 \text{ для усіх } k, j.$$

Рівняння (7.8) і (7.9) є математичним описом системи, показаної на рис. 7.1 над штриховою лінією. Це частина повної системи, відповідна фізичній системі і яка підлягає керуванню.

Якщо модель цієї системи задана, то розгляду підлягають питання синтезу системи керування, розташованій нижче штрихової лінії.

7.2.2. Основні класи стратегій стохастичного керування.

Завдання керування формулюється таким чином. Стан $x(k)$ системи в момент k змінюється відповідно до рівняння

$$x(k+1) = f[k, x(k), u(k), v(k)], \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

де $u(k)$ – керування, прикладене в момент k , а шум процесу $v(k)$ і $x(0)$ – випадкові змінні. Число кроків N приймається заданим.

У момент k (до подачі керуючої дії) виконуються спостереження згідно рівнянню

$$v(k) = h[k, x(k), w(k)], \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

де $w(k)$ – збурення.

Змінні в загальному випадку є векторами відповідних розмірностей. Підлягає мінімізації критерій якості у вигляді вартості керування (витрат на керування):

$$J = E\{C(N, X_0^N, U_0^{N-1})\}, \quad (7.10)$$

$$U_0^{N-1} \stackrel{\Delta}{=} \{u(i)\}_{i=0}^{N-1},$$

$$X_0^N \stackrel{\Delta}{=} \{x(i)\}_{i=0}^N,$$

де C – дійсна функція; « $\stackrel{\Delta}{=}$ » – о знак рівності за визначенням.

Аргументами мінімізації очікуваної вартості є керування U_0^{N-1} , які повинні бути прикладені в період N -крокового процесу керування.

Множина спостережень від моменту i до моменту j , коли до системи прикладається вхідна послідовність U_0^{j-1} , позначимо як:

$$Y_i^j = Y_i^j[\omega, U_0^{j-1}] = \{y(k)\}_{k=i}^j, \quad 1 \leq i \leq j \leq N,$$

де ω – загальний елемент дискретного простору Ω , на якому визначені випадкові змінні для нашого завдання.

Оскільки розподіл вірогідності для $x(0)$ відомий, можна прийняти, що при $k=0$ немає вимірювань і, отже Y_i^j визначається при $i \geq 1$. Відзначимо також, що останнє вимірювання $y(N)$ неістотно, оскільки керування більше не прикладається.

Динаміка системи описується виразом:

$$D = \{f(k, \dots, \dots)\}_{k=0}^{N-1}.$$

Вимірювання між моментами i і j («програма спостережень») записуються у вигляді

$$M_i^j = \{h(k, \dots, \dots)\}_{k=i}^j, \quad 1 \leq i \leq j \leq N-1.$$

Нульові підрядкові індекси для X і U , а також одиничний індекс для M або Y для спрощення опускаються.

Сумісну щільність вірогідності випадкових змінних $x(0)$, $v(0)$.., $v(N-1)$, $w(1)$.., $w(k)$ позначимо через

$$L^k = dP[x(0), v(0), \dots, v(N-1), w(1), \dots, w(k), \quad k=1, \dots, N-1$$

$$L^0 = dP[x(0), v(0), \dots, v(N-1)],$$

де L – «статистика» відповідних випадкових змінних.

Регулятор повинен бути каузальним (причинним), тобто $u(k)$ не може бути функцією множини Y_{k+1}^{N-1} або будь-якої з його підмножин. Крім того, без втрати спільності вважатимемо, що при обчисленні поточного керування $u(k)$ ми маємо в своєму розпорядженні точну інформацію про всі попередні керування.

Важливо відзначити, що знання статистик майбутніх спостережень грає ключову роль в стохастичному керування, оскільки дозволяє статистично прогнозувати інформацію, яка буде отримана з подальших спостережень. Такий пі-

дхід отримав назву *препостеріорний (прогнозний) аналіз*. За допомогою препостеріорного аналізу (прогнозу) можна оцінити значущість майбутньої інформації і ці знання використовувати при ухваленні рішення про те, яке керування в даний момент часу є найбільш відповідним.

Враховуючи зроблені вище зауваження, можна визначити наступні класи стратегій стохастичного керування з фіксованим кінцевим часом:

1. *Стратегія з розімкненим контуром (РК)*. В цьому випадку керування має вигляд:

$$u^{PK}(k) = u^{PK}[k; D, L^0, C], \quad k=0, \dots, N-1, \quad (7.11)$$

тобто в регулятор не поступає інформація про результати вимірювань.

2. *Стратегія із зворотним зв'язком (ЗЗ)*. В цьому випадку в кожен момент до дані, що отримуються в реальному часі, поступають в регулятор, але відсутня інформація про майбутні спостереження, тобто не передбачається майбутній зворотний зв'язок:

$$U^{33}(k) = u^{33}[k, Y^k, U^{k-1}; D, M^k, L^k, C], \quad k=0, \dots, N-1. \quad (7.12)$$

3. *Стратегія типу зворотного зв'язку з m -шаговим попередженням (m -ЗЗ)*. При цій стратегії на додаток до зворотного зв'язку по поточних вимірюваннях для формування керування використовуються програма спостережень і відповідні статистики для наступних m кроків:

$$u^{m33}(k) = u^{m33}[k, Y^k, U^{k-1}; D, M^{k+m}, L^{k+m}, C]. \quad (7.13)$$

Тут $k+m$ замінюється на $N-1$ при $k > N-1-m$.

4. *Стратегія замкнутого контура (ЗК)*. Ця стратегія, яку іноді називають «дійсним зворотним зв'язком», враховує всю програму спостережень, що залишилася, і відповідні статистики, тобто інформацію про те, що контур буде замкнений до кінця процесу. Отже, в цьому випадку керування має вигляд

$$u^{3K}(k) = u^{3K}[\partial_0, Y^k, U^{k-1}; D, MN-1, LN-1, C], \quad k=0, \dots, N-1. \quad (7.14)$$

Відзначимо, що в рівняннях (7.11) – (7.14) використовується одна й та ж інформація про передісторію процесу, а розрізняються вони тільки використанням інформації про майбутні спостереження.

Керування (7.14) в момент k є відображенням в просторі керувань:

- 1) інформації, що розташовується у нинішній момент часу;
- 2) множина функцій D (рівнянь динаміки);
- 3) множина функцій $MN-I$ (рівнянь всіх спостережень, включаючи оцінки майбутнього);
- 4) функції $LN-I$ сумісної щільності вірогідності всіх випадкових змінних, що включають і оцінки майбутніх спостережень;
- 5) функції вартості.

Простір керувань в загальному випадку є евклідовим простором або його підпростором.

Рівняння (7.12) має той же сенс, що і рівняння (7.14), за тим виключенням, що по п. 3 відображається менша множина функцій M_k (без рівнянь майбутніх спостережень), а по п. 4 – функція L_k (сумісна щільність вірогідності для меншої множини випадкових змінних, зв'язки яких з майбутніми спостереженнями не враховуються).

Підсумовуючи викладене, можна сказати, що керування належить до класу управлінь із ЗЗ у тому випадку, коли воно використовує поточну інформацію при керування, але ігнорує існування ЗЗ в подальші моменти; керування належить до класу замкнутого контура, коли на додаток до використання ЗЗ прогнозується (статистично) наявність ЗЗ в подальшому.

Визначення класів стратегій стохастичного керування не залежать ні від виду керованих систем, ні від форми критерію якості.

Замкнута стратегія забезпечує оптимальне рішення основної задачі керування. Інші стратегії дозволяють спростити рішення задачі керування, хоча отримане рішення виявляється субоптимальним в порівнянні з випадком, коли використовується замкнута стратегія. Можливі й інші типи стратегій, які дозволяють синтезувати так звані *достовірно еквівалентні регулятори*. Для цього типу стратегій запропоновано знаходити рішення задачі керування шляхом заміни всіх випадкових змінних їх очікуваними значеннями. Закон керування, отриманий для відповідного детермінованого завдання, розглядається як достовірно еквівалентна стратегія. Дослідження Джозефа і Ту, а також Ганкель і

Франкліна показали, що для лінійного квадратичного завдання Гауса достовірно еквівалентний і оптимальний замкнутий регулятори ідентичні.

7.3. Загальне рішення задачі оптимального стохастичного керування

Розглянемо загальне завдання визначення послідовності керування u_k , яке б мінімізувало критерій якості (7.10) при обмеженнях на динаміку і вимірювання, визначуваних рівняннями (7.8) і (7.9).

Запишемо критерій якості в аддитивній формі:

$$J_0(x^N, u^{N-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} W_i(x_{i+1}, u_i). \quad (7.15)$$

Використовуючи принцип оптимальності Беллмана отримаємо оптимальну замкнуту стратегію керування шляхом рішення наступної послідовності завдань мінімізації:

$$J_0^{3K} = \min_{u_0} E(\dots \min_{u_{N-2}} E(\min_{u_{N-1}} E\{K_0(x^N, u^{N-1}) / z^{N-1}, u^{N-2}\} z^{N-2}, u^{N-3}) \dots) \quad (7.16)$$

Завдання мінімізації функціонала (7.16) може бути вирішене чисельними методами, оскільки повне аналітичне рішення, за винятком лінійних систем, важко або неможливо знайти.

7.3.1. Рекурсивне рішення задачі керування.

Коли функція вартості керування має аддитивну форму (7.15), принципи оптимальності дозволяють отримати рекурсивну систему рівнянь, яким повинно задовольняти оптимальне керування.

Розглянемо загальну форму такого рішення.

N -крокова функція вартості може бути записана у вигляді

$$J_0 = E \sum_{i=0}^{N-2} W_i(x_{i+1}, u_i) + W_{N-1}(x_N, u_{N-1}), \quad (7.17)$$

де математичне очікування береться щодо випадкових змінних x^N, z^{N-2} . У перший доданок виразу (7.17) не входять змінні x_N і z_{N-1} , оскільки підсумовування

виключає їх. Таким чином, математичне очікування в (7.17) береться відносно x^{N-1}, z^{N-2} .

Розглянемо другий член в рівнянні (7.17). Для визначення керування для останнього кроку необхідно розглядати тільки член u_{N-1} , який повинен бути вибраний таким чином, щоб мінімізувати

$$J_{N-1} = EW_{N-1}(x_N, u_{N-1}). \quad (7.18)$$

Щільність сумісного розподілу $p(x^N, z^{N-1})$ може бути представлена у вигляді:

$$\begin{aligned} p(x^N, z^{N-1}) &= p(x^{N-1}, z^{N-1}) \int p(x_N | x^{N-1}, z^{N-1}, w_{N-1}) \times \\ &\times p(w_{N-1} | x^{N-1}, z^{N-1}) dw_{N-1} = \\ &= p(x^{N-1}, z^{N-1}) \int p(x_N | x^{N-1}, z^{N-1}, w_{N-1}) \times p(w_{N-1}) dw_{N-1}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Останнє рівняння обумовлено тим, що w_{N-1} береться з послідовності білих шумів і не залежить від стану x^{N-1} вимірювань z^{N-1} . Оскільки z^{N-1} визначає u_{N-1} , а $x_{N-1}, u_{N-1}, w_{N-1}$ визначають x_N , то щільність $p(x_N | x^{N-1}, z^{N-1}, w_{N-1})$ може бути зведена до дельта-функції Дірака $\delta[x_N - f_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}, w_{N-1})]$.

Підставляючи (7.19) в рівняння (7.18), отримаємо наступний вираз для вартості керування на останньому кроці:

$$J_{N-1} = \int \bar{H}_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) p(x^{N-1}, z^{N-1}) dx^{N-1} dz^{N-1}, \quad (7.20)$$

де $\bar{H}_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) = \int W_{N-1}(x_N, u_{N-1}) p(x_N | x^{N-1}, z^{N-1}, w_{N-1}) p(w_{N-1}) dx_N dw_{N-1}$.

Оскільки \bar{H}_{N-1} не є функцією x^{N-2} , то ці змінні можуть бути виключені за допомогою інтеграції. Тоді рівняння (7.20) прийме вигляд:

$$\begin{aligned} J_{N-1} &= \int \left\{ \int \bar{H}_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) p(x_{N-1} | z^{N-1}) dx_{N-1} \right\} p(z^{N-1}) dz^{N-1} = \\ &= E \left\{ E[\bar{H}_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) / z^{N-1}] \right\}. \end{aligned}$$

Позначимо оптимальне керування через u_{N-1}^* , а мінімальну вартість керування через J_{N-1}^* .

Вартість J_{N-1}^* мінімізується шляхом вибору керування u_{N-1} як функції z^{N-1} з метою мінімізації умовного очікування, тоді

$$J_{N-1}^* = E \left\{ \min_{u_{N-1}} E[\bar{H}_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) / z^{N-1}] \right\} \times E \left\{ E[\bar{H}_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}^*) / z^{N-1}] \right\}. \quad (7.21)$$

Відзначимо, що величина \bar{H}_{N-1} може бути визначена явно з інформації про систему, а функція вартості W_{N-1} відома. Стан x_N може бути виключено з \bar{H}_N і замінено на $f_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}, w_{N-1})$. Крім того, щільність вірогідності завади передбачається відомою. Таким чином, функція \bar{H}_{N-1} визначається шляхом інтеграції по w_{N-1} .

Для визначення $E[\bar{H}_{N-1}(x_{N-1} | u_{N-1}) / z^{N-1}]$ необхідно знати умовну апостеріорну щільність розподілу $p(x_{N-1} | z^{N-1})$, по якій можна визначити всю інформацію щодо стану x_{N-1} , яка міститься у вимірюваннях z^{N-1} , і отримати повне рішення задачі фільтрації.

Результат, відбитий рівнянням (7.21), легко узагальнюється за допомогою методу індукції на довільний крок. Таким чином, оптимальна стратегія замкнутого керування виходить на кожному кроці шляхом вибору керування u_{N-k} відповідно до виразу

$$E[\bar{H}_{N-k}(x_{N-k}, u_{N-k}^*) | z^{N-k}] = \min_{u_{N-k}} E[\bar{H}_{N-k}(x_{N-k}, u_{N-k}) | z^{N-k}], \quad (7.22)$$

$$k = 1, 2, \dots, N,$$

де

$$\bar{H}_{N-k}(x_{N-k}, u_{N-k}) \stackrel{\Delta}{=} \int [W_{N-k}(x_{N-k+1}, u_{N-k}) + H_{N-k}(x_{N-k+1}, u_{N-k})] \times p(x_{N-k+1} | x^{N-k}, z^{N-k}, w_{N-k}) p(w_{N-k}) dx_{N-k+1} dw_{N-k};$$

$$H_{N-k}(x_{N-k+1}, u_{N-k}) \stackrel{\Delta}{=} \int \overline{H}_{N-k+1}(x_{N-k+1}, u_{N-k+1}^*) \times \\ \times p(z_{N-k+1} | x^{N-k+1}, z^{N-k}, u_{N-k+1}) p(v_{N-k+1}) dz_{N-k+1} dv_{N-k+1}$$

з початковими умовами $H_{N-1}(x_N, u_{N-1}) = 0$.

Рівняння (7.22) визначає послідовність вирішення завдань мінімізації для отримання оптимальної стратегії замкнутого керування. При цьому потрібне знання умовної апостеріорної функції щільності $p(x_k | z^k)$ на кожному кроці $k = 0, 1, \dots, N-1$.

7.3.2. Баєсівське рішення задачі фільтрації.

Рекурсивні співвідношення для апостеріорної щільності $p(x_k | z^k)$ можна отримати за допомогою правила Баєса. При цьому на кожному кроці

$$p(x_k, z^k) = \Psi_k p(x_k | z^{k-1}) p(z_k | x_k), \\ p(x_k | z^{k-1}) = \int p(x_k | x_{k-1}, u_{k-1}) p(x_{k-1} | z^{k-1}) dx_{k-1}, \quad (7.23)$$

де $1/\Psi_k = p(z^k | z^{k-1}) = \int p(x_k | z^{k-1}) p(z_k | x_k) dx_k$ і $p(x_0 | z^{-1}) \stackrel{\Delta}{=} p(x_0)$.

Рівняння (7.23) описують баєсівські рекурсивні співвідношення, де $p(x_0)$ позначає функцію щільності ймовірності для початкового стану і вважається відомою. Щільність $p(z_k | x_k)$ визначається за допомогою функції щільності для шумів вимірювань. Ґрунтуючись на припущенні про білий шум Гауса і рівняння (7.9), можна записати

$$p(z_k | x_k) = k_v \exp \left\{ -1/2 [z_k - h_k(x_k)]^T R_k^{-1} [z_k - h_k(x_k)] \right\},$$

де індекси « T » і « -1 » означають транспонування і обернення матриці, відповідно.

З рівняння (7.8) і припущення про те, що збурення є білим шумом Гауса, отримуємо наступний вираз для щільності:

$$p(x_k | x_{k-1}, u_{k-1}) = k_w \exp \left\{ -1/2 [x_k - f_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1})]^T Q_{k-1}^{-1} [x_k - f_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1})] \right\}.$$

Знаходження апостеріорної щільності $p(x_k | z^k)$ відповідно до рівнянь (7.23) і вирішення послідовності завдань мінімізації (7.22) дає дві основні складові, що входять в рішення задачі оптимального стохастичного керування. Щільність $p(x_k | z^k)$ містить всю інформацію про стан, отриману за наслідками вимірювань. Звідси можуть бути отримані будь-які види оцінок. Визначення $p(x_k | z^k)$ може розглядатися як якнайповніше можливе рішення задачі фільтрації.

7.4. Стратегії стохастичного керування

Початкові умови $p(x_0)$ визначаються для рівнянь (7.23), а кінцеві умови задаються для рівняння (7.22). Оптимальна стратегія керування виходить шляхом визначення $p(x_k | z^k)$ для всіх $k=0, 1, \dots, N-1$. Знаючи $p(x_{N-1} | z^{N-1})$, можна знайти u_{N-1}^* . Після цього в зворотному часі послідовно визначаються керування $u_{N-2}^*, u_{N-3}^*, \dots, u_0^*$, що вимагає визначення $p(x_k | z^k)$ у вигляді функції як x_k , так і z^k . За винятком лінійних гаусівських систем, щільність $p(x_k | z^k)$ важко або неможливо визначити аналітично. Отже, ця щільність повинна визначатися чисельними методами. Необхідність обчислення і запам'ятовування $p(x_k | z^k)$ для всіх k істотно ускладнює завдання.

Визначення оптимальної стратегії управління включає ряд підзадач, узагальнено представлених за допомогою рівнянь (7.22) і (7.23). Оптимальний стохастичний регулятор виконує як би два завдання. Основним завданням є, природно, необхідне керування системою. Вхідні сигнали, що крім того керують, створюють ефект «навчання» щодо стану системи. Під навчанням тут розуміється те, що вхідна послідовність впливає на форму апостеріорної функції

щільності. Цей вплив обумовлений залежністю других статистичних моментів і моментів вищого порядку від вхідної послідовності.

Для досягнення мети керування стохастичний регулятор повинен враховувати невизначеність знання вектора стану. При великій невизначеності вектора стану може виявитися, що необхідно прикладати малі керуючі дії (тобто проявляти «обережність»). Якщо, проте, вхідний сигнал може впливати на невизначеність вектора стану, то бажано використовувати стратегію керування, що зменшує невизначеність вектора стану, щоб якісніше виконати завдання керування (тобто здійснювати зондування).

Послідовність керування приводить до навчання не в усіх системах. Система називається *нейтральною*, коли послідовність вхідних сигналів не робить впливу на невизначеність стану.

7.4.1. Лінійні системи з квадратичним критерієм якості.

Розглянемо систему, в якій об'єкт описується лінійним різницеvim рівнянням:

$$x_k = \Phi_{k,k-1}x_{k-1} + \Gamma_{k,k-1}u_{k-1} + w_{k-1}. \quad (7.24)$$

У кожен дискретний момент часу стан спостерігається за наслідками вимірювань з шумом, що описуються рівнянням

$$z_k = H_k x_k + v_k. \quad (7.25)$$

Для кожного моменту приймається, що послідовності шумів w_k і v_k мають нульове середнє, є білими з коваріаційними матрицями:

$$E[w_k w_j^T] = Q_k \delta_{kj}, \quad E[v_k v_j^T] = R_k \delta_{kj}.$$

Ці послідовності вважаються взаємно незалежними і не залежними від початкового стану x_0 , який приймається з середнім μ і коваріацією M_0 .

Використовуватимемо квадратичний критерій якості

$$J_0 = E \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1}^T A_{i+1} x_{i+1} + u_i^T B_i u_i) \right\}, \quad (7.26)$$

де вагові матриці A_i позитивні і напіввизначені. У припущенні про існування закону керування, вагові матриці керування B_i приймаються позитивно визначеними. Відзначимо, що основною причиною, що обумовлює широке застосування квадратичного критерію якості, є його зручність для аналітичних досліджень.

7.4.2. Лінійна рекурсивна фільтрація.

Оскільки система (7.24) лінійна, а початковий стан і вхідні шуми гаусівські, то її стан у будь-який момент часу теж є гаусівським. Крім того, якщо врахувати характер завад і припустити лінійність рівняння (7.25), то можна вимірювання теж вважати гаусівським для всіх k . Звідси витікає, що умовна апостеріорна щільність $p(x_k | z^k)$ є гаусівською для всіх k і може бути виражена через середнє значення $\hat{x}_{k|k}$ і коваріаційну матрицю $P_{k|k}$.

Ці статистики визначаються рівняннями фільтра Кальмана:

$$\hat{x}_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1|k-1} + \Gamma_{k,k-1} u_{k-1}; \quad (7.27a)$$

$$\hat{x}_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k [z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}], \quad (7.27b)$$

де

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T [H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k]^{-1},$$

$$P_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} P_{k-1|k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1},$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k H_k P_{k|k-1},$$

а початковими умовами є $\hat{x}_{0|-1} = \mu_0$, $P_{0|-1} = M_0$.

Рівняння (7.27) описують середнє, коваріацію і, отже, функцію апостеріорної щільності для системи, відповідної рівнянням (7.24) – (7.25). Аналіз коваріаційних матриць показує, що система нейтральна. Цей вивід можна зробити на тій підставі, що коваріація не залежить від вимірювань і, отже, від керованих входів. Тому стратегія гаусівським не впливає на форму апостеріорної щільності й не може привести ні до якого навчання.

7.4.3. Оптимальна стратегія замкнутого стохастичного керування.

Скористаємося принципом *достовірної (стохастичної) еквівалентності* і визначимо достовірно еквівалентну стратегію керування. Для цього замінимо випадкові змінні в рівнянні (7.24) на їх середні значення і розглянемо наступне детерміноване завдання керування: необхідно вибрати керування u_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$, які мінімізують квадратичний критерій якості

$$J_0 = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1}^T A_{i+1} x_{i+1} + u_i^T B_i u_i)$$

при обмеженнях

$$x_k = \Phi_{k,k-1} x_{k-1} + \Gamma_{k,k-1} u_{k-1}.$$

Оптимальна стратегія керування для цього випадку описується рівнянням:

$$u_k = -\Lambda_{k+1} \Phi_{k+1,k} x_k, \quad (7.28)$$

де

$$\Lambda_{k+1} = (\Gamma_{k+1,k}^T \Pi_{k|k+1} \Gamma_{k+1,k} + B_k)^{-1} \Gamma_{k+1,k}^T \Pi_{k|k+1},$$

$$\Pi_{k|k+1} = \Phi_{k+1,k}^T \Pi_{k+1|k+1} \Phi_{k+1,k} + A_k,$$

$$\Pi_{N-1|N} = A_N.$$

Достовірно еквівалентний регулятор виходить шляхом використання в рівнянні (7.28) замість стану x_k оцінок $x_{k|k}$, отриманих методом мінімальної середньоквадратичної похибки.

Розглянемо тепер завдання визначення стратегії керування, яка мінімізує критерій якості (7.26) при обмеженнях вигляду (7.24) і (7.25). Рішення може бути отримане з використанням виразу (7.22). Керування для кінцевого кроку виходить шляхом формування:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{N-1} = \int & (x_N^T A_N x_N + u_{N-1}^T B_{N-1} u_{N-1}) \delta(x_N - \Phi_{N,N-1} x_{N-1} - \\ & - \Gamma_{N,N-1} u_{N-1} - w_{N-1}) p(w_{N-1}) dx_N dw_{N-1}. \end{aligned}$$

Після інтеграція, можна отримати вираз:

$$\begin{aligned}\bar{H}_{N-1} &= x_{N-1}^T \Phi_{N,N-1}^T A_N \Phi_{N,N-1} x_{N-1} + 2x_{N-1}^T \Phi_{N,N-1}^T A_N \Gamma_{N,N-1} u_{N-1} + \\ &+ u_{N-1}^T (B_{N-1} + \Gamma_{N,N-1}^T A_N \Gamma_{N,N-1}) u_{N-1} + \text{tr}[A_N Q_{N-1}].\end{aligned}$$

Керування вибирається таким чином, щоб мінімізувати умовне очікування \bar{H}_N :

$$\begin{aligned}E[\bar{H}_{N-1} | z^{N-1}] &= E[x_{N-1}^T \Phi_{N,N-1}^T A_N \Phi_{N,N-1} x_{N-1} | z^{N-1}] + \\ &+ 2u_{N-1}^T \Gamma_{N,N-1}^T A_N \Gamma_{N,N-1} \hat{x}_{N-1|N-1} + u_{N-1}^T (B_{N-1} + \\ &+ \Gamma_{N,N-1}^T A_N \Gamma_{N,N-1}) u_{N-1} + \text{tr}[A_N Q_{N-1}].\end{aligned}\quad (7.29)$$

Рівняння (7.29) отримане з урахуванням рівності $\hat{x}_{N-1|N-1} \stackrel{\Delta}{=} E[x_{N-1} | z^{N-1}]$.

Перший і останній члени правої частини рівняння (7.29) не включають керування. Таким чином, воно мінімізується за рахунок двох середніх членів. Тоді

$$\begin{aligned}u_{N-1}^* &\stackrel{\Delta}{=} (\Gamma_{N,N-1}^T A_N \Gamma_{N,N-1} + B_{N-1})^{-1} \Gamma_{N,N-1}^T A_N \Phi_{N,N-1} \hat{x}_{N-1|N-1} \stackrel{\Delta}{=} \\ &\stackrel{\Delta}{=} -\Lambda_N \Phi_{N,N-1} \hat{x}_{N-1|N-1}.\end{aligned}$$

Тут матриця Λ_N визначається рівнянням (7.28).

Отриманий результат показує, що на останньому кроці оптимальна стратегія замкнутого стохастичного керування відповідає стратегії керування, отриманій за допомогою принципу достовірної еквівалентності.

Стратегія оптимального замкнутого стохастичного керування для лінійної системи, що описується рівняннями (7.24)-(7.25), і квадратичного критерію якості (7.26) ідентична стратегії достовірно еквівалентного регулятора. Цей результат відомий під назвою «теорема розділення для стохастичного керування».

Розглянемо характеристики нейтральності і достовірної еквівалентності. Нейтральність системи пов'язана тільки з наявністю або відсутністю впливу керування на оцінку стану незалежно від характеристик регулятора. Система володіє *властивістю достовірної еквівалентності*, коли оптимальна стратегія замкнутого стохастичного керування має ту ж структуру, що і в еквівалентному

детермінованому завданні. Таким чином, якщо стратегія замкнутого детермінованого керування відповідає виразу

$$u_k = \phi_k(x_k),$$

то система достовірно еквівалентна, коли стратегія оптимального замкнутого стохастичного керування для неї описується виразом

$$u_k = \phi_k(\hat{x}_{k|k}),$$

де $\hat{x}_{k|k}$ – оцінка стану x_k , отримана по даним z_k методом мінімальної середньоквадратичної похибки.

Цей закон керування не пов'язаний із статистичними моментами другого порядку для випадкових змінних в стохастичному завданні керування.

Для нейтральної і достовірно еквівалентної системи характерні наступні особливості:

1. Об'єкт лінійний і описується рівнянням (7.24).
2. Збурення, що діють на об'єкт, є гаусівськими.
3. Збурення, що діють на об'єкт, є білим шумом і не залежать від шумів у вимірюваннях.
4. Процес вимірювань описується лінійним рівнянням (7.25).
5. Шуми у вимірюваннях є білими, гаусівськими.
6. Функція вартості керування є квадратичною згідно рівняння (7.26).
7. Кінцевий час фіксований.

Деякі з цих умов можуть бути ослаблені. Наприклад, доведено, що шуми і збурення можуть мати довільний розподіл. Крім того, шуми у вимірюваннях не обов'язково повинні бути білими. Таким чином, достовірна еквівалентність властива тільки системам, задовольняючим умовам (1), (3), (4), (6) і (7).

Контрольні запитання

1. Наведіть моделі випадкових сигналів у САК.
2. У чому полягає фільтрація завад?

3. Розкрийте суть фільтра Вінера-Колмогорова.
4. Сформулюйте задачу стохастичного керування та структуру його САК.
5. Які основні класи стратегій стохастичного керування?
6. Розкрийте загальне рішення задачі оптимального стохастичного керування.
7. Розкрийте стратегію стохастичного лінійного керування і фільтрації.
8. Яка оптимальна стратегія замкненого стохастичного керування?

Глава 8. КЕРОВАНІСТЬ, СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЬ ТА ІДЕНТИФІКОВАНІСТЬ СИСТЕМ

Властивості керованості, спостережуваності та ідентифікованості є одними з основних понять теорії керування. Ці властивості вельми істотні для побудови працездатних САК. При цьому важливим є завдання вибору керуючих дій, що виходять з різних вимог, які пред'являються до таких систем.

8.1 Керованість лінійних нестационарних систем

8.1.1. Гільбертові простори.

Завдання, що розглядаються у даному пункті, достатньо ефективно і наочно вирішуються методами теорії гільбертових просторів, тому тут доречно визначитися з відповідною термінологією і стандартними позначеннями.

Нехай H — дійсний гільбертовий простір. Як один з прикладів такого простору надалі розглядається простір $L_2^r(0, T)$ вектор-функцій $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_r(t)\}$, $0 < t < T$, елементи $u_i(t)$, $i = 1, \dots, r$, яких підсумовуються зі своїми квадратами. Скалярний добуток і норма в ньому визначаються формулами

$$(u, v) = \int_0^T \sum_{i=1}^r u_i(t)v_i(t)dt, \quad \|u\|^2 = \int_0^T \sum_{i=1}^r u_i^2(t)dt,$$

де інтеграл розуміється в сенсі Лебега. Інші приклади гільбертових просторів, які використовуються надалі, вводяться за допомогою позитивних операторів. Вони є енергетичними (фізичними) просторами цих операторів.

Як відомо з теорії варіаційного числення, лінійний оператор A , що діє з H в H , є позитивним, якщо:

- 1) область його визначення Δ_A щільна в H ;
- 2) він симетричний, тобто $(Au, v) = (u, Av)$ для будь-яких u і v з Δ_A ;

3) справедлива нерівність $(Au, v) \geq 0$ при будь-якому u з Δ_A , причому рівність має місце лише на нульовому елементі.

Якщо, крім того, існує постійна $\gamma > 0$ така, що $(Au, u) \geq \|u\|^2$ для всіх u з Δ_A , то оператор A називається *позитивно визначеним*.

Згідно визначенню під енергетичним простором H_A оператора A розуміється простір, що складається з елементів $u \in \Delta_A$ і елементів, що отримуються поповненням Δ_A на основі метрики, яка визначається скалярним добутком $[u, v] = (Au, v)$, $u, v \in \Delta_A$.

Цей простір є гільбертовим і він вкладений в H .

Приклад 10.1. За H візьмемо $L_2^r(0, T)$ і нехай $Q(t)$ — неперервна симетрична позитивна матриця з елементами $q_{ij}(t)$, $i, j = 1, \dots, r$. Позитивність розуміється в тому сенсі, що

$$\alpha^* Q(t) \alpha > 0, \quad 0 < t < T \quad (8.1)$$

для будь-якого вектора $\alpha \in E^r$, $\|\alpha\| > 0$.

Тоді матриця $Q(t)$ визначає оператор Q , який відображає елементи $L_2^r(0, T)$ у елементи того ж простору по формулі $v(t) = Q(t)u(t)$.

Очевидно, що область його визначення Δ_Q співпадає зі всім простором $L_2^r(0, T)$, причому

$$\begin{cases} (Qu, v) = (u, Qv) = \int_0^T u^*(t) Q(t) v(t) dt = \int_0^T v^*(t) Q(t) u(t) dt, \\ (Qu, u) = \int_0^T u^*(t) Q(t) u(t) dt > 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

Нерівність в (8.2) виходить з (8.1).

Таким чином, оператор Q є позитивним. Відповідний йому енергетичний простір H_Q складається з вектор-функцій $u(t)$, для яких

$$\int_0^T u^*(t) Q(t) u(t) dt < \infty,$$

де інтеграл розуміється в сенсі Лебега. Скалярний добуток і норма в H_Q визначаються формулами

$$[u, v] = \int_0^T u^*(t)Q(t)v(t)dt, \quad [u]^2 = \int_0^T u^*(t)Q(t)u(t)dt.$$

Оскільки матриця $Q(t)$ неперервна, то існує постійна c_1 така, що

$$\int_0^T u^*(t)Q(t)v(t)dt \leq c_1 \int_0^T u^*(t)u(t)dt.$$

Звідси, зокрема, витікає, що якщо $u \in L_2^r(0, T)$, то елемент u також належить енергетичному простору H_Q . Якщо, крім того, можна вказати постійну c_0 таку, що

$$c_0 \int_0^T u^*(t)u(t)dt \leq \int_0^T u^*(t)Q(t)u(t)dt,$$

той простір H_Q буде еквівалентний простору $L_2^r(0, T)$, бо в цьому випадку з належності u простору H_Q витікає, що $u \in L_2^r(0, T)$.

Однією з основних властивостей гільбертових просторів, які широко використовуються, є властивість, визначувана наступною теоремою.

Теорема Леві. Якщо M — повний підпростір в H , то для будь-якого елемента $x \in H$ існує однозначне представлення $x = y + z$, де $y \in M$, а z ортогональне M . При цьому очевидно, що $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

Друге твердження, що відноситься до гільбертових просторів і представляє для нас особливий інтерес, полягає в наступному.

Теорема Рісса. Лінійний обмежений функціонал f , визначений на всьому гільбертовому просторі H , однозначно може бути представлено у вигляді

$$f(x) = (u, x),$$

де елемент $u \in H$ однозначно визначається функціоналом f .

8.1.2. Керованість.

Розглядатимемо керовану систему, поведінка якої описується лінійним диференціальним рівнянням

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t), \tag{8.3}$$

де $A(t)$ і $B(t)$ — неперервні матриці розмірності $n \times n$ і $n \times r$ відповідно, $f(t)$ — задана функція з $L_2^r(0, T)$, T — довільне, але фіксоване число.

Визначення 8.1. Система (8.3) називається *цілком керованою* на відрізку $[0, T]$, якщо для будь-яких векторів x^1 і x^2 з E^n можна вказати керування $u = u(t, x^1, x^2)$, $0 \leq t \leq T$ з $L_2^r(0, T)$ таке, що рішення $x(t)$ задачі Коші

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t, x^1, x^2) + f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0) = x^1,$$

у момент часу $t = T$ задовольняє умові $x(T) = x^2$.

У цьому визначенні не вказуються ніякі обмеження на керування $u(t, x^1, x^2)$, окрім його належності простору $L_2^r(0, T)$. У реальних задачах цього може опинитися недостатньо, бо внутрішні властивості таких систем часто приводять до необхідності вводити додаткові обмеження на допустимі керування. Зокрема, може бути потрібно, щоб допустиме керування приймало значення із заданої кулі $\|u\| \leq L$ або із заданого прямокутного паралелепіпеда $a_i \leq u_i \leq b_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, де L , a_i і b_i — заздалегідь вказані постійні.

Проте в обох випадках суть поняття повної керованості залишається однаковою. Цілком керована система (8.3) має ту властивість, що за допомогою відповідного *допустимого* керування її можна перевести з одного заданого стану в інший, також заданий стан. Аналогічним чином визначається поняття повної керованості для систем, що описуються різницевиими рівняннями або крайовими задачами для рівнянь в часткових похідних.

Функція $f(t)$, що входить в рівняння руху системи, не залежить від керування. Тому, вводячи нову змінну

$$y(t) = x - \varphi(t), \tag{8.4}$$

з рівняння (8.3) отримуємо $\dot{y} + \dot{\varphi} = A(t)y + B(t)u + A(t)\varphi + f(t)$. Вибираючи функцію $\varphi(t)$ так, щоб $\dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t) + f(t)$, $\varphi(0) = 0$, знаходимо, що заміною (8.4) рівняння (8.3) перетвориться до вигляду

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)u. \tag{8.5}$$

Тому, не обмежуючи спільності отримуваних результатів, можна досліджувати завдання про керованість для системи (8.5).

Повертаючись до колишніх позначень фазових змінних, розглянемо задачу Коші

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0) = x^1.$$

Як відомо, її рішення можна представити у вигляді

$$x(t) = W(t,0)x^1 + \int_0^t W(t,s)B(s)u(s)ds,$$

де $W(t,s)$ – матриця Коші рівняння $\dot{z} = A(t)z$. Для того, щоб це рішення задовольняло умові

$$x(T) = x^2,$$

необхідно і достатньо, щоб керування $u(t)$ задовольняло умові

$$\int_0^T W(T,s)B(s)u(s)ds = c, \quad (8.6)$$

де

$$c = x^2 - W(T,0)x^1.$$

Таким чином, отримуємо, що система (8.3) при $f(t) = 0$ цілком керована тоді і тільки тоді, коли для будь-якого вектора c з E^n можна вказати керування $u(t, z)$, що задовольняє умові (8.6).

Цей результат дозволяє за допомогою теореми Леві отримати необхідні і достатні умови повної керованості, що легко перевіряються. Для виведення цих умов введемо наступні позначення. Нехай $h_i(t)$ — i -й стовпець матриці $B^*(t)W^*(T,t)$; c_i — i -а компонента вектора c . Тоді співвідношення (10.6) можна записати у вигляді:

$$\int_0^T h_i^*(t)u(t)dt = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.7)$$

Цю рівність надалі називатимемо *моментними співвідношеннями*, а числа c_i — *моментами*.

Теорема 8.1. Для того, щоб система (8.3) при $f(t) = 0$ була цілком керованою на відрізку $[0, T]$, необхідно і достатньо, щоб вектор-функції $h_1(t), \dots, h_n(t)$ були лінійно незалежними на цьому відрізку.

Доказ. Нехай система (8.3) цілком керована на $[0, T]$ і, отже, для будь-яких x^1 і x^2 з E^n існує керування $u(t)$, що задовольняє моментним співвідношенням (8.7), тобто

$$\int_0^T h^*(t)u(t)dt = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Позначимо через M_h скінченномірний підпростір з $L_2(0, T)$, елементи якого $h(t)$ можуть бути представлені у вигляді

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i(t), \quad (8.8)$$

де $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — довільні постійні. Тоді відповідно до теореми Леві $u(t)$ можна представити у вигляді $u(t) = v(t) + w(t)$, $v(t) \in M_h$, $w(t) \perp M_h$.

З того, що $w(t) \perp M_h$, витікає, що

$$\int_0^T h_i^*(t)w(t)dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Враховуючи, що функція $v(t)$ може бути представлена у вигляді (8.8), отримуємо

$$\sum_{k=1}^n (h_i, h_k) \alpha_k = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.9)$$

Таким чином, приходимо до висновку: якщо x^1 і x^2 довільно вибрані з E^n (отже c_i також довільні) і існує відповідне ним керування $u(t)$, що задовольняє моментним співвідношенням (8.7), то проекція (8.8) цього керування на M_h визначається за допомогою постійних $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, які знаходяться з системи (8.9). Ця система має рішення при будь-яких c_i . Інакше при деяких x^1 і x^2 відсутня проекція (8.8) керування $u(t)$ на M_h , що неможливе через теорему Леві. Тому визначник системи (8.9) $\Delta = \det \left| (h_i, h_k) \right|$ відмінний від нуля. Оскільки Δ є ви-

значником Грама вектор-функцій h_1, \dots, h_n , то він відмінний від нуля тоді і тільки тоді, коли ці функції лінійно незалежні.

Доведемо тепер другу частину теореми. Припустимо, що вектор-функції h_1, \dots, h_n лінійно незалежні, і нехай x^1 і x^2 вибрані довільно, а значить, моменти c_1, \dots, c_n також довільні. Тоді керування $u(t)$, що задовольняє моментним співвідношенням (8.7), шукатимемо у вигляді

$$u(t) = v(t) + w(t), \quad v(t) \in M_h, \quad w(t) \perp M_h, \quad (8.10)$$

де M_h — введений вище скінченномірний підпростір з $L_2^r(0, T)$.

Підставляючи цю функцію в співвідношення (8.7), отримуємо систему рівнянь (8.8) для визначення постійних $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Ця система однозначно вирішувана, оскільки її визначник Δ відмінний від нуля (як визначник Грама лінійно незалежних вектор-функцій).

Таким чином, якщо система $h_1(t), \dots, h_n(t)$ лінійно незалежна на відрізку $[0, T]$, то моментні співвідношення (8.7) мають рішення, які можуть бути представлені у вигляді (8.10), причому функція $v(t)$ визначається по формулі (8.8), де $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ знаходяться з системи (10.9), $w(t)$ — довільна вектор-функція з простору $L_2^r(0, T)$, ортогональна M_h .

Підводячи підсумок наведеному аналізу, слід зазначити, що при рішенні питання про керованість динамічних систем викладеним методом її рівняння руху слід приводити до канонічної форми Коші. Для отримання умов повної керованості потрібно знаходити функції $h_1(t), \dots, h_n(t)$. Це можна зробити, використовуючи лише матрицю Коші $W(t, s)$. Умова лінійної незалежності системи функцій $h_1(t), \dots, h_n(t)$ означає, що її визначник Грама відмінний від нуля. Якщо врахувати, що вектор h_i є i -м стовпцем матриці $B^*(t)W^*(T, t)$, то легко показати, що визначник Грама є визначником матриці

$$\Phi = \int_0^T B^*(t)W^*(T, t)W(T, t)B(t)dt. \quad (8.11)$$

Тому теорему 8.2 можна сформулювати таким чином.

Теорема 8.2. Для того, щоб система (8.3) була цілком керованою на відрітку $[0, T]$ необхідно і достатньо, щоб визначник матриці (8.11) був відмінний від нуля, тобто щоб ця матриця була неособливою.

8.1.3. Область досяжності.

При вирішенні ряду важливих питань теорії керування велику роль грає поняття області досяжності, яке тісно пов'язане з поняттям керованості.

Розглядатимемо процес, що описується рівнянням (8.5) з початковою умовою

$$y(0) = 0. \quad (8.12)$$

Допустимими керуваннями вважатимемо функції $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ з деякої множини D_u . Вона зазвичай визначається конкретним (фізичним, інженерним тощо) змістом задачі, а математично зазвичай описується за допомогою нерівностей. Наприклад, якщо допустимими є функції $u(t) \in L_2^r(0, T)$, то множина D_u може бути задано нерівністю

$$\|u\|_{L_2^r} \leq L,$$

де L — деяка постійна.

Надалі припускатимемо, що D_u задовольняє наступним умовам.

По-перше, кожна функція $u(t) \in D_u$ однозначно визначає неперервне рішення $y = y(t)$ завдання (8.5), 8.12):

$$y(t) = \int_0^t W(t, s) B(s) u(s) ds. \quad (8.13)$$

По-друге, кожна функція $u(t) \in D_u$ співвідношеннями

$$f(h_i) = \int_0^T h_i^*(t) u(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.14)$$

визначає лінійний обмежений функціонал f , заданий на лінеалі L_h : $\alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n$, що належить деякому повному лінійному нормованому простору X_h і, отже $f \in X_h^*$.

Визначення 8.2. Множиною досяжності керованої системи (8.5) з початковою умовою (8.12) називається множина всіх $y \in E^n$, для кожної з яких існує керування $u(t) \in D_u$, $0 \leq t \leq T$, таке, що відповідна їй функція (8.13) задовольняє умові

$$y(T) = y.$$

Ясно, що аналогічне визначення можна сформулювати і у тому випадку, коли процес описується нелінійним рівнянням $\dot{y} = f(t, y, u)$. Проте для лінійної системи можна довести чудову властивість області досяжності.

Теорема 8.3. Якщо D_u — опукла замкнута множина повного лінійного метричного простору X_h , що задовольняє вказаним вище двом умовам, то множина досяжності замкнута і опукла в E^n .

Доказ. Нехай $u^1(t)$ і $u^2(t)$ — два допустимі керування, а y^1 і y^2 — відповідні ним точки з E^n , визначувані співвідношенням (8.14), тобто

$$y^i = y^i(T) = \int_0^T W(T, t)B(t)u^i(t)dt, \quad i = 1, 2.$$

Оскільки D_u є опуклою множиною, то очевидно, що керування $u_\lambda(t) = \lambda u^1(t) + (1 - \lambda)u^2(t)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ також належить D_u і, згідно формулі (8.13), можна записати

$$\begin{aligned} y_\lambda(t) &= \int_0^T W(T, t)B(t)u_\lambda(t)dt = \\ &= \lambda \int_0^T W(T, t)B(t)u^1(t)dt + (1 - \lambda) \int_0^T W(T, t)B(t)u^2(t)dt. \end{aligned}$$

Отже $y_\lambda(T) = \lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2$. Це означає, що множина досяжності опукла. Доведемо тепер його замкнутість.

Нехай елементи послідовності, що сходиться $\{y^n\}$, належать області досяжності, тобто існує послідовність $\{u^n(t)\}$ елементів з D_u таких, що

$$y^n = \int_0^T W(T, t)B(t)u^n(t)dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.15)$$

Нехай, далі $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y^n$. Оскільки

$$y = \{y_1, \dots, y_n\} \in E^n, \quad y^k = \{y_1^k, \dots, y_n^k\} \in E^n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

то можна записати

$$y_i = \lim_{k \rightarrow \infty} y_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.16)$$

Тому k -е співвідношення з (8.15) можна записати у вигляді

$$y_i^k = \int_0^T h_i^*(t) u^k(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Вирази в правих частинах цих формул можна розглядати як значення лінійних обмежених функціоналів f^k на функціях $h_i(t)$. Ці функціонали, очевидно, визначені на лінійній оболонці Δ_h функцій $h_1(t), \dots, h_n(t)$, а їх норми визначаються формулою $\|f^k\| = \|u^k\|_{x_k^*}$. Згідно теореми Хана-Банаха кожен з цих функціоналів можна продовжити на весь простір X_h із збереженням норми. Виконавши цю операцію, збережемо колишні позначення f^k для продовжених функціоналів. З того, що справедлива рівність (8.16), слідує існування слабкої межі f послідовності $\{f^k\}$ такої, що $f(h_i) = y_i$.

Залишається показати, що з послідовності $\{u^k\}$ можна вибрати підпослідовність u^{k_j} таку, що

$$y_i = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^T h_i^* u^{k_j}(t) dt = \int_0^T h_i^*(t) u(t) dt,$$

де $u(t) \in D_u$.

Цей факт доводиться з використанням властивості слабкої бікомпактності множини.

8.1.4. Критерії керованості.

Викладені вище результати по повній керованості дають умови, при виконанні яких керовану систему можна перевести в будь-який заздалегідь заданий стан. Проте, при розгляді конкретних систем це питання доводиться розглядати в декілька іншій площині. Задані початковий і кінцевий стани x^1 і x^2 керованої системи. Нас може не цікавити цілком керована система чи ні. У

цьому конкретному випадку нас цікавить, можна або не можна перевести систему x^1 у x^2 і, отже, бажано мати критерій керованості.

Розглядатимемо систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8.17)$$

у якої матриці $A(t)$ і $B(t)$ неперервні. Введемо заміну, поклавши

$$z = W(t_0, t)x, \quad (8.18)$$

де $W(t, s)$ — матриця Коші рівняння

$$\dot{y} = A(t)y. \quad (8.19)$$

Матрицю Коші можна представити у вигляді

$$W(t, s) = Y(t)Y^{-1}(s),$$

де $Y(t)$ — матриця лінійно незалежних рішень рівняння (8.19). Тому з (8.18) знаходимо, що $x = W(t, t_0)z$ і, отже

$$\dot{x} = \frac{dW(t, t_0)}{dt}z + W(t, t_0)\dot{z} = A(t)W(t, t_0)z + W(t, t_0)\dot{z}.$$

З урахуванням рівняння (8.17) звідси отримуємо

$$A(t)W(t, t_0)z + W(t, t_0)\dot{z} = A(t)x + B(t)u.$$

Перші доданки в лівій і правій частинах отриманого співвідношення взаємно знищуються і ми отримуємо рівняння відносно z :

$$\dot{z} = B_1(t)u, \quad B_1(t) = W(t, t_0)B(t). \quad (8.20)$$

Теорема 8.4. Керування $u(t)$, яке переводить систему (8.19) із стану z^1 при $t = t_0 \geq 0$ у стан z^2 при $t = t_1$, $t_0 < t_1 \leq T$, існує тоді і тільки тоді, коли вектор $z^2 - z^1$ лежить в області значень лінійного перетворення

$$\Phi_0(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} B_1(t)B_1^*(t)dt. \quad (8.21)$$

При цьому одне з керувань, що здійснюють цей перевод, має вигляд

$$u(t) = B_1^*(t)z, \quad (8.22)$$

де z — будь-яке рішення рівняння

$$\Phi_0(t_1, t_0)z = z^2 - z^1. \quad (10.23)$$

Доказ. Достатність. Нехай вектор $z^2 - z^1$ знаходиться в області значень оператора (8.21). Тоді існує вектор z (не обов'язково єдиний), що задовольняє рівнянню (8.23). Визначивши керування $u(t)$ по формулі (8.22), отримаємо

$$\int_{t_0}^{t_1} B_1(t)u(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} B_1(t)B_1^*(t)zdt.$$

Отже, з рівняння (8.20) матимемо

$$z(t_1) - z(t_0) = z(t_1) - z^1 = \int_{t_0}^{t_1} B_1(t)B^*(t)zdt.$$

З урахуванням формули (8.21) звідси отримуємо $\Phi_0(t_1, t_0)z = z(t_1) - z^1$. Оскільки вектор z визначається з рівняння (8.23), то з цієї рівності виходить, що $z(t_1) = z^2$, тобто керування (8.22) переводить систему із стану z^1 при $t = t_0$, у стан z^2 при $t = t_1$.

Необхідність. Нехай існує керування $u^0(t)$, що переводить систему із стану z^1 у стан z^2 . Підставляючи його в рівняння (8.20) і інтегруючи отриманий результат, матимемо

$$\int_{t_0}^{t_1} B(t)u^0(t)dt = z^2 - z^1. \quad (8.24)$$

Інтеграл, що стоїть в лівій частині цієї рівності, розглянемо як значення лінійного оператора

$$L(u) = \int_{t_0}^{t_1} B(t)u(t)dt,$$

що відображає простір $L_2^r(t_1, t_0)$ r -мірних функцій $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_r(t)\}$ у евклідовий простір E^n . У $L_2^r(t_1, t_0)$ виділимо підпростір H функцій $v(t)$, яких можна представити у вигляді $v(t) = B^*(t)z$, де z — довільний вектор з E^r . Тоді, згідно теореми Леві, керування $u^0(t)$ можна представити у вигляді

$$u^0(t) = B^*(t)g(t)dt = 0, \quad (8.25)$$

де $z^0 \in E^r$, а $g(t) \perp H$.

Із співвідношень (8.24) і (8.25) отримуємо

$$\int_{t_0}^{t_1} B^*(t)B(t)dtz^0 = z^2 - z^1,$$

і, згідно формулі (8.21), вектор $z^2 - z^1$ належить області значень перетворення $\Phi(t_0, t_1)$. Теорема доведена.

Теорема 8.5 (критерій керованості). Керування $u^(t)$, що переводить систему (8.17) із стану x^1 при $t = t_0$ у стан x^2 при $t = t_1$, існує тоді і тільки тоді, коли вектор $\theta(x^0, x^1) = x^1 - W(t_1, t_2)x^0$ належить області значень перетворення*

$$\Phi(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} [W(t_1, t)B(t)B^*(t)W^*(t_0, t)] dt. \quad (8.26)$$

Більш того, якщо x^ — рішення рівняння*

$$\Phi(t_1, t_0)x = \theta(x^0, x^1), \quad (8.27)$$

то $u^(t)$ задається формулою*

$$u^*(t) = -B^*(t)B(t)x^*. \quad (8.28)$$

Доказ. Застосовуючи перетворення (8.18), систему (8.17) приводимо до вигляду (8.20) і застосовуємо теорему 8.4. Згідно визначенню матриці $B_1(t)$ (див. (8.20)), перетворення (8.21) можна представити у вигляді

$$\Phi_0(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} W(t_0, t)B(t)B^*(t)W^*(t, t_0)dt,$$

і, отже, вона співпадає з матрицею (8.26): $\Phi_0(t_1, t_0) = \Phi(t_1, t_0)$. Залишається показати, що керування (8.28) переводить систему з x^1 у x^2 . Підставляючи його в рівняння (8.17), по формулі Коші знаходимо, що

$$x(t) = W(t, t_0)x^1 - \int_{t_0}^t W(t, s)B(s)B^*(s)W^*(t_0, s)x^* ds. \quad (8.29)$$

Матриця $W(t, s)$ може бути представлена у вигляді $W(t, s) = Y(t)Y^{-1}(s)$, де $Y(t)$ є матриця лінійно незалежних рішень рівняння (8.19). Тому $W(t, s) = W(t, t_0)W(t_0, s)$ і формулу (8.29) можна представити у вигляді:

$$x(t) = W(t, t_0) \left[x^1 + \int_{t_0}^t W(t_0, s)B(s)B^*(s)W^*(t_0, s)x^* ds \right].$$

Оскільки $W^{-1}(t, s) = W(s, t)$, то звідси отримуємо при $t = t_1$

$$\Phi(t_1, t_0)x^* = x^1 - W(t_1, t_0)x^0(t_1).$$

По умові x^* — рішення рівняння (8.27). Тому $x(t_1) = x_2$, і теорема повністю доведена.

На закінчення відзначимо, що з цього критерію керованості витікає *необхідна і достатня* умова, при якій система (8.23) цілком керована на відріжку $[t_0, t_1]$. Воно полягає в тому, що $\text{rank}\Phi(t_0, t_1) = r$, і відрізняється від умов, вказаних в теоремі 8.1. Проте ця відмінність лише формальна, оскільки і в тому, і в іншому випадку вказані необхідні і достатні умови. Разом з тим, кожна з теорем 8.1 і 8.5 має свої важливі наслідки і вони пов'язані зі своїми підходами до рішення задачі про керованість.

Теорема 8.1 заснована на геометричному аналізі задачі з використанням апарату функціонального аналізу. Спосіб її доказу дозволяє досить просто отримати алгебраїчний критерій керованості лінійних стаціонарних систем. Теорема 8.5 заснована на більш загальних міркуваннях і служить основою для рішення задачі синтезу оптимального керування, що переводить систему з одного заданого стану в інший, також заздалегідь заданий стан.

8.1.5. Рішення задачі досяжності за допомогою лінійного зворотного зв'язку.

Розглядаючи завдання досяжності для лінійних систем, ми будували програмне керування у вигляді $u = u(t)$. На практиці, проте, часто доводиться вирішувати ту ж задачу, але керування потрібно вибирати у формі $u = u(t, x)$, де x — стан системи в той же момент часу t .

Говоритимемо, що *стан x^2 системи (8.17) досяжно у момент часу $t = t_1$ з початкового стану $x(t_0) = x^1$ за допомогою лінійного зворотного зв'язку, якщо існує матриця $K(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, така, що керування $u = K(t)x$ визначає рішення $x(t)$ задачі Коші*

$$\dot{x} = [A(t) + B(t)K(t)]x, \quad x(t_0) = x^1,$$

що задовольняє умові $x(t_1) = x^2$.

Для побудови такого типу керування нам буде потрібна псевдозворотна матриця.

У разі, коли Φ — неособлива квадратна матриця, для неї завжди існує зворотна матриця Φ^{-1} . Якщо ж Φ — прямокутна або особлива квадратна матриця, то вона не має зворотної матриці, і символ Φ^{-1} в цьому випадку втрачає сенс. Проте для таких матриць можна побудувати так звану псевдозворотну матрицю Φ^+ , яка володіє рядом властивостей зворотної матриці і має ряд важливих застосувань в алгебрі і її різноманітних застосуваннях. Нам її буде потрібно у вирішенні деяких завдань керування.

Нехай Φ — деяка матриця розмірності $m \times n$ рангу r . Говорять, що дано *каркасне розкладання* матриці Φ , якщо вказані матриці $B = \{b_{ik}\}$ і $C = \{c_{kj}\}$ розмірностей $m \times r$ і $r \times n$ відповідно такі, що

$$\Phi = BC. \quad (8.30)$$

При практичному розкладанні Φ як стовпці матриці B рекомендується брати будь-які лінійно незалежні вектори. Тоді довільний стовпець матриці Φ буде лінійною комбінацією стовпців матриці B з коефіцієнтами, які є елементами матриці C . Так як кожна з матриць B і C має максимально високий ранг, то кожна з матриць B^*v і C^*c є неособливою.

Розглянемо рівняння

$$\Phi X \Phi = \Phi. \quad (8.31)$$

Якщо Φ — неособлива квадратна матриця, то єдиним рішенням цього рівняння є матриця $X = \Phi^{-1}$. У разі, коли Φ — довільна матриця розмірності $m \times n$, шукана матриця X повинна мати розмірність $n \times n$. У загальному випадку таких рішень може опинитися незліченна множина. Проте серед них існує тільки одне $X = \Phi$, що володіє тією властивістю, що її рядки і стовпці є лінійними комбінаціями рядків і стовпців зв'язаної матриці Φ^* . Саме це рішення називають *псевдозворотною матрицею* для Φ і позначають через Φ^+ .

Отже, за визначенням матрицю Φ^+ розмірності $n \times n$ називають *псевдозворотною* до матриці Φ , якщо:

$$1) \Phi\Phi^+\Phi = \Phi;$$

2) існують матриці U і V такі, що

$$\Phi^+ = U\Phi^* = \Phi^*V. \quad (8.32)$$

Практичний спосіб побудови псевдозворотної матриці Φ^+ полягає в наступному.

Спочатку потрібно знайти скелетне розкладання матриці Φ по формулі (8.30). Потім за допомогою знайдених матриць B і C будується псевдозворотна матриця по формулі

$$\Phi^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*. \quad (8.33)$$

Легко перевіряється, що побудована таким чином матриця Φ^+ дійсно є рішенням рівняння (8.31) і допускає представлення у вигляді (8.32). При цьому

$$\begin{cases} U = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}C; \\ V = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(BB^*)^{-1}B^*. \end{cases}$$

Безпосередньою перевіркою встановлюються наступні прості властивості псевдозворотної матриці:

$$1) (\Phi^*)^+ = (\Phi^+)^*;$$

$$2) (\Phi^+)^+ = \Phi^*;$$

$$3) (\Phi\Phi^+)^* = \Phi\Phi^+, \quad (\Phi\Phi^+)^2 = \Phi\Phi^+;$$

$$4) (\Phi^+\Phi)^* = \Phi^+\Phi, \quad (\Phi^+\Phi)^2 = \Phi^+\Phi.$$

У додатках, зокрема, в задачах керування, найбільший інтерес представляє роль псевдозворотної матриці при вирішенні рівняння

$$\Phi x = y. \quad (8.34)$$

Якщо Φ — прямокутна або особлива квадратна матриця, то це рівняння, взагалі кажучи, не має точного рішення.

Вектор x_0 називається якнайкращим наближеним рішенням рівняння (8.34), якщо:

1) квадратична форма

$$\|y - \Phi x\|^2 = \sum_{i=1}^n \left[y_i - \sum_{k=1}^m \Phi_{ik} x_k \right]^2$$

досягає свого найменшого значення при $x = x_0$;

2) вектор x_0 має найменшу довжину серед всіх векторів, що мінімізують величину $\|y - \Phi x\|$ і визначається по формулі $x_0 = \Phi^+ y$.

На закінчення відзначимо, що Φ^+ є якнайкращим наближеним рішенням матричного рівняння

$$\Phi X = E, \quad (8.35)$$

де E — одинична матриця.

Повертаючись до задач керування, доведемо наступну важливу теорему.

Теорема 8.6. Якщо система (8.17) така, що матриця $\Phi(t_0, t)$ (див. формулу (8.26)) є неособливою при всіх $t \in [t_0, t_1)$, то керування

$$u(t, x) = -B^*(t)\Phi^{-1}(t_1, t)x \quad (8.36)$$

переводить систему із стану x^1 при $t = t_0 \geq 0$ у стан $x^2 = 0$ при $t = t_1$ ($t_0 < t_1 \leq T$).

Доказ. Для цього ствердження досить показати, що керування (8.36) є всього лише іншою формою представлення керування (8.28), в якому x^* — рішення рівняння (8.27) при $x^2 = 0$.

Позначимо його через $u^0(t, x)$, тобто покладемо

$$u^0(t, x) = -B^*(t)W^*(t_0, t)x^0, \quad (8.37)$$

де x^0 — рішення рівняння

$$\Phi(t_1, t_0)x^0 = x^1. \quad (8.38)$$

Відповідна цьому керуванню траєкторія $x = x^0(t)$ рівняння (8.17) визначається по формулі Коші

$$x^0(t) = W(t, t_0) \left[x^1 - \int_{t_0}^t W(t_0, s) B(s) B^*(s) W^*(t_0, s) x^0 ds \right], \quad (8.39)$$

або, що те ж саме

$$x^0(t) = W(t, t_0) \left[x^1 - \Phi(t, t_0) x^0 \right].$$

Маємо

$$\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t, t_0) + \Phi_1(t_1, t),$$

де

$$\Phi_1(t_1, t) = \int_t^{t_1} W(t_0, s) B(s) B^*(t) W^*(t_0, s) ds.$$

Враховуючи, що $W(t_0, t) = W(t_0, s)W(s, t)$, отримуємо

$$\Phi_1(t_1, t) = W(t_0, t) \Phi(t_1, t_0) W^*(t_0, t)$$

і, отже $\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t, t_0) + W(t_0, t) \Phi(t_1, t) W^*(t_0, t)$. Тому формулу (8.39) можна записати у вигляді

$$x^0(t) = W(t_0, t) \left[x^1 - \Phi(t_1, t_0) x^0 + W(t_0, t) \Phi(t_1, t) W^*(t_0, t) x^0 \right].$$

Оскільки x^0 — рішення рівняння (10.38), остаточно отримуємо формулу

$$x^0(t) = \Phi(t_1, t) W^*(t_0, t) x^0, \quad (8.40)$$

що визначає траєкторію рівняння (8.17) при керування (8.35).

Обчислимо тепер керування (8.36) на цій траєкторії. Підставляючи функцію (8.40) в рівняння (8.36), отримуємо $u^0(t, x^0(t)) = -B^*(t) W^*(t_0, t) x^0$. Звідси витікає, що керування (8.36) і (8.37) співпадають. Теорема повністю доведена.

Зауваження 8.1. Якщо матриця $\Phi(t_1, t)$ при якихось значеннях t стає особливою, то, природно, у відповідній формулі замість $\Phi^{-1}(t_1, t)$ слід брати псевдозворотну матрицю $\Phi^+(t_1, t)$, тобто замість (8.36) слід брати

$$u(t, x) = -B^*(t) \Phi^+(t_1, t) x. \quad (8.41)$$

Якщо x^0 — рішення рівняння (8.38), то рівняння (8.37), як і в розглянутому в теоремі випадку, переводить систему із стану x^1 у стан x^2 . Проте на відповідному йому рішенні (8.40) рівняння (8.17) керування (8.41) приймає вигляд

$$u(t, x(t)) = -B^*(t) \Phi^+(t_1, t) W(t_0, t) x^0. \quad (8.42)$$

Відповідно до визначення псевдозворотної матриці (див. (8.33)) маємо $\Phi^+(t_1, t) = C^*(t_1, t)(CC^*)^{-1}(BB^*)^{-1}B^*(t_1, t)$, де B і C визначають каркасне розкладання матриці Φ (див. (8.30)) $\Phi(t_1, t) = B(t_1, t)C(t_1, t)$.

Тому формулу (8.42) можна записати у вигляді

$$u(t, x(t)) = -B^*(t)L(t_1, t)W(t_0, t)x^0,$$

де введено позначення $L(t_1, t) = C^*(t_1, t)(CC^*)^{-1}C(t_1, t)$. Матриця L не є матрицею тотожного перетворення і тому керування (8.42) не співпадає з (8.37).

8.2. Керованість лінійних стаціонарних систем

8.2.1. Скінченномірні неперервні системи.

Нехай керований процес описується рівнянням

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{8.43}$$

у якому A і B — постійні матриці розмірностей $n \times n$ і $n \times r$ відповідно. Допустимими керуваннями, як і в попередньому пункті, ввжатимемо функції $u = u(t) \in L_2^r(0, T)$, де T — довільний, але заздалегідь фіксований момент часу.

Доведена вище теорема 8.1 формулює необхідні і достатні умови повної керованості лінійної системи (8.43), і в цьому сенсі вона дає вичерпну відповідь на питання про повну керованість лінійної системи. Проте практичне застосування вказаної теореми пов'язане з необхідністю будувати вектор-функції $h_1(t), \dots, h_n(t)$, які є стовпцями матриці $B^*W^*(T, t)$. Тому для перевірки умов керованості потрібно будувати фундаментальну матрицю рішень однорідного рівняння

$$\dot{x} = Ax. \tag{8.44}$$

Властивості цієї матриці повністю визначаються матрицею A . Тому спробуємо отримати умови повної керованості системи (8.43) безпосередньо через властивості матриць A і B .

рівність (8.46) запишемо у вигляді

$$WU = c.$$

Позначаючи, далі, через w_k — k -й стовпець матриці W , останній рівності можна надати вигляду

$$\sum_{k=1}^q U_k w_k = c. \quad (8.49)$$

Ця рівність, зокрема, означає, що довільний вектор $c \in E^n$ є лінійною комбінацією векторів w_1, \dots, w_q , розмірність кожного з яких також рівна n . Таке представлення можливе в тому і лише тому випадку, коли ранг матриці W рівний n .

Оскільки $q = mr \geq n$, то числа U_1, \dots, U_q визначаються з (8.49), взагалі кажучи, неоднозначно. Проте їх однозначність і не потрібна. Важливо, що ці числа існують. Кожен їх набір визначає за допомогою співвідношень (8.47) функції $u_1(t), \dots, u_r(t)$.

Насправді, нехай числа U_1, \dots, U_q яким-небудь чином визначені. Тоді рівність (8.47) можна розглядати як моментні співвідношення щодо функцій $u_1(t), \dots, u_r(t)$. При цьому їх можна розбити на групи. До першої групи відносимо моментні співвідношення щодо функції $u_1(t)$, до другої — $u_2(t)$ і так далі.

Згідно теоремі 8.1 перша група цих співвідношень визначає $u_1(t)$, оскільки функції $\alpha_0(-t), \dots, \alpha_{m-1}(-t)$ лінійно незалежні. З тієї ж причини з решти співвідношень послідовно знаходимо $u_2(t), \dots, u_r(t)$.

Отриманий результат можна сформулювати таким чином.

Теорема 8.7. Лінійна стаціонарна система (8.43) цілком керована на відрізок $0 \leq t \leq T$ тоді і тільки тоді, коли матриця (8.48) має ранг, рівний n .

8.2.2. Загальні висновки.

Вище наголошувалося, що при доведенні теореми 8.7 не потрібно, щоб постійні U_1, \dots, U_q визначалися однозначно. Не потрібно також, щоб моментні

співвідношення (8.47) визначали вектор-функцію $u(t)$ однозначно. Важливо було встановити лише існування хоч би одного керування, що переводить систему з одного заданого стану x^1 у інший, також заданий стан x^2 .

Зауваження 8.2. Результат, сформульований у вигляді теореми 8.7, без яких-небудь принципівих труднощів можна перенести на випадок, коли процес описується рівнянням в кінцевих різницях $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, $k = 0, 1, \dots, m$. Пояснюється це тим, що для такої системи рішення, що задовольняє початковій умові $x(0) = a$, визначається по формулі, аналогічній формулі

$$x(t) = e^{At}x^1 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

Отже, тим же розглянутим вище способом можна отримати необхідні моменти співвідношення щодо шуканого керування.

8.3. Спостережуваність й ідентифікованість лінійних систем. Принцип подвійності

Відомо, що керування системою може виконуватися за програмою або за принципом зворотного зв'язку. Для практичної реалізації керування за принципом зворотного зв'язку необхідно знати стан системи в кожен конкретний момент часу. Проте зазвичай виявляється, що не всі фазові координати системи доступні вимірюванню. Тому природно розглянути питання про можливість повного опису поведінки фазових координат систем за наслідками неповного спостереження.

8.3.1. Спостережуваність нестационарних систем.

Нехай керована система описується рівнянням

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8.50)$$

у якому $A(t)$ і $B(t)$ — неперервні матриці розмірностей $n \times n$ і $n \times r$ відповідно. Допустимими керуваннями вважатимемо функції $u = u(t)$ з $L_2^r(0, T)$.

Через y позначимо вектор $y = \{y_1, \dots, y_m\}$, компонентами якого є лінійні комбінації фазових координат x_i і компонент керування u_j , тобто вважатимемо, що

$$y = C(t)x + D(t)u, \quad (8.51)$$

де $C(t)$ і $D(t)$ — неперервні матриці розмірностей $m \times n$ і $m \times r$ відповідно.

Будемо, далі, припускати, що керування $u = u(t)$ задано і компоненти y_i вектора y доступні спостереженню на відрізку часу $0 \leq t \leq T$ і, отже, за наслідками спостереження відомі функції $y_i = y_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, $0 \leq t \leq T$.

Основна задача спостереження в цьому випадку полягає в тому, щоб по отриманих результатах спостереження (тобто по відомій функції $y(t) = \{y_1(t), \dots, y_m(t)\}$) визначити значення вектор-функції $x = x(t)$ при всіх $t \in [0, T]$, що є рішенням рівняння (8.50) при $u = u(t)$.

Це рішення можна представити у вигляді

$$x(t) = W(t, 0)x^0 + \int_0^t W(t, s)B(s)u(s)ds, \quad (8.52)$$

де x^0 — невідомий початковий стан системи. Оскільки $W(t, s)$, $B(t)$ і $u(t)$ вважаються відомими, то другий доданок в рівності (8.52) опиняється відомою функцією часу t . Невідомим є доданок $W(t, 0)x^0$.

Отже, для вирішення питань спостереження замість рівняння (8.50) досить розглядати однорідне рівняння

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (8.53)$$

оскільки доданок $B(t)u(t)$ доступний безпосередньому вимірюванню. Рішення (8.52) в цьому випадку приймає вигляд

$$x(t) = W(t, 0)x^0, \quad (8.54)$$

і для того, щоб знати функцію $x(t)$ на відрізку часу $[0, T]$, досить визначити x^0 .

Тому завдання спостереження можна ставити так: *за даними вимірювання $y(t)$ на відрізку часу $[0, T]$ потрібно знайти початковий стан x^0 системи (8.53) за умови, що x і y зв'язані співвідношенням (10.51).*

З рівності (8.54) і (8.51) виходить, що $y(t) = C(t)W(t,0)x^0 + D(t)u(t)$. Другий доданок в цій рівності є відомою функцією, оскільки керування вважається заданим. Тому природно вважати, що за наслідками вимірювання відома функція

$$y(t) = C(t)W(t,0)x^0,$$

або, що те ж саме

$$y(t) = C(t)x(t). \quad (8.55)$$

На підставі викладеного основну задачу спостереження для лінійної системи можна сформулювати таким чином.

За даними спостереження відома вектор-функція $y(t)$, $t \in [0, T]$. Відомо також, що вона представима у вигляді (8.55), де $C(t)$ — задана неперервна матриця розмірності $m \times n$. Потрібно знайти вектор x^0 початкового стану фазового вектора $x(t)$, визначуваного рівнянням (8.54).

Якщо будь-який початковий стан x^0 системи (8.53) можна визначити по відомій на відрізку $[0, T]$ функції $y(t)$, представленю у вигляді (8.55), то система (8.53), (8.55) називається *цілком спостережуваною* на цьому відрізку часу.

Нехай $h_i(t)$ — i -й стовпець матриці $C(t)W(t,0)$. Розмірність вектора $h_i(t)$, очевидно, рівна m а кількість цих векторів рівна n .

Теорема 8.8. Для того, щоб система (8.53), (8.55) була цілком спостережуваною на відрізку $[0, T]$, необхідно і достатньо, щоб вектор-функції $h_1(t), \dots, h_n(t)$ були лінійно незалежні на цьому відрізку.

Доказ. Нехай $h_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ лінійно незалежні на відрізку $0 \leq t \leq T$. Вирішення рівняння (8.53) представимо у вигляді (8.54). Тоді вектор спостережуваних величин (8.55) можна представити у вигляді

$$y(t) = C(t)W(t,0)x^0.$$

Обидві частини цієї рівності помножимо зліва на матрицю $W^*(t, 0)C^*(t)$ і отриманий результат проінтегруємо в межах від 0 до T . Тоді, вводячи позначення

$$z(T) = \int_0^T W^*(t,0)C^*(t)y(t)dt, \quad M(T) = \int_0^T W^*(t,0)C^*(t)C(t)W(t,0)dt,$$

можна записати

$$M(T)x^0 = z(T).$$

Матриця $M(T)$ є матрицею Грама лінійно незалежних вектор-функцій $h_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, і тому її визначник відмінний від нуля. Значить, можна записати

$$x^0 = M^{-1}(T)z(T).$$

Тим самим по відомій функції $y(t)$, $0 \leq t \leq T$, знайдений початковий стан системи. По формулі (8.54) можна визначити рішення системи.

Нехай тепер система (8.53), (8.55) цілком спостережувана на відріжку $0 \leq t \leq T$, тобто будь-який початковий стан x^0 може бути визначено по відомій на відріжку $0 \leq t \leq T$ функції $y(t)$. Доведемо, що вектор-функції $h_1(t), \dots, h_n(t)$ лінійно незалежні.

Припустимо супротивне, що ці вектор-функції лінійно залежні на відріжку $[0, T]$. Тоді матриця $M(T)$ буде особливою і існує ненульовий вектор $\alpha \in E^n$ такий, що $\alpha \neq 0$ і $(\alpha, M(T)\alpha) = 0$. Візьмемо початковий стан системи $x(0) = x^0 = \alpha$. Йому відповідає вектор-функція $y(t)$, визначувана по формулі

$$y(t) = C(t)W(t,0)\alpha.$$

Звідси знаходимо, що

$$\int_0^T y^*(t)y(t)dt = \int_0^T \alpha^*W^*(t,0)C^*(t)C(t)W(t,0)\alpha dt = (\alpha, M\alpha) = 0.$$

Отже $y(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$. Проте у цілком спостережуваної системи при $x(t) \neq 0$ спостережувана вектор-функція $y(t)$ не може бути тотожно рівною нулю. Отримана суперечність доводить, що вектор-функції $h_1(t), \dots, h_n(t)$ лінійно незалежні на відріжку $0 \leq t \leq T$.

8.3.2. Спостережуваність стаціонарних систем.

Припустимо, що система (10.53), (10.55) стаціонарна, тобто вона має вигляд

$$\dot{x} = Ax, \quad (8.56)$$

$$y = Cx, \quad (8.57)$$

де A і C — постійні матриці розмірностей $n \times n$ і $r \times n$ відповідно (відзначимо, що тут, на відміну від системи (8.55), розмірність вектора y узята рівною r). Спробуємо знайти умови повної спостережуваності цієї системи на довільному заданому відрізку часу $0 \leq t \leq T$, виражені безпосередньо через матриці A і B .

Будь-яке рішення рівняння (8.56) можна представити у вигляді

$$x(t) = e^{At} x^0, \quad (8.58)$$

де x^0 — початкове значення фазового вектора системи у момент часу $t = 0$, а

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(t) A^k.$$

Тут m — ступінь мінімального многочлена, а $\alpha_k(t)$, $k = 1, \dots, m-1$ — коефіцієнти інтерполяційного полінома Лагранжа-Сильвестра матриці A .

З (8.57) і (8.58) отримуємо

$$y(t) = C \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(t) A^k x^0.$$

Умножаючи обидві частини отриманого співвідношення на $\alpha_i(t)$ і інтегруючи отриманий результат в межах від 0 до T , матимемо

$$\int_0^T \alpha_i(t) y_j(t) dt = \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^T \alpha_i(t) \alpha_k(t) dt c_j A^k x^0, \quad (8.59)$$

де $y_j(t)$ — j -а компонента вектора $y(t)$, а c_j — j -й рядок матриці C , тобто $c_j = (c_{j1}, \dots, c_{jn})$.

Введемо позначення

$$(u_i, u_k) = \int_0^T u_i(t) u_k(t) dt.$$

Тоді співвідношення (8.59) можна записати у вигляді

З іншого боку, згідно співвідношенням (8.57) і (8.58) маємо

$$y_j(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(t) c_j A^k x^0$$

і на підставі (8.67) отримуємо, що $y_j(t) \equiv 0$, $0 \leq t \leq \infty$, $j = 1, 2, \dots, r$, тобто існує ненульовий початковий стан системи (8.65), для якого вектор спостереження $y(t)$ тотожно рівний нулю. Це протирічить повній спостережуваності системи.

8.3.3. Принцип подвійності.

Як видно з умов керованості і умов спостережуваності, вони визначаються схожими співвідношеннями. Тут ми покажемо, що за цими зовнішніми ознаками криється змістовна закономірність.

Нехай дано дві системи. Одна з них описується рівняннями

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \quad (8.68)$$

де A , B , C і D — постійні матриці розмірностей $n \times n$, $n \times r$, $p \times n$ і $p \times r$ відповідно. Друга система описується рівняннями

$$\dot{v} = A^* v + C^* w, \quad z = B^* v + D^* w \quad (8.69)$$

де вектори v , w і z мають розмірності n , p і r відповідно.

Згідно теоремі 8.7 система (8.68) цілком керована тоді і тільки тоді, коли матриця

$$(B, AB, \dots, A^{(m-1)}B) \quad (8.70)$$

має ранг, рівний n . З іншого боку, ця ж система цілком спостережувана тоді і тільки тоді, коли матриця

$$(C^*, A^* C^*, \dots, A^{*(m-1)} C^*) \quad (8.71)$$

має ранг, також рівний n . Це твердження виходить з теореми 8.9.

На підставі тих же теорем знаходимо, що для повної спостережуваності системи (8.69) необхідно і достатньо, щоб матриця (8.70) мала ранг, рівний n і для того, щоб ця система була цілком керованою, необхідно і достатньо, щоб матриця (8.71) мала ранг, рівний n .

Таким чином, умови повної керованості для системи (8.68) співпадають з умовами повної спостережуваності для системи (8.69) і, навпаки, умови повної спостережуваності системи (8.68) співпадають з умовами повної керованості системи (8.69). Цей результат зазвичай формулюється у вигляді наступного принципу.

Принцип подвійності. Для того, щоб система (8.68) була цілком керованою (цілком спостережуваною), необхідно і достатньо, щоб система (8.69) була цілком спостережувана (цілком керована).

8.3.4. Ідентифікованість.

Нехай керована система описується співвідношеннями (8.50) і (8.55) при колишніх припущеннях щодо матриць $A(t)$, $B(t)$ і $C(t)$ (тобто вони передбачаються неперервними).

Задачею ідентифікації називатимемо задачу визначення стану ОК $x(t)$ у момент часу $t = t_1 \leq T$ по даним про керування $u(t)$ і вихідній величині $y(t)$ при $t \leq t_1$.

З математичної точки зору вона схожа із задачею про спостереження. Щоб в цьому переконатися, достатньо в рівняннях (8.50) і (8.55) провести заміну $\tau = t_1 - t$. У результаті отримаємо задачу про спостереження також для лінійної системи. Тому при дослідженні ідентифікованості лінійних систем можна використовувати викладені вище методи. Проте, враховуючи велику значущість проблем ідентифікації в рішенні прикладних завдань, ми розглянемо їх незалежно від того, що отримано вище в рішенні задачі спостереження.

Пару (t_1, x) , де $x \in E^n$, називатимемо *подією*, а вектор $y(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, відповідний керуванню $u(t)$, по якому відновлюється подія (t_1, x) , позначатимемо через $y(t, t_1, x, u(t))$, $t < t_1$. Подія (t_1, x) у системі (8.50), (8.55) називається *не ідентифікованою* тоді і тільки тоді, коли $y(t, t_1, x, u(t)) = \theta$ (тут і далі θ – нульовий

вектор) при всіх $t \in [0, t_1]$. З цього визначення, зокрема, витікає, що для системи (8.50), (8.55) подія (t_1, x) не ідентифікується.

Лінійну систему (8.50), (8.55) називатимемо такою, що ідентифікується, якщо жодна подія (t_1, x) не є такою, що не ідентифікується, за винятком події (t_1, θ) .

Теорема 8.10. Для того, щоб подія (t_1, x^0) у системі (8.50), (8.55) була такою, що не ідентифікується, необхідно і достатньо, щоб вектор x^0 належав ядру матриці

$$N(t_1) = \int_0^{t_1} W^*(t, t_1) C^*(t) C(t) W(t, t_1) dt. \quad (8.72)$$

Нагадаємо, що ядром матриці A називається множина векторів, що задовольняють рівнянню $Ax = \theta$.

Доказ. Достатність. Нехай x^0 належить ядру матриці N . Тоді відповідно до визначення ядра матриці маємо

$$N(t_1)x^0 = \theta.$$

Помножуючи цю рівність зліва на x^{0*} , отримуємо $x^{0*} N(t_1)x^0 = 0$ і, отже

$$\int_0^{t_1} x^{0*} W^*(t, t_1) C^*(t) C(t) W(t, t_1) x^0 dt = \theta,$$

тобто

$$\int_0^{t_1} \|C(t)W(t, t_1)x^0\|^2 dt = \theta.$$

Звідси знаходимо, що

$$C(t)W(t, t_1)x^0 = \theta \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (8.73)$$

Оскільки $W(t, s)$ — фундаментальна матриця рішень системи

$$\dot{x} = A(t)x,$$

нормальна при $t = s$ то функція $W(t, t_1)x^0$ є рішенням, удовлетворяючим початковій умові $x(t_1) = x^0$. Тому рівність (8.73) можна записати у вигляді $y(t, t_1, x^0, \theta) = \theta$, а це означає, що подія (t_1, x^0) не ідентифікується.

Необхідність. Нехай подія $(t_1 x^0)$ не ідентифікується, тобто справедлива рівність

$$y(t, t_1, x^0, \theta) = \theta$$

при всіх $t \in (0, t_1)$. Тоді з рівності

$$\int_0^{t_1} \|y(t, t_1, x^0, \theta)\|^2 dt = \int_0^{t_1} \|C(t)W(t, t_1)x^0\|^2 dt = x^{0*} N(t_1)x^0$$

витікає, що $x^{0*} N(t_1)x^0 = 0$, а це означає, що вектор x^0 належить ядру $N(t_1)$.

Наслідок 8.1. Для того, щоб лінійна система (8.50), (8.55) була такою, що ідентифікується, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці (8.72) був рівний n .

Доказ цього твердження безпосередньо виходить з того, що ядро матриці $N(t_1)$ складається з єдиного елементу $x = \theta$ тоді і тільки тоді, коли її ранг рівний n .

І на закінчення проаналізуємо зв'язок між умовами повної керованості і ідентифікованості, обмежуючись аналізом лише стаціонарних систем вигляду

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (8.74)$$

де A , B і C — постійні матриці. Згідно слідству 8.1 у системи, що ідентифікується, ранг матриці

$$N(t_1) = \int_0^{t_1} e^{-A^*(t-t_1)} C^* C e^{A(t-t_1)} dt \quad (8.75)$$

рівний n .

З іншого боку, система

$$\dot{x} = -A^* x + C^* v \quad (8.76)$$

цілком керована тоді і тільки тоді, коли ранг матриці

$$\Phi = \int_0^{t_1} e^{-A^*(t-t_1)} C^* C e^{A(t-t_1)} dt \quad (8.77)$$

рівний n (див. теорему 8.4). Оскільки матриці (8.75) і (8.77) співпадають, то справедливо наступне твердження.

Принцип подвійності. Система (8.74) повністю ідентифікується тоді і тільки тоді, коли система (8.76) цілком керована.

Якщо врахувати, що умова повної керованості системи (8.76) полягає в тому, що

$$\text{rank} \{C^*, A^*C^*, \dots, A^{*(m-1)}C^*\} = n \quad (8.78)$$

(див. теорему 8.7), то справедливо наступне твердження.

Теорема 8.11. Для того, щоб система (8.76) була такою, що ідентифікується, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова (8.78), де m — ступінь мінімального многочлена матриці A .

Доведення даної теореми очевидне.

Контрольні запитання

1. Наведіть властивості гільбертових просторів. У чому суть теорем Леві та Рісса?
2. У чому суть властивості керованості системи?
3. Як визначається область досяжності систем?
4. Наведіть критерії керованості систем.
5. Наведіть рішення задачі досяжності системи з лінійним зворотнім зв'язком.
6. Наведіть умову керованості лінійних стаціонарних систем.
7. Наведіть умову спостережуваності лінійних нестаціонарних систем.
8. Наведіть умову спостережуваності лінійних стаціонарних систем.
9. Розкрийте суть принципу подвійності.
10. Наведіть умову ідентифікованості лінійної системи.

ЧАСТИНА ІІІ.

НЕЛІНІЙНІ ТА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ

Глава 9. НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ

9.1. Нелінійні моделі систем

9.1.1. Загальні поняття і особливості нелінійних систем.

Строго кажучи, лінійних систем в природі не існує, оскільки характеристики реальних пристроїв нелінійні і деякі з них не можуть бути лінеаризовані, наприклад, характеристика логічного елемента. Крім того, є системи, наприклад, релейні, адаптивні, в яких принципово необхідно враховувати нелінійності.

Нелінійною системою називається така система, до складу якої входить хоч би одна ланка, що описується нелінійним рівнянням. Така ланка називається нелінійною ланкою або нелінійним елементом.

Рівняння є нелінійним, якщо деякі координати або їх похідні за часом входять в рівняння у вигляді добутків або ступеня, відмінного від першого, а також якщо коефіцієнти рівняння є функціями деяких координат або їх похідних.

Нелінійні математичні моделі, що використовуються для аналізу систем керування, з'являються унаслідок врахування природних (супутніх) ефектів, властивих об'єкту або елементам системи керування і обумовлених нелінійним характером законів природи, яким підкоряються досліджувані явища. Нелінійності можуть вводитися і спеціально з метою компенсації небажаних ефектів від природних нелінійностей або для надання системі керування особливих властивостей, які принципово недосяжні лінійними засобами. Так, саме нелінійні алгоритми керування можуть забезпечити максимальну швидкодію процесів за наявності природних обмежень на рівні керуючих дій; нелінійності обов'язково вводяться при створенні генераторів коливань тощо. У ряді систем

керування технічними об'єктами нелінійні, зокрема, релейні регулюючі пристрої виявляються найбільш простими, дешевими і надійними.

Розрахунок систем керування по нелінійних моделях значно складніший, ніж по лінійних. Це пояснюється великою різноманітністю рухів, що описуються нелінійними рівняннями. Вирішення звичайних лінійних диференціальних рівнянь з постійними детермінованими коефіцієнтами

$$d_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + d_1 \frac{dx}{dt} + d_0 x = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f \quad (9.1)$$

представляється у вигляді суми

$$x(t) = x_B(t) + x_{CB}(t),$$

де $x_B(t)$ – часткове вирішення неоднорідного рівняння (9.1), що описує вимушений рух;

$$x_{CB}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} \quad (9.2)$$

$x_{CB}(t)$ – загальне вирішення відповідного однорідного рівняння, що описує вільний рух за початкових умов: $x(0), x'(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$. Вираз (9.2) записаний для простих коренів (p_1, \dots, p_n) характеристичного полінома

$$D(p) = d_n p^n + \dots + d_1 p + d_0. \quad (9.3)$$

Відносна простота аналізу лінійних моделей пояснюється можливістю роздільного аналізу вимушених і вільних рухів, а також тим, що відома форма рішення (9.2). Побудова рішення зводиться до завдань алгебраїчних обчислень коренів характеристичного полінома і вирішення системи лінійних рівнянь щодо коефіцієнтів C_i .

Разом з тим різноманітності рухів, що описуються лінійними рівняннями, може виявитися недостатнім. Підвищуючи порядок n рівнянь і підбираючи коефіцієнти, не завжди вдається пояснювати реальні процеси на великих інтервалах часу і в широких діапазонах амплітуд змінних.

Неєдиність положення рівноваги. Лінійна система має єдине положення рівноваги. Наприклад, вихідна змінна системи, що описується рівнянням (9.2), при постійній дії f приймає єдине значення, рівне

$$x = \frac{b_0}{d_0} f.$$

Якщо система знаходиться не на межі стійкості, то за будь-яких початкових умов її рухи асимптотично затухають до положення рівноваги (система стійка в цілому) або розходяться (система не стійка).

Проте, реальні динамічні системи можуть мати декілька положень рівноваги. Одним з прикладів є маятник. Положення рівноваги маятника утворюють рахункову множину $\{y = k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots\}$, причому, парні k відповідають верхнім, а непарні - нижнім положенням рівноваги.

Як інший приклад уявимо собі стежачу систему керування, датчик розузгодження і електродвигун приводу якої мають зони нечутливості. Якщо розузгодження мале, то напруга на вході двигуна по модулю менше напруги трогання і двигун не обертається.

Кінцева тривалість процесів. Якщо лінійна система стійка, тобто коріння p_i характеристичного полінома (9.3) мають негативні дійсні частини, то відповідні експоненти в рішенні (9.2) затухають в нескінченності. Реально ж тривалість процесів керування кінцева (крива 1 на рис. 9.1), чому сприяють зони нечутливості елементів, сухе тертя і люфти (зазори) кінематичних зчленувань.

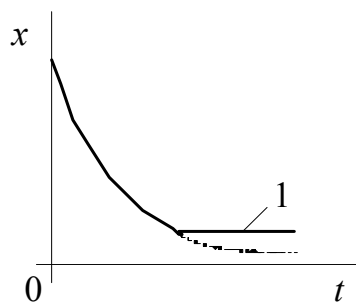


Рис. 9.1. Кінцева тривалість процесів

Обмеженість рівнів змінних. Якщо лінійна система нестійка, то значення змінних необмежено ростуть. Реально рівні змінних завжди обмежені енергетичними і матеріальними ресурсами та міцністю. На рис. 9.2 неперервними лініями показані процеси, що експоненціально розходяться, в лінійних системах

першого (рис. 9.2, а) і другого (рис. 9.2, б) порядків. Штрихові криві відповідають реальним процесам.

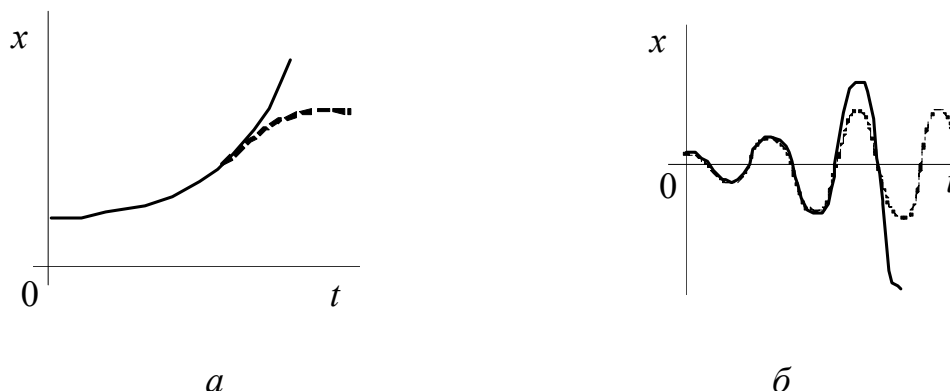


Рис. 9.2. Обмеженість рівнів змінних

Залежність характеру рухів від початкових умов і рівнів дій. У реальних системах не виконується принцип суперпозиції - при складанні дій реакція не рівна сумі реакцій на окремі дії. На рис. 9.3 показані графіки процесів в одній і тій же динамічній системі (фізичний маятник) залежно від початкових умов.

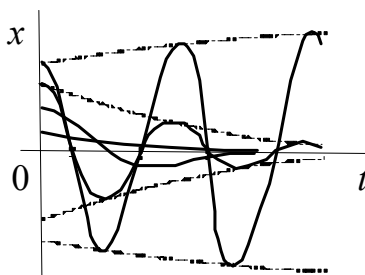


Рис. 9.3. Залежність процесів від початкових умов

9.1.2. Безінерційні нелінійні елементи.

Як відомо, лінійний безінерційний елемент повністю задається значенням його коефіцієнта посилення. Нелінійні залежності між постійними значеннями вхідних і вихідних сигналів

$$y = F(x)$$

можуть задаватися аналітично, графічно або таблично. У тому випадку, коли нелінійний елемент (НЕ) має один вхід і один вихід особливо наочні графіки статичних характеристик (СХ).

Умови перетворення сигналів безінерційними НЕ залежать від рівнів сигналів і не залежать від їх частоти.

Наведемо приклади безінерційних НЕ і їх СХ.

1. *Нелінійні елементи з кусочно-постійними СХ.* Ідеальне реле (рис. 9.4,*а*) описується виразом:

$$y = C \operatorname{sgn} x = \begin{cases} C, x > 0; \\ 0, x = 0; \\ -C, x < 0. \end{cases}$$

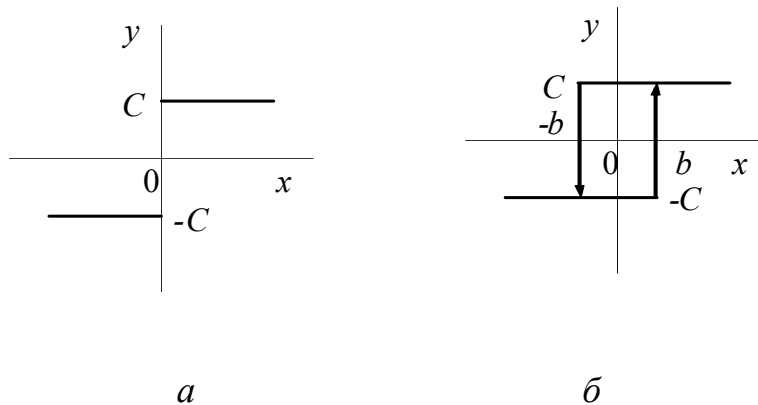


Рис. 9.4. Кусочно-постійні (релейні) СХ

У загальному випадку релейний пристрій має гістерезис (рис. 9.4,*б*):

$$y = \begin{cases} C, x > b; \\ -C, x < -b; \\ C, (x \leq b, y_0 = C); \\ -C, (x \leq b, y_0 = -C), \end{cases}$$

де: b – половина зони неоднозначності СХ; y_0 – стан реле, рівний значенню y до входу в зону неоднозначності. Таким чином, цей безінерційний НЕ володіє пам'яттю – значення його виходу визначається не тільки значенням входу в той же момент, але також й передісторією (станом) НЕ по рівню сигналу.

2. *Нелінійні елементи з кусочно-лінійними СХ.* На рис. 9.5,*а* показаний графік СХ НЕ типу “насичення”:

$$y = \begin{cases} C, x \geq b; \\ -C, x \leq -b; \\ C/b, |x| < b. \end{cases}$$

Ця нелінійність вводиться в моделі для обліку обмежень рівнів змінних при дослідженні поведінки систем керування в режимах великих відхилень.

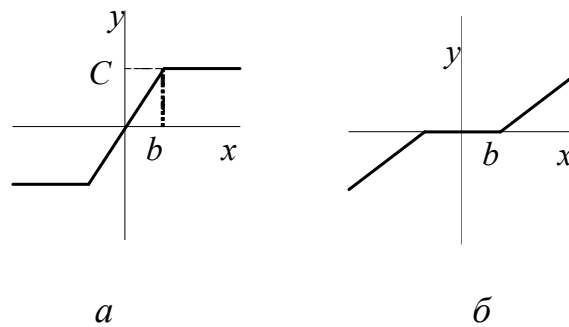


Рис. 9.5. Кусочно-лінійні СХ

Нелінійний елемент типу “зона нечутливості” (рис. 9.5,б) враховує реальні властивості датчиків, виконавчих механізмів і інших пристроїв при малих вхідних сигналах.

Наведені вище приклади кусочно-лінійних СХ неперервні, але мають розрив похідної dy/dx . Можуть бути і кусочно-лінійні СХ з розривами першого роду.

3. *Нелінійні елементи з гладкими СХ.* Їх прикладами є характеристики термопари (рис. 9.6,а) і пристрою зведення вхідного сигналу в квадрат (рис. 9.6,б).

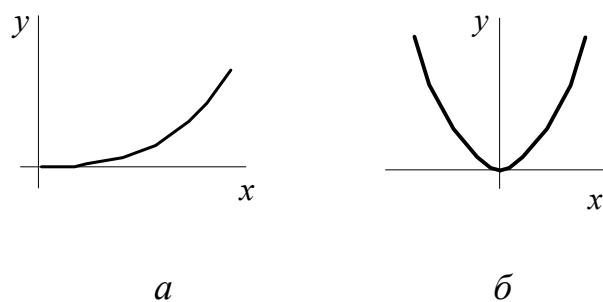


Рис.9.6. Гладкі СХ

Нелінійні залежності між значеннями входу і виходу можна задавати параметрично – парою функцій $\langle x(t), y(t) \rangle$; виключаючи параметр t , отримаємо безпосередній зв'язок між змінними входу і виходу. У разі однозначних СХ як вхід $x(t)$ особливо зручний періодичний сигнал трикутної форми з достатньою

амплітудою – вихід НЕ періодично повторюватиме форму СХ. Для складних НЕ з неоднозначними СХ вибір функції $x(t)$ є нетривіальним завданням. Зазвичай, мова йде про експериментальне дослідження НЕ, успіх якого залежить від апіорної інформації.

9.1.3. Динамічні нелінійні елементи.

У загальному випадку диференціальні рівняння, що описують елементи систем або самі системи, є нелійними

$$\Phi(y, y', \dots, y^{(n)}; x, x', \dots, x^{(m)}) = 0. \quad (9.4)$$

Іноді вони вирішуються щодо старшої похідної змінної виходу

$$y^{(n)} = \varphi(y, y', \dots, y^{(n-1)}; x, x', \dots, x^{(m)}). \quad (9.5)$$

Прикладами служать диференціальні рівняння математичного маятника

$$y'' + \omega_0^2 \sin y = 0$$

і рівняння Ван дер Поля

$$y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0.$$

Часто диференціальні рівняння представляються у формі Коші:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \varphi(\mathbf{v}, x); \\ y &= \psi(\mathbf{v}, x), \end{aligned} \quad (9.6)$$

де: \mathbf{v} – вектор змінних стану; φ – вектор-функція; ψ – функція виходу. У рівняннях (9.4) - (9.6) передбачається, що нелінійні функції задані аналітично.

У ряді випадків нелінійні перетворення описуються функціоналами типу Вольтерра, що є узагальненням інтеграла згортки. Представлення НЕ функціоналами Вольтерра дозволяє розповсюдити поняття передавальної функції на нелінійні перетворення, а також розвинути спектральний метод аналізу нелінійних систем.

У лінійних динамічних елементах умови перетворення сигналів визначалися лише частотним спектром сигналу і не залежали від його рівня. Перетворення сигналів динамічними НЕ в значній мірі залежить як від рівнів сигналів, так і від їх частотних спектрів.

9.1.4. Нелінійні моделі з розкритою структурою.

У багатьох випадках нелінійні моделі з'являються в результаті доповнення лінійних моделей нелійними елементами, що враховують такі природні чинники, як обмеженість керуючих дій, наявність зони нечутливості у вимірювальних і виконавчих елементах, люфтів в кінематичних зчленуваннях або штучне введення нелінійностей в алгоритми керування для отримання властивостей, не досяжних в лінійних системах. Простий приклад такої моделі – нелінійний інтегратор

$$\frac{dy}{dt} = F(x)$$

– структурно зображається як послідовне з'єднання безінерційного НЕ і лінійної інтегруючої ланки (рис. 9.7). На рис. 9.8,а зображений інший приклад – модель системи із зворотним зв'язком у формі структурної схеми. На рис. 9.8,б та ж модель представлена у формі сигнального графа, одна з дуг якої помічена двома штрихами, вказуючими на нелінійний характер перетворення сигналу.

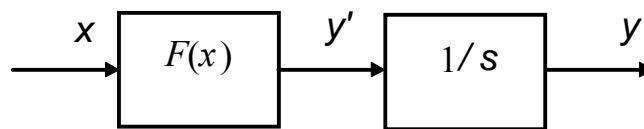


Рис. 9.7. Нелінійний інтегратор

У цих прикладах розділені динамічна лінійна частина (ЛЧ) і безінерційна нелінійність – нелінійні ефекти зосереджені в безінерційному, а динамічні – у лінійному елементах.

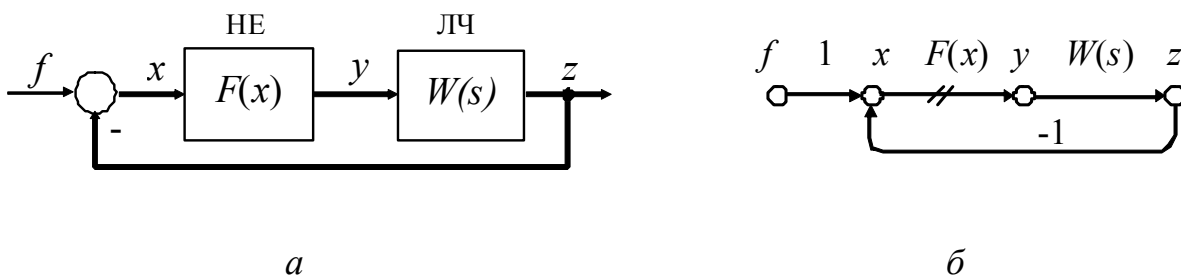


Рис. 9.8. Нелінійна система із зворотним зв'язком

9.1.5. Розрахункові форми нелінійних моделей.

Клас нелінійних моделей дуже широкий, що надзвичайно утрудняє їх однаковий опис, можливість використання універсальних методів аналізу і синтезу. Тому при розробці методик дослідження автоматичних систем керування по нелінійних моделях вибираються деякі розрахункові форми моделей, до яких, по можливості, намагаються привести початкові.

Великі досягнення є в області теорії нелінійних систем, що описуються диференціальними рівняннями другого порядку:

$$x'' = \varphi(x, x')$$

або у формі Коші:

$$\begin{aligned} dv_1 / dt &= \varphi_1(v_1, v_2); \\ dv_2 / dt &= \varphi_2(v_1, v_2), \end{aligned}$$

де v_1, v_2 – змінні стану (фазові координати) динамічної системи. Від диференціального рівняння другого порядку, вирішеного щодо старшої похідної, легко перейти до форми Коші, якщо покласти $v_1 = x, v_2 = x'$:

$$\begin{aligned} dx / dt &= x', \\ dx' / dt &= \varphi(x, x'). \end{aligned}$$

У правих частинах наведених рівнянь не міститься час t в явному вигляді; такі системи називаються *автономними*. Автономна система не має зв'язків з середовищем – відсутні зовнішні дії, а параметри не змінюються в часі, тобто вона стаціонарна.

Велика група точних і наближених методик дослідження систем на основі нелінійного підходу використовують типову структурну схему (див. рис. 9.8), що моделює широкий клас систем керування із зворотним зв'язком. Як додаткове обмеження цього розрахункового виду математичних моделей зазвичай приймають безінерційність НЕ з одним входом x і одним виходом y .

Динамічні властивості системи зосереджені в лінійній частині з передавальною функцією

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n}. \quad (9.7)$$

По структурній схемі або графові розрахункового вигляду (див. рис. 9.8) легко записати рівняння:

$$\begin{aligned} A(p)z(t) &= B(p)y(t); \\ y(t) &= F(x(t)); \\ x(t) &= f(t) - z(t), \end{aligned} \tag{9.8}$$

де $p \equiv d/dt$ – оператор диференціювання. Для автономної системи дія тотожна нулю $f(t) \equiv 0$, а рівняння (9.8) приводяться до вигляду:

$$A(p)x(t) + B(p)F(x(t)) = 0.$$

Рівняння ЛЧ у формі простору станів за умови $m < n$, тобто ступінь полінома чисельника передавальної функції ЛЧ (9.7) нижча за ступінь полінома знаменника, мають вигляд:

$$\begin{aligned} d\mathbf{v} / dt &= \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{y}; \\ z &= \mathbf{C}\mathbf{v}. \end{aligned}$$

З урахуванням НЕ для автономної системи отримаємо наступні рівняння:

$$\begin{aligned} d\mathbf{v} / dt &= \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{F}(-\mathbf{C}\mathbf{v}); \\ z &= \mathbf{C}\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Якщо структурна схема досліджуваної системи відрізняється від розрахункової, то в деяких випадках її можна перетворити в розрахункову форму. Проблема полягає в тому, що у разі нелінійних моделей не завжди застосовні правила структурних перетворень лінійних систем.

9.2. Аналіз рівноважних режимів

9.2.1. Рівноважні режими.

Режим функціонування системи керування називається *рівноважним*, якщо її змінні не змінюються в часі. Для більшості систем керування промисловими і іншими об'єктами рівноважні режими при постійних зовнішніх діях є, як правило, оптимальними в сенсі прийнятих технологічних критеріїв. Тому аналіз і синтез систем по вимогах до цих режимів виявляються першочерговими завданнями проектування.

У рівноважних режимах похідні за часом рівні нулю для всіх змінних. Якщо, наприклад, залежність між змінними входу $f(t)$ і виходу $y(t)$ системи керування описується диференціальним рівнянням

$$\Phi(y, y', \dots, y^{(n)}; f, f', \dots, f^{(m)}) = 0,$$

то часткова модель для рівноважних режимів ($f = \text{const}$, $y = \text{const}$) вийде прирівнюванням нулю похідних

$$\Phi(y, f) = 0.$$

З цієї неявної залежності чисельним методом знаходять значення y при заданих значеннях f (якщо рішення існує).

У разі нелінійних моделей, завдання аналізу рівноважних режимів пов'язане з вирішенням систем нелінійних рівнянь. Перш за все слід відповісти на питання про існування рішення; далі повинне визначатися число положень рівноваги і потім уточнюються їх координати. Для вирішення цих завдань використовуються часткові моделі, по яких аналітично, графічними побудовами або/і чисельними процедурами знаходяться шукані режими і СХ нелінійних систем.

9.2.2. Визначення рівноважних режимів за диференціальними рівняннями.

Нехай система керування описується системою диференціальних рівнянь у формі Коші:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \varphi(v, f); \\ y &= \psi(v, f). \end{aligned} \tag{9.9}$$

Система рівнянь для рівноважних режимів виходить, якщо в (9.9) покласти $dv/dt=0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(v, f); \\ y &= \psi(v, f). \end{aligned} \tag{9.10}$$

Отримання СХ $y = F(f)$ зводиться до виключення змінних v з рівнянь (9.10), що в загальному випадку може бути непростим завданням.

Для окремого випадку системи другого порядку розгорнені рівняння (9.10) виглядають так:

$$\begin{aligned} \varphi_1(v_1, v_2, f) &= 0; \\ \varphi_2(v_1, v_2, f) &= 0; \\ y &= \psi(v_1, v_2, f). \end{aligned} \tag{9.11}$$

Графічна ілюстрація визначення $v_1(f^i)$ і $v_2(f^i)$ з перших двох рівнянь системи (9.11) показана на рис. 9.9.

Тут f^i – i -е постійне значення дії. Перетини кривих, якщо рішення існує, дають шукані значення $v_1^j(f^i), v_2^j(f^i)$, де $j = 1, 2, 3$ – номер рішення.

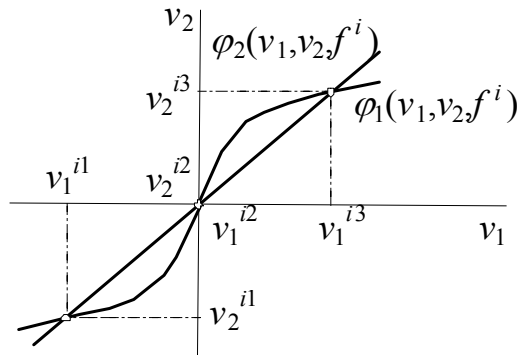


Рис. 9.9. Ілюстрація графічної процедури

Підставивши (9.6) в третє рівняння системи (9.11), отримаємо точки шуканої СХ

$$y^{ji} = \psi(v_1^j(f^i), v_2^j(f^i)).$$

Задаючи інші значення $f^i; i = 1, 2, \dots$, з вибраним кроком, отримаємо множину крапок з'єднання (інтерполяція) яких дасть гілки $j = 1, 2, \dots$, у загальному випадку неоднозначної системи СХ.

9.2.3. Визначення рівноважних режимів і статичних характеристик систем з типовою структурою.

Типовими називають структури систем, утворені послідовним і паралельним з'єднанням ланок, а також одноконтурні системи, утворені з'єднанням двох ланок із зворотним зв'язком.

Еквівалентні СХ для послідовного з'єднання ланок. Послідовно сполучені НЕ (рис. 9.10) еквівалентні одному НЕ з СХ

$$F_3 = F_2 \circ F_1,$$

що є композицією СХ складових:

$$y = F_2(u) = F_2(F_1(x)) = F_3(x).$$

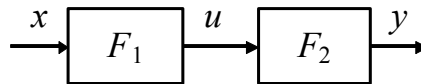


Рис. 9.10. Послідовне з'єднання НЕ

У загальному випадку перестановка НЕ дає інший результат (нелінійні оператори не комутативні), тобто:

$$F_2 \circ F_1 \neq F_1 \circ F_2.$$

Розглянемо для прикладу послідовне з'єднання ідеального реле (див. рис. 9.4,а) і лінійної безінерційної ланки з коефіцієнтом посилення $k > 0$. Якщо лінійний підсилювач передує реле, то СХ з'єднання в точності повторює СХ реле

$$y = C \operatorname{sgn} x;$$

якщо ланки переставити місцями, то

$$y = kC \operatorname{sgn} x.$$

Бувають виключення, коли нелінійні перетворення комутативні. Наприклад, у разі *взаємно зворотних* НЕ $F_1, F_2 = F_1^{-1}$ маємо:

$$y = F_1 \circ F_2(x) = F_2 \circ F_1(x) = x.$$

Зворотні характеристики $F_1^{-1}; F_2^{-1}$ існують не завжди або не завжди однозначні при однозначній початковій. Взаємно зворотні НЕ мають СХ, графіки яких є симетричними щодо бісектриси першого і третього квадрантів (при однаковому масштабі для осей абсцис і ординат), що показано на рис. 9.11.

Еквівалентні СХ для паралельного з'єднання ланок. Паралельно сполучені НЕ еквівалентні одному НЕ з СХ

$$y = F_1(x) + F_2(x) = F_3(x).$$

Тут перестановка НЕ дає той же результат.

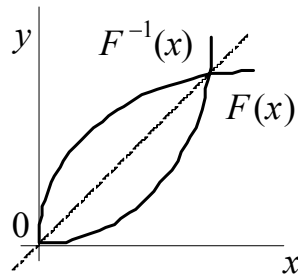


Рис. 9.11. Взаємно-зворотні СХ

Графічна процедура побудови СХ $F_3(x)$ зводиться до поординатного складання СХ $F_1(x)$ і $F_2(x)$. Якщо

$$y = F_1(x) + F_2(x) = x,$$

то такі НЕ називають *взаємно додатковими*. Компенсація природної нелінійності досягається при паралельному підключенні взаємно додаткової нелінійності.

Якщо структурна схема не містить контурів, тобто утворена тільки послідовним і паралельним з'єднаннями ланок, то легко знайти постійне значення виходу при заданому значенні входу.

Еквівалентні СХ систем із зворотним зв'язком. Нехай два НЕ утворюють контур – систему з негативним зворотним зв'язком (рис. 9.12). Принципова трудність визначення значення виходу системи y при заданому значенні входу f обумовлена зворотним зв'язком – для визначення y слід знати значення x , залежне від шуканого y .

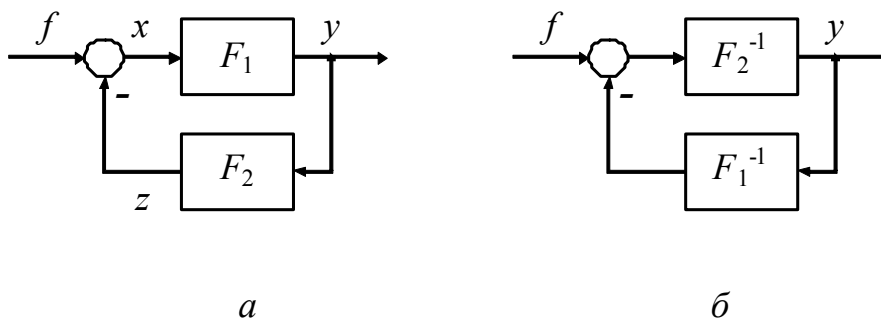


Рис.9.12. З'єднання із зворотним зв'язком (а) і еквівалентне з'єднання (б)

Для отримання еквівалентної СХ

$$y = F_3(f)$$

необхідно виключити змінні x і z . Запишемо вираз для виходу

$$y = F_1(x) = F_1(f - z) = F_1(f - F_2(y)). \quad (9.12)$$

Отримана шукана залежність, але в неявній формі.

Нехай існує зворотна нелінійність F_1^{-1} . Застосуємо це перетворення до лівої і правої частин (9.12) і отримаємо

$$f = F_1^{-1}(y) + F_2(y) = F_3^{-1}(y), \quad (9.13)$$

тобто СХ, зворотну шуканій.

Запишемо вираз (9.13) в наступному порядку:

$$F_2(y) = f - F_1^{-1}(y).$$

Нехай існує зворотна нелінійність F_2^{-1} . Застосуємо відповідне перетворення до обох частин і отримаємо:

$$y = F_2^{-1}(f - F_1^{-1}(y)).$$

Цьому виразу відповідає з'єднання із зворотним зв'язком двох НЕ (рис. 9.12,б), еквівалентне початковому з'єднанню в сенсі СХ $F_3(f)$. Порівнюючи цю структуру з початковою (рис. 9.12,а), помічаємо, що НЕ помінялися місцями, а їх характеристики замінені на зворотні.

Еквівалентність структур має місце й для динамічних ланок. У разі лінійних ланок з передавальними функціями $W_1(s)$ і $W_2(s)$ зворотними будуть оператори $1/W_1(s)$ і $1/W_2(s)$ відповідно.

Розглянемо приклад (рис. 9.13,а), коли НЕ типу “насичення” з СХ $F_1(x)$ охоплений негативним зворотним зв'язком у вигляді динамічної ланки з передавальною функцією (гнучкий зворотний зв'язок)

$$W_2(s) = \tau s / (Ts + 1).$$

Еквівалентна структура показана на рис. 9.13,б. Неважко відмітити, що у разі великого посилення НЕ в лінійній зоні ($k = \text{tg}(\alpha) \gg 1$), коли $|y(t)| < C$ можна в

схемі рис. 9.13,б ігнорувати зворотний зв'язок з коефіцієнтом передачі $1/k \ll 1$. В результаті наближеного отримаємо:

$$Y(s) / F(s) \approx (Ts + 1) / \tau s,$$

тобто передавальну функцію пропорційно-інтегральної ланки.

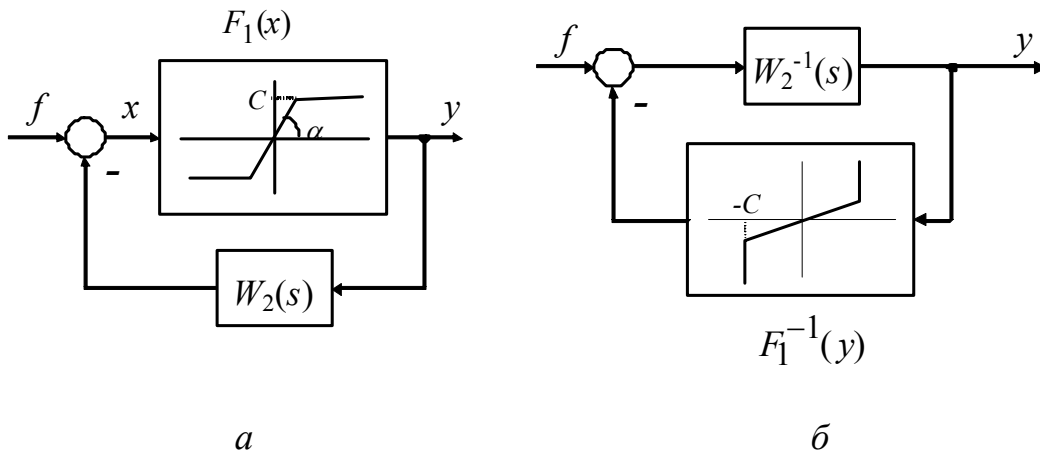


Рис. 9.13. Приклад обхвату НЕ лінійною динамічною ланкою

9.3. Аналіз поведінки систем на фазовій площині

9.3.1. Метод фазової площини.

Розглянемо математичну модель системи у формі диференціальних рівнянь першого порядку, вирішених відносно похідних

$$\frac{dv_i}{dt} = \varphi_i(v_1, \dots, v_n); \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.14)$$

У правій частині рівнянь (9.14) час t явно не входить, тобто це автономні стаціонарні системи, на які не діють зовнішні сили, а їх властивості незмінні в часі.

Стан скінченномірної динамічної системи (9.14) характеризується вектором в n -мірному просторі $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t))^T$. Початковий стан $\mathbf{v}(0)$ автономної системи (9.14) повністю визначає її поведінку для $t > 0$ незалежно від передісторії, тобто того, яким чином система прийшла в цей стан. Геометричне місце точок кінця вектора $\mathbf{v}(t)$ при $t \geq 0$ утворює траєкторію стану – образ по-

ведінки при конкретному початковому стані. На рис. 9.14 ілюструється траєкторія тривимірної системи.

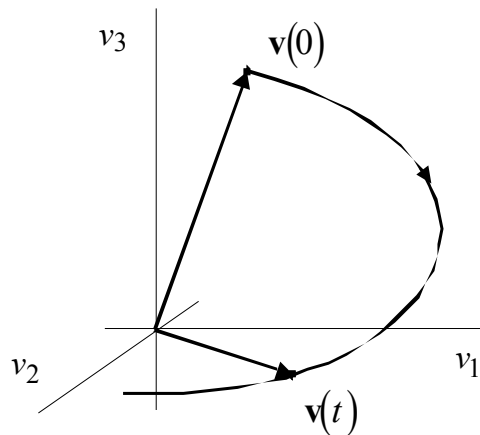


Рис. 9.14. Траєкторія зміни стану

Хоча геометрична інтерпретація методу простору станів розповсюджується на системи будь-якого порядку, важлива його перевага – наочність – найяскравіше виявляється у випадку систем другого порядку, коли стани системи представляються крапками на *фазовій площині*.

Метод фазової площини дає можливість зобразити якісну картину всієї сукупності вільних рухів (процесів) для вибраної області початкових умов (станів), а при необхідності – провести точні дослідження типів рухів, що цікавлять.

Нехай задані рівняння системи другого порядку

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \varphi_1(v_1, v_2); \\ \frac{dv_2}{dt} &= \varphi_2(v_1, v_2). \end{aligned} \tag{9.15}$$

Для отримання фазової траєкторії за початкових умов $v_{10} = v_1(0)$ і $v_{20} = v_2(0)$ з вирішення системи (9.15)

$$v_1(t; v_{10}, v_{20}); \quad v_2(t; v_{10}, v_{20})$$

слід виключити час t , тобто отримати залежність

$$v_2(v_1; v_{10}, v_{20}).$$

На рис. 9.15 показана відповідна графічна процедура отримання фазової траєкторії. Якщо змінити початкові умови, але таким чином, щоб вектор початкового стану потрапляв на раніше побудовану фазову траєкторію (крапка α на рис. 9.15,б), то нова траєкторія співпадає із старою. Можна бачити, що відрізок фазової траєкторії зображає незліченну множину рухів при початкових станах системи, співпадаючих з траєкторією. Це спрощує виведення узагальнювальних думок про властивості системи по сукупностям фазових траєкторій – *фазовому портрету динамічної системи*.

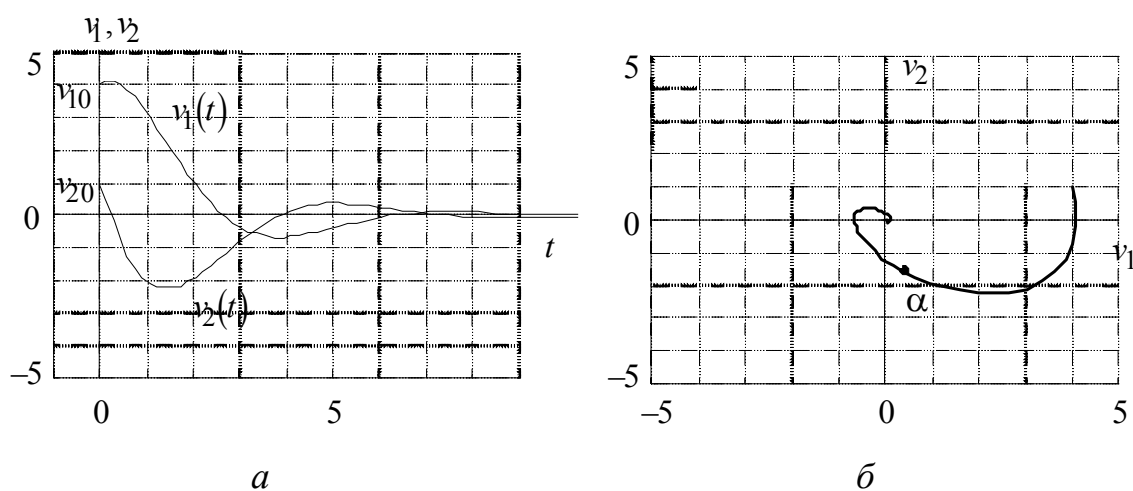


Рис. 9.15. Графічна процедура побудови фазової траєкторії

Розглядаючи координату v_1 як незалежну змінну, можна шляхом ділення другого рівняння системи (9.15) на перше, виключити час і отримати одне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dv_2}{dv_1} = \frac{\varphi_2(v_1, v_2)}{\varphi_1(v_1, v_2)}. \quad (9.16)$$

Вирішуючи це рівняння за конкретних початкових умов, можна отримати фазові траєкторії.

Якщо функції $\varphi_1(v_1, v_2)$ і $\varphi_2(v_1, v_2)$ однозначні, то кожній точці (v_1, v_2) відповідає єдине значення похідної dv_2/dv_1 (нахилу дотичної до фазової траєкторії), тобто через цю точку фазової площини проходить тільки одна фазова

траєкторія. Єдність порушується в так званих *особливих точках*, відповідних станам рівноваги системи:

$$\begin{aligned} dv_1 / dt &= 0; \\ dv_2 / dt &= 0, \end{aligned} \quad (9.17)$$

координати яких визначаються з рівнянь

$$\begin{aligned} \varphi_1(v_1, v_2) &= 0; \\ \varphi_2(v_1, v_2) &= 0. \end{aligned} \quad (9.18)$$

У особливих точках, як це витікає з (9.16) і (9.17), є невизначеність похідної: $dv_2/dv_1=0/0$. Кожна особлива точка зображає окреме (тривіальне) вирішення системи (9.15) і повинна розглядатися як окрема фазова траєкторія.

Як фазова змінна v_1 часто вибирається змінна входу нелінійного елемента; $v_1 = x$. Змінна v_2 зазвичай вибирається з умови $v_2 = dv_1/dt = x'$. В цьому випадку система рівнянь (9.15) прийме вигляд:

$$\begin{aligned} dx / dt &= x'; \\ dx' / dt &= \varphi_2(x, x'), \end{aligned}$$

а замість (9.16) маємо:

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{\varphi_2(x, x')}{x'}. \quad (9.19)$$

Виконання умови $v_2 = dv_1/dt$ додає фазовій площині наступні властивості:

- особливі точки розташовуються тільки на осі абсцис, де $v_2 = dv_1/dt = 0$;
- у верхній напівплощині ($v_2 = dv_1/dt > 0$) фазові траєкторії направлені зліва направо, тобто у бік збільшення v_1 , а в нижній напівплощині – справа наліво;
- фазові траєкторії ортогональні осі абсцис, оскільки з (9.19) при $v_2 = 0$ слідує $dv_2/dv_1 = \infty$.

9.3.2. Поведінка нелінійних систем в околиці положень рівноваги.

Розглянемо i -е ізольоване положення рівноваги (v_1^i, v_2^i) тобто i -у особливу точку, що є вирішенням системи рівнянь (9.18). Хай функції φ_1 і φ_2 в околиці цієї точки допускають розкладання в ступеневий ряд по відхиленням змінних

$(\Delta v_1, \Delta v_2)$. Нехтуючи нелінійними членами розкладання, замість нелінійних рівнянь (9.15) отримаємо систему лінійних диференціальних рівнянь для малих відхилень змінних:

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta v_1}{dt} &= a_{11}\Delta v_1 + a_{12}\Delta v_2; \\ \frac{d\Delta v_2}{dt} &= a_{21}\Delta v_1 + a_{22}\Delta v_2.\end{aligned}\tag{9.20}$$

У матричній формі рівняння (9.20) запишуться як:

$$\frac{d\Delta \mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{v},$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\varphi_1}{dv_1} & \frac{d\varphi_1}{dv_2} \\ \frac{d\varphi_2}{dv_1} & \frac{d\varphi_2}{dv_2} \end{pmatrix}$$

– матриця Якобі системи (9.15) в даній точці рівноваги.

Процедура перенесення початку координат в особливу точку і лінеаризація правих частин (9.15) показана на рис. 9.16.

Дотичні до кривих перетинаються, якщо якобіан відмінний від нуля: $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Вирішення рівнянь (9.20) мають вигляд:

$$\begin{aligned}\Delta v_1(t) &= C_{11}e^{s_1 t} + C_{12}e^{s_2 t}; \\ \Delta v_2(t) &= C_{21}e^{s_1 t} + C_{22}e^{s_2 t},\end{aligned}\tag{9.21}$$

де постійні C_{ij} залежать від початкових умов $\Delta v_1(0)$, $\Delta v_2(0)$ і коріння характеристичного полінома

$$D(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}).\tag{9.22}$$

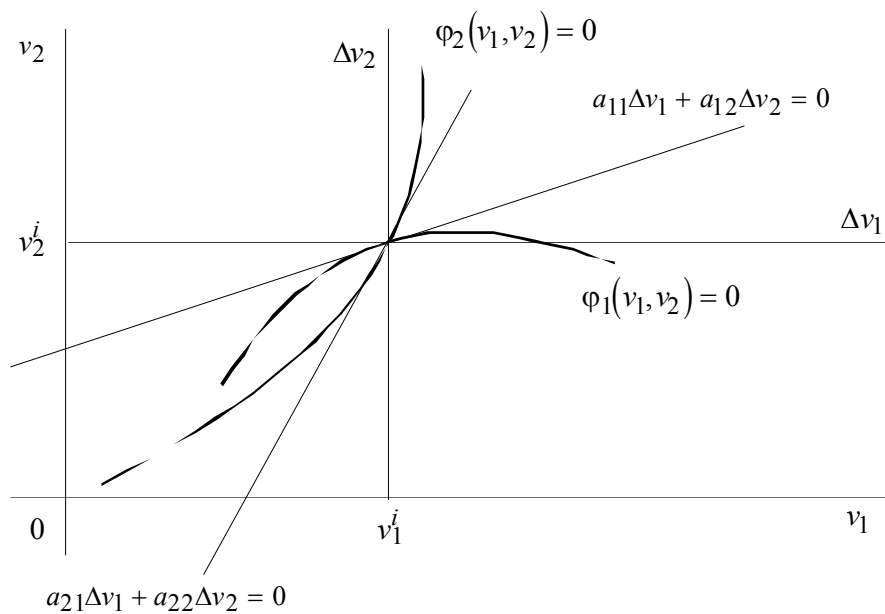


Рис. 9.16. Лінеаризація в околиці положення рівноваги

Вирази (9.21) відповідають випадку некратного коріння s_1, s_2 .

Виявляється, що фазові портрети нелінійних систем в околиці особливих точок близькі до фазових портретів лінеаризованих систем (9.20).

Якщо коріння s_1, s_2 полінома (9.22) дійсні негативні, то має місце особлива точка типу “стійкий вузол” (рис. 9.17,а). На рис. 9.17,б показані криві $v_i(t)$ для двох початкових станів. Прямолінійним фазовим траєкторіям відповідає стан, коли постійні при одній з експонент (9.21) дорівнюють нулю ($C_{11}=C_{21}=0$ або $C_{12}=C_{22}=0$).

При позитивному дійсному корінні s_1, s_2 маємо особливу точку типу “нестійкий вузол” (рис. 9.18,а). На рис. 9.18,б показані приклади відповідних кривих зміни v_1 у часі.

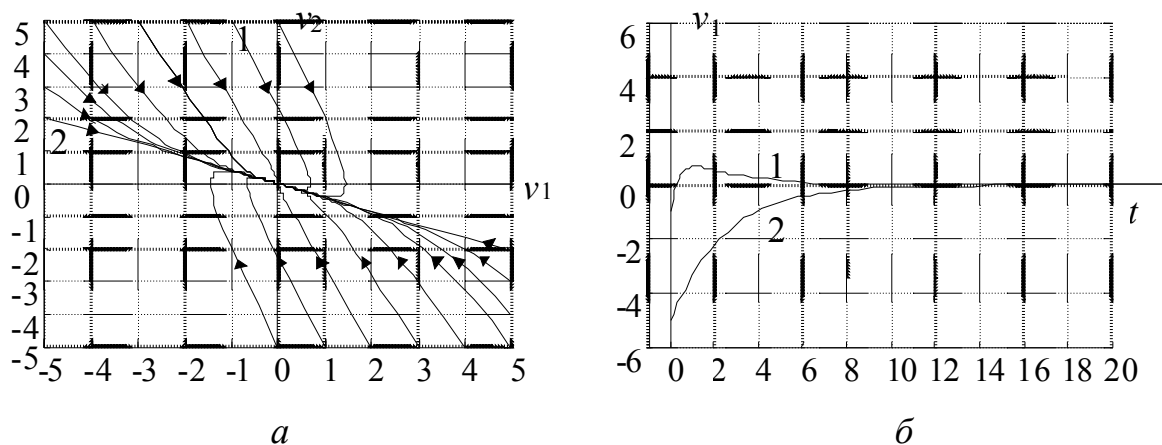


Рис. 9.17. Особлива точка типу “стійкий вузол”

Якщо один з дійсного коріння негативний, а інший – позитивний, то особлива точка називається “сідлом” (рис.9.19,*a*). Прямолінійні траєкторії – сепаратиси сідла – відповідають випадку, коли один з коефіцієнтів в (9.21) рівний нулю (пряма 2 на рис. 9.19,*б*).

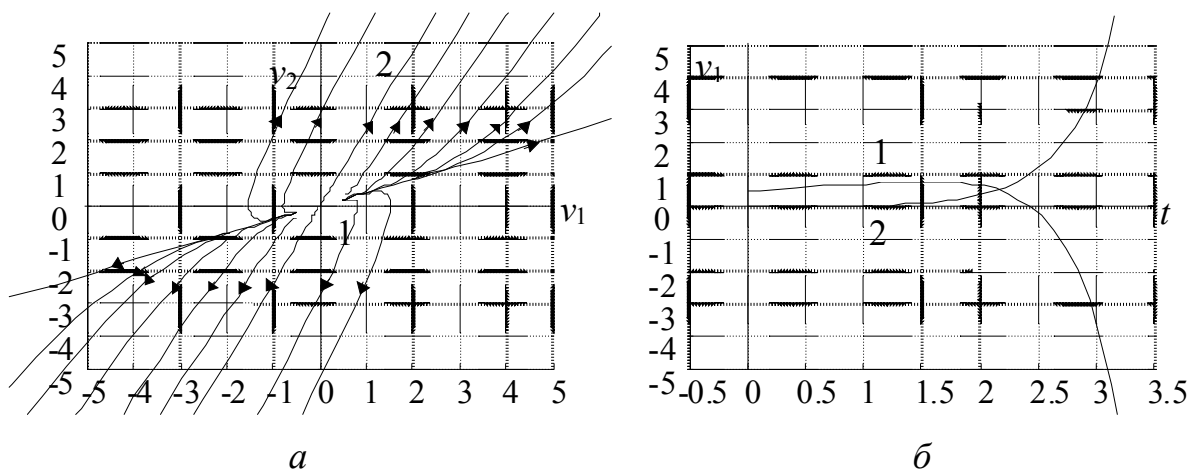


Рис. 9.18. Особлива точка типу “нестійкий вузол”

Комплексно-зв'язане коріння з негативними дійсними частинами дає особливу точку типу “стійкий фокус” (рис.9.20,*a*). На рис.9.20,*б* показано відповідний затухаючий коливальний процес.

Якщо дійсні частини комплексного коріння позитивні, то маємо “нестійкий фокус” (рис. 9.21,*a*) і коливальні процеси, що розходяться (рис. 9.21,*б*).

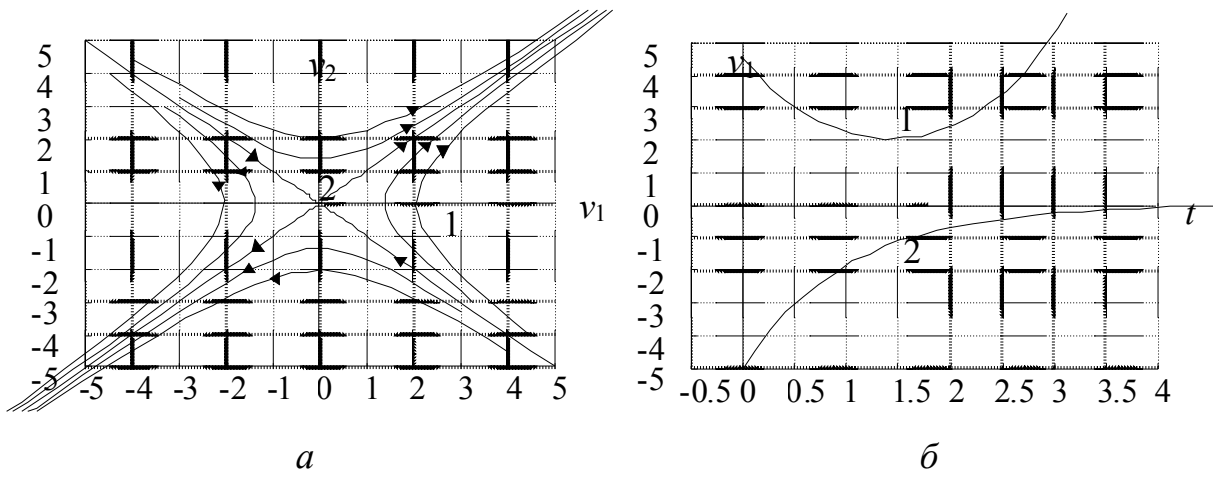


Рис. 9.19. Особлива точка типу “сідло”

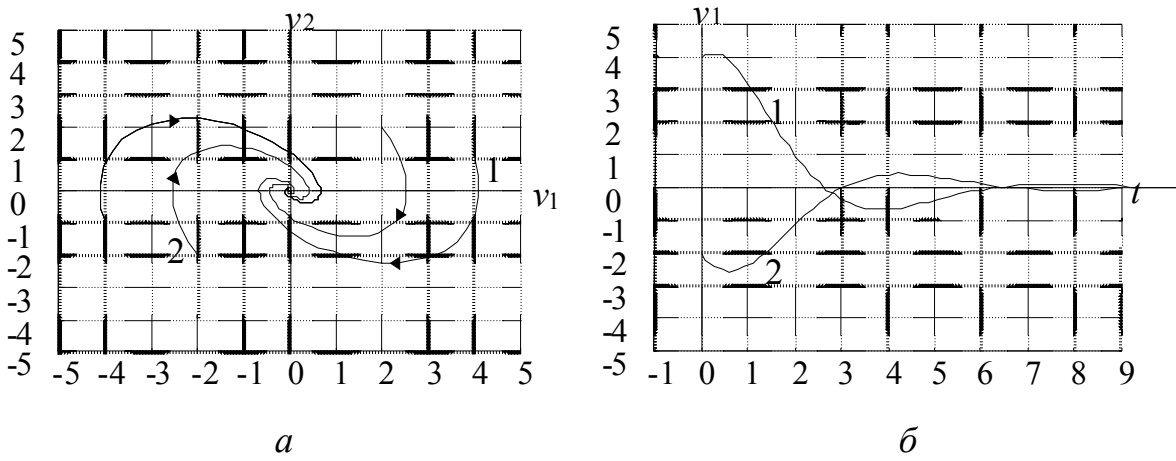


Рис. 9.20. Особлива точка типу “стійкий фокус”

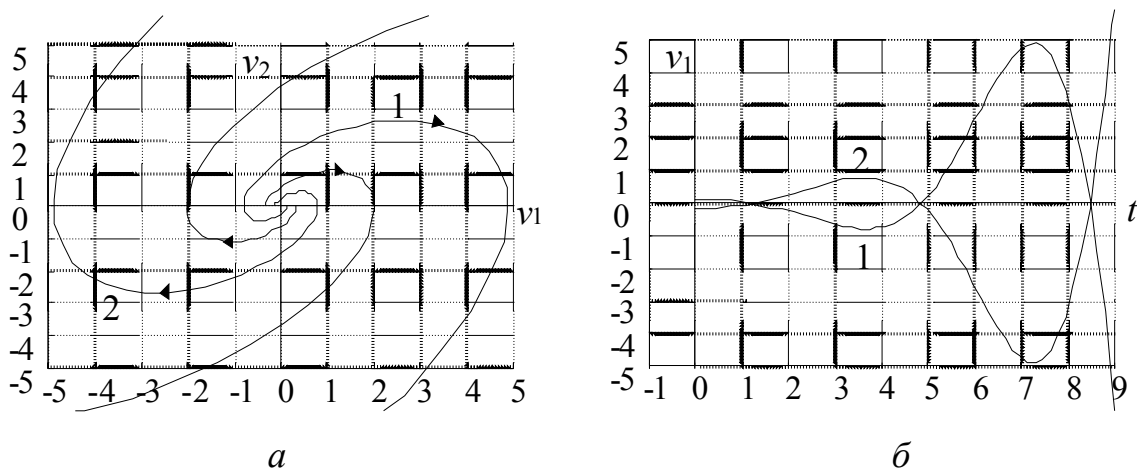


Рис.9.21. Особлива точка типу “нестійкий фокус”

Чисто уявному корінню консервативної системи $s_{1,2} = \pm j\omega_0$ відповідає особлива точка типу “центр”, утворена вкладеними один в одного еліпсами (рис. 9.22,*a*). Незгасаючий коливальний процес гармонійної форми з періодом $T=2/\pi\omega_0$ має амплітуду, визначувану початковими умовами (рис. 9.22,*б*).

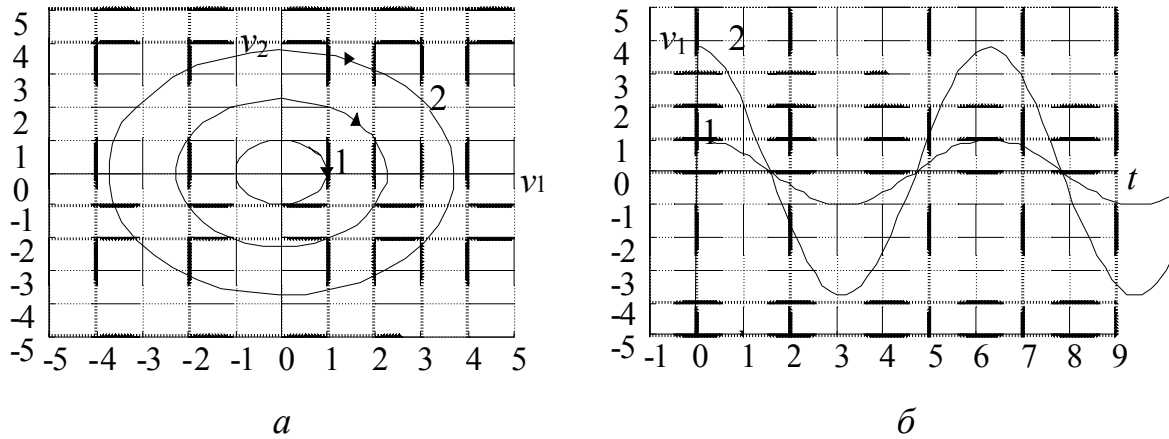


Рис. 9.22. Особлива точка типу “центр”

Особливим точкам типу “стійкий вузол” і “стійкий фокус” відповідають стійкі “в малому” положення рівноваги нелінійної системи; у разі особливих крапок “сідло”, “нестійкий вузол” і “нестійкий фокус” ці положення рівноваги нестійкі. У разі особливої точки типу “центр” про стійкість положення рівноваги нелінійної системи не можна судити по лінеаризованих рівняннях (9.20).

9.3.3. Побудова фазових портретів нелінійних систем.

Дослідження поведінки нелінійних систем другого порядку на фазовій площині доцільно починати з визначення положень рівноваги – особливих точок фазового портрета. Принциповою відмінністю нелінійних систем є те, що положень рівноваги може бути декілька або вони можуть бути відсутніми взагалі.

Якщо в околиці ізольованих положень рівноваги нелінійності досить гладкі, то записують лінеаризовані диференціальні рівняння для малих відхилень від конкретних положень рівноваги. По розташуванню власних значень матриць або коріння характеристичного полінома встановлюються типи особливих

точок, як це показано в п. 9.3.2. В околиці ізольованих особливих крапок – положень рівноваги – фазові портрети нелінійних систем схожі на фазові портрети відповідних лінеаризованих систем. У міру віддалення від точок рівноваги фазові портрети нелінійних систем можуть мати якісні відмінності.

Для побудови фазових траєкторій використовують графічні, аналітичні і чисельні методи.

Метод ізоклін – це найбільш простий графічний метод вирішення диференціальних рівнянь (9.16) (9.19). *Ізокліна* – крива рівного нахилу дотичних до фазових траєкторій. Її рівняння виходить прирівнюванням правих частин (9.16) або (9.19) заданому нахилу c :

$$\varphi_2(v_1, v_2) / \varphi_1(v_1, v_2) = c \text{ або } \varphi_2(v_1, v_2) / v_2 = c.$$

Параметр c сімейства ізоклін рівний тангенсу кута нахилу дотичних до фазових траєкторій (при однакових масштабах обох осей координат фазової площини). Сукупність нахилів c_i вибирається таким чином, щоб зміна кута між двома сусідніми ізоклінами була приблизно однаковою.

Приклад аналітичної побудови фазових портретів. В деяких випадках можливе аналітичне вирішення диференціальних рівнянь для фазових траєкторій (9.16), (9.19).

Розглянемо рівняння математичного маятника

$$y'' + \omega_0^2 \sin y = 0.$$

Як указувалося в п. 9.1.1, маятник має рахункову множину положень рівноваги: $y = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. За початкове положення маятника приймемо верхнє положення.

Лінеаризоване рівняння для малих відхилень Δy від нижніх положень рівноваги (непарних $k = 1, \pm 3, \dots$) запишемо (в силу $\sin(\Delta y) \approx \Delta y$) у вигляді

$$\Delta y'' + \omega_0^2 \Delta y = 0,$$

а для відхилень від верхніх положень рівноваги (парних $k = 0, \pm 2, \dots$):

$$\Delta y'' - \omega_0^2 \Delta y = 0.$$

Характеристичний поліном диференціального рівняння для нижніх положень рівноваги $D(s) = s^2 + \omega_0^2$ має пару уявних коренів $s_{1,2} = \pm j\omega_0$. Отже, цим положенням рівноваги відповідає особлива точка типу “центр”. Характеристичний поліном для верхніх положень рівноваги $D(s) = s^2 - \omega_0^2$ має дійсне коріння різних знаків $s_{1,2} = \pm\omega_0$. Цим положенням рівноваги відповідає особлива точка типу “сідло” (рис. 9.19).

Для отримання аналітичних виразів для фазових траєкторій маятника запишемо його диференціальне рівняння у формі Коші, прийнявши наступні змінні стани: $v_1 = y; v_2 = y'$ (природний базис):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= y'; \\ \frac{dy'}{dt} &= -\omega_0^2 \sin y. \end{aligned}$$

Ділення другого рівняння на перше дає диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dy'}{dy} = -\omega_0^2 \frac{\sin y}{y'}, \quad (9.23)$$

вирішуючи яке за різних початкових умов (y_0, y'_0) отримуємо вирази для інтегральних кривих на площині (y, y') .

Рівняння (9.23) допускає розділення змінних

$$y' dy' = -\omega_0^2 \sin y dy;$$

після інтегрування маємо

$$\frac{(y')^2}{2} \Big|_{y'_0}^{y'} = +\omega_0^2 \cos y \Big|_{y_0}^y$$

або шуканий вираз

$$y' = \pm \sqrt{2(\omega_0^2 \cos y + (y'_0)^2 / 2 - \omega_0^2 \cos y_0)}.$$

Відповідний фазовий портрет маятника зображений на рис. 9.23.

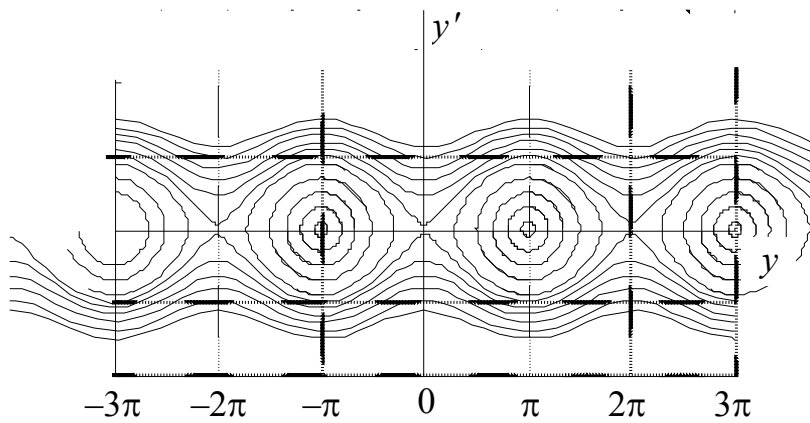


Рис. 9.23. Фазовий портрет маятника

Сепаратиси, утворені злиттям викривлених “вусів” сідел, виявляються межами областей з коливальним рухом; незамкнуті траєкторії поза цими областями зображають нерівномірні обертальні рухи маятника навколо точки підвісу.

9.3.4. Зв'язок фазових траєкторій з часом.

Побудова фазових траєкторій пов'язана з виключенням часу t з вирішень $v_1(t; v_{10}, v_{20})$ і $v_2(t; v_{10}, v_{20})$. Представляє інтерес зворотний перехід – побудова процесів по відрізку фазової траєкторії, що цікавить. Тобто, мова йде про визначенні часу “пробіжки” зображаючою точкою відрізків фазової траєкторії – проставлянні на траєкторіях міток часу.

Обмежимося розглядом випадку природного базису на фазовій площині: $v_1 = x; v_2 = x'$. Зафіксуємо відрізок фазової траєкторії, що цікавить нас, $x'(x)$ як це показано на рис. 9.24. Знайдемо, за який час Δ зображаюча точка пройде від початку відрізка ($x=x_0$) до його кінця ($x=x_f$).

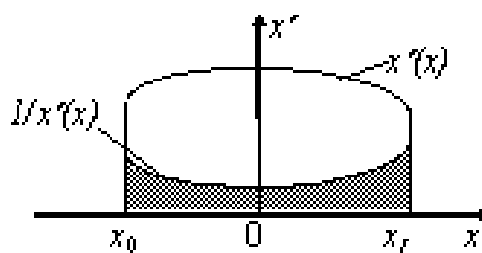


Рис. 9.24. Визначення тривалості процесу

За визначенням маємо $dx / dt = x'$, звідси слідує $dx / x' = dt$. Інтегруючи, отримаємо:

$$\int_{x_0}^{x_f} \frac{dx}{x'(x)} = t \Big|_{t_0}^{t_f} = t_f - t_0 = \Delta t.$$

Результат має простий геометричний сенс – час процесу (переходу системи з одного стану в інший) пропорційний площі під кривою $1/x'(x)$ (див. рис. 9.24).

Чим вище проходить траєкторія $x'(x)$ у верхній напівплощині, тобто чим більше швидкості процесу, тим ближче крива $1/x'(x)$ до осі абсцис, тим менше Δt , тобто процес протікає швидше.

Розглянемо приклад фазової траєкторії у вигляді відрізка прямої, направленої на початок координат (рис. 9.25,а)

$$\rightarrow \quad dx/dt = x' = -x. \quad (9.24)$$

Зворотна крива $1/x'(x) = -1/x$ – відрізок гіперболи; площа під нею рівна часу процесу – приходу зображуючої точки в початок координат. Знайдемо цей час:

$$\Delta t = - \int_{-1}^0 dx / x = - \ln x \Big|_{-1}^0 = \infty.$$

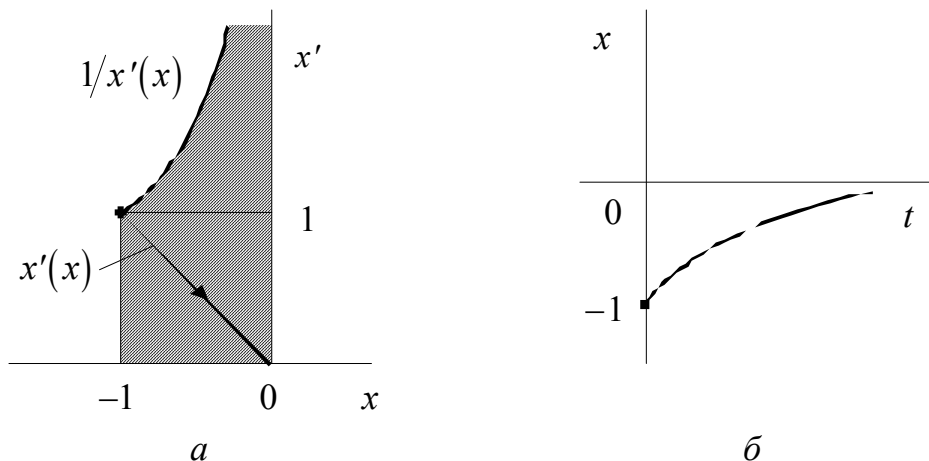


Рис. 9.25. Фазова траєкторія (а) і процес (б)

Дійсно, прямолінійному відрізку фазової траєкторії відповідає експоненціальний рух (рис. 9.25,б), тобто вирішення диференціального рівняння (9.24) за початкової умови $x(0) = -1$ має вигляд: $x(t) = -e^{-t}$. Такий рух затухає нескінченно довго.

9.3.5. Особливості фазових портретів нелінійних систем.

В околиці ізольованих положень рівноваги фазові портрети нелінійних систем з гладкими в цих точках характеристиками подібні до портретів відповідних лінійних систем. Але у міру віддалення від особливої точки фазовий портрет нелінійної системи може мати істотні відмінності.

Неєдиність особливих точок. Якісна відмінність фазових портретів нелінійних систем від лінійних може бути обумовлена наявністю множини особливих точок різних типів. У прикладі фазового портрета маятника (див. рис. 9.23) можна бачити рахункову множину особливих точок двох типів – “центр” і “сідло”. Можливе існування нескінченного числа точок рівноваги у вигляді відрізків рівноваги, а також відсутність взагалі особливих точок.

Граничні цикли і сепаратиси. На фазових портретах деяких нелінійних систем мають місце ізольовані замкнуті траєкторії – *граничні цикли* Пуанкаре (*атрактори*). Якщо граничний цикл стійкий, то йому відповідають автоколивання в системі. Причому, ці коливання стійкі не тільки по відношенню до малих змін початкових умов, але також й до малих змін параметрів системи. На рис. 9.26 наведені ілюстрації фазових портретів нелінійних систем із стійкими граничними циклами.

Як інший приклад приведемо фазовий портрет осцилятора Ван дер Поля із стійким граничним циклом (рис. 9.27).

У тому випадку, коли граничний цикл нестійкий за початковими умовами, в реальній системі не можна спостерігати сталі коливання, оскільки вони розходяться або затухають із-за малих збурень. Стійкі і нестійкі граничні цикли є межами областей фазової площини з різним характером руху.

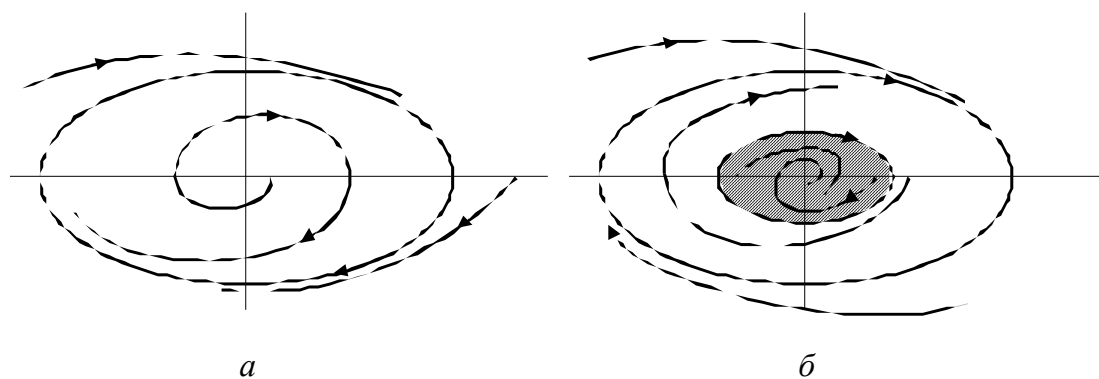


Рис. 9.26. Приклади фазових портретів з граничним циклом

Наприклад, нестійкий внутрішній граничний цикл фазового портрета (див. рис. 9.26,б) обмежує відкриту область тяжіння стійкої особливої точки типу “фокус”.

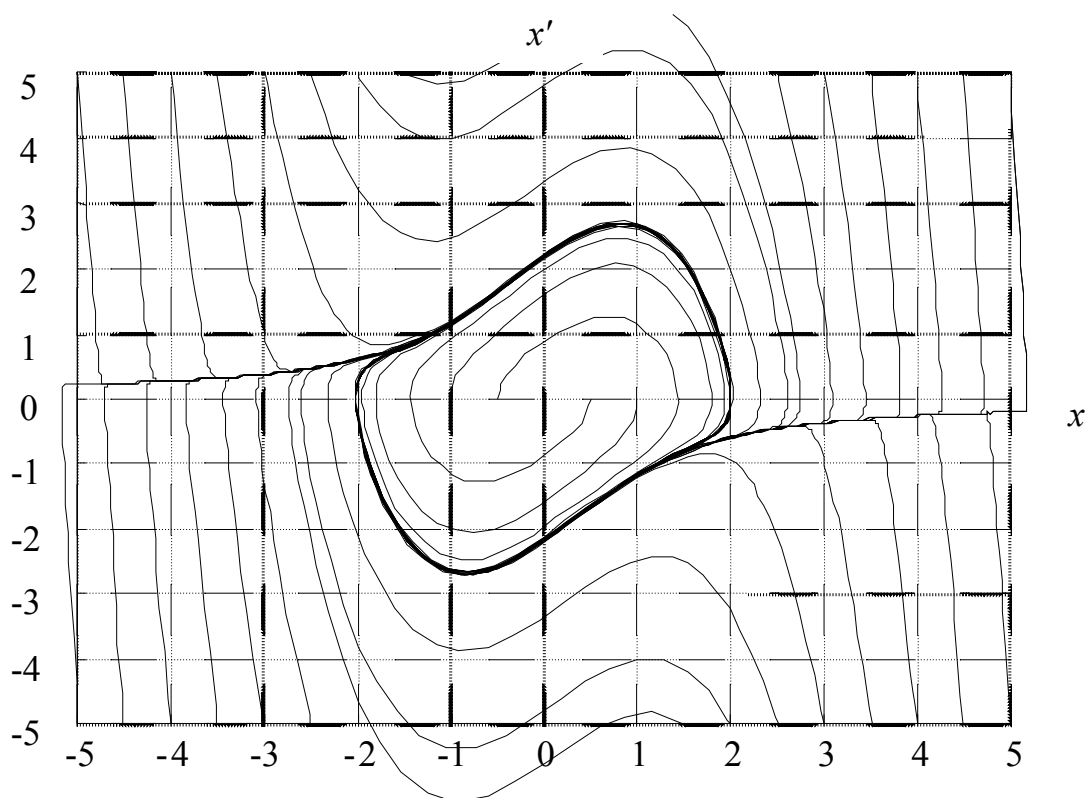


Рис. 9.27. Приклад фазового портрета осцилятора Ван дер Поля

Зовнішній стійкий граничний цикл розділяє області рухів, що розходяться, і згасаючих рухів. При такій топології фазового простору говорять про

“жорсткий” режим збудження автоколивань – для виникнення незгасаючих коливань початкові умови повинні бути достатньо великими, тобто початкове положення зображаючої точки повинне бути поза заштрихованою областю.

Топологічна структура фазової площини і біфуркації. Фазові портрети нелінійних систем другого порядку вельми зручні для якісної оцінки можливих рухів системи. Рухи в системі визначаються топологічною структурою фазової площини – типом і взаємним розташуванням особливих траєкторій – особливих точок, граничних циклів (атракторів), сепаратрис. Наприклад, по портрету на рис. 9.26,б можна сказати, що положення рівноваги стійке по відношенню до початкових умов, які належать області тяжіння, що обмежується нестійким граничним циклом. За початкових умов за межею області тяжіння з часом встановлюються незгасаючі коливання, амплітуда і частота яких локально не залежить від початкових умов. Така картина зберігається незалежно від розмірів граничних циклів; від них залежать тільки порогові значення початкових умов, а також амплітуда і частота коливань, тобто кількісна, а не якісна сторона явищ.

Нехай фазовий портрет нелінійної системи має вигляд, що показаний на рис. 9.26,б. Якщо деякий параметр q цієї системи зміниться, то можна побудувати новий фазовий портрет, який буде або якісно таким же, або іншим. У другому випадку говорять про зміну топологічної структури фазової площини. Значення параметра q^* , при якому відбувається така зміна, називають *біфуркаційним*. Так, на фазовому портреті (рис. 9.26,б) внутрішній граничний цикл може у міру зміни параметра q стягуватися на початок координат і при біфуркаційному значенні q^* злитися з ним. При подальшій зміні q фазовий портрет міститиме лише один граничний цикл, а особлива точка стане нестійкою.

9.4. Стійкість положень рівноваги

При дослідженні нелінійних систем керування слід говорити про стійкість конкретного руху, а не системи в цілому. Дійсно, одні рухи нелінійної си-

стеми можуть бути стійкими, а інші – ні. Нижче обмежимося розглядом стійкості положень рівноваги автономних систем.

9.4.1. Поняття про стійкість незбуреного руху.

Нехай математична модель автономної системи представлена у формі системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varphi(\mathbf{v}), \quad (9.25)$$

де: \mathbf{v} – вектор стану; φ – вектор-функція.

Вирішення системи (9.25) $\mathbf{v}^*(t, \mathbf{v}_0)$ за конкретних початкових умов $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(\mathbf{0})$, слідуєчи Ляпунову, називають *незбуреним рухом*. Вибір руху, що приймається за незбурений, довільний. Зокрема, якщо початковим умовам \mathbf{v}_0 відповідає положення рівноваги, то воно і буде незбуреним рухом.

Всяке інше вирішення диференціальних рівнянь

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}_0),$$

за інших початкових умов $\mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}$, називається *збуреним*.

Варіація руху – різниця між збуреним і незбуреним рухами:

$$\Delta\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}_0) - \mathbf{v}^*(t, \mathbf{v}_0).$$

Незбурений рух називається *стійким*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon)$, що з

$$\|\Delta\mathbf{v}_0\| < \delta$$

для всіх $t > T$ слідує:

$$\|\Delta\mathbf{v}(t)\| < \varepsilon.$$

Тут $\|\ \|\$ означає норму вектора.

Якщо як незбурений рух прийняти стан рівноваги системи, то визначення стійкості можна інтерпретувати таким чином: положення рівноваги називається стійким, якщо, задавши навколо точки рівноваги будь-яку скільки завгодно малу область ε , можна знайти таку область $\delta(\varepsilon)$, що поміщена у момент часу $t = 0$

в будь-яку точку цієї області зображаюча точка у момент часу $t = T$ увійде до області і далі з неї не вийде. На рис. 9.28 на фазовій площині системи другого порядку ілюструється приведення визначення для норми типу $\|\mathbf{v}\|_{\infty} = \max_i |v_i|$.

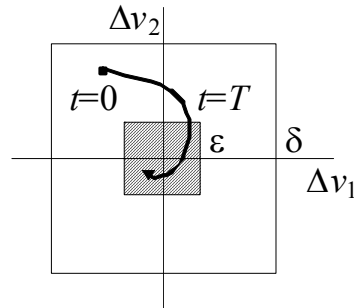


Рис. 9.28. Ілюстрація визначення стійкості

Якщо прийняти евклидову норму $\|\mathbf{v}\|_2 = (\sum_i v_i^2)^{1/2}$, то області ε і δ у векторних просторах відповідних розмірностей матимуть вид куль з відповідними радіусами.

Асимптотична стійкість означає, що $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \mathbf{v}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, тобто рухи асимптотично прагнуть до незбуреного руху, зокрема, при $t \rightarrow \infty$ приходять в стан рівноваги.

Стійкість по Ляпунову – поняття якісне (теоретичне), оскільки не обумовлюються розміри *області тяжіння* незбуреного руху; тут говорять про стійкість “в малому”. Стійкість “у великому” – поняття кількісне (практичне), коли указуються межі області тяжіння.

9.4.2. Перший метод Ляпунова.

Метод застосовується для дослідження стійкості по лінеаризованих рівняннях для малих варіацій змінних.

Застосування методу до рівнянь у формі Коші. Нехай динамічна система описується рівняннями (9.25). Позначимо через \mathbf{v}^* вектор координат досліджуваного положення рівноваги, тобто вирішення системи рівнянь

$$\varphi(\mathbf{v})=0.$$

Покладемо, що функції φ допускають розкладання в статичній ряд в точці \mathbf{v}^* . Нехтуючи малими вищого порядку в порівнянні з варіаціями $\Delta\mathbf{v}$, отримаємо замість рівнянь (9.25) лінеаризовану систему

$$\frac{d\Delta\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{v}^*)\Delta\mathbf{v},$$

де

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}^*) = \left. \frac{\partial\varphi(\mathbf{v})}{\partial\mathbf{v}} \right|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial v_n} \end{bmatrix}$$

– матриця перших похідних нелінійних функцій (матриця Якобі), що обчислюються в точці рівноваги $\mathbf{v}=\mathbf{v}^*$. На рис. 9.16 було наведено геометричну ілюстрацію процедури лінеаризації в околиці положення рівноваги.

Перший метод Ляпунова базується на тому, що про стійкість “в малому” положення рівноваги нелінійної системи можна судити за наслідками аналізу лінеаризованої системи:

- якщо всі власні значення матриці \mathbf{A} мають негативні дійсні частини, тобто лінеаризована система стійка, то положення рівноваги стійке;
- якщо лінеаризована система нестійка, то положення рівноваги нестійке.

Перший метод Ляпунова застосовується дуже часто. Проте він має наступні недоліки:

- досліджується тільки стійкість “в малому”;
- застосовується тільки для систем, що лінеаризовані в околиці положень рівноваги.

Дослідження стійкості по диференціальних рівняннях n-го порядку.

Нехай дано диференціальне рівняння вигляду (9.4), яке для автономної системи (при $x(t) \equiv 0$) приводиться до вигляду:

$$\Phi(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Положення рівноваги є дійсними вирішеннями рівняння статички

$$\Phi(y, 0, \dots, 0) = 0,$$

отриманого з початкового рівняння прирівнюванням похідних нулю. Вибирається досліджуване положення рівноваги y^* і ліва частина початкового рівняння розкладається в статеchnій ряд за умови, що функція Φ аналітична в його околиці:

$$\Phi(y^*, 0, \dots, 0) + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_* \Delta y + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right|_* \Delta y' + \dots + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n)}} \right|_* \Delta y^{(n)} + \dots = 0.$$

Вважаючи, що відхилення змінної y і її похідних малі, можна нехтувати в розкладанні малими вищих порядків. В результаті вийде лінійне диференціальне рівняння

$$a_n \frac{d^n \Delta y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d \Delta y}{dt} + a_0 \Delta y = 0,$$

коефіцієнти якого рівні значенням часткових похідних функції Φ в точці рівноваги.

Якщо всі коріння характеристичного полінома

$$A(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

мають негативні дійсні частини, то положення рівноваги початкової нелінійної системи стійке.

Приклад. Дослідимо стійкість положення рівноваги осцилятора Ван дер Поля, що описується диференціальним рівнянням другого порядку:

$$\Phi(y, y', y'') = y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0.$$

Система має єдине положення рівноваги $y^* = y' = y'' = 0$.

Лінеаризоване для малих відхилень рівняння запишеться так:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

де:

$$a_0 = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_* = (2\mu y' y + 1)|_* = 1;$$

$$a_1 = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right|_* = -\mu(1 - y^2)|_* = -\mu;$$

$$a_2 = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y''} \right|_* = 1.$$

Характеристичний поліном рівняння

$$A(s) = s^2 - \mu s + 1$$

має наступне коріння

$$s_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}.$$

Положення рівноваги не стійке, якщо $\mu > 0$. При значенні $\mu \geq 2$ на фазовій площині на початку координат є особлива точка типу “нестійкий вузол”. При значеннях $0 < \mu < 2$ там же матимемо особливу точку типу “нестійкий фокус”. Фазовий портрет осцилятора Ван дер Поля (див. рис. 9.27) має стійкий граничний цикл, якому відповідають автоколивання.

Дослідження стійкості по моделях у формі структурної схеми. Нехай є модель у формі структурної схеми не обов'язково розрахункового вигляду; наприклад, вона може мати декілька НЕ і довільну структуру. Покладемо, що всі НЕ є безінерційними. Перш за все, необхідно провести аналіз рівноважних режимів. Якщо вони існують, то слід знайти відповідні значення змінних на входах всіх НЕ системи. Аналіз проводиться по частковій моделі для рівноважних режимів: динамічні ланки замінюються безінерційними.

Для визначення значень змінних на входах всіх НЕ можна застосувати аналітичний, графічний або чисельний методи.

Після того, як знайдено значення $x = x^*$ змінної на вході НЕ, що заданий аналітично

$$y = F(x),$$

лінеаризація означає заміну НЕ безінерційною ланкою

$$\Delta y = k \Delta x$$

з коефіцієнтом посилення

$$k = \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x^*},$$

рівним значенню похідної в точці рівноваги. Ясно, що СХ НЕ в точці лінеаризації повинна бути гладкою (що диференціюється).

У тому випадку, коли СХ НЕ задана графічно, лінеаризація зводиться до визначення тангенса кута нахилу дотичної до СХ в точці рівноваги (рис. 9.29). Практично коефіцієнт посилення визначається як відношення приростів (див. рис. 9.29,а):

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

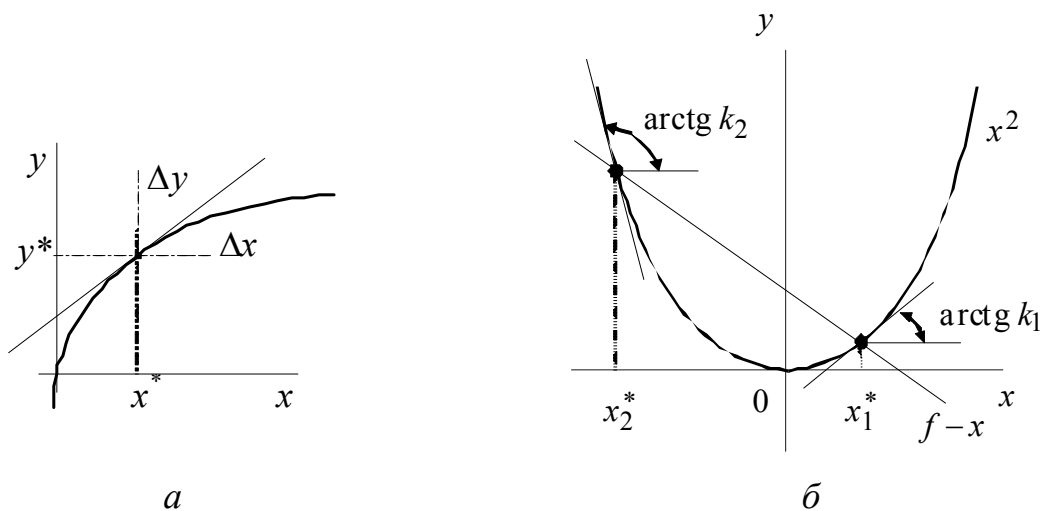


Рис. 9.29. Лінеаризація НЕ

Якщо НЕ має декілька входів

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_N),$$

то в результаті лінеаризації отримаємо:

$$\Delta y = k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2 + \dots + k_N \Delta x_N,$$

де коефіцієнти посилення по різних входах рівні значенням часткових похідних функції F в точці рівноваги. Наприклад, лінеаризація елемента перемножування двох змінних $y = x_1 x_2$ у точці x_1^*, x_2^* дає:

$$\Delta y = x_2^* \Delta x_1 + x_1^* \Delta x_2.$$

В результаті лінеаризації всіх НЕ для конкретного положення рівноваги виходить лінійна модель для малих відхилень змінних на входах НЕ. Аналіз стійкості лінеаризованої моделі відповідно до першого методу Ляпунова дає можливість судити про стійкість вибраного положення рівноваги нелінійної системи.

9.4.3. Другий (прямий) метод Ляпунова.

Метод не пов'язаний з лінеаризацією диференціальних рівнянь системи.

Нехай автономна система описана рівняннями у формі Коші

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varphi(\mathbf{v}) \quad (9.26)$$

– нехай положення рівноваги $\mathbf{v}^* = 0$. Необхідно дослідити її стійкість.

Введемо в розгляд однозначну скалярну функцію змінних стану (що диференційована в деякій області, яка містить початок координат)

$$V(\mathbf{v}) = V(v_1, \dots, v_n).$$

Функція $V(\mathbf{v})$ називається *знакопостійною*, якщо вона має один і той же знак усюди в деякій області, що містить початок координат ($\mathbf{v}=\mathbf{0}$), за винятком деяких точок, де вона рівна нулю. Знакопостійна функція, рівна нулю тільки на початку координат, називається *знаковизначеною*: позитивно-визначеною або негативно-визначеною, залежно від знаку. На рис. 9.30 показаний приклад позитивно-визначеної функції – параболоїд обертання:

$$V(v_1, v_2) = v_1^2 + v_2^2.$$

А.М. Ляпунов показав, що для стійкості положення рівноваги *достатньо* існування позитивно-визначеної функції $V(\mathbf{v})$, повна похідна за часом якої $dV(\mathbf{v})/dt$ є негативною знакопостійною функцією $W(\mathbf{v})$.

Якщо функція $W(\mathbf{v})$ негативно-визначена, то положення рівноваги *стійке асимптотично*. Якщо ця умова виконана при будь-яких \mathbf{v} і, крім того, $V(\mathbf{v}) \rightarrow \infty$ при $\|\mathbf{v}\| \rightarrow \infty$, то положення рівноваги *асимптотично стійке в цілому*.

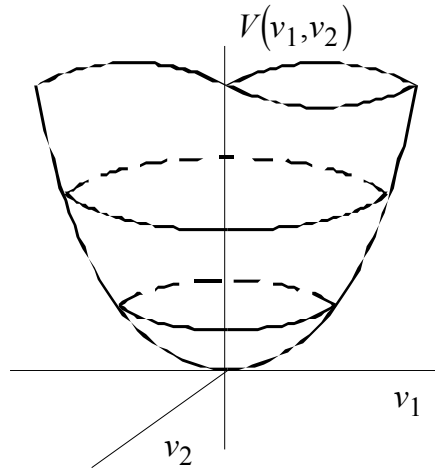


Рис. 9.30. Приклад позитивно-визначеної функції

Дамо деякі пояснення. Похідна за часом функції Ляпунова

$$\frac{dV(\mathbf{v})}{dt} = \frac{\partial V(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

через диференціальні рівняння (9.26) рівна:

$$\frac{dV(\mathbf{v})}{dt} = \frac{\partial V(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \varphi(\mathbf{v}) = W(\mathbf{v}),$$

тобто є тільки функцією змінних стану системи. Властивості цієї функції і визначають стійкість положення рівноваги. Функція $W(\mathbf{v})$ рівна скалярному добутку вектора градієнта функції Ляпунова

$$\mathbf{grad}V(\mathbf{v}) = \left[\frac{\partial V(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right]$$

на вектор швидкості зміни стану $d\mathbf{v}/dt$. Відомо, що скалярний добуток векторів рівний добутку їх модулів, що помножені на косинус кута між векторами:

$$W(\mathbf{v}) = |\mathbf{grad}V(\mathbf{v})| \cdot |d\mathbf{v} / dt| \cos \psi .$$

Якщо за умовами тверджень функція $W(v)$ знакопостійна (знаковизначена) протилежного з $V(\mathbf{v})$ знаку, то це означає, що кут ψ негострий (тупий). Іншими словами, якщо проекція вектора швидкості зміни стану системи на вектор градієнта функції $V(v)$ непомітна (негативна), то стани системи міняються тільки у напрямі незростання (убування) функції Ляпунова.

На рис. 9.31 показана фазова площина деякої системи другого порядку з нанесеними на ній лініями однакового рівня функції Ляпунова

$$V(v_1, v_2) = c_i = \text{const}.$$

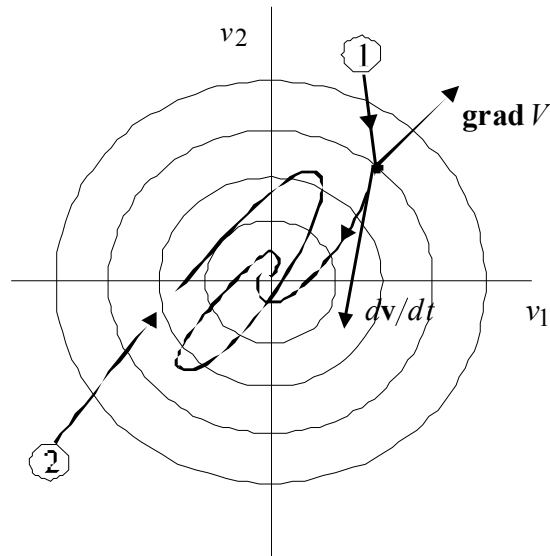


Рис.9.31. Ілюстрація другого методу Ляпунова

Це вкладені один в одного усюди щільно замкнуті лінії, із зменшенням c_i що стягуються на початок координат. Для вибраної точки фазової площини на рисунку показаний вектор $\text{grad}V(\mathbf{v})$. Через цю точку проходить єдина фазова траєкторія (1), дотична до якої є вектор швидкості $(dv_1/dt, dv_2/dt)^T$. Якщо кут між цими векторами тупий, то фазова траєкторія системи переходить від великих значень V до менших і з часом прагне до початку координат (точці рівноваги). Значення функції Ляпунова можна інтерпретувати як деяку узагальнену відстань між станом системи і положенням рівноваги, стійкість якої досліджується. Зменшення цієї відстані уздовж будь-якої фазової траєкторії гарантує стійкість.

Викладений метод базується на достатній умові стійкості, тобто її невиконання не означає, що незбурений рух нестійкий. Сказане ілюструється на рис. 9.31 фазовою траєкторією (2), для якої умови другого методу при вибраній функції $V(\mathbf{v})$ не виконуються, хоча положення рівноваги стійке.

9.4.4. Застосування другого методу Ляпунова.

Другий метод Ляпунова універсальний, оскільки не пов'язаний з лінеаризацією рівнянь руху (9.26) і не накладає особливих обмежень на їх праві частини. Разом з тим, застосування другого методу Ляпунова в практиці проектування систем керування ускладнюється:

- відсутністю загальних рекомендацій по вибору функцій Ляпунова;
- достатністю характеру тверджень, тобто якщо умови не виконуються, то про стійкість положення рівноваги нічого сказати не можна, можна тільки порекомендувати підібрати іншу функцію $V(\mathbf{v})$.

Найчастіше як функція $V(\mathbf{v})$ вибирають квадратичні форми

$$V(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbf{H} \mathbf{v}, \quad (9.27)$$

де \mathbf{H} – позитивно-визначена матриця. Вираз (9.27) для $n = 2$ розкривається так:

$$V(v_1, v_2) = (v_1 v_2) \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = h_{11}v_1^2 + h_{12}v_1v_2 + h_{21}v_2v_1 + h_{22}v_2^2.$$

Для встановлення позитивної визначеності матриці \mathbf{H} можна скористатися критерієм Сильвестра, що зводиться до перевірки позитивності діагональних визначників матриці. Наприклад, для $n=2$ умови запишуться так:

$$h_{11} > 0; \quad h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} > 0; \quad h_{22} > 0.$$

Недоліком форми (9.27) є те, що вона не враховує особливостей нелінійних систем.

9.4.5. Частотний метод дослідження абсолютної стійкості. Критерій Попова.

Розглянемо нелінійну систему розрахункової структури (див. рис. 9.8) із стійкою ЛЧ. Покладемо, що НЕ має однозначну СХ, що задовольняє умовам:

$$\begin{aligned} F(0) &= 0; \\ 0 &\leq F(x) \leq kx. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Це означає належність СХ секторам в першому і третьому квадрантах (рис. 9.32), утвореним віссю абсцис і прямою $y = kx$.

Говорять, що НЕ належить куту $[0, k]$. Це є основною ознакою даного класу нелінійностей.

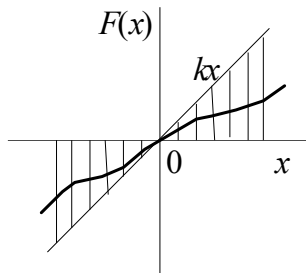


Рис. 9.32. Нелінійність у куту

За відсутності дії система має єдине положення рівноваги $x = 0$, стійкість якої досліджуємо нижче.

Необхідна умова абсолютної стійкості. Відома гіпотеза, висунута М.А. Айзерманом, – якщо замінити НЕ лінійною підсилювальною ланкою

$$y = k_n x,$$

то лінеаризована таким чином система стійка при всіх $0 \leq k_n \leq k$ (кажуть, що k – кут Гурвиця), причому положення рівноваги системи з будь-яким НЕ, що належить куту $[0, k]$, буде абсолютно стійким. Проте виявилось, що гіпотеза не має місця, оскільки були знайдені приклади (У.А. Плісс), коли положення рівноваги систем, для яких виконуються умови гіпотези, не були стійкі в цілому.

Очевидно, умови гіпотези є *необхідними*, оскільки лінійні перетворення є окремим випадком нелінійних і належать описаному вище класу (9.28). Необхідну умову абсолютної стійкості легко перевірити. З теорії лінійних систем керування відомо, що дана система стійка при будь-якому значенні посилення $0 \leq k_n \leq k$, якщо АФХ ЛЧ не перетинає променя $(-\infty, -1/k]$ на дійсній негативній осі.

Достатня умова абсолютної стійкості. Частотний критерій абсолютної стійкості положення рівноваги вперше був сформульований В.М. Поповим: для абсолютної стійкості положення рівноваги нелінійної системи із стійкою ЛЧ *достатньо* існування дійсного q , для якого виконується умова

$$\forall \omega \geq 0: \operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W(j\omega)] > -\frac{1}{k}, \quad (9.29)$$

де k – кут абсолютної стійкості. Формулювання критерію (9.29) допускає просту геометричну інтерпретацію. Представимо АФХ ЛЧ у вигляді:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (9.30)$$

Після підстановки (9.30) в нерівність (9.29) і виділення дійсної частини отримаємо умову абсолютної стійкості у вигляді:

$$P(\omega) - q\omega Q(\omega) > -\frac{1}{k}. \quad (9.31)$$

Введемо поняття модифікованої АФХ ЛЧ

$$W^*(\omega) = P^*(\omega) + jQ^*(\omega),$$

де

$$P^*(\omega) = P(\omega), \quad Q^*(\omega) = \omega Q(\omega). \quad (9.32)$$

Модифікована АФХ відрізняється від звичайної зміною значень уявної частини в ω раз.

Підставивши (9.32) в умову (9.31), отримаємо достатню умову абсолютної стійкості для модифікованої АФХ ЛЧ системи:

$$P^*(\omega) - qQ^*(\omega) > -\frac{1}{k}. \quad (9.33)$$

Введемо в розгляд пряму Попова на площині модифікованої АФХ:

$$P^* - qQ^* = -\frac{1}{k} \quad \text{або} \quad Q^* = \frac{1}{q}\left(P^* + \frac{1}{k}\right).$$

Пряма проходить через точку $-1/k$ на дійсній осі з нахилом $1/q$. Коли виконується умова (9.33), вся модифікована АФХ $W^*(\omega)$ лежить правіше за пряму Попова.

Приклад. Нехай ЛЧ системи описується аперіодичною ланкою

$$W(s) = \frac{k_0}{Ts + 1}.$$

Частотна характеристика ЛЧ визначається виразом

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = \frac{k_0}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{k_0 \omega T}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Уявна частина модифікованої АФХ рівна

$$Q^*(\omega) = \omega Q(\omega) = -\frac{k_0 \omega^2 T}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Виключаючи ω з виразів для $P^*(\omega)$ і $Q^*(\omega)$, отримаємо рівняння модифікованої АФХ у вигляді відрізка прямої (рис. 9.33):

$$Q^* = \frac{1}{T}(P^* - k_0).$$

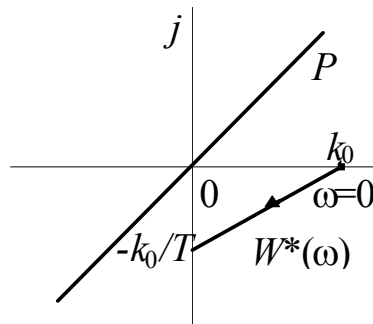


Рис. 9.33. Приклад дослідження абсолютної стійкості

Пряму Попова P при будь-якому позитивному значенні q , можна провести навіть через початок координат, що відповідає $k \rightarrow \infty$. Таким чином, положення рівноваги абсолютне стійке для всіх НЕ з однозначною СХ, лежачою у куті $[0, \infty]$ (тобто в першому і третьому квадрантах). Такий же вивід було зроблено раніше в результаті рішення цієї задачі другим методом Ляпунова.

Частотний критерій абсолютної стійкості застосовний також й до нелінійних систем, НЕ яких мають неоднозначні СХ. Для випадку НЕ з гістерезисом дійсне число q в умові (9.29) при цьому повинно бути ненегативним ($q \geq 0$), а у разі НЕ з випередженням в умові (9.29) приймається $q \leq 0$.

Звернемо увагу на *достатній* характер критерію абсолютної стійкості в частотній формі. При дослідженні нелінійних систем можуть бути три ситуації.

По-перше, не виконується необхідна умова абсолютної стійкості (рис. 9.34,*а*) – звичайна АФХ ЛЧ перетинає промінь $(-\infty, -1/k)$. По-друге, модифікована АФХ лежить правіше за пряму Попова (рис. 9.34,*б*) – положення рівноваги абсолютно стійке. По-третє, виконується необхідна умова, але не виконується достатня (рис. 9.34,*в*) – не можна провести пряму Попова. Тут про стійкість положення рівноваги нічого сказати не можна.

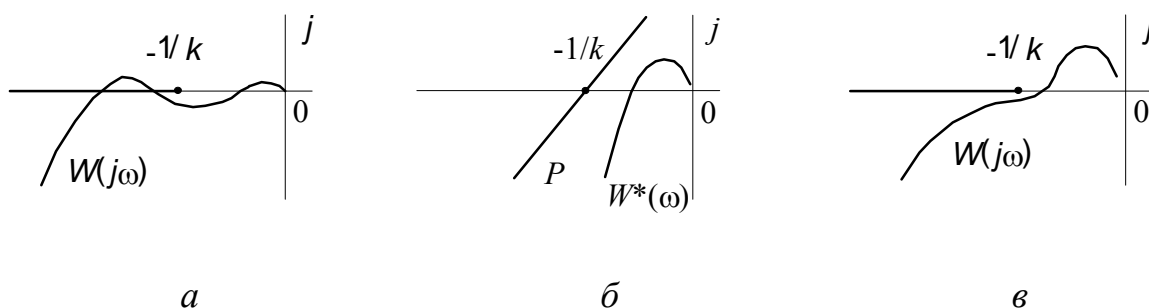


Рис. 9.34. Ситуації дослідження абсолютної стійкості

Круговий критерій. Нехай НЕ має нестационарну характеристику

$$y = F(x, t),$$

що належить сектору $[r, k]$ для всіх t (рис. 9.35), тобто що задовольняє умовам:

$$F(0, t) = 0; \quad rx \leq F(x, t) \leq kx.$$

Положення рівноваги нелінійної системи з нестационарним НЕ абсолютно стійке, якщо АФХ стійкої ЛЧ не охоплює точок круга з центром на дійсній осі, показаного на рис. 9.36.

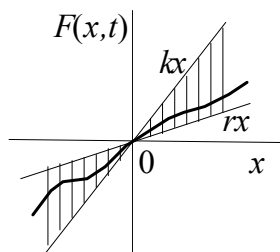


Рис. 9.35. Нестационарні НЕ у куту

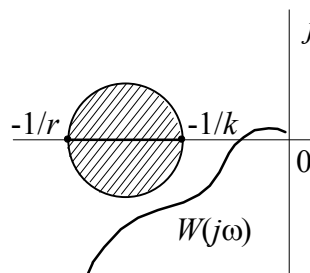


Рис. 9.36. Ілюстрація кругового критерію

Слід звернути увагу на те, що круговий критерій формулюється для звичайних (не модифікованих) АФХ ЛЧ. Звернемо також увагу на те, що при $r \rightarrow k$, тобто “випрямлянні” СХ НЕ, круговий критерій співпадає з критерієм Найквіста.

Частотний метод дослідження абсолютної стійкості вельми зручний не тільки для аналізу, але й для синтезу нелінійних систем. Зокрема, для заданої ЛЧ легко визначити максимальний кут k сектора, якому повинні належати СХ НЕ систем з абсолютно стійким положенням рівноваги.

Контрольні запитання

1. Наведіть особливості нелінійних систем.
2. Наведіть приклади безінерційних нелінійних елементів.
3. Наведіть приклади динамічних нелінійних елементів.
4. Розкрийте суть рівноважних режимів.
5. Як визначаються рівноважні режими і статичні характеристики систем з типовою структурою?
6. У чому полягає метод фазової площини?
7. У чому полягає поведінка нелінійних систем біля положення рівноваги?
8. Які методи використовуються для побудови фазових траєкторій?
9. Як фазові траєкторії пов'язані із часом?
10. Які особливості фазових портретів нелінійних систем?
11. Розкрийте поняття стійкості незбуреного руху.
12. Розкрийте суть першого методу Ляпунова.
13. Розкрийте суть другого (прямого) методу Ляпунова.
14. Розкрийте суть частотного методу дослідження абсолютної стійкості.

Глава 10. ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ

Більшість САК побудовані на аналітичному описі ОК в просторі ознак («класичний» підхід). На практиці ж типовими є ОК, що погано формалізуються, з мало відомими чи змінними властивостями, для яких цей підхід не є ефективним.

Із середини ХХ століття активно розвивається «некласичний» (*інтелектуальний*) підхід у теорії керування, що намагається відтворити принципи природних систем керування – нервових систем живих організмів, які реалізують універсальні принципи обробки емпіричної інформації й ефективні пошукові алгоритми адаптації.

В цій і наступних главах термін «*інтелектуальний*» застосовується лише у сенсі використання для розв’язання задач керування методів систем штучного інтелекту.

Використання штучних нейронних мереж дозволяє розв’язати задачі керування нелінійними ОК шляхом створення адаптивних САК з навчаємим нейрорегулятором. При адаптації навчання використовується для отримання інформації про стан і характеристики САК, що необхідні для оптимального керування в умовах невизначеності. Тобто адаптація тотожна оптимізації в умовах недостатньої інформації.

До переваг використання нейрорегуляторів відносять їх високу ефективність для керування нелінійними нестационарними ОК в галузях промисловості, де накопичені великі бази даних, а також – керування багатомірними і багатоз’язними ОК зі збуреним середовищем функціонування. Системи керування на їх основі являють собою адаптивні САК, які дозволяють скоротити строки проектування, налагодження та випробувань.

Головні проблеми при створенні систем з нейрорегуляторами – це обґрунтування змісту та обсягу інформації для навчання, а також вибір структури регулятора і умов існування стійких рішень.

10.1. Принципи нейрокерування

10.1.1. Штучні нейронні мережі в САК.

Нейрокерування динамічними об'єктами ґрунтується на застосуванні штучних нейронних мереж (НМ) для формування керуючих впливів в системі, або для отримання НМ емулятора (еталонної моделі) об'єкту.

Самонавчання НМ забезпечує їх використання в умовах невизначеності математичної моделі об'єкта, що забезпечує їх використання в складних ієрархічних структурах керування об'єктами зі значною кількістю зворотних і прямих зв'язків. Включення нелінійних функцій активації у приховані нейрони багат шарових НМ забезпечує рішення задач керування динамічними об'єктами з суттєвими нелінійностями.

Нейрон – перетворюючий елемент, що має деяку кількість входів (синапсів), на які поступають вхідні сигнали x_i і один вихід (аксон), з якого знімається вихідний сигнал y . Кожен синапс має вагу w_i , на яку помножується вхідний сигнал x_i . Нейронна мережа є сукупністю нейронів, зв'язаних між собою відповідним чином.

В структурі нейрона (рис. 10.1) виділяють блок додавання, який визначає зважену суму всіх вхідних сигналів

$$U = \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i,$$

і блок функції активації $Y = f(U)$.

Нейрон функціонує за два такти: підсумовування вхідних сигналів і обчислення Y за функцією активації. При чому, функція активації повинна задовольняти двом умовам:

- 1) $|f(U)| < 1$ при будь-якому U ;
- 2) функція повинна бути такою, що немонотонною убуває.

Найчастіше в якості функцій активації використовуються такі функції:

- 1) ступінчаста функція:

$$F(U) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } U > \alpha \\ 0, & \text{якщо } U < \alpha \end{cases} ;$$

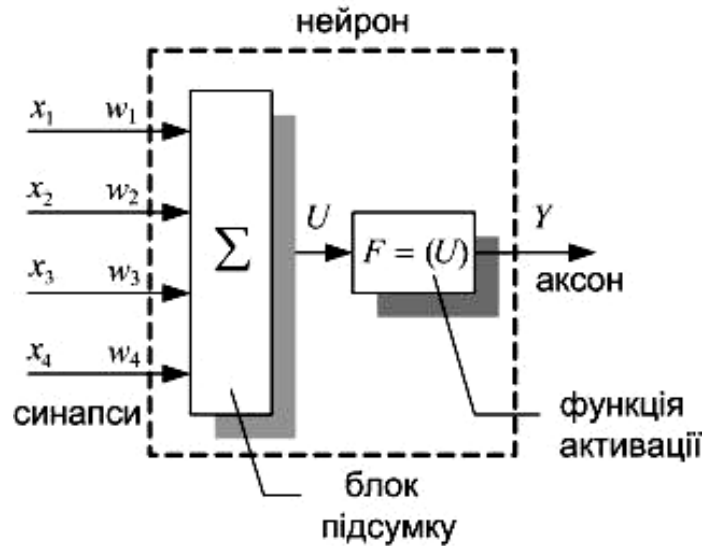


Рис. 10.1. Структура нейрона

2) сигмоїдна функція:

$$F(U) = \frac{1}{1 + e^{-aU}} ;$$

3) гіперболічний тангенс:

$$F(U) = th(U) = \frac{e^U - e^{-U}}{e^U + e^{-U}} ;$$

4) гладкі стискаючі функції:

$$F(U) = \frac{U + Q}{|U + Q| + \alpha} ,$$

де Q – поріг (зсув); a – крутизна статичної характеристики нейрона.

Нейрони утворюють НМ шляхом з'єднання синапсів з аксонами. Розглянемо принципи їх навчання та моделювання на прикладі тришарової НМ, яка складається з вхідного, прихованого і вихідного шарів (рис. 10.2).

Нейрони вхідного шару мають тільки по одному синапсу, кількість яких, а відповідно і кількість нейронів вхідного шару відповідає кількості вхідних змінних мережі X .

Нейрони цього шару виконують лише функції розподілу вхідних сигналів по нейронах прихованого шару.

Кількість нейронів у прихованому шарі може бути різною і в сучасній літературі автори пропонують підбирати кількість нейронів відповідно до точності апроксимації НМ. Слід відзначити, що надмірна кількість нейронів ускладнює мережу і зменшує швидкодію визначення її виходів.

Нейронами вихідного шару генеруються вихідні сигнали. Кількість нейронів відповідає кількості виходів Y .

Нейронна мережа (рис. 10.2) з 3 вхідними, 4 прихованими і 2 вихідними скорочено називається НМ₃₋₄₋₂. На схемі НМ прийнято нейрони позначати у форматі H_{ij} де i – номер шару, j – номер нейрона в межах одного шару. Дані мережі належать до мереж прямого розповсюдження, оскільки в них вхідні сигнали послідовно проходять через всі нейрони.

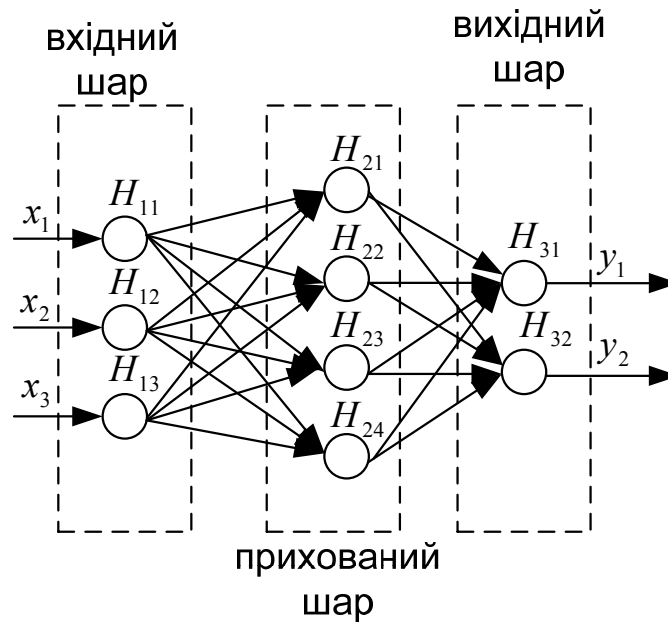


Рис. 10.2. Нейронна мережа 3-4-2

Вихідний сигнал y_{ij} кожного j -го нейрона в i -му шарі визначається як

$$y_{ij} = F \left(\sum_{k=1}^{n(i-1)} w_{ij}^k \cdot y_{i-1,k} \right),$$

де $n(i)$ – число нейронів в i -му шарі.

Нейронні мережі належать до класу апроксиматорів з невідомим математичним описом в процесі функціонування (чорний ящик), що апроксимують функції

$$Y = f(X) ,$$

де Y – вектор вихідних змінних; X – вектор вхідних.

Процес апроксимації або навчання полягає в підборі вагових коефіцієнтів w_{ij} за критерієм мінімізації похибки роботи НМ. Таким чином НМ може функціонувати в режимі технічної експлуатації з отриманням на виході результатів обчислень та в режимі навчання (процесі настроювання вагових коефіцієнтів за критерієм мінімізації похибки вихідного сигналу до еталонного значення).

Очевидно, що від якості навчання НМ залежить точність її роботи в режимі експлуатації.

Структура процесу навчання НМ представлена на рис. 10.3, де позначені: $Y_{\text{баж}}$ – бажані значення вихідних сигналів, E – похибка навчання ($E = Y_{\text{баж}} - Y$), K – дії, що коректують (зазвичай зміни вагових коефіцієнтів Δw_{ij}).

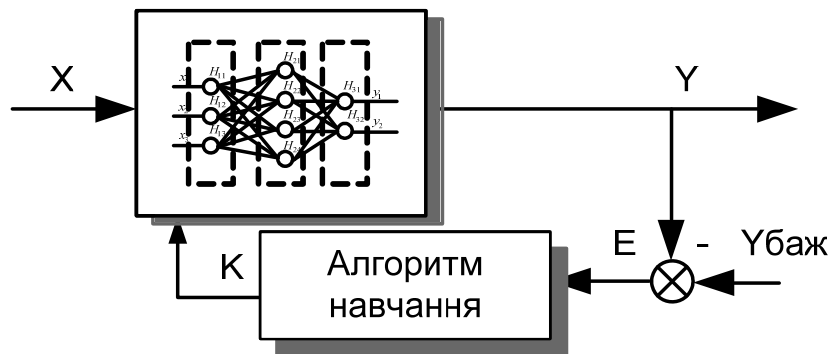


Рис. 10.3. Процес навчання НМ

Для навчання НМ складається навчальна вибірка вхідних сигналів і відповідних їм вихідних. Вибірку зазвичай ділять на дві частини: робочу (на основі якої проводиться навчання) і тестову (для перевірки якості навчання) вибірки. На наступному етапі визначають структуру НМ.

Для тришарової НМ кількість нейронів у прихованому шарі N_c може бути визначена за умови:

$$N_c \leq \frac{(N_p - 1) \cdot N_{out}}{N_{in} + N_{out} + 1},$$

де N_{in} і N_{out} – кількість нейронів у вхідному і вихідному шарах; N_p – кількість навчальних кортежів (послідовностей).

На першому етапі навчання НМ вагам синапсів привласнюються довільні значення. Далі на вхід НМ подається аргумент X першого кортежу з робочої вибірки, розраховується фактичний вихід Y і похибка навчання E . Виходячи із значень вектора E коректуються ваги синапсів. Далі, за даною схемою, за чергою подаються всі аргументи існуючих кортежів. Процес навчання повторюється в циклі, поки якість навчання не стане задовільною, що перевіряється відповідно до тестової вибірки.

Методи навчання класифікують за способами настроювання вагових коефіцієнтів:

- навчання з вчителем (корекція вагових коефіцієнтів проводиться виходячи з порівняння поточного і бажаного вихідних векторів);
- навчання з послідовним підкріпленням знань (на вхід мережі не подаються бажані значення виходів, а ставиться оцінка апроксимації «добре» або «незадовільно»);
- навчання без вчителя (мережа сама виробляє правила навчання шляхом виділення особливостей з набору вхідних даних).

Виходячи з використання елементів випадковості методи навчання підрозділяють на *детерміністські* (алгоритми корекції вагових коефіцієнтів засновані на основі аналізу вхідних і вихідних сигналів, а також додаткової інформації) та *стохастичні*, у яких випадково змінюють вагові коефіцієнти.

Найбільш поширеним методом для детерміністських мереж є правило зворотного розповсюдження похибки. Для навчання зазвичай використовується НМ з функціями активації сигмоїдного типу. Метою навчання за правилом зворотного розповсюдження є мінімізація похибки навчання:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{out}} (Y_i - Y_{\text{баж}_i})^2.$$

Для зменшення похибки вагові коефіцієнти змінюють відповідно процесу градієнтного спуску в просторі вагових коефіцієнтів:

$$w_{ij} = w_{ij} - \nu \frac{\partial E}{\partial w_{ij}},$$

де ν – константа, що характеризує швидкість навчання.

Алгоритм зворотного розповсюдження складається з таких кроків:

1°. На вхід НМ подають вектор X з навчальної вибірки і обчислюють виходи всіх нейронів Y_{ij} .

2°. Визначають величину градієнта похибки EI для кожного нейрона вихідного шару:

$$EI_{Nj} = (Y_j - Y_{баж_j}) \cdot Y_j \cdot (1 - Y_j),$$

де Y_j – вихід j -го нейрона вихідного шару.

3°. Проводять розрахунки в напрямі від останнього шару і визначають градієнти EI_{ij} для кожного j -го нейрона кожного i -го шару:

$$EI_{ij} = Y_{ij} \cdot (1 - Y_{ij}) \cdot \sum_{k=1}^{n(i+1)} EI_{i+1,k} \cdot w_{i+1,k}^j,$$

де k – номер синапсу, який сполучає нейрон H_{ij} з нейроном $H_{i+1,k}$ наступного шару.

4°. Проводять корекцію ваг (крім вхідного шару) синапсів за шаблоном:

$$w_{ij}^k = w_{ij}^k - \nu \cdot EI_{i,j} \cdot Y_{i-1,k}.$$

5°. Якщо навчальна вибірка не закінчилася, то кроки 1-5 повторюють.

6°. Визначається величина похибки E . Якщо вона перевищує задану, то кроки 1-6 повторюють.

10.1.2. Приклади прямих та інверсних нейромережових моделей.

Розглянемо прикладипрактичного застосування технологій нейроапроксимації при вирішенні задач побудови прямих та інверсних емуляторів (еталонних моделей) динамічного стану ОК.

У дискретному просторі динаміку лінійного об'єкта описують у вигляді різницевого рівняння:

$$y[i] = \sum_{j=1}^n a_j y[i-j] + \sum_{j=1}^m b_j u[i-j], \quad (10.1)$$

де $y[i]$ – поточний вихід об'єкта на i -у дискретному відліку, $u[i-1], \dots, u[i-m]$ і $y[i-1], \dots, y[i-n]$ – ретроспективні вектори розмірністю m і n , що складаються із затриманих на інтервал дискретності вхідних і вихідних значень об'єкта відповідно, a_j і b_j – постійні коефіцієнти.

Оскільки вираз (10.1), що описує пряму динаміку об'єкта, в загальному випадку можна розглядати як безінерційну функцію $m+n$ аргументів:

$$y[i] = f_{\text{ИД}}(y[i-1], \dots, y[i-n], u[i-1], \dots, u[i-m]), \quad (10.2)$$

то за наявності масиву відомих значень вхід/вихід об'єкта (навчальних кортежів) модель (10.2) можна реалізувати у вигляді штучної НМ. Причому ця мережа є нелінійною, і представляє нелінійне різницеве рівняння, що дозволяє описувати динаміку нелінійних об'єктів.

Записуючи різницеве рівняння (10.1) відносно $u[i-1]$ є можливість перейти до виду рівняння інверсної динаміки лінійного об'єкта:

$$u[i-1] = \frac{y[i] - \sum_{j=1}^n a_j y[i-j] - \sum_{j=2}^m b_j u[i-j]}{b_1} = \sum_{j=0}^n a'_j y[i-j] + \sum_{j=2}^m b'_j u[i-j].$$

Таким чином, при побудові інверсної НМ моделі динамічного стану ОК необхідно виконати нейроапроксимацію функції загального виду:

$$u[i-1] = f_{\text{ИД}}(y[i], \dots, y[i-n], u[i-2], \dots, u[i-m]).$$

На рис. 10.4 наведені функціональні схеми побудови прямих (а) та інверсних (б) моделей динамічного стану ОК.

Нижче наведені результати структурного та параметричного синтезу прямих та інверсних моделей в програмному пакеті Matlab.

Якщо в якості ОК обрана аперіодична ланка першого порядку, то штучна НМ (ШНМ), яка моделює пряму динаміку, буде апроксимувати таку функцію:

$$y[i] = f_{\text{пд}}(y[i-1], u[i-1])$$

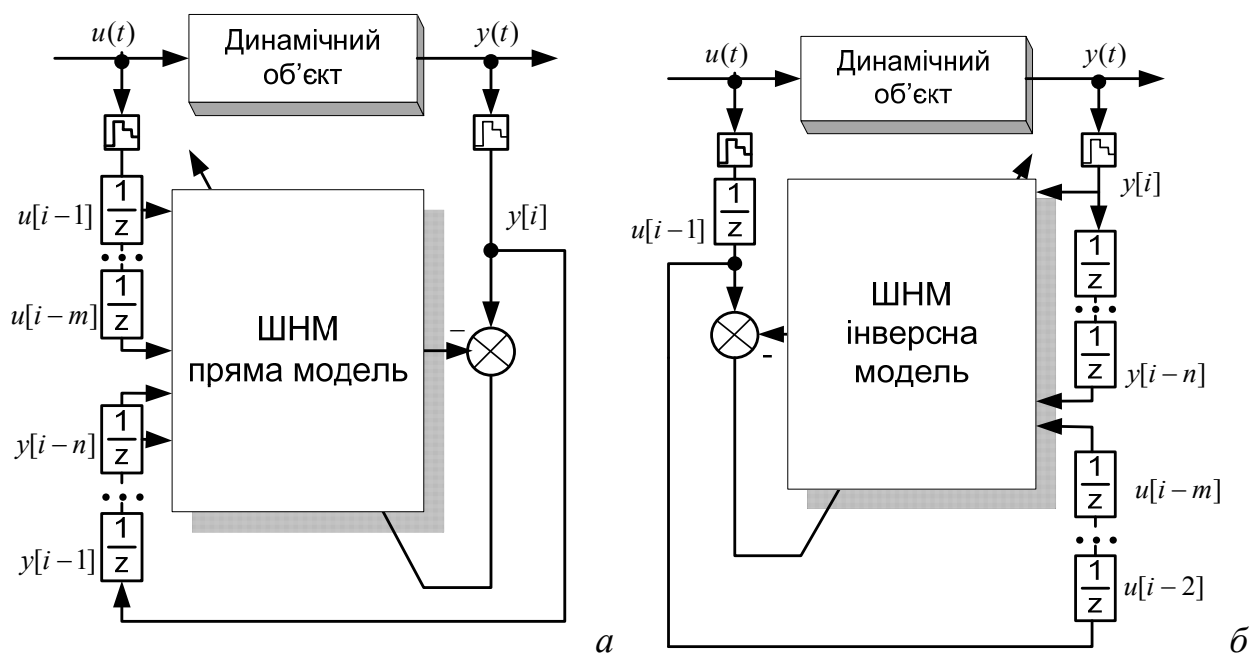
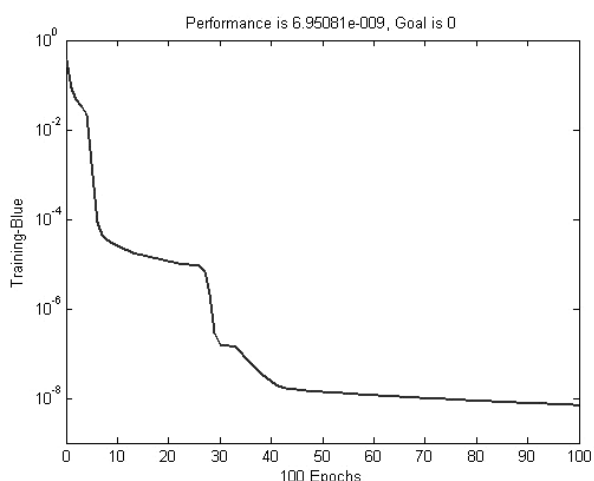
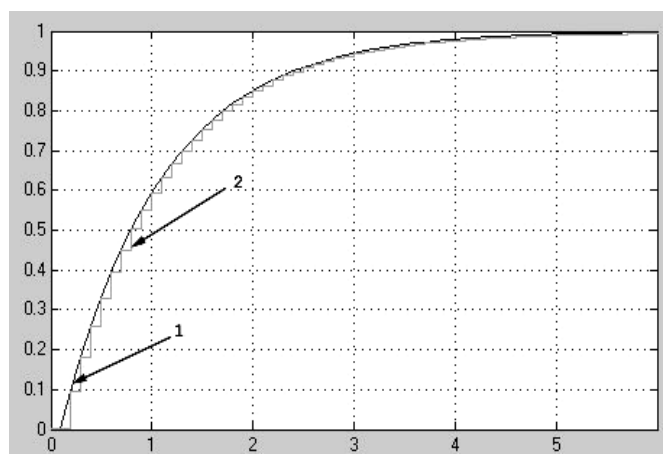


Рис. 10.4. Схема побудови прямих (а) та інверсних (б) моделей динамічних об'єктів

Результати навчання ШНМ та імітаційного дослідження наведені на рис. 10.5, де на рис. 10.5,б позначено: 1 – неперервний і 2 – дискретний виходи.



а



б

Рис. 10.5. Динаміка навчання ШНМ (а) та результати тестування прямої моделі (б)

Навчання цієї НМ₃₋₁ проведено при використанні послідовності ступінчастих дій випадкової амплітуди в діапазоні ± 1 од. з інтервалом 1 секунда. Загальна тривалість: 100 секунд. Середньоквадратична похибка склала $7 \cdot 10^{-9}$ од.

Параметричний та структурний синтез інверсної НМ моделі здійснювався шляхом налаштування ШНМ на зворотну динаміку об'єкта з передаточною функцією

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1},$$

яка апроксимує динаміку об'єкта згідно з виразом:

$$u[i-1] = f_{зд}(y[i], y[i-1], y[i-2], u[i-2]).$$

У результаті моделювання ШНМ з одним нейроном та лінійною функцією активації, середньоквадратична похибка склала $2 \cdot 10^{-18}$ од. (рис. 10.6).

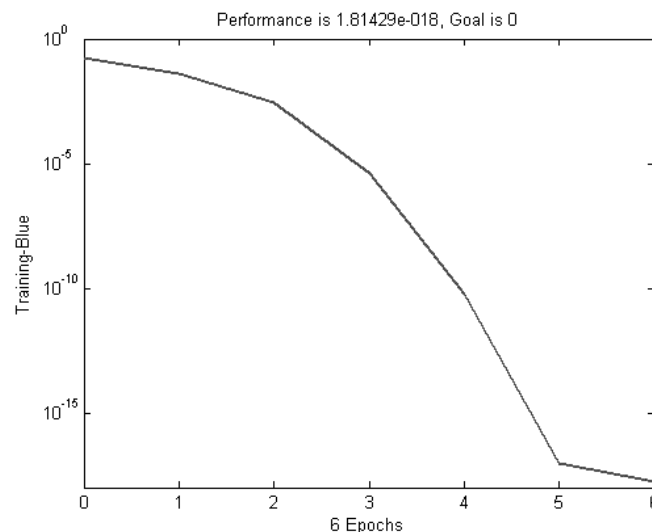


Рис. 10.6. Динаміка навчання ШНМ

10.1.3. Структури систем нейрокерування.

Структури НМ систем керування класифікують таким чином:

1) *нейроформа "диспетчерського керування"*. Система побудована на базі адаптивного лінійного нейрону і призначена для дублювання роботи системи, яка керується оператором;

2) *церебральний артикуляційний контролер*. Зазвичай використовуються модифікації НМ з переглядовою таблицею для зручності керування роботами;

3) *система з "адаптивно-критичним" алгоритмом*. Система ґрунтується на використанні одного асоціативного пошукового елемента і одного адаптивно-критичного елемента;

4) *система керування з інверсно-прямою моделлю*. НМ виконує функції моделі інверсної динаміки ОК;

5) *архітектура узагальненого навчання НМ*, яка навчається автономно, з використанням параметрів стану розімкненого або замкнутого ОК. НМ в робочому стані використовується в якості контролеру (регулятора) ОК;

6) *архітектура спеціалізованого навчання* використовується для безпосереднього навчання мережі за алгоритмом зворотного розповсюдження похибки;

7) *алгоритм функціонування НМ під час навчання з похибкою зворотного зв'язку*. В даному алгоритмі НМ навчається за схемою паралельного включення зі звичайним регулятором, по закінченні навчання мережа виконує функції основного регулятора;

8) *нейросистема з алгоритмом зворотного поширення похибки в часі*. У структурі використовується НМ1, як модель і НМ2, як регулятор.

Адаптивна САК з контролером прямого і зворотного зв'язку. З метою отримання бажаних показників якості адаптивної САК у сенсі мінімуму похибки керування запропоновано структуру системи з контролером прямого (КПЗ) і зворотного (КЗЗ) зв'язків (рис. 10.7).

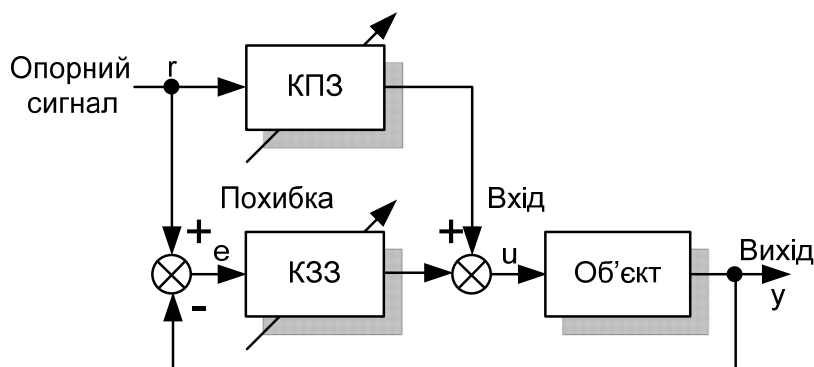


Рис. 10.7. Адаптивна САК з контролером прямого і зворотного зв'язку

Контролер зворотного зв'язку (КЗЗ) використовується для стабілізації замкненої системи на базі аналізу сигналу похибки.

До недоліків даної структури відносять втрату стійкості системи при наявності часового запізнення сигналу основного тракту.

Послідовна схема нейрокерування (рис. 10.8) забезпечує інверсно-пряме керування з реалізацією в НМ зворотної динаміки об'єкта.



Рис. 10.8. Послідовна схема нейрокерування

Зворотне відображення, яке реалізує НМ, записують у форматі:

$$u = f_{p-1}(y) ,$$

де f_{p-1} – відображення, зворотне відображенню відповідності між входом і виходом $y = f_p(u)$.

Однією з модифікацій такої структури є спеціалізоване зворотне відображення (рис. 10.9). Тут НМ навчається з метою мінімізувати похибку. В такому випадку коло прямого зв'язку (КПЗ), розглядається як різновид НМ, у якої вихідний шар жорстко заданий.

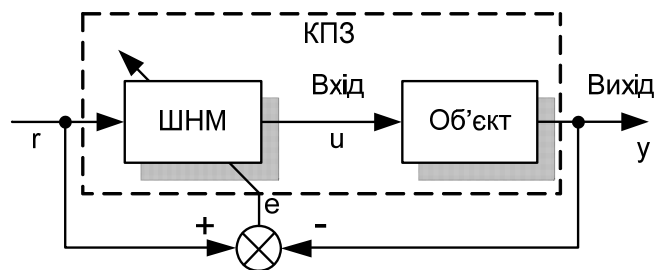


Рис. 10.9. Спеціалізоване нейрокерування зі зворотним відображенням

Недоліки таких структур співпадають з недоліками загальної схеми нейрокерування (див. рис. 10.7).

Паралельна схема нейрокерування. У даній схемі (рис. 10.10) в якості контролера використовується традиційний ПІД – регулятор.

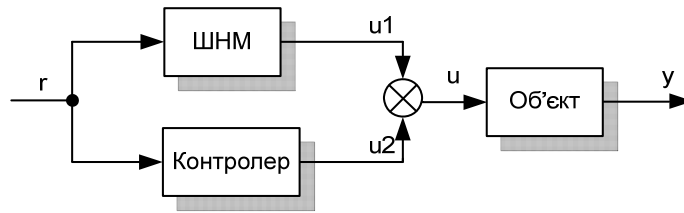


Рис. 10.10. Паралельна схема нейроконтролера

Нейроконтролер паралельного типу використовується для коригування сигналу u_2 традиційного контролера з метою забезпечення заданих показників якості керування.

До недоліків подібних схем керування відносять ускладнені форми навчання ШНМ, відсутність алгоритмів динамічної адаптації ШНМ і, відповідно, втрату стійкості системи при нестационарності ОК.

Схема нейрокерування із самонастроюванням. У даній структурі (рис. 10.11) ШНМ використовується для настроювання параметрів класичного контролера в залежності від контрольованих змін в системі.

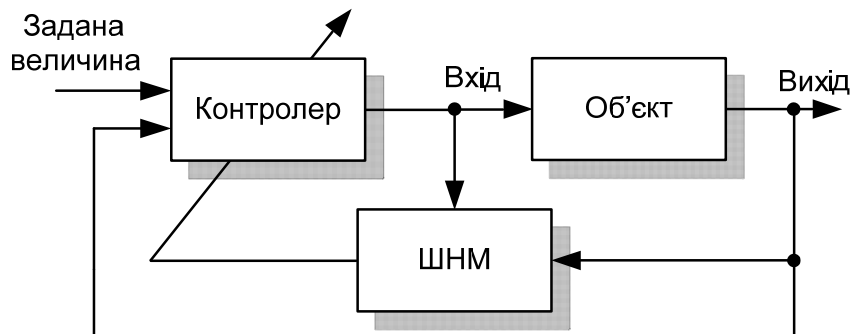


Рис. 10.11 Схема нейрокерування із самонастроюванням

Для регулювання технологічних процесів широко використовуються стандартні промислові пропорційно-інтегрально-диференціальні (ПІД) регулятори. Вони досить просто налаштовуються для роботи з конкретним об'єктом і забезпечують задовільну стабілізацію регульованого параметра при незначних його відхиленнях від заданої величини. Однак при різких змінах режиму роботи ке-

рованого об'єкта або при переході його на інший режим роботи, якість перехідного процесу в системі з ПІД-регулятором може бути незадовільною. Виникає необхідність у використанні додаткових командних пристроїв, що корегують роботу ПІД-регулятора. У даному випадку в якості командного пристрою використовується НМ.

До недоліків подібних схем керування відносять вихід систем за межі стійкості при проявах нестационарності ОК.

Схема нейрокерування з емулятором і контролером. Подібна структура (рис. 10.12) в основному є інтегрованим і модифікованим варіантом інверсно-прямої схеми керування і схеми спеціалізованого навчання.

У даному варіанті для наближеного оцінювання Якобіану об'єкта використовується емулятор (еталонна модель) на базі НМ. В якості контролера використовується НМ, навчена інверсії об'єкта. Навчена прямій динаміці об'єкта НМ, використовується як засіб для зворотного поширення похибки характеристики системи.

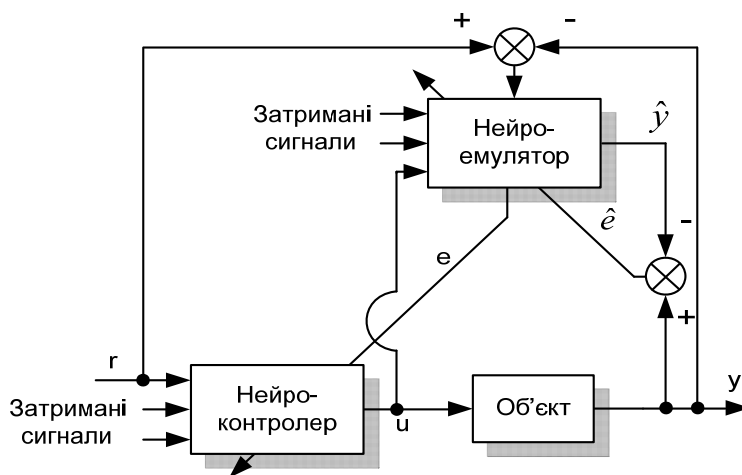


Рис. 10.12. Структура САК з емулятором і контролером

До недоліків таких САК відносять порушення умов стійкості в разі неадекватності моделі ОК та взаємопов'язаність двох ШНМ за похибкою відтворення вихідного сигналу ОК. Крім цього, у разі наявності значної інерційності об'єкта дана система буде неефективною.

САК зворотної динаміки об'єкта в послідовному контурі. У даній структурі (рис. 10.13) нейроемулятор ШНМ 2 навчається зворотній динаміці об'єкта, а параметри нейроконтролера ШНМ1 корегуються нейроемулятором ШНМ2.

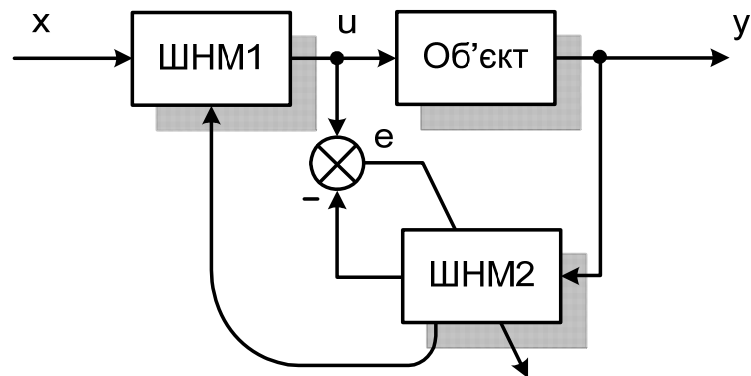


Рис. 10.13. Структура з навчанням нейроконтролера зворотній динаміці об'єкта

Нейрокерування зі зворотним зв'язком. НМ виконує функції регулятора замкнутої системи (рис. 10.14), а наявність зворотного зв'язку дає змогу забезпечувати високу якість керування при наявності неконтрольованих збурень, а також нестационарності і нестійкості ОК.

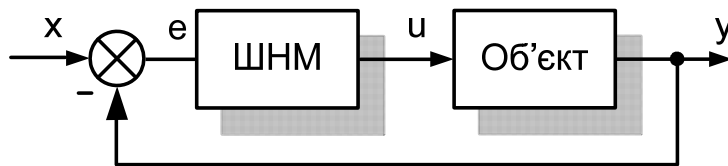


Рис. 10.14. Нейрокерування зі зворотним зв'язком

У даному випадку задача настроювання ШНМ полягає в реалізації ШНМ невідомого оператора, оскільки невідомі ні зв'язок, ні Якобіан зв'язку між показником якості регулювання і параметрами ШНМ.

Нейроконтролер зі зворотним зв'язком через нейроемулятор. У даній схемі (рис. 10.15) нейроемулятор ШНМ 2 навчається динаміці об'єкту, а нейроконтролер зворотного зв'язку ШНМ1 настраюється через нейроемулятор.

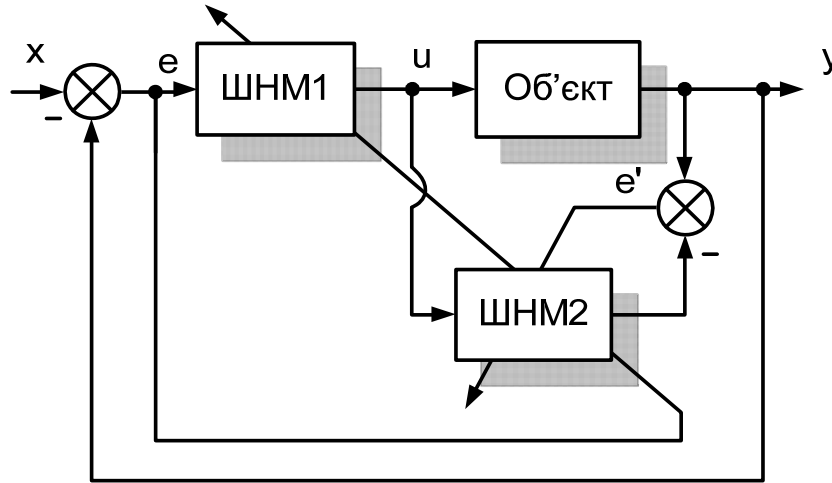


Рис. 10.15. Структура навчання нейроконтролера зворотного зв'язку через нейроемулятор

Безпосереднє інверсне нейрокерування. Загальний вигляд функціональної схеми системи безпосереднього інверсного нейрокерування (*Direct Inverse Neurocontrol*) наведено на рис. 10.16.

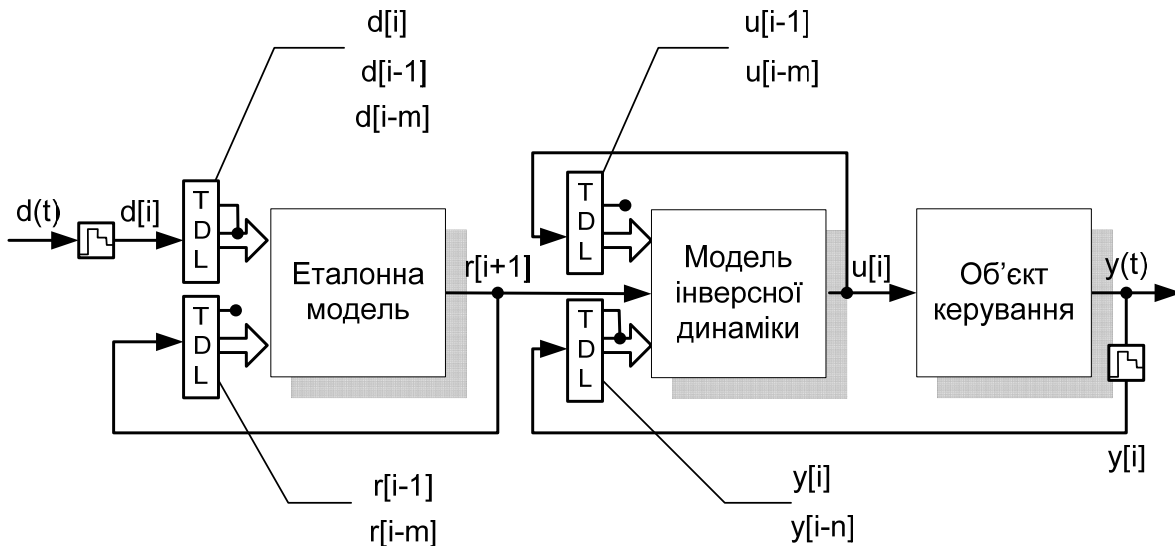


Рис. 10.16. Схема системи безпосереднього інверсного нейрокерування

У наведеній схемі використовується дискретна реалізація еталонної моделі. Блоками з аббревіатурою TDL (*Tapped Delay Line*) позначені лінії затримки з відведеннями або ретроспективні вектори, що складаються з серій, затриманих на інтервал дискретизації вхідних значень. Верхнє відведення блоку TDL відповідає його поточному вхідному значенню.

Загальний вид схеми навчання еталонної і інверсної НМ моделей динамічного об'єкту представлений на рис. 10.4. У зображеній на рис. 10.16 схемі інверсну модель динамічного об'єкта можна розглядати як елемент, який дозволяє за бажаним значенням виходу динамічного об'єкта визначати відповідну керуючу дію на його вході. У схемі безпосереднього інверсного нейрокерування бажаний стан ОК формується шляхом комбінації фактичного стану об'єкта ($y[i], y[i-1], \dots, y[i-(n-1)]$) з бажаним значенням $r[i+1]$ на його виході, внаслідок чого утворюється вектор $(r[i+1], y[i], y[i-1], \dots, y[i-(n-1)])$.

Таким чином, за умови точної відповідності реакції інверсної моделі інверсному оператору ОК, завжди виконується рівність

$$y[i]=r[i].$$

10.2. Системи нейронечіткого керування

10.2.1. Аналітичне конструювання блоків нечіткого висновку.

Методи нечіткої логіки дозволяють будувати логіко-лінгвістичні моделі, які відповідні "людським" способам міркувань і прийняття рішень.

Найбільш важливим застосуванням теорії нечітких множин є контролери нечіткої логіки. Їх функціонування дещо відрізняється від роботи звичайних контролерів, оскільки для опису системи замість диференціальних рівнянь використовуються знання експертів. Ці знання можуть бути виражені за допомогою лінгвістичних змінних, які описані нечіткими множинами.

Всі системи з нечіткою логікою функціонують за єдиним принципом: сигнали датчиків фазифікуються (перетворюються в нечіткий формат), оброблю-

ються, дефазифікуються та у виді звичайних сигналів подаються на виконавчі пристрої.

За аналогією зі звичайною (чіткою) теорією множин у теорії нечітких множин вводяться логічні операції над множинами.

Розглядаються нечіткі множини (A і B) на універсальній множині E :

1. Рівність: $A = B$.

$$A \text{ й } B \text{ рівні, якщо } \forall x \in E \quad \mu_A(x) = \mu_B(x),$$

де x і μ - змінна стану елементу множини та її характеристична функція належності.

2. Доповнення (заперечення): $\bar{A} = \overline{A}$

Звичайно приймають, що операція, здійснювана над функцією належності при доповненні $\mu_{\bar{A}}(x) = n[\mu(x)]$, повинна мати властивості: $n[0]=1$ і $n[1]=0$, де $n[\bullet]$ – незростаюча функція.

Найчастіше функція доповнення визначається в такий спосіб:

$$\forall x \in E, \quad \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

3. Перетин: $A \cap B$ – найбільша нечітка підмножина, що містить одночасно A і B .

Механізм нечіткого логічного висновку у своїй основі ґрунтується на базі знань, яка сформована фахівцями предметної області у виді сукупності нечітких продукційних правил:

$$\text{якщо } \vec{x} \in A, \text{ то } z \in C,$$

де A і C – це нечіткі змінні, обумовлені відповідними функціями належності.

Відзначають, що A ідентифікується n -мірною функцією належності (n – розмірність вектора \vec{x}).

Частина правила " $\vec{x} \in A$ " називається умовою чи передумовою, а "то $z \in C$ " – наслідком або висновком. У формі Мамдані (Mamdani) нечіткі продукційні правила мають вид:

$$\text{якщо } x_1 \in A_1 \text{ і якщо } x_2 \in A_2 \text{ і } \dots \text{ і якщо } x_n \in A_n, \text{ то } z \in C,$$

при цьому, $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$.

Нечіткий логічний висновок – це алгоритм, що дозволяє на підставі бази знань із сукупності нечітких продукційних правил за заданим $\vec{x} = \vec{x}_0$ визначити висновок $z = z_0$.

З урахуванням викладеного вище, можна сформулювати алгоритм формування нечіткої моделі ОК. Нечітка модель узагальнено будується за принципом розгрупування вхідних впливів з метою створення ієрархічної структури дерева висновку.

Загальний вид елементарної системи A :

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

де: $x_i, i = \overline{1, n}$ – n -мірний вектор $\underline{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T$, яким представлені параметри ОК, що контролюються; y – характеристичний параметр динамічного стану ОК.

Подібний вид системи A з багаторівневим представленням експертних знань застосовується для термінальних вершин та кореня дерева. Подібна структура дозволяє проводити урахування нових змінних ОК по мірі накопичення знань про об'єкт у режимі *on-line* (реального часу).

Для даної системи вважається відомим наступне:

- траєкторії варіації параметрів стану системи: $\forall x_i \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$, $x_i \subseteq \mathfrak{R}$ та $\forall y \in [\underline{y}_i, \overline{y}_i]$;

- базовий об'єм нечітких продукційних правил R^j , $j = \overline{1, m}$, які пов'язують лінгвістичні оцінки факторів впливу $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ та цільовий вихід y ;

- багаторівневий формат нечітких продукційних правил – "IF-AND -OR-THEN";

- масив ($t = \overline{1, s}$) навчальних кортежів: $\text{teach}^t : < \underline{x}, d >$;

- функції належності змінних $\underline{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T$ до нечітких термів.

$$\left. \begin{array}{l}
 R^1 : IF \vec{x} \text{ is } A^{11} \quad (\text{weight } w_{11}) \\
 \quad \quad \quad OR \vec{x} \text{ is } A^{1k_j} \quad (\text{weight } w_{1k_j}) \\
 THEN y \in d_j, \forall j = \overline{1, m} \\
 \dots\dots\dots \\
 R^j : IF \vec{x} \text{ is } A^{j1} \quad (\text{weight } w_{j1}) \\
 \quad \quad \quad OR \vec{x} \text{ is } A^{jk_j} \quad (\text{weight } w_{jk_j}) \\
 THEN y \in d_j, \forall j = \overline{1, m}
 \end{array} \right\} ,$$

де A^{jk_j} – фіктивні множини нечітких термів визначені на n -мірній множині дійсних чисел $A^{jk_j} \subseteq \mathfrak{R}^n$, які мають функції належності

$$\mu^{ij}(\vec{x}) = \min(\mu^{1j}(x_1), \mu^{2j}(x_2), \dots, \mu^{nj}(x_n)) .$$

Наведену систему продукційних правил записують в наступній формі:

$$\bigcup_{p=1}^{k_j} \left[\bigcap_{i=1}^n (x_i = a_i^{jp}) \right] \longrightarrow d_j, j = \overline{1, m} ,$$

Якщо ввести нечітке відношення (R) , то експертні знання $(\vec{x} \rightarrow y(\vec{x}^*))$, які відображують нечітке причинне відношення передумови та висновку, записують у форматі імплікації: $R = \vec{x} \rightarrow y(\vec{x}^*)$. У даному випадку R розглядається як нечітка підмножина прямого добутку $X \times Y$ повної множини передумов X і висновків Y . Таким чином, при наявності вхідних параметрів системи (\vec{x}^*) та сформованої імплікації процес отримання нечіткого висновку $(y(\vec{x}^*))'$ представляють у виді нечіткого композиційного правила:

$$y(\vec{x}^*)' = \vec{x}^* \bullet R = \vec{x}^* \bullet (\vec{x} \rightarrow y(\vec{x}^*)) ,$$

де: (\bullet) – операція композиції (згортки).

Ступінь належності ситуаційного вхідного масиву $\vec{x}^* = \{x_1^*, x_2^*, x_3^* \dots x_n^*\}$ нечітким термам d_j визначається за таким алгоритмом:

1°. На етапі імплікації враховуються значення ваг правил:

$$\mu^{dj}(\vec{x}^*) = \max_{p=1, k_j} \left\{ w_{jp} \min_{i=1, n} [\mu^{ip}(a_i^{jp}, x_i)] \right\}, j = \overline{1, m}.$$

2°. В результаті нечіткого висновку визначають нечітку множину:

$$\tilde{y}(\vec{x}^*) = \bigcup_{j=1, m} \int_y^{\bar{y}} \min(\mu^{dj}(\vec{x}^*), \mu^{dj}(y)) / y.$$

3°. Одним з методів дефазифікації *defuz* нечіткої множини визначають чітке значення характеристичного параметру динамічного стану об'єкта

$$y(\vec{x}^*) = defuz(\tilde{y}(\vec{x}^*)).$$

В теорії нечітких множин запропоновано значну кількість методів дефазифікації. Одним з найбільш розповсюджених є центроїдний:

$$z_0 = \frac{\int_R z \cdot \mu_{\Sigma}(z) \partial z}{\int_R \mu_{\Sigma}(z) \partial z}.$$

Графічна ілюстрація алгоритму Мамдані наведена на рис. 10.17.

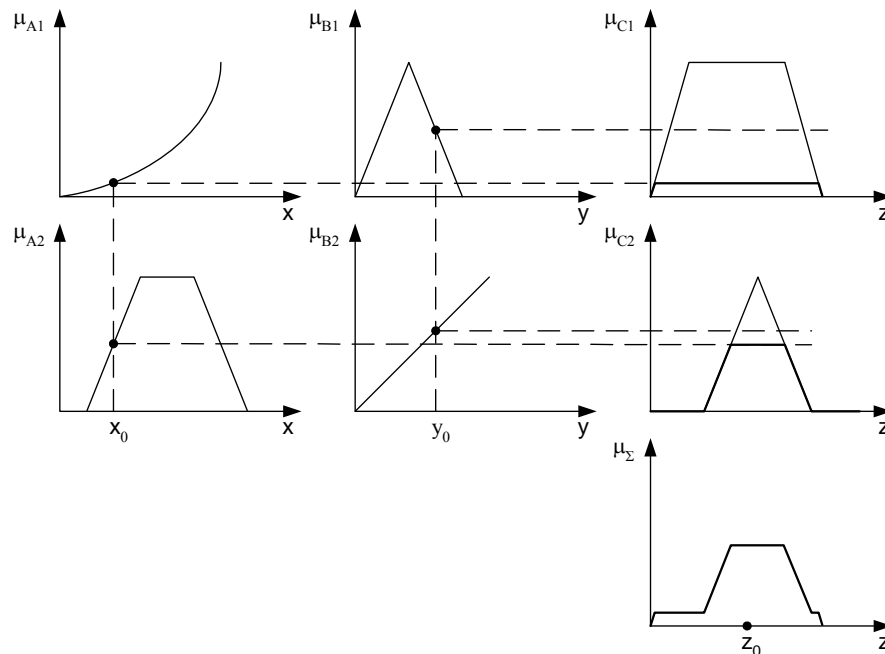


Рис. 10.17. Ілюстрація роботи алгоритму Мамдані

Ще одним відомим методом нечіткого логічного висновку є алгоритм Сугено (Sugeno). Продукційні правила в цьому алгоритмі мають вид:

якщо $x_1 \in A_1$ і якщо $x_2 \in A_2$ і ... і якщо $x_n \in A_n$, то $z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
де $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – звичайна чітка функція.

Принципова відмінність цього алгоритму від алгоритму Мамдані полягає у формі висновку, що являє собою функціональну залежність.

Реалізація алгоритму Сугено:

1°. Введення нечіткості (фазифікація).

2°. Визначення функції належності передумов кожного окремого правила при конкретних вхідних сигналах $\vec{x}_0 : \alpha_i, i = 1, 2, \dots, M$, де M – число продукційних правил.

3°. Визначення чіткого значення вихідної змінної:

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^M \alpha_i \cdot f_i(\vec{x}_0)}{\sum_{i=1}^M \alpha_i},$$

де i – поточний номер правила, а в якості функції $f(\vec{x})$ використовують поліномами n -го порядку.

Розглянемо коротко ще методи приведення до чіткості (дефазифікації):

- *мінімальний максимум*: результат – це найменша координата точки, у якій $\mu_{\Sigma}(z)$ досягає максимуму;

- *максимальний максимум*: результат – це найбільша координата точки, у якій $\mu_{\Sigma}(z)$ досягає максимуму;

- *середній максимум*:

$$z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^m z_i}{m},$$

де z_i – точки, у яких $\mu_{\Sigma}(z)$ приймає максимальне значення;

- *висотна дефазифікація*: елементи області визначення R , для яких значення функції належності менше, ніж деякий рівень α , що у розрахунок не приймаються. Чітке значення визначається за формулою

$$z_{ch} = \frac{\int_{C_\alpha} z \cdot C(z) \cdot dz}{\int_{C_\alpha} C(z) \cdot dz},$$

де C_α – нечітка множина α -рівня;

- метод середніх центрів:

$$Z_{CA} = \frac{\sum_{i=1}^M \alpha_i \cdot c_i}{\sum_{i=1}^M \alpha_i},$$

де α_i – значення функції належності передумови i -го правила, $\mu_i(z)$ – функція належності висновку i -го правила, $c_i = \int_R z \cdot \mu_i(z) dz / \int_R \mu_i(z) dz$ – центр висновку i -го правила.

10.2.2. Синтез нейронечіткого емулятора зворотної динаміки.

Емулятором проводиться реалізація зворотного оператора об'єкта (див. рис. 10.13), який копіюється нечітким контролером і компенсує оператор об'єкта, в результаті вихідний сигнал буде повторювати завдання із похибкою $e_u(k)$. Даний контур надає адаптивні властивості САК.

Розглянемо алгоритм відтворення вхідної функції $r(t)$ на виході динамічного ОК. Функція $r(t)$ є еталонною траєкторією для розімкненої відносно її входу системи керування. Динаміка поточних значень похибки $e_u(k) = u^*(k) - u(k)$, $k = \overline{1, N}$ є навчальною траєкторією для нейронечіткого емулятора.

Настроювання емулятора проводиться шляхом зміни параметрів функцій належності (b, c), ваг правил (w) і модифікації продукційних правил (B^j) з урахуванням мінімуму критерію навчання $J^* = (e_u(b, c, w, B^j, t))$.

Таким чином з моменту t_0 формується керуючий сигнал $u'(k)$, при якому $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_1} r(t)$. Інтервал (t_0, t_1) є циклом навчання і часом закінчення переходу-

ного процесу в системі. У режимі функціонування системи можуть бути виділені цикли параметричного настроювання емулятора і контролера $t_{ij} < t_0$, що ініціалізуються при змінах оператора ОК (A). Процес настроювання завершується при $e_u(k) \equiv \varepsilon$, тобто коли $y(k) \equiv r(k) \pm \varepsilon$, при ідеальному керуючому впливі $u(k)' = A^{-1}r(k)$, де ε – верхня оцінка модуля абсолютної похибки.

Основний нечіткий контролер включається в систему керування динамічним об'єктом із заданою траєкторією системи керування. З метою апроксимації закону в контролері враховується Якобіан системи і динаміка поточних значень похибки САК $e_u(k) = u^*(k) - u(k)$, $k = \overline{1, N}$ – інтервал керування. З цією метою в структуру включений емулятор, який виконує апроксимацію моделі динамічного стану об'єкта в *on-line* режимі.

У загальному виді рівняння «вхід-вихід-стан» узагальненого ОК має вид:

$$\frac{dy(t)}{dt} = F(y(t), r(t), u(t), \theta, t), t > 0 \quad (10.4)$$

де $F(\cdot)$ – деякий клас гладких функцій; $y(\bar{t})$ – вимірювальна частина вектора стану; $u(t)$ – «внутрішнє» векторне керування; $\theta \in \Omega_\theta$ – вектор параметрів об'єкта керування з параметрами моделі збурень.

Оскільки динаміка поточних значень похибки $e_u(k)$, $k = \overline{1, N}$ є навчальною траєкторією для параметрів нейронечіткого емулятора $e_u(b, c, w, B^j, t)$, то алгоритм адаптації є «зовнішнім» керуванням. В якості критерію якості відтворення еталонного сигналу приймаємо інтегральний функціонал

$$J(b, c, w, B^j) = \frac{1}{N_0} \sum_{m=k-N_0}^k e_u(b, c, w, B^j, t), k = 1, 2, \dots,$$

де N_0 – розмір вибірки.

Мета настроювання і керування динамічним об'єктом буде досягнута при значеннях $\underline{\lambda}^{*T} = b', c', w', B^{j'}$, для яких з моменту $t = t_1$ функціонал $J(b, c, w, B^j)$ та похибка $e_u(b, c, w, B^j)$ будуть прагнути до мінімальних значень.

У структурі САК використано нейронечіткий емулятор, вихід якого є керуючим впливом для об'єкта керування

$$u^*(t) = f(\underline{\lambda}^{*T}, \zeta(\underline{x}), t) .$$

З урахуванням (10.4) рівняння узагальненого об'єкта керування має вид

$$\dot{y}(t) = F\left(y(t), r(t), f(\underline{\lambda}^{*T}, \zeta(\underline{x})), \theta, t\right), t > 0 . \quad (10.5)$$

Рівняння (10.5) визначає динаміку настроювання інтелектуальної САК динамічним об'єктом з інтегральним функціоналом $J(b, c, w, B^j) \rightarrow \min$.

Можливість застосування НМ емуляторів у структурі САК зворотної динаміки (див. рис. 10.13) дозволяє забезпечити необхідний керуючий вплив з урахуванням умови стійкості системи при *on-line* настроюванні параметрів нейронечіткого контролера \underline{w} згідно з класичним алгоритмом визначення корекції синоптичних зв'язків – найскорішим спуском

$$\Delta w_{ji}(t+1) = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{ji}} + \alpha \Delta w_{ji}(t) ,$$

де E – функціональна оцінка якості, яка підлягає мінімізації.

Запишемо формулу фазифікації на базі узагальненої гаусової функції

$$\mu(x) = \alpha_i = \exp\left(-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^{2b}\right), \quad (10.6)$$

де c, σ, b – параметри центру, ширини та форми компоненти вхідного вектора для нечіткого правила висновку.

При застосуванні (10.6) до дефазифікації в форматі (10.5) маємо модифікацію нечіткого висновку:

$$y_0 = f(x) = \frac{\sum_{i=1}^M w_i \left[\prod_{j=1}^N \exp\left[-\left(\frac{x_j - c_j^{(i)}}{\sigma_i^j}\right)^{2b_j^i}\right] \right]}{\sum_{i=1}^M \left[\prod_{j=1}^N \exp\left[-\left(\frac{x_j - c_j^{(i)}}{\sigma_i^j}\right)^{2b_j^i}\right] \right]} ,$$

Остання формула моделі виводу визначає неперервну функцію дефазифікації вхідного вектора на базі використання нечіткої НМ (рис. 10.18), яка розроблена Л. Вангом та Дж. Менделем.

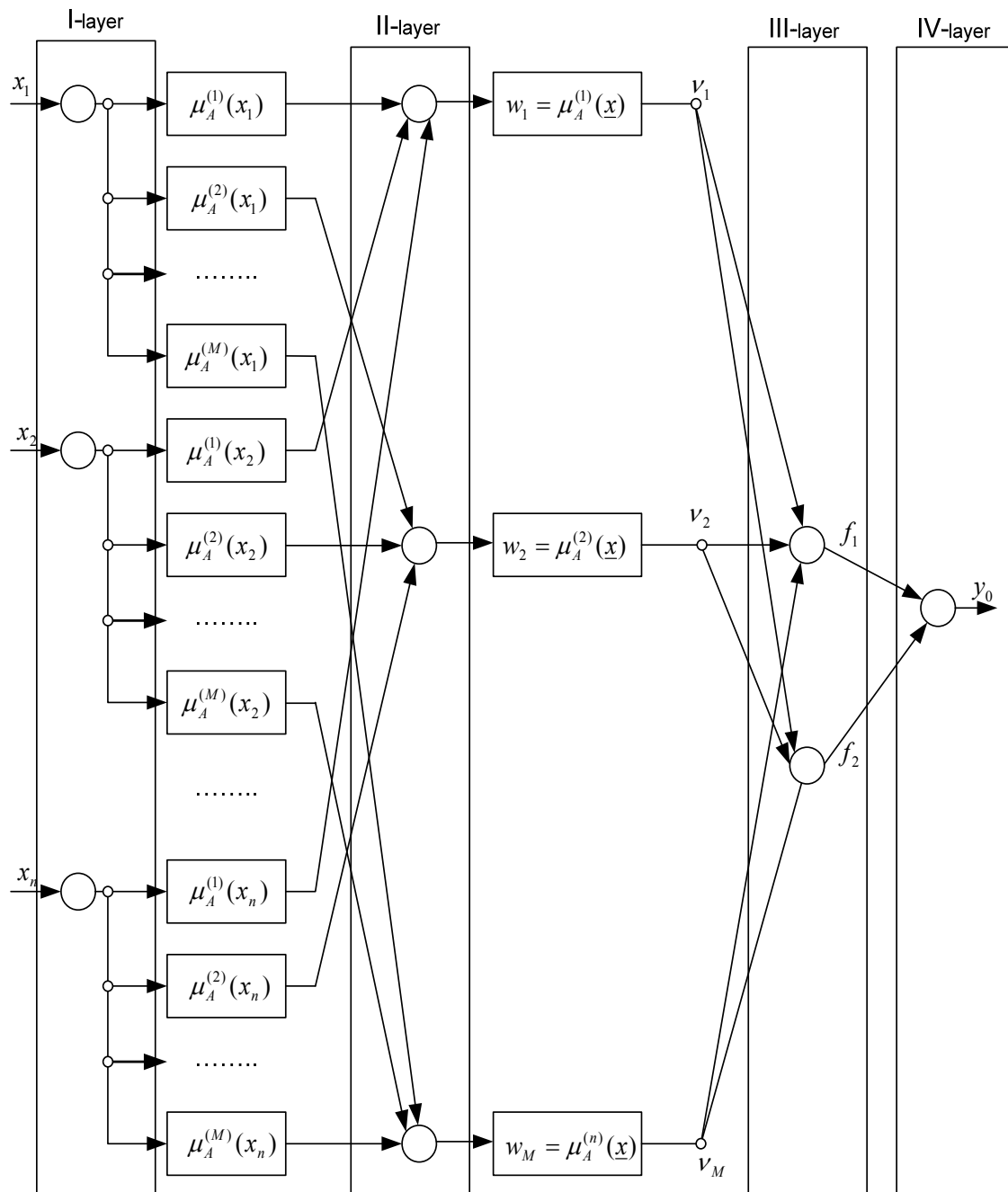


Рис. 10.18. Структура нечіткої НМ Ванга-Менделя

Перший шар даної чотиришарової структури виконує фазифікацію вхідного вектора, другий – агрегування значень активації умови, третій – агрегу-

вання M правил виводу й генерацію нормалізованого сигналу, останній шар формує вихідний сигнал. Параметричними є перший і третій шари. У першому шарі задаються параметри функції фазифікації $(c_j^k, \sigma_j^k, b_j^k)$, у третьому шарі активуються ваги v_M , які інтерпретуються як центр функції належності наслідку нечіткого правила.

Алгоритм динамічної самоорганізації нечіткого блоку емуляції:

1°. При старті з першої пари даних $\langle x_1, y_1 \rangle$ створюється перший кластер із центром $\tilde{n}_1 = x_1$. Приймається, що $w_1 = y_1$ й потужність множини $L_1 = 1$.

2°. Позначимо граничну евклідову відстань між вектором x і центром c_i , при якому дані будуть трактуватися як належні до створеного кластера, символом r .

3°. Після зчитування k -ої навчальної пари $\langle x_k, y_k \rangle$ розраховуються відстані між вектором x_k і всіма існуючими центрами $\|x_k - c_l\|$ для $l = 1, 2, \dots, M$.

Якщо $\|x_k - c_{l_k}\| > r$, то створюється новий кластер: $c_{M+1}(k) = x_k$, $w_{M+1}(k) = y_k$, $L_{M+1}(k) = 1$.

Параметри створених до цього кластерів не змінюються: $w_l(k) = w_l(k-1)$, $L_l(k) = L_l(k-1)$ для $l = 1, 2, \dots, M$. Кількість кластерів M збільшується на 1.

Якщо $\|x_k - c_{l_k}\| \leq r$, то дані включаються в l_k -й кластер, параметри якого слід уточнити відповідно до наступних виразів:

$$\left. \begin{aligned} w_{l_k}(k) &= w_{l_k}(k-1) + d_k \\ L_{l_k}(k) &= L_{l_k}(k-1) + 1 \\ c_{l_k}(k) &= \frac{c_{l_k}(k-1)L_{l_k}(k-1) + x_k}{L_{l_k}(k)} \end{aligned} \right\}.$$

4°. Результируюча функція, яка апроксимує вхідні дані системи має вид

$$\hat{f}(x) = y = \frac{\sum_{l=1}^M w_l(k) \exp\left(-\frac{\|x - c_l(k)\|^2}{\sigma^2}\right)}{\sum_{l=1}^M L_l(k) \exp\left(-\frac{\|x - c_l(k)\|^2}{\sigma^2}\right)}.$$

10.2.3. Приклад адаптивної САК з нечітким інверсним контролером.

При синтезі САК, які реалізують задані динамічні властивості з урахуванням переводу об'єкта з довільного стану $\underline{x}(0)$ в межі заданого різноманіття $\Psi(\underline{x}) = 0$, постає необхідність розв'язання оберненої задачі динаміки об'єкта.

Відповідно до вищевикладеного, алгоритм адаптації САК повинен забезпечувати мінімізацію функції мети та квадратичного функціонала якості.

Структура адаптивної системи з нечітким інверсним контролером (рис. 10.19) складається з нечіткого контролера FNK, об'єкта керування DO та блока нечіткого нейроемулятора FNN1, організованого за структурою Ванга-Менделя, який функціонує згідно з адаптивним алгоритмом самоорганізації нечіткої мережі.

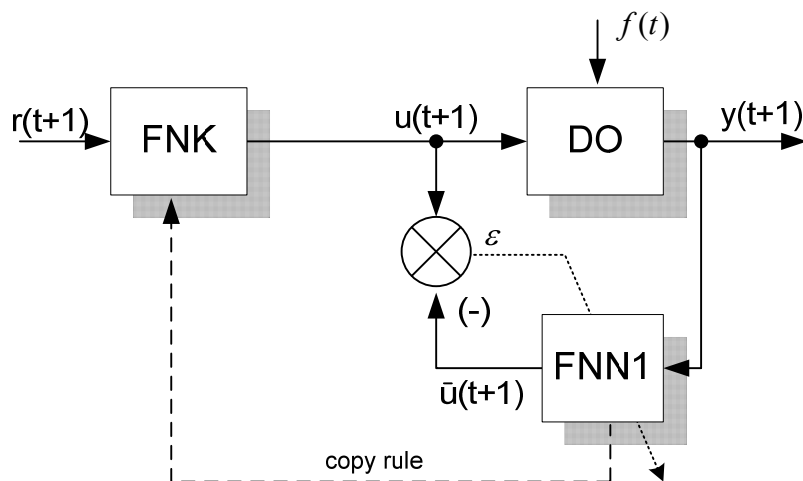


Рис. 10.19. Структура адаптивної системи з нечітким інверсним контролером

Блок емуляції в режимі реального часу апроксимує зворотну динаміку об'єкта з заданою похибкою ε . В результаті забезпечується компенсація оператора об'єкта оператором нечіткого контролера, який функціонує згідно з копією

структури продукційних правил і алгоритмів висновку емулятора інверсної динаміки.

Моделювання виконувалось у середовищі Matlab.

Варіація збурень прийнята, як підпорядкована нормальному закону зі щільністю вірогідності

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}},$$

де α – параметр, що вказує найбільш вірогідне значення сигналу збурень, σ – середньоквадратичне відхилення.

Об’єкт керування імітувався структурою з послідовного з’єднання аперіодичної ланки першого порядку з постійною часу 0,05с і коефіцієнтом підсилення 2, та статичного нелінійного елемента $y = ht(\sigma)$, де $ht(\cdot)$ – функція гіперболічний тангенс. Завдання на вході системи мало трикутний вид.

Вхід і вихід узагальненої системи при стаціонарності об’єкта зображені на рис. 10.20.

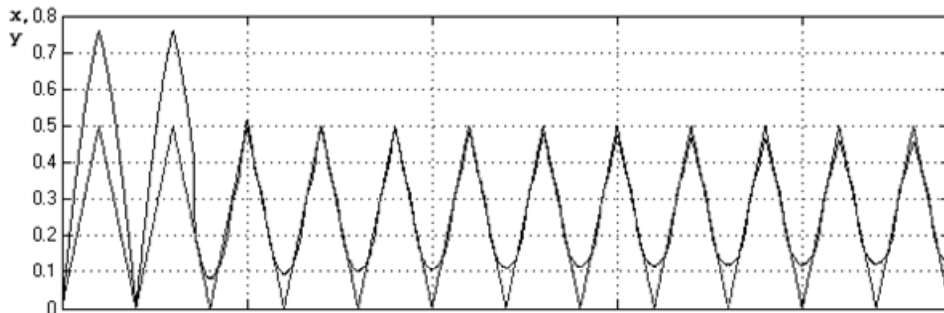


Рис. 10.20. Перехідні характеристики вхідного та вихідного сигналів

Процес параметричного настроювання бази продукційних правил завершується на 35с, після чого вихідний сигнал системи повторює вхідний закон з деякою похибкою (рис. 10.21).

На рис. 10.22. наведені перехідні характеристики вхідного та вихідного сигналів при 100 % зміні оператора об’єкта. Аналіз роботи системи показує, що дана адаптивна структура є критичною до меж варіації оператора об’єкта.

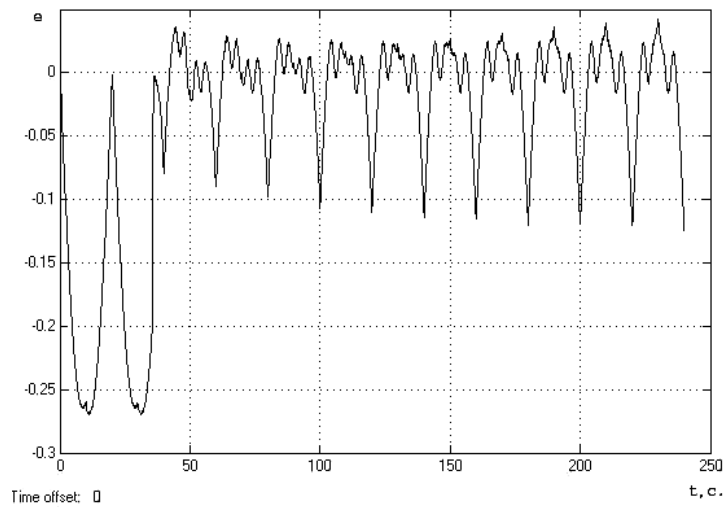


Рис. 10.21. Динаміка зміни похибки функціонування адаптивної системи

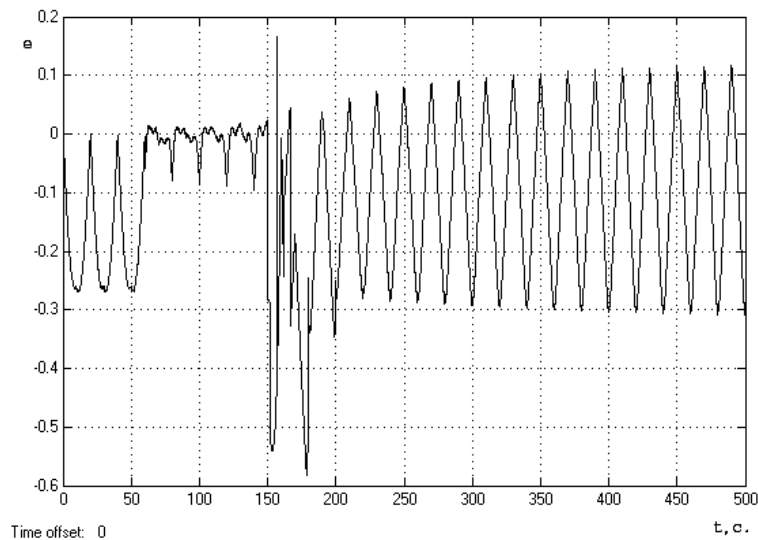


Рис. 10.22. Динаміка зміни похибки функціонування адаптивної системи
при 100% зміні оператора об'єкта

10.3. Адаптивні САК з авторегресійними структурами

У сучасних дискретних САК основним функціональним елементом є дискретно-неперервні фільтри, які покладені в основу синтезу рівнянь цих систем.

10.3.1. Дискретно-неперервні фільтри та моделі.

При моделюванні систем на базі різницевих рівнянь модель виду:

$$y_i = \alpha + \sum_{k=1}^p \beta_k y_{i-k} + \sum_{j=0}^q \gamma_j x_{i-j} + \varepsilon, \quad (10.7)$$

називають загальною моделлю **ADL(p,q)** (autoregressive distributed lag) з однією незалежною змінною. Тут α, γ, β - коефіцієнти; k, j - такти часу; p, q - змірність у часі (глибина пам'яті) виходу і входу; ε - похибка моделі.

Часткові випадки загальної моделі (10.7) класифікуються таким чином:

1. Модель **ADL(1,1)**:

$$y_t = \alpha + \beta_1 y_{t-1} + \gamma_0 x_0 + \gamma_1 x_{t-1} + \varepsilon$$

2. Модель розподіленого лага **ADL(0,q)**, або **AR(0,q)** – модель, в якій відсутні лаги критеріальної змінної.

3. Модель лінійного фільтра:

$$x_t = \varepsilon_t + \Psi_t \varepsilon_{t-1} + \dots,$$

де Ψ – оператор.

Якщо в (10.8) $\sum_{i=1}^{\infty} |\Psi_i| < \infty$, то процес є стаціонарним ($x_t = \varepsilon_t - \pi_t x_{t-1} - \dots$).

Якщо $\sum_{i=1}^{\infty} |\pi_i| < \infty$ – процес може бути оберненим.

4. **AR-модель.** Дану модель отримують із загальної структури ADL при накладенні наступного обмеження $\gamma_i = 0$, тобто **AR(p)=ADL(p,0)**:

$$y_t = \alpha + \sum_{k=1}^p \beta_k y_{t-k} + \varepsilon_t$$

У даних моделей змінна в лівій частині залежить тільки від власних лагів.

5. Модель **MA(q)** (усічена модель лінійного фільтра) має такий вигляд:

$$x_t = \varepsilon_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

або в матричній формі:

$$x_t = \theta(B) \varepsilon_t B \varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$$

де B – оператор зсуву назад.

Характеристична функція процесу записується у вигляді:

$$\theta(B) = 1 - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i .$$

Процес $MA(q)$ завжди стаціонарний і обернений, якщо всі корені характеристичного рівняння $\theta(B) = 0$ задовольняють умову $|B_i| > 1$.

6. Модель **ARI(p,d)** має вигляд:

$$\varepsilon_t = \bar{\varphi}(B)x_t = \varphi(B)(1-B)^d x_t .$$

Рівняння $\bar{\varphi}(B) = 0$ має d одиничних коренів

$$\bar{\varphi}(B) = (1-B)^d \varphi(B) .$$

Інтеграція порядку d можлива у випадку

$$\varepsilon_t = \varphi(B)(1-B)^d x_t = \varphi(B)y_t ,$$

де φ – характеристична функція.

7. Модель **ARIMA(p,d,q)** має вигляд:

$$\bar{\varphi}(B)x_t = \theta(B)\varepsilon_t .$$

10.3.2. Застосування авторегресійних моделей у САК.

Моделі дискретних стохастичних процесів прийнято записувати у вигляді вихідного сигналу фільтра з передаточною функцією $H(z)$. Зазвичай вводять припущення, що сигнал збурення є білим шумом $e(n)$, а передаточна функція має вигляд:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}} . \quad (10.9)$$

Зв'язок вхідного u і вихідного y сигналів в моделях дискретних стохастичних процесів (фільтрів) з передаточною функцією (10.9) прийнято описувати модифікованим різницеvim рівнянням:

$$y(t) = \sum_{l=0}^q \gamma_l u(t-l) - \sum_{k=1}^p \beta_k y(t-k) , \quad (10.10)$$

де $u(\cdot)$ – вхідний сигнал (регресор).

Різницева рівняння (10.10) характеризує авторегресійні процеси $\sum_{k=1}^p \beta_k y(t-k)$ (AR(p)-модель з розподіленим лагом залежної (критеріальної) змінної) з ковзним середнім (MA(q)-модель з розподіленим лагом регресора) $\sum_{l=0}^q \gamma_l u(t-l)$, або ARMA-процеси (AutoRegressive with Moving Average).

При застосуванні в системах керування апроксимуючих властивостей інтелектуальних елементів (системи нечіткої логіки, ШНМ тощо), з'являється можливість аналізувати подібні системи шляхом дослідження відповідних властивостей дискретних фільтрів або ARMA-процесів.

Необхідно зазначити, що наразі в описах методів синтезу структур нейродинаміки ОК, використовують таку інтерпретацію апроксимуючих властивостей ШНМ:

$$\hat{y}(k+1) = F(u_k, z^{-1}u_k, \dots, z^{-m}u_k; \hat{y}_k, z^{-1}\hat{y}_k, \dots, z^{-n}\hat{y}_k; w_i^{(l)}),$$

де в якості вектора стану ШНМ приймають вектор:

$$\text{col}(y, z^{-1}\hat{y}, \dots, z^{-n}\hat{y}) = \text{col}(\hat{x}_n(k), \hat{x}_{n-1}(k), \dots, \hat{x}_1(k)),$$

де F – функція зв'язку, z^{-1} – оператор зсуву, m і n – розмірність у часі входу і виходу.

Результатом апроксимації динамічної моделі реального ОК (в сенсі наближення функцій виходу $\hat{y}(t)$ і $y(t)$ з точністю до похибки навчання НМ $\hat{e}(t) = y(t) - \hat{y}(t)$) є значення вагових коефіцієнтів синоптичних зв'язків $w_i^{(l)}$ в шарах ШНМ ($l = \overline{1, K}$) з оцінкою вектора стану об'єкта, який прийнято описувати параметрично недовизначеним нелінійним диференціальним рівнянням виду:

$$y(k+1) = f[y(k), y(k-1), \dots, y(k-n+1); u(k), \dots, u(k-m+1)]. \quad (10.11)$$

Співставлення рівнянь (10.10) та (10.11) дозволяє довести, що параметрично недовизначене нелінійне диференціальне рівняння (10.11) є узагальненою формою рівняння дискретного фільтра, якщо врахувати, що вагові коефіцієнти

$\beta_k (k = 0, 1, 2, \dots, N)$ та $\alpha_k (k = 0, 1, 2, \dots, N)$ можуть бути визначені на базі застосування апроксимуючих властивостей інтелектуальних елементів.

10.3.3. Рівняння адаптивних САК з авторегресійними структурами.

При моделюванні динаміки ОК ARMA-модель (10.10) повинна володіти адаптивними властивостями, які можливо реалізувати при застосуванні лагового оператора (B):

$$B^\tau y_i = y_{i-\tau} . \quad (10.12)$$

Якщо застосувати поліном від лага:

$$f(B) = a_n B^n + \dots + a_1 B + a_0$$

до змінної x , то отримаємо:

$$f(B)y_i = \left(\sum_{j=0}^n a_j B^j \right) y_i = \sum_{j=0}^n a_j (B^j y_i) = \sum_{j=0}^n a_j y_{i-j} .$$

Оператор різниці (абсолютного приросту) Δ , визначається як $(1-B)$

$$\Delta y_i = 1 - B = y_i - y_{i-1} ,$$

друга різниця може бути визначена за таким шаблоном:

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = (1 - B)^2 = 1 - 2B + B^2 = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2} .$$

Якщо застосувати лагів оператор (10.12) до ADL-моделі (10.7), то отримаємо ADL(p,q)-модель в операторній формі:

$$y_i = \alpha + Bf(B)y_i + g(B)x_i + \varepsilon_i , \quad (10.13)$$

де $f(B)$ і $g(B)$ – поліноми.

Різницеве рівняння (10.13) характеризує авторегресійні процеси (AR(p) - модель з розподіленим лагом критеріального параметра) з ковзним середнім (MA(q)-модель з розподіленим лагом регресора).

Запишемо дискретну ARMA-модель з розподіленим лагом порядку (0,q) (MA(q)) для еталонного значення $y^*[i]$ вихідної координати ОК $y[i]$ для i -го такту часу:

$$y^*[i] = \alpha + \sum_{j=0}^q \gamma_j x[i-j] + \varepsilon[i]. \quad (10.14)$$

Розглянемо кінцеві різниці перших трьох порядків:

$$\Delta y[i] = \mu(1-B) = \mu(y^*[i] - y[i-1]), \quad (10.15)$$

$$\Delta^2 y[i] = \mu(1-B)^2 = \mu(y^*[i] - 2y[i-1] + y[i-2]), \quad (10.16)$$

$$\Delta^3 y[i] = \mu(1-B)^3 = \mu(y^*[i] - 3y[i-1] + 3y[i-2] - y[i-3]). \quad (10.17)$$

Кінцева різниця порядку m має вид:

$$\Delta^m y[i] = \mu(1-B)^m = \mu(\Delta^{m-1} y^*[i] - \Delta^{m-1} y[i-1]), \quad i = 0 \dots n - m, \quad (10.18)$$

де μ – коефіцієнт регуляризації.

Виключивши з (10.15)-(10.17) еталонну величину $y^*(t)$, отримаємо дискретні адаптивні структури моделей ADL, що характеризують адаптивні ARMA-процеси:

- адаптивна структура моделі ADL (1,1)

$$y[i] = \mu\gamma_0 x[i] + \mu\gamma_1 x[i-1] + (1-\mu)y[i-1] + \mu\varepsilon[i], \quad (10.19)$$

- адаптивна структура моделі ADL (2,2)

$$y[i] = \mu\gamma_0 x[i] + \mu\gamma_1 x[i-1] + \mu\gamma_2 x[i-2] + 2(1-\mu)y[i-1] - (1-\mu)y[i-2] + \mu\varepsilon[i], \quad (10.20)$$

- адаптивна структура моделі ADL (3,3)

$$y[i] = \mu\gamma_0 x[i] + \mu\gamma_1 x[i-1] + \mu\gamma_2 x[i-2] + \mu\gamma_3 x[i-3] + 3(1-\mu)y[i-1] - 3(1-\mu)y[i-2] + (1-\mu)y[i-3] + \mu\varepsilon[i]. \quad (10.21)$$

Відповідно до виведених структур (10.19)-(10.21) синтезуємо загальний вид адаптивної структури моделей ADL (p,q):

$$y[i] = \mu \sum_{j=0}^q \gamma_j x[i-j] + (1-\mu) \cdot \left(\left[\sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{j+1} \cdot p \cdot y[i-j] \right] + (-1)^{p+1} \cdot y[i-p] \right) + \mu\varepsilon[i] \quad (10.22)$$

схема алгоритму розрахунку яких наведена на рис. 10.23.

Адаптація ADL-моделей до властивостей ОК здійснюється шляхом адаптації вагових коефіцієнтів $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$ на базі модифікованого градієнтного ме-

тоду з мінімізацією квадратичного функціонала

$$J(\varepsilon) = 0,5\varepsilon^T \varepsilon . \quad (10.23)$$

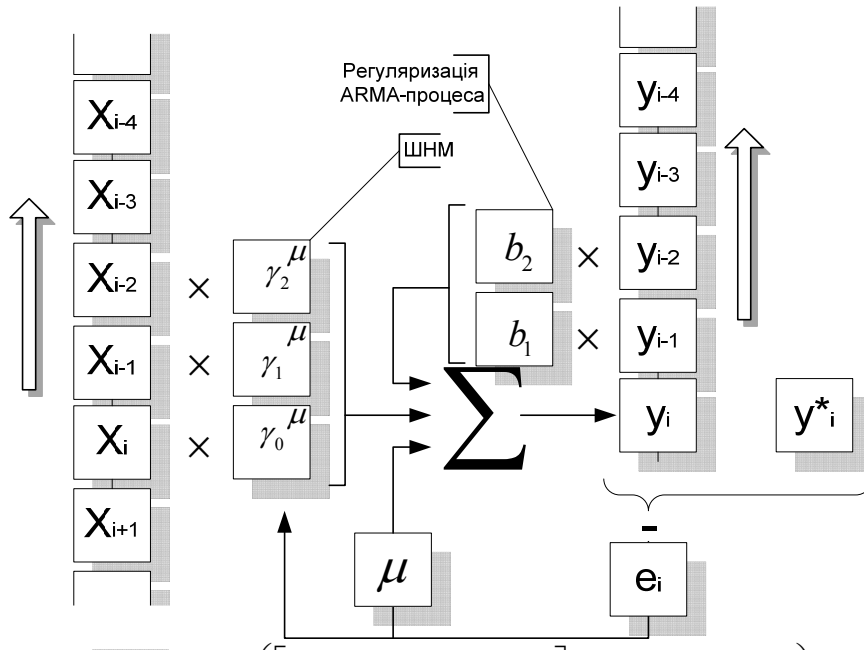


Рис. 10.23. Схема розрахунку вихідного сигналу моделей

Оскільки відсутня явна залежність вектора ε (за доданками (10.22)) і функції $J(\varepsilon)$ від вагових коефіцієнтів $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$, то похибка ε перераховується в узагальнені похибки $\delta^{(\ell)}$, які явно залежать від значень $\gamma_0 \dots \gamma_\ell$. При цьому адаптація вагових коефіцієнтів моделі (10.23) на кроці $[i+1]$ виконується відповідно до наступного рівняння:

$$\gamma_j[i+1] = \gamma_j[i] - hq^{(i-j)}[i]\Lambda^{(j)}[i],$$

де $q^{(i-j)}$ – розподілений лаг регресора, h - швидкість настроювання і

$$\Lambda^{(j)}[i] = \text{col} \left(\frac{\partial J}{\partial q_1^{(i-j)}}, \dots, \frac{\partial J}{\partial q_{n_j}^{(i-j)}} \right) = -\varepsilon[i],$$

тоді

$$\gamma_j[i] = \gamma_j[i-1] + h \cdot \varepsilon[i] \cdot q[i-j-1], \quad j = 0, 1 \dots \ell . .$$

Адаптаційна похибка $\varepsilon[i]$ визначається як різниця еталонного значення і фактичного виходу моделі на i -ій ітерації (такті).

10.3.4. Приклад САК з авторегресійними структурами.

Розглянемо реалізацію моделі ADL(1,1) (10.19) з урахуванням адаптації ARMA-моделей

$$y[i] = \mu\gamma_0x[i] + \mu\gamma_1x[i-1] + \mu\varepsilon[i] + (1-\mu)y[i-1]$$

Комп'ютерне дослідження проведемо за структурою адаптивного керування з еталонною моделлю (рис. 10.24). Час дискретизації прийнятий 0,01 с, коефіцієнт регуляризації – $\mu = 0,8$, швидкість настроювання вагових коефіцієнтів – $\gamma, h = 0,05$.

В якості ОК обрано нестационарну структуру другого порядку

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

Еталонна модель відповідає аперіодичній ланці з постійною часу 0,5 с.

$$W_{em}(s) = \frac{1}{0,5s + 1}$$

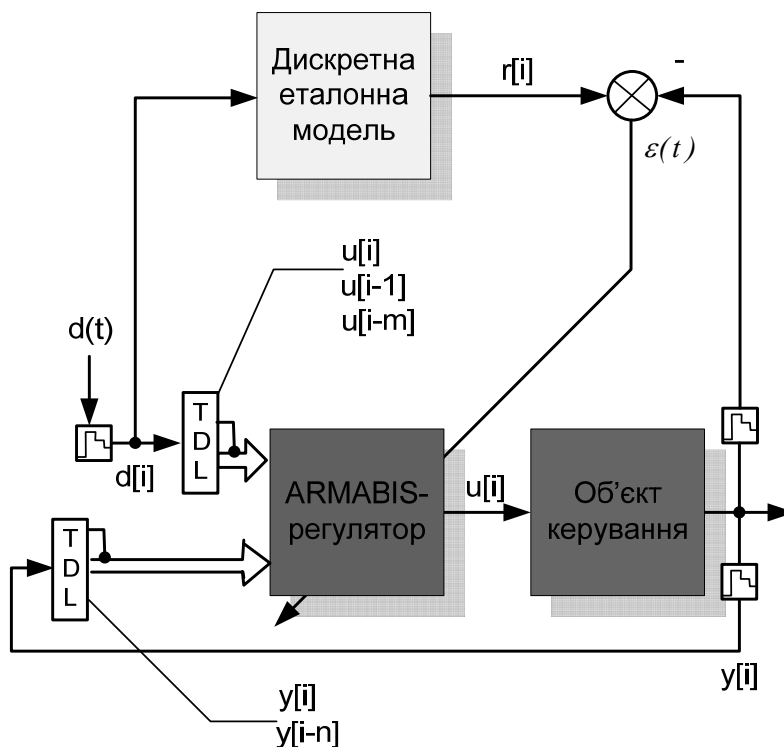


Рис. 10.24. Структура системи адаптивного керування з еталонною моделлю

Нестационарність об'єкта моделювалась зміною параметрів його моделі (табл. 10.1).

Таблиця 10.1 Значення параметрів об'єкта керування

№ інтервалу	Час, с	K	T, с	ξ
1	0-10	9	0,7	4
2	10-20	3	0,05	3
3	20-30	7	0,5	0,9
4	30-40	5	0,5	1,5
5	40-1000	3	0,05	2

На рис. 10.25-10.26 наведені результати адаптивного керування нестационарним об'єктом, де $d(t)$ – сигнал завдання, $r(t)$ – еталонний вид перехідного процесу, $y(t)$ – фактичний вихід ОК.

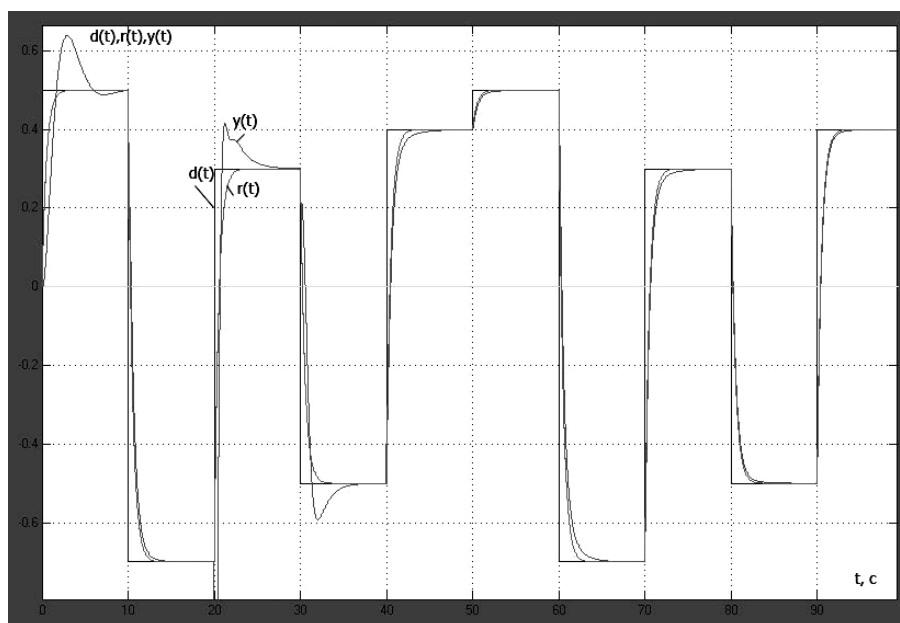


Рис. 10.25. Перехідні процеси в адаптивній системі керування у початковий період роботи

Для порівняння на рис. 10.27 наведені похибки керування об'єктом за допомогою лінійного адаптивного нейрорегулятора та за допомогою розглянутої адаптивної САК з авторегресійною структурою.

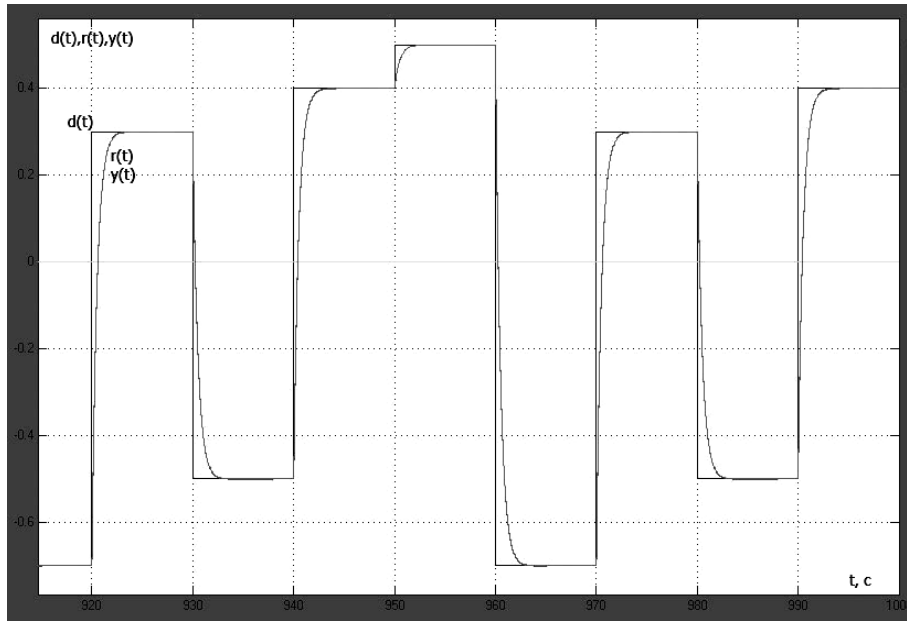


Рис. 10.26. Перехідні процеси в адаптивній системі керування у кінцевому періоді роботи

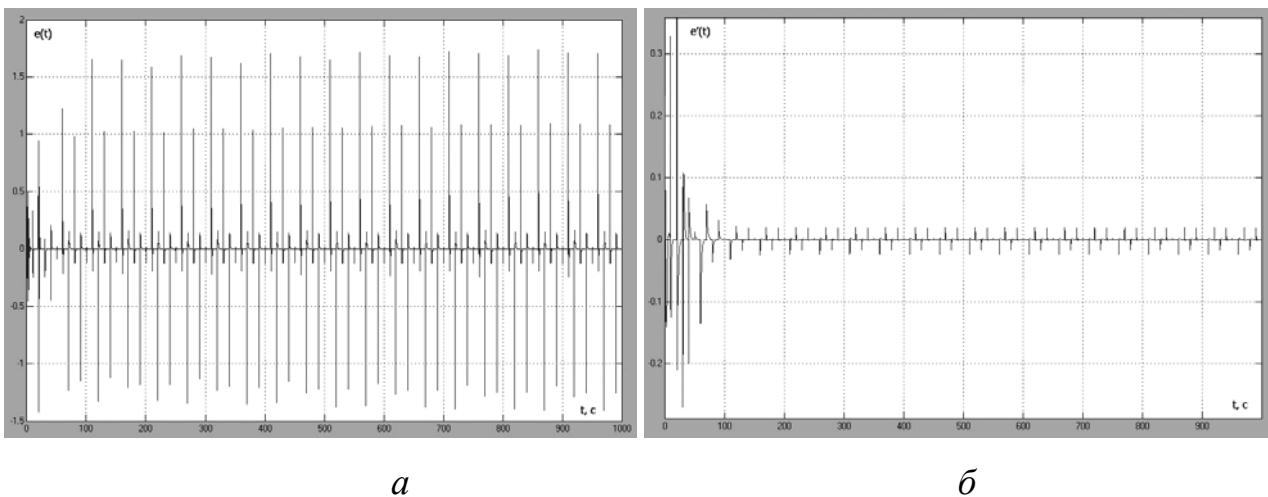


Рис. 10.27. Похибки керування в лінійній адаптивній системі нейрокерування (а) та в системі адаптивного керування з авторегресійною структурою (б)

10.3.5. Стійкість САК з авторегресійними структурами.

Запишемо рівняння (10.13) і (10.18) в загальному випадку для k -ої різниці

$$\Delta^k y_i = \sum_{v=0}^k (-1)^v C_k^v y_{i+k-v},$$

де $C_k^v = \frac{k!}{v!(k-v)!}$ – біноміальні коефіцієнти.

З урахуванням біноміальних коефіцієнтів адаптивна модель з розподі-
ним лагом ADL(p,q) (10.22) може бути представлена (в якості регресора при-
йнята вхідна координата x) як:

$$\begin{aligned} & y[i] - (1 - \mu) \left(\sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{j+1} \cdot p \cdot y[i-j] \right) - (1 - \mu) \cdot (-1)^{p+1} \cdot y[i-p] = \\ & = \mu \sum_{j=0}^q \gamma_j x[i-j] + \mu \varepsilon[i] \end{aligned} \quad (10.24)$$

Тоді характеристичне рівняння моделі (10.24) має вигляд:

$$y[i] - (1 - \mu) \left(\sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{j+1} \cdot p \cdot y[i-j] \right) - (1 - \mu) \cdot (-1)^{p+1} \cdot y[i-p] = 0. \quad (10.25)$$

Загальне рішення неоднорідного різницевого рівняння (10.24) предста-
вимо у вигляді суми перехідної та вимушеної складової. Перехідна складова
визначається за формулою:

$$y(i) = C_1 \lambda_1^i + C_2 \lambda_2^i + \dots + C_n \lambda_n^i, \quad (10.26)$$

де $\lambda_v (v = 1, 2, \dots, n)$ - некратні корені характеристичного рівняння (10.25), C_v -
довільні постійні.

Відповідно до рівняння перехідної складової (10.26) умова загасання ві-
льного руху системи (умова стійкості), яка описується різницеvim рівнянням
(10.24), має вид:

$$|\lambda_v| < 1, \quad (v = 1, 2, \dots, n). \quad (10.27)$$

Відповідно до вищевикладеного умова стійкості авторегресійної моделі
за структурою ADL(p,q) забезпечується настроюванням вагових коефіцієнтів
критеріального лагу відповідно до умови (10.27) характеристичного рівняння
(10.25).

Приклад. Запишемо рівняння моделі ADL(2,2) з урахуванням прийняття
в якості регресора вхідної координати x :

$$y[i] = b_0 x[i] + b_1 x[i-1] + b_2 x[i-2] - c_1 y[i-1] - c_2 y[i-2] + \mu \varepsilon[i],$$

де коефіцієнти різницевого рівняння визначені таким чином:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= 1, \\ c_1 &= -2(1 - \mu), \\ c_2 &= (1 - \mu), \\ b_0 &= \mu\gamma_0, \\ b_1 &= \mu\gamma_1, \\ b_2 &= \mu\gamma_2 \end{aligned} \right\} .$$

Тоді характеристичне рівняння моделі ADL(2,2) має вигляд:

$$\lambda^2 - 2(1 - \mu)\lambda - (\mu - 1) = 0$$

Розглянемо це характеристичне рівняння за умовами п. 10.3.4 з коефіцієнтом регуляризації $\mu = 0,8$ та коефіцієнтом швидкості настроювання вагових коефіцієнтів γ , $h = 0,05$.

Корені характеристичного рівняння

$$\lambda^2 - 0,4\lambda + 0,2 = 0 ;$$

дорівнюють

$$\lambda_{1,2} \approx 0,2 \pm j0,4 ,$$

що задовольняє умові (10.27). Таким чином, система є стійкою.

Графік перехідного процесу вихідної координати ОК наведено на рис. 10.28, а графіки зміни вагових коефіцієнтів регресійного лага моделі ADL(2,2) наведено на рис. 10.29.

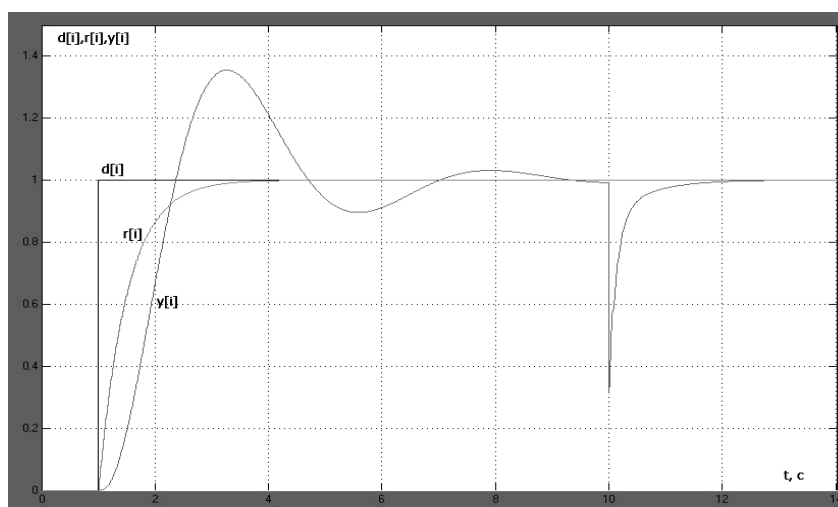


Рис. 10.28. Перехідний процес виходу $y[i]$ ОК, завдання $d[i]$ та еталонної моделі $r[i]$

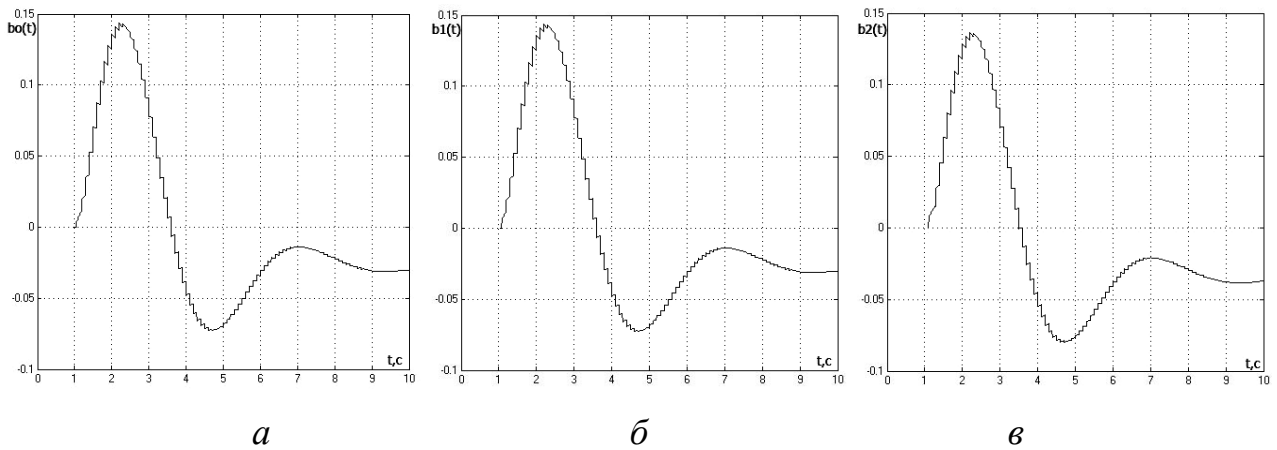


Рис. 10.29. Графіки зміни вагових коефіцієнтів регресійного лага моделі ADL(2,2)

10.4. Комбінування робастного і адаптивного керування.

Робастне керування — сукупність методів теорії керування, метою яких є синтез такого регулятора, який забезпечував би допустиму якість керування (наприклад, запаси стійкості), коли ОК відрізняється від розрахункового або його математична модель невідома. *Робастність* означає малу зміну виходу замкнутої системи керування при малій зміні параметрів ОК. Системи, що володіють властивістю робастності, називаються робастними (грубими) системами. Зазвичай робастні регулятори застосовуються для керування об'єктами з невідомою або неповною математичною моделлю, і що містять невизначеності.

При проектуванні систем керування реальним об'єктом, що функціонує в умовах невизначеності, необхідно вибрати тип керування — адаптивний або робастний. Очевидно, що слід вибрати той тип, який відповідає стану навколишнього середовища і системи, визначеному за інформацією, що є у розпорядженні системи. Якщо ж в процесі функціонування системи можна організувати отримання інформації, доцільно використовувати її в процесі керування.

Але реалізація такого комбінованого керування до недавнього часу натрапляла на непереборні труднощі при визначенні алгоритму вибору типу керу-

вання. Досягнуті в розробці проблем штучного інтелекту успіхи роблять можливим синтез такого алгоритму.

Нехай необхідно спроектувати систему, що використовує адаптивне і робастне керування і що здійснює вибір типу керування на основі методів штучного інтелекту. Для цього розглянемо особливості обох типів керування.

Невизначеність ОК відображає неточність його моделі, причому як параметричну, так і структурну.

Розглянемо форми завдання невизначеності в робастній теорії керування за допомогою простої системи з одним входом і одним виходом (рис. 10.30). Тут r — задаючий вхідний сигнал; u — вхідний сигнал (вхід) об'єкту; d — зовнішнє збурення; y — вихідний сигнал (вихід) об'єкту.

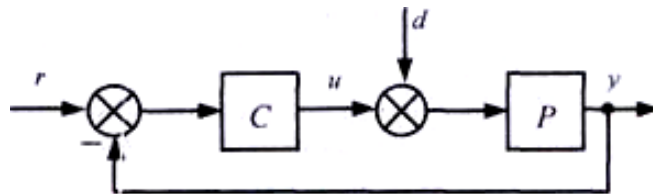


Рис. 10.30. Система з одним входом і одним виходом

У теорії робастного керування невизначеність зручно задавати в частотній області. Хай передавальна функція нормального об'єкту — P , тоді збурений об'єкт має передавальну функцію:

$$\tilde{P} = (1 + \Delta \cdot W)P,$$

де W — фіксована передавальна функція (вагова функція); Δ — довільна стійка передавальна функція, що задовольняє нерівності $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$.

Таке збурення називатимемо *допустимим*. Нижче приведемо деякі варіанти моделей невизначеності:

$$(1 + \Delta \cdot W)P; \quad P + \Delta \cdot W; \quad P/(1 + \Delta \cdot WP); \quad P/(1 + \Delta \cdot W).$$

Відповідні припущення повинні бути зроблені для величин Δ і W для кожного випадку.

Невизначеність вхідних сигналів d відображає різну природу зовнішніх збурень, що діють на об'єкт і регулятор. Невизначений об'єкт, таким чином, може розглядатися як якась множина об'єктів.

Виберемо якусь характеристику систем із зворотним зв'язком, наприклад стійкість. Регулятор C є робастним щодо цієї характеристики, якщо нею володіє будь-який з множини об'єктів, що задаються невизначеністю.

Таким чином, поняття робастності має на увазі наявність регулятора, множини об'єктів і фіксацію певної характеристики системи.

Завдання мінімальної чутливості полягає в побудові такого регулятора C , який стабілізує замкнуту систему і мінімізує вплив зовнішніх збурень на вихід y , інакше кажучи, мінімізує норму матриці передавальних функцій від зовнішніх збурень до виходу y .

Однією з особливостей рішення цій, та й всієї множини завдань робастного керування є той факт, що розробник заздалегідь в процесі проектування регулятора закладає обмеження на вхідні дії і на невизначеність об'єкту.

В процесі функціонування робастної системи інформація про невизначеності в системі не використовується для керування.

Природно, що це приводить до того, що робастні системи консервативні і якість їх перехідних процесів деколи не задовольняє розробників цих систем.

Подібно робастній, адаптивна система керування будується для об'єктів, інформація про яких або про дії на яких недоступна на початку функціонування системи. Найчастіше властивість адаптації досягається за допомогою формування в явному або неявному вигляді математичної моделі об'єкту або вхідної дії.

Цим відрізняється як пошукове адаптивне керування, в основі якого пошук і утримання екстремуму показника якості керування, так і беспошукове, в основі якого компенсація відхилення фактичних змін керованих координат від бажаних змін, відповідних необхідному рівню показника якості. Далі по уточненій моделі відбувається підстроювання адаптивного регулятора.

Таким чином, основна особливість адаптивних систем керування – можливість отримання інформації в процесі функціонування і використання цієї інформації для керування. Більш того, в адаптивних системах завжди використовується апріорна інформація про невизначеність в системі. Це принципова відмінність адаптивного підходу від робастного.

Розглянемо адаптивну систему керування, що забезпечує відстежування вхідного сигналу у присутності завад на вході об'єкту (рис. 10.31).

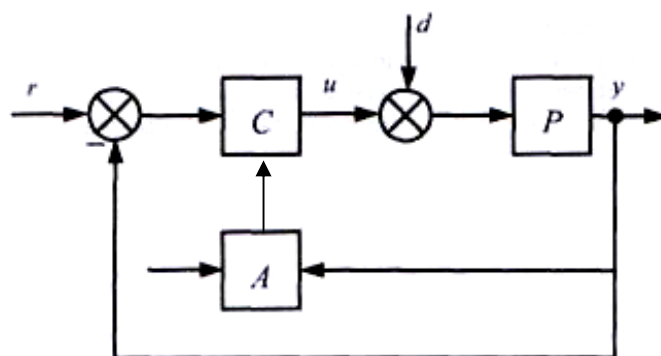


Рис. 10.31. Адаптивна система керування

Формальна відмінність цієї системи від системи на рис. 10.30 — наявність блоку адаптації A , який на підставі вихідного сигналу об'єкту і сигналу, що характеризує задану якість, виробляє сигнал підстроювання коефіцієнтів адаптивного регулятора.

Адаптивна система за допомогою блоку адаптації виробляє деяку інформацію про стан зовнішнього середовища. Зокрема, в даному випадку можна отримати інформацію про зовнішнє збурення d .

Алгоритм керування відповідає поточному стану зовнішнього середовища, згідно закладеному в блоці адаптації критерію. Але адаптивна система вимагає, щоб вхідний сигнал r мав достатньо широкий частотний діапазон, і накладає жорсткі обмеження на значення і частотний спектр сигналу зовнішнього збурення d . Тому адаптивні системи можуть працювати тільки у вузьких діапа-

зонах вхідного сигналу r і зовнішнього збурення d . Поза цими діапазонами адаптивна система має низьку якість керування і може навіть втратити стійкість.

Розглянуті вище властивості робастного і адаптивного керування приводять до висновку, що в процесі функціонування системи в одних випадках вигідно використовувати робастне керування, в інших — адаптивне, тобто мати можливість комбінувати керування залежно від стану зовнішнього середовища.

Якщо формально об'єднати схеми, приведені на рис. 10.30, 10.31, то отримаємо схему комбінованого керування (рис. 10.32).

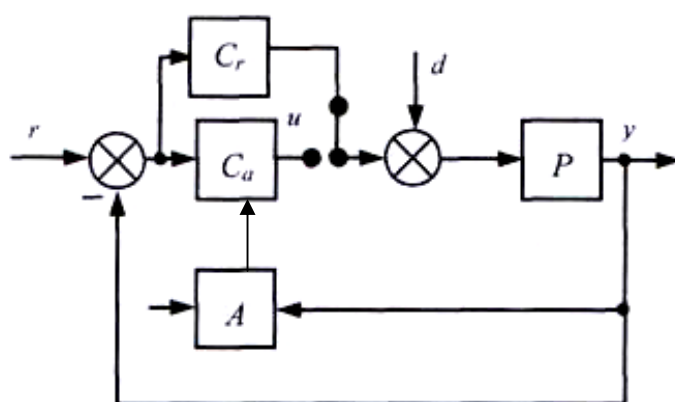


Рис. 10.32. Схема комбінованого керування

Як видно з рисунка, сигнал керування u повинен перемикатися з робастного регулятора C_r на адаптивний C_a і навпаки — у міру зміни навколишнього середовища в процесі функціонування системи. Використовуючи методи теорії інтелектуальних систем, можна забезпечити перехід з одного типу керування на інший залежно від умов роботи системи.

Розглянемо спочатку, яку інформацію можна використовувати для роботи інтелектуального блоку системи.

Як указувалося вище, частотна характеристика системи з робастним керуванням відповідає якнайгіршому поєднанню параметрів в області невизначеності. Тому робастне керування можна прийняти за одну з меж керування, що обирається.

Інша межа визначається можливостями досліджуваної системи (швидкістю, енергоозбросністю тощо). Між цими двома межами знаходиться область, де розумно використовувати адаптивне керування.

Оскільки адаптивний алгоритм чутливий до початкового етапу функціонування системи, то на цьому етапі доцільно використовувати робастне керування, яке достатнє нечутливо до швидкості зміни зовнішньої завади. Але його недоліком є велика тривалість перехідних процесів і великі допустимі значення вихідної координати при дії завад.

Після закінчення деякого часу робастного керування має сенс перемкнути на адаптивне, яке управління дозволяє точніше відстежити вхідний сигнал за наявності інформації про заваду. Адаптивне керування вимогливе до ширини спектру вхідного сигналу, і, наприклад, при поволі змінних сигналах можливі зриви процесів адаптації або сильне їх уповільнення. У такій ситуації необхідно знову переходити на робастне керування, що гарантує стійкість роботи системи.

З вищевикладеного виходить, що для функціонування системи необхідно мати інформацію про частотний спектр корисного сигналу, завади і про відношення сигнал/шум. Крім того, потрібна інформація про частотний спектр, на якому працює адаптивна система, і про характеристики ОК на межах області невизначеності. За цією інформацією формується база даних в процесі функціонування системи.

На рис. 10.33 приведено структурну схему системи з інтелектуальним блоком (ІБ), що забезпечує вибір типу керування.

На вхід блоку поступають сигнал r і вихідний сигнал об'єкту y . У блоці попередньої обробки інформації (БПОІ) за часовими характеристиками сигналів $r(t)$, $y(t)$ визначаються частотні характеристики вхідного сигналу $r(w)$ і зовнішнього збурення $d(w)$, взаємне розташування спектрів $r(w)$ і $d(w)$ і значення відношення сигнал/шум $r(w) / d(w)$.

Вся ця інформація поступає в базу даних (БД). Блок прийняття рішення (БПР), використовуючи сформовану базу знань (БЗ) і дані БД, виробляє рішен-

Глава 11. СПОСТЕРЕЖЕННЯ, ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

З точки зору теорії керування проблема оперативності спостереження в рамках САК може бути вирішена шляхом прогнозування (на необхідний інтервал випередження) значень змінних ОК за їх вимірюваним у минулому значенням, що здійснюється за допомогою прогнозуючих фільтрів.

У класичній постановці Вінера-Колмогорова здійснюється оптимальне (у сенсі мінімуму похибки) виділення корисного сигналу $s(t)$ із вхідного сигналу $y(t)$ на тлі шуму $n(t)$, тобто вхідний сигнал має вид:

$$y(t) = s(t) + n(t).$$

Метою прогнозування є одержання оцінки майбутнього значення сигналу

$$\hat{y}(t) = s(t + \Delta t),$$

де Δt – інтервал випередження.

Фільтрами називаються пристрої (алгоритми), що реалізують наведені вище вирази при $\Delta t = 0$. При $\Delta t > 0$ і $n(t) \equiv 0$ пристрої називаються випереджувачами, а при $\Delta t > 0$ і $n(t) \neq 0$ – прогнозуючими фільтрами.

Фільтр Вінера-Колмогорова є оптимальним для оцінки стаціонарного сигналу. Калманом і Б'юсі у 1960 р. було застосовано метод диференціальних рівнянь, для якого умова стаціонарності сигналу і завади не є обов'язковою. Після цього Д. Габор у 1962 р. запропонував алгоритми по створенню адаптивного самоналагоджувального фільтра. Якщо процес ергодичний, то в ході навчання прогнозуючий фільтр відтворює всі статистичні характеристики процесу.

Рішення задачі прогнозування полягає в інтерполяції часового ряду (за допомогою апроксимуючих функцій) і екстраполяції значень ряду на майбутнє за його попередніми значеннями функцій (наприклад, для стаціонарного процесу екстраполяція повинна враховувати сталість статистичних моментів часового ряду, а для нестаціонарних – розвиток його тренда в часі) з метою забезпечення обраного критерію якості.

Розвиток прогностики як науки привело до створення багатьох методів і прийомів прогнозування. Зараз налічується понад сто методів прогнозування, у зв'язку з чим виникає завдання вибору методів, які давали б адекватні прогнози для процесів і систем.

Необхідно вказати на три принципові проблеми, що виникають при прогнозуванні. Перша проблема – це визначення необхідних і достатніх параметрів для оцінки стану ОК.

Друга проблема полягає в так званому «проклятті розмірності». Бажання врахувати в моделі якомога більше показників і критеріїв оцінки може привести до її надмірної громіздкості.

Третя проблема – наявність феномена «надсистемності». Взаємодіючі системи утворюють систему більш високого рівня, яка має властивості, що роблять принципово недосяжною можливість реалізації надсистемного відображення і цільових функцій з погляду систем, що входять до складу надсистеми.

Для подолання перерахованих проблем робляться спроби застосування таких розділів сучасної математики, як нейрокомп'ютери, теорія хаосу, теорія ризиків, теорія катастроф і теорія самоорганізуючих систем. Ці методи дозволяють збільшити глибину прогнозу за рахунок виявлення прихованих закономірностей і взаємозв'язків там, де погано формалізуються моделі звичайними методами.

11.1. Прогнозування стану об'єктів керування

11.1.1. Класифікація методів прогнозування.

Класифікація повинна враховувати такі основні принципи: достатня повнота обхвату прогностичних методів, єдність класифікаційної ознаки на кожному рівні розчленовування, відкритість класифікаційної ієрархії.

Кожен рівень деталізації визначається своєю класифікаційною ознакою: ступенем формалізації, загальним принципом дії, способом отримання прогностичної інформації.

По ступеню формалізації всі методи прогнозування діляться на *інтуїтивні* і *формалізовані*. Інтуїтивне прогнозування застосовується тоді, коли об'єкт прогнозування або дуже простий, або настільки складний, що аналітично врахувати вплив багатьох чинників практично неможливо. У цих випадках удаються до опиту експертів. Отримані індивідуальні і колективні експертні оцінки використовують як кінцеві прогнози або як початкові дані в комплексних системах прогнозування.

У виборі методів прогнозування важливим показником є *глибина прогнозу*. При цьому необхідно не тільки знати абсолютну величину цього показника, але й віднести його до тривалості еволюційного циклу розвитку об'єкту прогнозування. Для цього можна використовувати безрозмірний показник глибини (дальності) прогнозування (x_t): $x_t = \Delta t / t$, де Δt – абсолютний час попередження; x_t – величина еволюційного циклу об'єкту прогнозування.

Формалізовані методи прогнозування є дієвими, якщо величина глибини попередження укладається в рамки еволюційного циклу ($x_t \ll 1$). При виникненні в рамках прогнозного періоду «стрибка» в розвитку об'єкту прогнозування ($x_t \approx 1$) необхідно використовувати інтуїтивні методи, як для визначення сили «стрибка», так і для оцінки часу його здійснення. Якщо ж в прогнозному періоді укладається декілька еволюційних циклів розвитку об'єкту прогнозування ($x_t \gg 1$), то при комплексуванні систем прогнозування більше значення мають інтуїтивні методи.

Залежно від загальних принципів дії інтуїтивні методи прогнозування, наприклад, можна розділити на дві групи: *індивідуальні* експертні оцінки і *колективні* експертні оцінки.

Методи *колективних експертних оцінок* можна віднести до комплексних систем прогнозування (зазвичай неповних), оскільки в останніх поєднуються методи індивідуальних експертних оцінок і статистичні методи обробки цих оцінок. Але, оскільки статистичні методи застосовуються в допоміжних процедурах вироблення прогнозованої інформації, то колективні експертні оцінки доцільніше віднести до сингулярних (одиничних) методів прогнозування.

У групу *індивідуальних експертних оцінок* можна включити (принцип класифікації – спосіб отримання прогнозової інформації) наступні методи: метод «інтерв'ю», аналітичні записки, написання сценарію. До групи колективних експертних оцінок входять анкетування, методи «комісій» і колективної генерації ідей.

Клас формалізованих методів залежно від загальних принципів дії можна розділити на групи *екстраполяційних, системно-структурних, асоціативних методів*. У групу методів прогнозової екстраполяції можна включити методи найменших квадратів, експоненціального згладжування, ймовірнісного моделювання і адаптивного згладжування. До групи системно-структурних методів – віднести методи функціонально-ієрархічного моделювання, морфологічного аналізу, матричний, мережевого моделювання, структурної аналогії. Асоціативні методи можна розділити на методи імітаційного моделювання і історико-логічного аналізу.

11.1.2. Моделі і методи прогнозування.

Метод найменших квадратів (МНК). Суть цього методу полягає у відшуванні параметрів моделі тренда (низькочастотної складової процесу), що мінімізують її відхилення від точок початкового часового ряду, тобто

$$S = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i) \rightarrow \min, \quad (11.1)$$

де \hat{y}_i – розрахункові значення початкового ряду; y_i – фактичні значення початкового ряду; n – число спостережень. Якщо модель тренда представити у вигляді

$$\hat{y} = f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_k, t),$$

де a_i – параметри моделі; t – час; x_i – незалежні змінні, то для знаходження параметрів моделі, що задовольняють умові (11.1), необхідно прирівняти нулю перші похідні величини S по кожному з коефіцієнтів a_i . Вирішуючи отриману систему рівнянь з k невідомими, знаходимо значення коефіцієнтів a_i .

Використання процедури оцінки, заснованої на методі найменших квадратів, припускає обов'язкове задоволення цілого ряду передумов, невиконання яких може привести до значних похибок:

1. Випадкові похибки мають нульове середнє, кінцеві дисперсії і коваріації.
2. Кожне вимірювання випадкової похибки характеризується нульовим середнім, не залежним від значень спостережуваних змінних.
3. Дисперсії кожної випадкової похибки однакові, їх величини незалежні від значень спостережуваних змінних (*гомоскедастичні*).
4. Відсутність автокореляції похибок, тобто значення похибок різних спостережень незалежні один від одного.
5. Нормальність. Випадкові похибки мають нормальний (гаусівський) розподіл.
6. Значення ендогенної змінної x вільні від похибок вимірювання і мають кінцеві середні значення і дисперсії.

У практичних дослідженнях як модель тренду в основному використовують лінійну $y = ax + b$, квадратичну $y = ax^2 + bx + c$, степеневу $y = ax^n$, показову $y = a^x$ і експоненціальну $y = e^x$ функції.

Вибір моделі у кожному конкретному випадку здійснюється по цілому ряду статистичних критеріїв, наприклад по дисперсії, кореляційному відношенню тощо, які, строго кажучи, є критеріями апроксимації, а не прогнозу.

Проте, для стаціонарних процесів якнайкраща модель апроксимації буде якнайкращою і для прогнозу.

Класичний МНК припускає рівноцінність початкової інформації в моделі. У реальній же практиці майбутня поведінка процесу значно більшою мірою визначається пізніми спостереженнями, чим ранніми. Ця обставина породила так зване дисконтування, тобто зменшення цінності ранішої інформації шляхом введення в модель (11.1) деяких вагів $\beta < 1$. Тоді

$$S = \sum_{i=1}^n \beta_i (\hat{y}_i - y_i) \rightarrow \min .$$

Коефіцієнти β можуть задаватися заздалегідь в числовій формі або у вигляді функціональної залежності таким чином, щоб у міру просування в минуле ваги убували.

Недолік методу полягає в тому, що модель тренда жорстко фіксується, і можна отримати надійний прогноз на невеликий період попередження. Тому МНК відноситься головним чином до методів короткострокового прогнозування. Крім того, істотною складністю при використанні МНК є правильний вибір виду моделі, а також обґрунтування і вибір вагів при дисконтуванні.

Метод експоненціального згладжування вельми ефективний і надійний метод прогнозування, переваги якого полягають в можливості врахування вагів початкової інформації, в простоті обчислювальних операцій і в гнучкості опису різних динамік процесів. Метод експоненціального згладжування дає можливість отримати оцінку параметрів тренда, що характеризують не середній рівень процесу, а тенденцію, що склалася до моменту останнього спостереження. Найбільше застосування метод знайшов для реалізації середньострокових прогнозів. Для методу експоненціального згладжування основним і найбільш важким моментом є вибір параметра згладжування початкових умов і ступеня прогнозуючого полінома.

Нехай початковий динамічний ряд описується рівнянням

$$y_i = a_0 + a_1 t + \frac{a_2}{2} t^2 + \dots + \frac{a_p}{p!} t^p + \varepsilon_i, \quad (11.2)$$

де ε_i – похибка i -го рівняння.

Метод експоненціального згладжування, що є узагальненням методу ковзного середнього, дозволяє побудувати опис процесу (11.2), при якому пізнішим спостереженням додаються великі ваги в порівнянні з ранніми спостереженнями, причому ваги спостережень убивають по експоненті.

Вираз

$$S_i^{[k]}(y) = \alpha \sum_{i=0}^n (1 - \alpha)^i S_{i-1}^{[k]}(y)$$

називається експоненціальною середньою k -го порядку, де α – параметр згладжування.

У розрахунках для визначення експоненціальної середньої користуються рекурентною формулою:

$$S_t^{[k]}(y) = \alpha S_t^{[k-1]}(y) + (1 - \alpha)^i S_{t-1}^{[k]}(y). \quad (11.3)$$

Використання співвідношення (11.3) припускає завдання початкових умов: $S_0^{[1]}, S_0^{[2]}, \dots, S_0^{[k]}$, для чого можна скористатися формулою Брауна–Мейера, що зв'язує коефіцієнти прогнозуючого полінома з експоненціальними середніми відповідних порядків:

$$S_t^{[k]} = \sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{\hat{a}_p}{p!} \frac{\alpha \beta}{(k-1)!} \sum_{j=0}^{\infty} j^p \beta^j \frac{(p-1+j)!}{j!},$$

де $p=1, 2, \dots, n+1$; \hat{a}_p – оцінки коефіцієнтів; $\beta = 1 - \alpha$.

Тоді для лінійної моделі оцінки початкових умов рівні:

$$S_0^{[1]} = a_0 - \frac{\beta}{\alpha} a_1; \quad S_0^{[2]} = a_0 - \frac{2\beta}{\alpha} a_1.$$

Знаючи $S_0^{[k]}$ і значення параметра a , можна обчислити експоненціальні середні $S_t^{[k]}$.

Оцінки коефіцієнтів прогнозуючого полінома знаходяться вирішенням системи $(p+1)$ рівнянь з $k(p+1)$ невідомими, що зв'язує параметри прогнозуючого полінома з початковою інформацією. Так, для лінійної моделі отримаємо:

$$\hat{a}_0 = 2S_t^{[1]} - S_t^{[2]}; \quad \hat{a}_1 = \frac{\alpha}{\beta} (S_t^{[1]} - S_t^{[2]}).$$

Прогноз реалізується по вибраному многочлену. Для лінійної моделі

$$\hat{y}_{t+\tau} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \tau,$$

де τ – період прогнозу.

Важливу роль в методі експоненціального згладжування грає вибір оптимального параметра згладжування a , оскільки саме він визначає оцінки коефіцієнтів моделі і результати прогнозу.

Чим більше a , тим більше внесок останніх спостережень у формування тренда, а вплив початкових умов швидко убуває. При малому a прогностні оцінки враховують всі спостереження, при цьому зменшення впливу «старішої» інформації відбувається поволі.

Відомо два основні співвідношення, що дозволяють знайти наближену оцінку a . Перше співвідношення Брауна, виведене з умови рівності ковзної і експоненціальної середньої

$$a = \frac{2}{N+1},$$

де N – число точок ряду, для яких динаміка ряду вважається однорідною і стійкою (період згладжування). Другим є співвідношення Мейера

$$a \approx \frac{\sigma_n}{\sigma_\varepsilon},$$

де σ_n – середньоквадратична похибка моделі; σ_ε – середньоквадратична похибка початкового ряду.

Вибір параметра a доцільно пов'язувати з точністю прогнозу, тому для більш обґрунтованого вибору a можна використовувати процедуру узагальненого згладжування, яка дозволяє отримати наступні співвідношення, що зв'язують дисперсію прогнозу і параметр згладжування:

- для лінійної моделі

$$\sigma_{\hat{x}_t}^2 = \frac{\alpha}{(1+\beta)^2} [1 + 4\beta + 2\beta^2 + 2\alpha(1+3\beta)\tau + 2\alpha^2\tau^3] \sigma_\varepsilon^2; \quad (11.4)$$

- для узагальненої моделі вигляду

$$y(t) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(t) + \varepsilon_t \quad (11.5)$$

дисперсія прогнозу має наступний вигляд

$$\sigma_{\hat{x}_t}^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_j(\tau) \text{cov}(a_j, a_k) f_k(\tau). \quad (11.6)$$

Відмітна особливість цих формул полягає в тому, що при $a = 0$ вони обертаються в нуль. Це пояснюється тим, що, чим ближче до нуля a , тим більше до-

вжина початкового ряду спостережень $t \rightarrow \infty$ і, отже, тим менше похибка прогнозу. Тому для зменшення похибки прогнозу необхідно вибирати мінімальне a . В той же час параметр a визначає початкові умови, і, чим менше a , тим нижче точність визначення початкових умов, а отже, погіршується і якість прогнозу. Похибка прогнозу росте у міру зменшення точності визначення початкових умов.

Таким чином, використання формул (11.4) -(11.6) приводить до суперечності при визначенні параметра згладжування: із зменшенням a зменшується середньоквадратична похибка, але при цьому зростає похибка в початкових умовах, що у свою чергу впливає на точність прогнозу.

У ряді випадків параметр a вибирається так, щоб мінімізувати похибку прогнозу, розрахованого за ретроспективною інформацією.

Вельми істотним для практичного використання є питання про вибір порядку прогнозуючого полінома, що багато в чому визначає якість прогнозу. Перевищення другого порядку моделі, як правило, не приводить до істотного збільшення точності прогнозу, але значно ускладнює процедуру розрахунку.

Розглянутий метод є одним з найбільш надійних і широко вживаних в практиці прогнозування. Один з найбільш перспективних напрямів розвитку даного методу є метод різницевого прогнозування, в якому само експоненціальне згладжування розглядається як окремий випадок.

Кореляційний і регресійний аналізи. Поширеним способом отримання багатofакторних прогнозів є, згадуваний раніше, класичний МНК і побудова на його основі моделі множинної регресії, яка для лінійного випадку записується у вигляді:

$$y_j = \sum_{i=1}^n a_i x_{ij} + \varepsilon_j$$

де a_i – коефіцієнти; y_j , x_{ij} – відповідно значення j -ї функції (залежної змінної) і i -ї незалежної змінної; $i = \overline{0, n}$; $j = \overline{1, N}$; ε_j – випадкова похибка; n – число не-

залежних змінних в моделі (у ряді випадків вважається, що a_i – вільний член і $x_{0j} = 1$).

У векторному вигляді ця модель має вигляд

$$Y = Xa + \varepsilon,$$

де Y і a – відповідно вектори значень залежної змінної і коефіцієнтів моделі; X – матриця незалежних змінних порядку $(n \times N)$; ε – вектор випадкових похибок.

Невідомі коефіцієнти a знаходяться з умови мінімуму функціонала похибки, який у векторному вигляді записується як

$$\Phi = (Y - Xa)^T (Y - Xa) \rightarrow \min.$$

Умови мінімуму Φ реалізуються при рівності нулю перших похідних функціонала по невідомим коефіцієнтах, тобто

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0; \quad i = \overline{0, n}.$$

Дана умова еквівалентна виконанню векторного співвідношення $X^T Xa = X^T Y$, що дає значення оцінок коефіцієнтів моделі:

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

Надійність отримуваної за допомогою оцінок \hat{a} моделі визначається по величині залишкової дисперсії:

$$\sigma^2 = \frac{\varepsilon^T \varepsilon}{N - n} = \frac{1}{N - n} [Y Y^T - Y^T X (X^T X)^{-1} X^T Y]$$

і коефіцієнта множинної кореляції:

$$R = \sqrt{1 - \frac{D}{D_{(n+1)(n+1)}}},$$

де $D_{(n+1)(n+1)}$ – доповнення алгебри визначника кореляційної матриці $r = r[x_i x_j]$, $(i, j = \overline{0, n})$ до елемента $r_{x_{(n+1)(n+1)}}$.

Величина R – множинний коефіцієнт детерміації; він показує, яка частка дисперсії функції обумовлена змінами тих, що входять в рівняння регресії неза-

лежних змінних при набутих значеннях коефіцієнтів моделі. Надійність коефіцієнта множинної кореляції визначається по критерію Фішера

$$F = \frac{R^2(N - n - 1)}{(1 - R^2)(n - 1)}$$

при заданому рівні надійності і міри свободи $\nu = N - n$. Наявність зв'язку між залежною змінною y_i і незалежними змінними x_{ij} визначається за допомогою коефіцієнтів кореляції

$$r_{yxi} = \frac{S_{yxi}^2}{\sqrt{S_{yy}^2 S_{xixk}^2}},$$

де $S_{yxi}^2, S_{yy}^2, S_{xixk}^2$ – коефіцієнти коваріації, визначувані по формулі

$$S_{xixk}^2 = \frac{1}{N - 1} \sum_{j=1}^N (x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_k),$$

де \bar{x}_i, \bar{x}_k – середні значення незалежних змінних x_i, x_k .

Для визначення надійності оцінок будується довірчий інтервал для отриманих оцінок \hat{a} коефіцієнтів моделі

$$|\hat{a} - a_i| \leq t_{p,\nu} \sigma \sqrt{c_{ii}},$$

де $t_{p,\nu}$ – значення критерію Стюдента з рівнем надійності p і мірами свободи $\nu = (N - n - 1)$; c_{ii} – i -й діагональний елемент матриці $(X^T X)^{-1}$. Тому дійсне значення коефіцієнта a моделі лежатиме в інтервалі

$$\hat{a}_i - t_{p,\nu} \sigma \sqrt{c_{ii}} < a_i < \hat{a}_i + t_{p,\nu} \sigma \sqrt{c_{ii}}.$$

Використання обчислювальної процедури по МНК з метою отримання оцінок коефіцієнтів моделі має велику кількість обмежень, розглянутих вище.

Важливою характеристикою реалізованої моделі є оцінка похибки прогнозу. Оцінка дисперсії прогнозу має вигляд:

$$\sigma_{t+\tau}^2 = \sigma^2 [1 + X_{t+\tau}^T (X^T X)^{-1} X_{t+\tau}],$$

де $X_{t+\tau}$ – вектор значень незалежних змінних в момент $(t + \tau)$. Тому довірчий інтервал для значень залежної змінної визначається у момент t як

$$\left[Y_{t+\tau} \pm t_{p,v} \sigma_t \sqrt{I + \frac{I}{t-1} X_t^T (X_t^T X_t)^{-1} X_t} \right],$$

де I – одиничний стовпець; $t_{p,v}$ – значення критерію Стюдента. Ефективнішою оцінкою довірчого інтервалу для прогнозних значень є:

$$\left[Y_{t+\tau} \pm t_{p,v} \sigma_{t+\tau} \sqrt{I + \frac{1-r_I}{t+\tau-1} \frac{X_{t+\tau}^T X_{t+\tau}}{X_t^T X_t}} \right].$$

Важливою умовою отримання надійних оцінок для моделі по МНК є відсутність автокореляції.

Оцінка автокореляції для отриманої по МНК моделі здійснюється по критерію Дарбіна – Вотсона:

$$d = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} (\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t)^2}{\sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2},$$

де T – довжина часового ряду.

Набуте розрахункове значення d порівнюється з теоретичними значеннями нижньої $d1$ і верхньої $d2$ межами критерію. Якщо $d < d1$, то гіпотеза відсутності автокореляції відкидається; якщо $d > d2$, то гіпотеза відсутності автокореляції приймається; якщо $d1 \leq d \leq d2$, то необхідне подальше дослідження.

Побудова адекватних регресійних моделей для цілей прогнозування за допомогою МНК пред'являє до початкової інформації вельми жорсткі вимоги. У ряді випадків ці вимоги для реальних спостережень виявляються невиконаними, тому отримувані оцінки виявляються неефективними, а прогноз – недостовірним.

Адаптивні методи прогнозування. Характерною рисою адаптивних методів прогнозування є їх здатність безперервно враховувати еволюцію динамічних характеристик процесів, що вивчаються, «підстроюватися» під цю еволюцію, додаючи, зокрема, тим більшу вагу і тим більше високу інформаційну цінність наявним спостереженням, чим ближче вони до теперішнього моменту прогнозування.

Проте ділення методів і моделей на «адаптивні» і «неадаптивні» достатньо умовно. У певному сенсі будь-який метод прогнозування адаптивний, оскільки всі вони враховують інформацію, що знов поступає, зокрема спостереження, зроблені з моменту останнього прогнозу. Загальне значення терміну полягає, мабуть, в тому, що «адаптивне» прогнозування дозволяє оновлювати прогнози з мінімальною затримкою і за допомогою відносно нескладних математичних процедур. Проте це не означає, що в будь-якій ситуації адаптивні методи ефективніші за ті, які традиційно не відносяться до таких.

Простий варіант адаптивного методу (метод експоненціального згладжування) вже розглядався вище для виявлення невинуватої складової аналізованого часового ряду.

Постановка завдання прогнозування з використанням методу експоненціального згладжування формулюється таким чином.

Нехай аналізований часовий ряд x_τ , $\tau = 1, 2, \dots, t_1$ представлений у вигляді

$$x_\tau = a_0 + \varepsilon_\tau, \quad (11.7)$$

де a_0 – невідомий параметр, що не залежить від часу, а ε_τ – випадковий залишок з середнім значенням, рівним нулю, і кінцевою дисперсією.

Експоненціально зважене ковзне середнє значення ряду x_τ в точці $t(\lambda)$ з параметром згладжування (параметром адаптації) λ ($0 < \lambda < 1$) визначається формулою

$$\bar{x}_t(\lambda) = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^t} \sum_{j=0}^{t-1} \lambda^j x_{t-j}, \quad (11.8)$$

яка дає рішення задачі:

$$\bar{x}_t(\lambda) = \arg \min_a \sum_{j=0}^{t-1} \lambda^j (x_{t-j} - a)^2.$$

Для рядів з «нескінченим минулим» формула (11.8) зводиться до вигляду

$$\bar{x}_t(\lambda) = (1 - \lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j x_{t-j}. \quad (11.9)$$

Прогноз \hat{x}_t^l для невідомого значення x_{t+l} по відомій до моменту часу t траєкторії ряду x_t будується по формулі

$$\hat{x}_t^l = \bar{x}_t(\lambda), \quad (11.10)$$

де значення $\bar{x}_t(\lambda)$ визначено формулою (11.8) або (11.9), відповідно для короткого або довгого часового ряду. Формула (11.10) зручна тим, що при появі наступного $(t+l)$ -го спостереження x_{t+1} перерахунок прогнозуючої функції $\hat{x}_{t+1}^l = \bar{x}_{t+1}(\lambda)$ проводиться за допомогою простого співвідношення

$$\bar{x}_{t+1}(\lambda) = \lambda \bar{x}_t(\lambda) + (1 - \lambda)x_{t+1}.$$

Метод експоненціального згладжування можна узагальнити на випадок поліноміальної не випадкової складової аналізованого часового ряду, тобто на ситуації, коли замість (11.7) модель ряду має вигляд:

$$x_{t+\tau} = a_0 + a_1\tau + \dots + a_k\tau^k + \varepsilon_\tau, \quad (11.11)$$

де $k \geq 1$. У співвідношенні (11.11) початкова точка відліку часу зрушена у нинішній момент часу t , що полегшує подальші обчислення. Відповідно, в схемі простого варіанту методу прогноз \hat{x}_t^l значення x_{t+l} визначатиметься співвідношеннями (11.11) при

$$\hat{x}_t^l = \hat{x}_{t+1} = \hat{a}_0^{(k)}(t, \lambda) + \hat{a}_1^{(k)}(t, \lambda) + \dots + \hat{a}_k^{(k)}(t, \lambda), \quad \tau = 1,$$

де оцінки $\hat{a}_j(t, \lambda)$, $j = 0, 1, \dots, k$ виходять як рішення оптимізаційної задачі

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (x_{t-j} - a_0 - a_1j - \dots - a_kj^k)^2 \rightarrow \min_{a_0, a_1, \dots, a_k}.$$

Розглянемо ще декілька методів, що використовують експоненціальне згладжування.

Метод Хольта ослабив обмеження методу Брауна, пов'язані з його однопараметричністю, введенням двох параметрів згладжування. У його моделі прогноз λ_1 і λ_2 ($0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$) на l такт часу у нинішній момент t також визначається лінійним трендом вигляду

$$\hat{x}_t^l = \hat{a}_0(t, \lambda_1, \lambda_2) + l\hat{a}_1(t, \lambda_1, \lambda_2),$$

де оновлення прогнозуючих коефіцієнтів проводиться по формулах

$$\begin{aligned} \hat{a}_0(t+l, \lambda_1, \lambda_2) &= \lambda_1 x_t + (1 - \lambda_1)[\hat{a}_0(t, \lambda_1, \lambda_2) + \hat{a}_1(t, \lambda_1, \lambda_2)], \\ \hat{a}_1(t+l, \lambda_1, \lambda_2) &= \lambda_2 [\hat{a}_0(t+l, \lambda_1, \lambda_2) - \hat{a}_1(t, \lambda_1, \lambda_2)] + (1 - \lambda_2)\hat{a}_1(t, \lambda_1, \lambda_2). \end{aligned}$$

Таким чином, прогноз по даному методу є функцією минулих і поточних даних, параметрів λ_1 і λ_2 , а також початкових значень

$$\hat{a}_0(0, \lambda_1, \lambda_2) \text{ і } \hat{a}_1(0, \lambda_1, \lambda_2).$$

Метод Хольта-Вінтерса розвинув метод Хольта таким чином, щоб він охоплював ще й сезонні ефекти. Прогноз, зроблений у момент t на l тактів часу вперед, рівний

$$\hat{x}_t^l = [\hat{a}_0(t) + l\hat{a}_1(t)]\omega_{t+l-N},$$

де ω_τ – коефіцієнт сезонності, а N – число часових тактів, що містяться в повному сезонному циклі. Сезонність в цій формулі представлена мультиплікативно. Метод використовує три параметри згладжування $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($0 < \lambda_j < 1, j = 1, 2, 3$), а його формули оновлення мають вигляд:

$$\hat{a}_0(t+1) = \lambda_1 \frac{x_{t+1}}{\omega_{t+1-N}} + (1 - \lambda_1)[\hat{a}_0(t) + \hat{a}_1(t)],$$

$$\omega_{t+1} = \lambda_2 \frac{x_{t+1}}{\hat{a}_0(t+1)} + (1 - \lambda_2)\omega_{t+1-N},$$

$$\hat{a}_1(t+1) = \lambda_3[\hat{a}_0(t+1) - \hat{a}_0(t)] + (1 - \lambda_3)\hat{a}_1(t).$$

Як і у попередньому випадку, прогноз будується на підставі минулих і поточних значень часового ряду, параметрів адаптації $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а також початкових значень $\hat{a}_0(0), \hat{a}_1(0), \omega_0$.

Метод групового урахування аргументів. Велику популярність для конкретних завдань прогнозування набув метод групового урахування аргументів (МГУА), що є подальшим розвитком методу регресійного аналізу. Він заснований на принципах теорії навчання і самоорганізації, зокрема на принципі «селекції», або направленої відбору.

Метод реалізує завдання синтезу оптимальних моделей високої складності, адекватній складності досліджуваного об'єкту (тут під моделями розуміється система регресійних рівнянь). Так, алгоритми МГУА, побудовані по схемі масової селекції, здійснюють перебір можливих функціональних описів об'єкту.

При цьому повний опис об'єкту:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де f – деяка функція, наприклад степеневий поліном, замінюється рядами часткових описів:

1-й ряд селекції –

$$y_1 = f(x_1, x_2), \quad y_2 = f(x_1, x_3), \quad \dots, \quad y_s = f(x_{m-1}, x_m);$$

2-й ряд селекції –

$$z_1 = f(y_1, y_2), \quad z_2 = f(y_1, y_3), \quad \dots, \quad z_k = f(y_{n-1}, n)$$

і так далі.

Розглядаються різні поєднання вхідних і проміжних змінних, і для кожного поєднання будується модель, причому при побудові рядів селекції використовуються найрегулярніші змінні. Регулярність визначається мінімумом середньоквадратичної похибки змінних на окремій перевірочній послідовності даних (початковий ряд ділиться на навчальну і перевірочну послідовності). В деяких випадках як показник регулярності використовується коефіцієнт кореляції. Ряди будуються до тих пір, поки регулярність підвищується, тобто знижується похибка або збільшується коефіцієнт кореляції. Таким чином, зі всієї сукупності моделей вибирається така, яка є оптимальною з погляду вибраного критерію.

Розглянемо деякі алгоритми МГУА.

У алгоритмах з лінійними поліномами як часткові описи використовуються співвідношення вигляду

$$y_k = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i, \quad 0 < i < m.$$

Алгоритм синтезує моделі послідовним збільшенням аргументів. Так, моделі першого селекційного ряду включають по два аргументи, моделі другого ряду – три-чотири і так далі. Алгоритми з коваріаціями і квадратичними описами оперують з частковими описами вигляду

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_j + a_3 x_i x_j;$$

$$y_k = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_j + a_3 x_i x_j + a_4 x_i^2 + a_5 x_j^2.$$

В даному випадку моделі ускладнюються не тільки за рахунок збільшення числа аргументів, що враховуються, але й за рахунок зростання ступеня опису.

У алгоритмах з послідовним виділенням трендів як такі розглядаються рівняння регресії по одному аргументу, включаючи час:

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m).$$

Для побудови моделей використовуються часткові описи вигляду

$$y = a_0 + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \dots + a_m f(x_m).$$

Алгоритм працює таким чином, що спочатку виділяється перший тренд і розраховується відповідне відхилення (перший залишок) дійсних значень функції від тренда. Після чого, це відхилення апроксимується другим трендом і визначається другий залишок і так далі. На практиці виділяють до п'яти-шести трендів.

Алгоритми МГУА розглядаються як варіанти послідовного проектування вихідної величини на площині змінних на кожному ряду селекції. Вибираючи певний вид оператора проектування, можна отримати той або інший алгоритм МГУА. Наприклад, в алгоритмі МГУА з послідовним виділенням трендів вихідна величина у проектується тільки на першому ряду, далі проектується вже залишок $\Delta r = y - f$ на осі найбільш ефективної змінної. Функція апроксимації має вигляд

$$f_{n+1} = \bar{P}_{j0}\varphi + \bar{P}_{j1}\Delta_1 + \dots + \bar{P}_{jn}\Delta_n,$$

де $\bar{P}_{jr}\Delta_r$ – частковий опис у вигляді полінома ступеня l по одній з найбільш ефективних змінних x_j , що відбирані за коефіцієнтом кореляції: $0 \leq l \leq m$; P_{ij} – оператор ортогонального проектування на підпростір $L_j = \{x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^m\}$, $1 \leq j \leq (m+1)S$, $j = \overline{1, l}$. Оператор P_{ij} можна представити у вигляді суперпозиції проекторів, відповідних різним алгоритмам МГУА. Таким чином, вираз для f_{n+1} задає множину алгоритмів МГУА, що відрізняються за способом проектування залишку.

Для отримання прогнозів поведінки складних систем передбачається виконання певних умов:

1. Межі системи вибираються так, щоб можна було виключити лише найменш важливі зв'язки системи із зовнішнім середовищем.

2. Система включає певне число змінних M і зворотних зв'язків f . Для отримання надійного прогнозу при побудові моделі досить використовувати будь-які $m = M = f$ змінні.

3. Вибрані змінні не повинні повторювати один одного.

4. Погано прогнозовані змінні слід виключити з моделі. Прогноз називається системним, якщо одночасно прогнозуються декілька характеристичних змінних системи.

Для короткострокового прогнозу як критерій селекції пропонується використовувати критерій регулярності – величину середньоквадратичної похибки, визначуваної на точках перевірконої послідовності, що не бере участь в отриманні оцінок коефіцієнтів.

Для середньострокових прогнозів пропонується використовувати критерій незміщеності як найбільш ефективний.

За наявності інформації про зміну взаємозв'язаних змінних з'являється можливість використовувати критерій, який є одним з найбільш ефективних при довгостроковому прогнозуванні, а саме критерій балансу змінних, тобто мінімізації суми квадратів розузгоджень самих значень проміжних змінних і їх модельних уявлень. Даний критерій визначає «жорсткість», незмінність структури досліджуваного об'єкту.

11.2. Дискретизація та відновлення сигналів в задачах спостереження та ідентифікації

В задачах спостереження й ідентифікації метою дискретизації є забезпечення мінімальної похибки апроксимації неперервних сигналів дискретними формами.

Дискретизація і відновлення сигналів визначаються теоремами Котельникова-Шеннона, які стверджують, що, якщо спектр безперервної

функції $x(t)$ обмежений круговою частотою ω_{\max} (частотою Найквіста F_{\max}), то:

- частота дискретизації функції $x(t)$ повинна бути $F_{\partial} \geq \omega_{\max} / \pi = 2F_{\max}$, що дозволяє уникнути перекручування спектра функції, яку дискретизували, за рахунок його повторення (теорема дискретизації Шеннона);
- безперервна функція $x(t)$ однозначно відновлюється (визначається) за її дискретними відліками $x(kT)$, узятими рівномірно з періодом $T = F_{\partial}^{-1} \leq \pi / \omega_{\max} = (2F_{\max})^{-1}$:

$$x(t) = \sum_k x(kT) \cdot \text{sinc}(t/T - k), \quad (11.12)$$

де $\text{sinc}(t) = \sin(\pi t) / (\pi t)$; k – номери відліків (теорема відновлення (відліків) Котельникова-Шеннона).

Область визначення цих теорем, крім сигналів з обмеженим спектром (СОС), розповсюджується також на смугові і багатосмугові сигнали.

Коли в сигналі є частоти більші F_{\max} (сигнали з необмеженим спектром – СНС), то для одержання сигналів СОС необхідно використовувати формуючий передфільтр нижніх частот (ФНЧ) для запобігання ефекту накладання, а для відновлення безперервних сигналів за їх відліками використовується формуючий постфільтр ФНЧ (рис. 11.1).

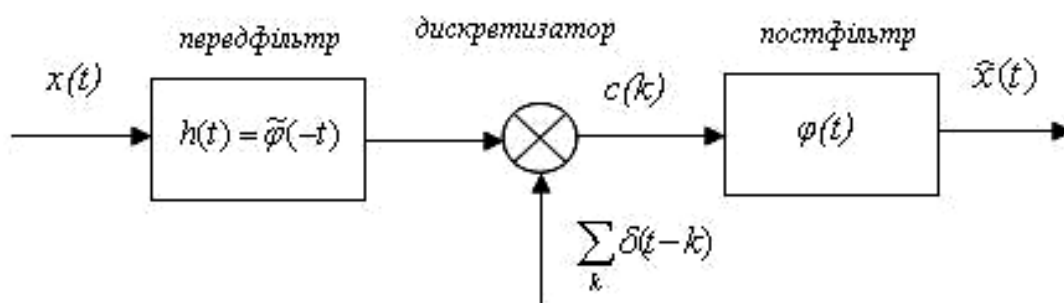


Рис. 11.1. Схема дискретизації безперервної функції (сигналу)

Дискретизовані відліки (при $T = 1$) визначаються як:

$$c_{\delta}(k) = c(k) \cdot \delta(t - k), \quad (11.13)$$

а відновлений сигнал дорівнює:

$$\hat{x}(t) = \sum_k c_{\delta}(k) \cdot \varphi(t - k), \quad (11.14)$$

де, відповідно до (11.12): $c(k) = x(kT)$; $h(t) = \varphi(t) = \text{sinc}(t)$ – ідеальні ФНЧ; δ – функція Дірака.

Використання моделі апроксимації сигналу (11.12)-(11.14) не завжди коректне через неможливість реалізації ідеальних ФНЧ, а область використання *sinc*-функцій обмежена через їх низьку роздільну здатність.

У сучасних підходах фільтри ФНЧ для сигналів СНС можуть обиратися не ідеальними, але вони повинні бути біортогональними:

$$\langle \varphi(t - k), \tilde{\varphi}(t - m) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - k) \cdot \tilde{\varphi}(t - m) dt = \delta_{k-m}.$$

Тоді сигнали в L_2 -мірному просторі визначаються як:

$$\left\{ s(t) = \sum_k c(k) \varphi(t - k) : c \in L_2 \right\}, \quad (11.15)$$

звідки випливає, що будь-яка безперервна функція (сигнал СНС) визначається послідовністю коефіцієнтів $c(k)$ (що не обов'язково є відліками цього сигналу) і сімейством лінійно незалежних базисних функцій $\varphi_k = \varphi(t - k)$, що задовольняють умовам ортонормальності й обмеженості Рісса (Riesz):

$$\sum_k \varphi_k = 1; \quad 0 < \sum |\Phi(f + k)|^2 < +\infty,)$$

де $\Phi(f)$ – перетворення Фур'є базисної функції $\varphi(t)$.

Модель (11.15) описує сигнали при їх вейвлет-розкладанні, багатомасштабних розкладаннях, відновленні В-сплайнами тощо.

11.2.1. Дискретизація сигналів з обмеженим спектром.

Нескінченні сигнали СОС $x(t)$ у (11.12) фізично спостерігаються на кінцевому інтервалі T_H , тобто вони фінітні:

$$x_T(t) = x(t) \cdot \text{rect}_{T_H}(t),$$

де прямокутна функція $\text{rect}_{T_H}(t) = \begin{cases} 1, t \in [0, T_H]; \\ 0, t \notin [0, T_H] \end{cases}$.

Тоді перетворення Фур'є (ПФ) сигналу $x_T(t)$ визначається як:

$$X_T(f) = \text{ПФ}[x_T(t)] = X(f) * [T_H \cdot \text{sinc}(fT_H)], \quad (11.16)$$

де $X(f)$ – ПФ сигналу $x(t)$; $*$ – знак згортки; f – поточна частота.

З виразу (11.16) через необмеженість функції $\text{sinc}(fT_H)$ випливає, що спектр $X_T(f)$ фінітного сигналу також необмежений. Для сигналу $x_T(t)$ середньоквадратична похибка апроксимації ε_{FT} , внесена обмеженням його спектра в межах $[-F_{\max}, F_{\max}]$, дорівнює:

$$\varepsilon_{FT} = |X_T(f)|_{f \notin [-F_{\max}, F_{\max}]} \approx (F_{\max} \cdot T_H)^{-1/2}. \quad (11.17)$$

Якщо прийняти припустимим значенням $\varepsilon_{FT} = 0,01 = 1\%$, то інтервал спостереження повинен бути $T_H = 10^4 / F_{\max}$.

Частотна характеристика ідеального ФНЧ має вигляд прямокутної функції $H(f) = \text{rect}_{F_{\max}}(f)$, що не може бути забезпечене фізичними фільтрами. При цьому, якщо задатися коефіцієнтом запасу за частотою дискретизації $\alpha \geq 1$ ($F_{\partial} = \alpha \cdot 2F_{\max}$), то похибка апроксимації ідеального ФНЧ ε_H задовольняє умові:

$$\varepsilon_H \geq |H[(2\alpha - 1) \cdot F_{\max}]|.$$

Обмежуючи величину похибки ε_H , можна обрати тип фільтра H (Баттерворта, Чебишева чи ін.) і коефіцієнт α .

У виразі (11.13) дискретизація здійснюється за допомогою δ -функцій, що мають нескінченно малу тривалість. У реальності ж тривалість імпульсів дискретизації (час виміру відліків безперервної функції) $\theta > \delta$, що призводить до зміни спектра дискретизованого сигналу:

$$X_{\theta}(f) = X(f) \cdot \text{sinc}(f\theta) \cdot \exp(-j\pi f\theta),$$

тобто модуль спектра змінюється в $\text{sinc}(f\theta)$ разів, а зсув фази дорівнює $\pi f\theta$.

Виразимо тривалість імпульсу в частках періоду дискретизації $\theta = \gamma T$, тоді одержимо, що похибка апроксимації ε_θ , яка обумовлена не нульовою тривалістю імпульсів дискретизації, буде дорівнювати (для $f = F_{\max}$):

$$\varepsilon_\theta \leq 1 - \text{sinc}(\gamma/2\alpha),$$

а зсув фаз $-\gamma/2\alpha$. При припустимій похибці $\varepsilon_\theta = 0,01 = 1\%$ одержимо, що $\text{sinc}(\gamma/2\alpha) \geq 0,99$, звідки $\gamma/2\alpha \leq 0,08$. Тоді при $\alpha = 1$ тривалість імпульсу дискретизації повинна бути $\theta \leq 0,16T$, а зсув фаз складе $\pi \cdot 0,08 = 0,25$ радіан чи 14° . При $\alpha = 5$ одержимо $\theta \leq 0,8T$, а зсув фаз той же.

11.2.2. Дискретизація сигналів з необмеженим спектром.

На практиці передфільтри обирають, виходячи з апріорних знань про сигнал $x(t)$. У загальному випадку передфільтр є не тільки не ідеальним, але й не обов'язково оптимальним, тоді коефіцієнти розкладання рівні $x_1(k) = \langle x, \varphi_1(t-k) \rangle$, де базисною функцією є імпульсна перехідна функція передфільтра $\varphi_1(t) = h(-t)$.

Для компенсації неідеальних характеристик передфільтра можливе використання цифрового корегуючого фільтра з імпульсною перехідною функцією $\beta(t)$ (рис. 11.2).

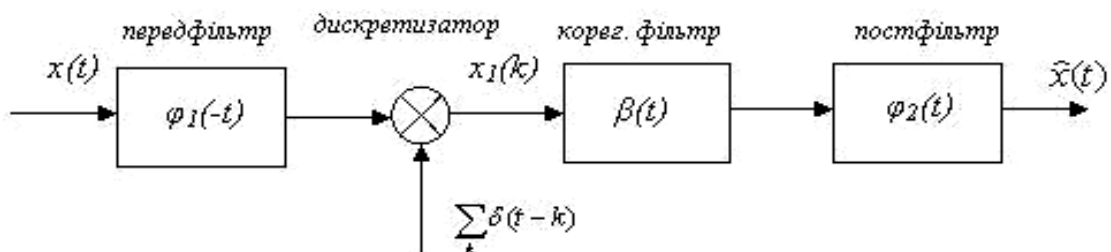


Рис. 11.2. Схема дискретизації з цифровим корегуючим фільтром

Тут апроксимація сигналу $x(t)$ визначається як

$$\hat{x}(t) = \sum_k \underbrace{[x_1(k) * \beta(t)]}_{c(k)} \cdot \varphi_2(t-k), \quad (11.18)$$

а передатна функція цифрового корегуючого фільтра дорівнює

$$B(z) = \left[\sum_k a_{12}(k) \cdot z^{-k} \right]^{-1},$$

де $a_{12}(k) = \langle \varphi_1(t-k), \varphi_2(t) \rangle$ – коефіцієнти взаємної кореляції перед- і постфільтрів.

Вираз (11.18) дозволяє відновлювати сигнали СНС при використанні не ідеальних ФНЧ. Стійкість відновлення при цьому залежить від оборотності коефіцієнтів $a_{12}(k)$.

Похибка апроксимації сигналів СНС при класичному підході (11.12) визначається енергією сигналу поза розглянутої смуги частот (вище частоти Найквіста згідно (11.17)), однак при більш загальних підходах (наприклад, при часо-частотних розкладаннях (11.15)) такий підхід не є конструктивним.

Більш ефективним є використання аналізу спектрів Фур'є функціоналів похибок. При цьому ключовим параметром для керування точністю апроксимації є період дискретизації T .

Нехай простір сигналів згідно (11.15) має вид:

$$\left\{ s_T(t) = \sum_k c_T(k) \varphi(t/T - k) : c_T \in L_2 \right\},$$

тоді змінюючи значення T можна одержати значення T_{\max} , при якому похибка апроксимації ε_T сигналу $s(t)$ за допомогою коефіцієнтів $c_T(k)$ буде менше деякого припустимого значення $\varepsilon_T^{\text{don}}$: $\varepsilon_T \leq \varepsilon_T^{\text{don}} \Big|_{T=T_{\max}}$.

Оператор апроксимації сигналу $x(t)$ з кроком T дорівнює (див. рис. 11.2):

$$B_T(x) = \sum_k \underbrace{\left[\int x(\tau) \tilde{\varphi}(\tau/T - k) d\tau / T \right]}_{\tilde{c}_T(k)} \cdot \varphi(t/T - k), \quad (11.19)$$

де $\tilde{\varphi}(t)$ – базисні функції, що задовольняють умовам Рісса. Тоді похибка апроксимації визначається як

$$\varepsilon_T = C \cdot T^L \cdot \|x^L\|, \quad (11.20)$$

де C – константа, а порядок похибки апроксимації ε_T дорівнює $O(T^L)$, де L – параметр порядку (для вейвлет-перетворень L – це кількість рівнів розкладання, а для відновлення – це ступінь В-сплайна $l = L - 1$). Чим вище параметр порядку (вище ступінь сплайна і порядок вейвлет), тим менше похибка ε_T .

Вирази (11.19), (11.20) дозволяють обирати період дискретизації T для сигналів СНС, виходячи з умови обмеження похибки апроксимації припустимою величиною $\varepsilon_T \leq \varepsilon_T^{\text{дон}}$.

11.2.3. Відновлення сигналів.

У виразі (11.12) відновлення сигналів СОС здійснюється за допомогою *sinc*-функцій, що мають низьку роздільну здатність. Більш простою і широко використовуваною є лінійна інтерполяція сигналу $x(t)$ в дискретних відліках з наступною низькочастотною фільтрацією. При цьому частота дискретизації залежить від припустимої похибки відновлення сигналу $\varepsilon_{\text{відн}}$ і його форми.

Наприклад, для гармонійних сигналів частота дискретизації обирається з умови:

$$F_{\partial} = T^{-1} \geq 2,2 F_{\text{max}} \cdot (\varepsilon_{\text{відн}})^{-1/2}.$$

Якщо прийняти припустимим значення похибки $\varepsilon_{\text{відн}} = 0,01 = 1\%$, то частота дискретизації повинна бути $F_{\partial} \geq 22 F_{\text{max}}$.

В умовах перевищення періоду технологічних випробувань керованого процесу $T_{\text{опр}}$ над необхідним періодом дискретизації T ($T_{\text{опр}} > T$) актуальним є відновлення пропущених даних у часових послідовностях (сигналах СНС).

Нехай є дискретна послідовність $x_2(k)$ сигналу СНС із періодом дискретизації T у вигляді моделі

$$x_2(k) = \sum_m c_2(m) \cdot \varphi_2(k - m), \quad (11.21)$$

яку необхідно відновити (інтерполювати) у дискретну послідовність з періодом дискретизації T/M :

$$x_2(k/M) = \sum_m c_2(m) \cdot \varphi_2(k/M - m) . \quad (11.22)$$

Схема відновлення дискретної послідовності наведена на рис. 11.3.

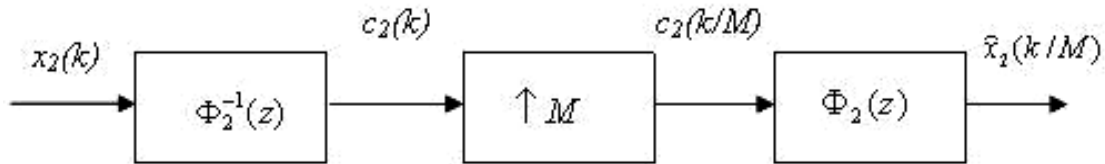


Рис. 11.3. Цифрова інтерполяція дискретної послідовності

Вхідна послідовність $x_2(k)$ спочатку проходить через передфільтр із передатною функцією $\Phi_2^{-1}(z)$, зворотною z -перетворенню базисної функції $\varphi_2(k/M)$, далі використовується розширювач відліків у M разів ($\uparrow M$) і фільтр-інтерполятор $\Phi_2(z)$. Як базисні функції використовуються l -разів диференційовані гладкі функції (наприклад, В-сплайни ступеню $l+1$).

Таким чином, інтерполяція $x_2(k)$ у $x_2(k/M)$ виконується цілком у цифровому вигляді.

Наступною проблемою, що виникає при розв'язанні задач спостереження й ідентифікації, є відновлення нерівномірно дискретизованої (у відомі моменти часу) послідовності (сигналу СНС).

Якщо базисні функції $\varphi_2(k)$ в (11.20) компактні (наприклад, вейвлет-функції чи сплайни), то відновлення відліків $c(k_m)$ (вимірюваних нерівномірно в моменти часу $\{k_m\}, m = \overline{1, N}$) у рівномірні відліки $c(k)$ з періодом T можна здійснити за допомогою послідовних перетворень (рис. 11.4):

$$x_2(k) = \sum_m c_2(k_m) \cdot \varphi_2(k_m - m) ; \quad (11.23)$$

$$c_2(k) = \sum_m x_2(m) \cdot \gamma(k - m) , \quad (11.24)$$

де $\gamma(k)$ – базисна функція, що зворотна функції $\varphi_2(k)$ і має z -перетворення $\Phi_2^{-1}(z)$. Тут передфільтр $\Phi_2(z)$ має структуру фільтра з кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ), а фільтр-інтерполятор $\Phi_2^{-1}(z)$ – з нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ).

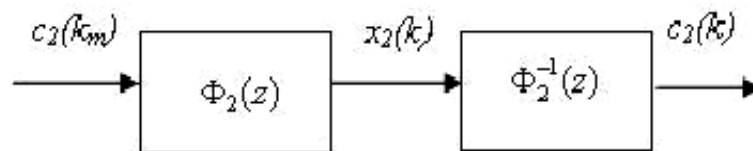


Рис. 11.4. Відновлення нерівномірно дискретизованої послідовності

Такий підхід дозволяє виключити необхідність використання зверхдискретизації.

Похибки апроксимації при інтерполяції (11.20)-(11.21) і відновленні (11.23)-(11.24) сигналів СНС визначаються строгістю виконання рівності $\Phi_2^{-1}(z) = [\Phi_2(z)]^{-1}$ (реалізацією фільтра $\Phi_2^{-1}(z)$) із похибкою:

$$\varepsilon_{\Phi} = \left\| \Phi_2^{-1}(z) - [\Phi_2(z)]^{-1} \right\|.$$

Більш складною є задача відновлення сигналів за дискретними відліками у нерівномірні і невідомі моменти часу (є задачею комбінаторної оптимізації).

Нехай необхідно відновити K відліків дискретного сигналу СОС (зі спектром довжиною L) $x = (x_0, \dots, x_{K-1})^T$ по N нерегулярним і невідомим у часі відлікам вимірюного сигналу $s = x(K_n) = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n})^T$, де $K_n = \{k_i\}$; $i = \overline{1, N}$ – нерегулярно розташована підмножина відліків від множини $K = \{0, 1, \dots, K-1\}$; $L \leq N < K$.

Перетворення Фур'є шуканого сигналу дорівнює:

$$X(L) = ДП\Phi_K \cdot x(K), \quad (11.24)$$

де $ДП\Phi_K$ – матриця коефіцієнтів дискретного ПФ: $W_K = \exp(-j2\pi/K)$;

$$W_K^k = W_K^{k \bmod K}.$$

З виразу (11.24) отримаємо:

$$x(K) = K^{-1} \cdot F(K, \Lambda) \cdot X(\Lambda), \quad (11.25)$$

де $F(K, \Lambda) = (\text{ДП}\Phi_K)^{-1} = K^{-1} \cdot \text{ДП}\Phi_K^*$; $\Lambda = \{0, 1, \dots, L-1\}$.

Аналогічно вимірний сигнал дорівнює:

$$s = K^{-1} \cdot F(K_n, \Lambda) \cdot X(\Lambda), \quad (11.26)$$

де $F(K_n, \Lambda) = (W^{-k_1 l}, W^{-k_2 l}, \dots, W^{-k_n l})^T$; $l \in \Lambda$.

У виразі (11.26) відомими є s, Λ, K, N , а невідомими – x, K_n . Підставивши рівняння (11.26) у (11.25), одержимо залежність шуканого сигналу від виміряного:

$$x(K) = F(K, \Lambda) \cdot FF(K_n, \Lambda) \cdot s, \quad (11.27)$$

де $FF(K_n, \Lambda) = [F(K_n, \Lambda)^* \cdot F(K_n, \Lambda)]^{-1} \cdot F(K_n, \Lambda)^*$.

Рішення (11.27) регуляризується шляхом виконання рівності відновленого й виміряного сигналів у визначені моменти часу $x(M_n) = s$. Тоді з урахуванням (11.27) похибка розв'язання повинна дорівнювати:

$$e(M_n) = \{F(M_n, \Lambda) \cdot FF(M_n, \Lambda) - I\} \cdot s = 0,$$

де I – одинична матриця.

Пошук рішень системи нелінійних рівнянь (11.27) аналітичним шляхом неможливий, тому для визначення сигналу $x(K)$ використовуються методи комбінаторної оптимізації, метою якої є мінімізація норми похибки $e(M_n)$ (менше припустимого значення):

$$\varepsilon_{\text{рег}} = \|e(M_n)\| \rightarrow \min \leq \varepsilon_{\text{рег}}^{\text{дон}}. \quad (11.28)$$

Легко бачити, що глобальним мінімумом (11.28) є $\varepsilon_{\text{рег}} = 0$.

11.3. Адаптивне прогнозування сигналів і стану об'єктів керування

У теорії керування спостереження за деяким заданим сигналом з можливо меншою похибкою зводиться до задачі фільтрації.

Для реалізації систем оцінювання і ідентифікації ОК, зазвичай, використовуються адаптивні фільтри-апроксиматори (АФА), які мають рекурсивні і не-рекурсивні зв'язки, а також виконують перетворення сигналів. У них процес адаптації включає оцінювання шуканого виходу фільтра і корегування його параметрів за значенням вихідної похибки.

Структурні схеми використання АФА як прогнозуючий фільтр сигналів і апроксиматор (еталонної моделі) ОК наведені на рис. 11.5.

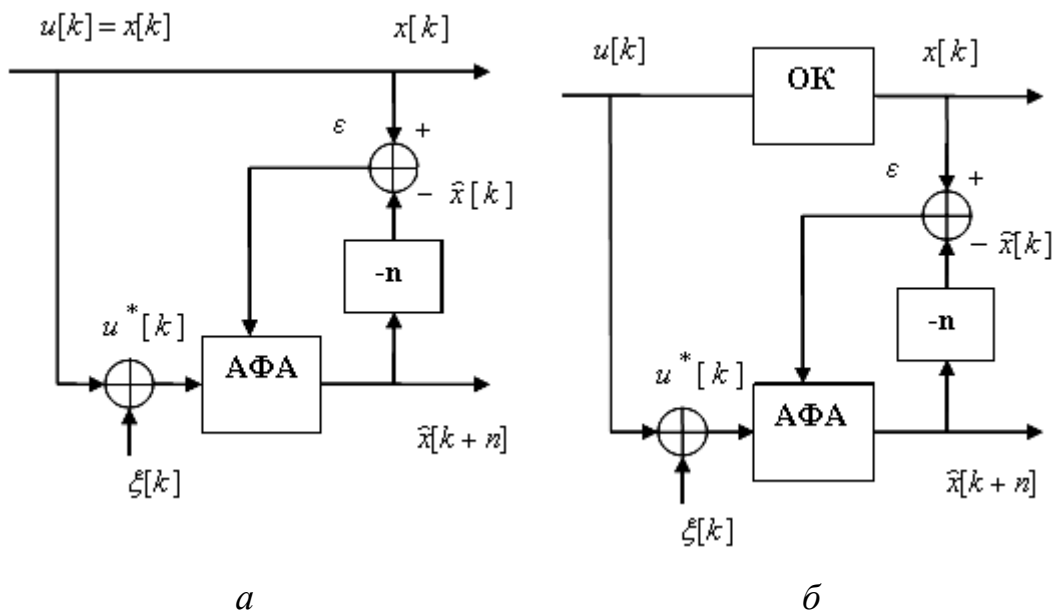


Рис. 11.5. Прогнозування сигналу (а) і ідентифікація ОК (б) за допомогою АФА

Тут затримка і прогноз на n тактів позначені, як $-n$ і $+n$, а вимірні значення входів рівні:

$$u^*[k] = u[k] + \xi[k],$$

де $\xi[k]$ – похибка (шум) вимірювання.

В процесі роботи АФА на кожному такті по величині похибки $\varepsilon[k] = x[k] - \hat{x}[k]$ між фактичним $x[k]$ і прогнозованим $\hat{x}[k]$ значеннями сигналу (виходу ОК) здійснюється адаптація параметрів АФА. При цьому, як структуру АФА зазвичай використовують лінійні поліноміальні моделі, які для складних динамічних ОК не є адекватними.

Жорсткі вимоги до знання статистичних властивостей часових рядів обмежують можливості методів математичної статистики, теорії розпізнавання образів, теорії випадкових процесів тощо. Багато реальних процесів не можуть адекватно бути описані за допомогою традиційних статистичних моделей, оскільки є істотно нелінійними і мають або хаотичну, або квазіперіодичну, або змішану основу.

Для побудови і реалізації структури динамічної прогнозуючої моделі ОК можуть використовуватися різні підходи. При цьому відомо, що нелінійна динамічна система (модель ОК) може бути представлена шляхом композиції лінійно динамічної (ЛДЛ) і нелінійно статичної (НСЛ) ланок, наприклад, у вигляді моделі Вінера-Гаммерштайна (Wiener-Hammerstein), яка наведена на рис. 11.6.

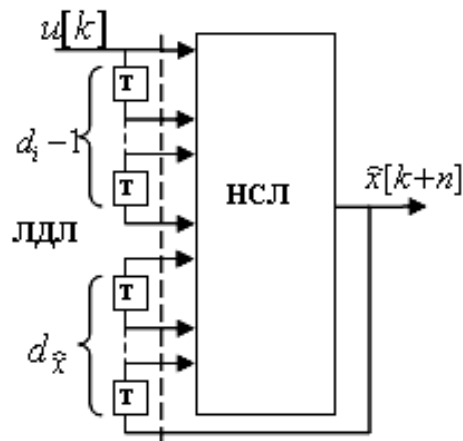


Рис. 11.6. Структура Вінера-Гаммерштайна прогнозуючої моделі нелінійного динамічного ОК

Тут ЛДЗ є лініями затримки, величини яких (глибина пам'яті) визначаються розмірністю вхідних $d_i - 1$ і вихідних $d_{\hat{x}}$ змінних. А як НСЗ можуть використовуватися як традиційні засоби (поліноми Лежандра, Вольтерра, Колмогорова-Габора тощо), так і інтелектуальні (НМ, гібридні НМ з нечіткою логікою тощо).

Переважними тут є засоби інтелектуальної обробки інформації, оскільки вони легко настроюються (адаптуються) під властивості ОК, що змінюються, і, відповідно, є ефективними засобами моделювання складних систем.

11.3.1. Лінійний АФА.

Сигнал на виході лінійного АФА визначається згорткою вхідного сигналу з імпульсною перехідною характеристикою фільтру:

$$x[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m] \cdot h[k-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \cdot u[k-m],$$

де $u[k]$ – вхідний сигнал, $x[k]$ – вихідний сигнал, $h[k]$ – імпульсна перехідна характеристика.

Різницеве рівняння прогнозуючого лінійного АФА з кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ) має вигляд:

$$\hat{x}[k+n] = \sum_{r=0}^R b_r \cdot u[k-r],$$

де b_r , R – коефіцієнти фільтру і його порядок, відповідно.

АФА з КІХ володіють асимптотичною стійкістю і лінійною фазочастотною характеристикою.

Різницеве рівняння лінійного АФА з нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ) має вигляд:

$$\hat{x}[k+n] = \sum_{m=1}^M a_m \cdot x[k-m] + \sum_{r=0}^R b_r \cdot u[k-r],$$

де a_m , M – коефіцієнти і порядок зворотного зв'язку фільтру, відповідно.

Ця рекурентна формула використовується для послідовного обчислення поточного значення вихідного сигналу АФА за його минулими значеннями. Фільтри з НІХ володіють більшою гнучкістю при реалізації, ніж з КІХ.

У більшості алгоритмів адаптації лінійних АФА мінімізується середньоквадратична похибка шляхом апроксимації градієнта цільової функції і ітеративного підстроювання коефіцієнтів фільтру.

11.3.2. Нейромережевий АФА.

Для прогнозуючих систем на базі НМ якнайкращі якості показує гетерогенна мережа, яка складається з прихованих шарів з нелінійною функцією активації нейронів і вихідного лінійного нейрона.

Рівняння ОК, що здійснює прогноз на n тактів, на основі НМ прямого розповсюдження з прихованим шаром представляється у вигляді рівняння згортки:

$$\hat{x}[k+n] = \sum_{\tau \in P} F_{\hat{x}} \left\{ \sum_{l \in Q} v_l[\tau] \cdot F_l \left(\sum_{m \in Q} v_{l,m}[\tau] \cdot u_m[k-\tau] \right) \right\}, \quad (11.29)$$

де P – множина глибин пам'яті відповідних входів; $F_{\hat{x}}$ – активаційна функція вихідного шару НМ; Q – множина входів нейронів; l – порядковий номер входу вихідного шару НМ; v_l – вагові коефіцієнти вихідного шару; F_l – активаційна функція нейронів прихованого шару; m – порядковий номер входу НМ; $v_{l,m}$ – вагові коефіцієнти зв'язку m -го входу і l -го нейрона; u_m – вхід НМ.

Параметрами настройки (навчання) цієї НМ є $\{v_l, v_{l,m}\} \subset a$.

Прогнозування за допомогою НМ з радіальними базисними функціями (РБФ) виконується згідно рівняння:

$$\hat{x}[k+n] = \sum_{\tau \in P} F_{\hat{x}} \left\{ \sum_{l, m \in Q} v_l \cdot F_l(\vartheta_l, \|u_m[k-\tau] - v_l\|) \right\}, \quad (11.30)$$

де ϑ_l, v_l – параметри РБФ l -го нейрона прихованого шару.

Параметрами настройки НМ (11.30) є $\{v_l, \vartheta_l, v_l\} \subset a$.

Ідентифікація параметрів (настройка – навчання) НМ прямого розповсюдження (11.29) здійснюється, як правило, за допомогою градієнтних алгоритмів, наприклад, алгоритму зворотного розповсюдження похибки в просторі параметрів $\{v_l, v_{l,m}\} \subset a$ при заданих структурі моделі ОК (архітектурі НМ) і структурних функціях F з метою мінімізації похибки прогнозу:

$$\bar{\varepsilon} = E \left\{ \|x[k+n] - \hat{x}[k+n]\| \right\} \rightarrow \min,$$

де E – математичне очікування.

При навчанні НМ з РБФ (11.30) спочатку визначаються центри і відхилення для радіальних елементів, після цього оптимізуються параметри лінійного вихідного шару: $\{v_l, \vartheta_l, v_l\} \subset a$.

11.3.3. Нейронечіткий АФА.

Теоретично, системи з нечіткою логікою і НМ еквівалентні один одному, проте на практиці у них є свої переваги і недоліки. У зв'язку з цим отримали розвиток гібридні НМ, в яких виводи робляться на основі апарату нечіткої логіки, а функції належності підстроюються з використанням алгоритмів навчання НМ. Такі системи не тільки використовують апріорну інформацію, але можуть набувати нових знань і для користувача є логічно прозорими.

Гібридна мережа – це НМ з чіткими сигналами, вагами і активаційною функцією, але з об'єднанням сигналів і вагів мережі з використанням *t-норми*, *t-конорми* або деяких інших безперервних операцій. Входи, виходи і ваги гібридної НМ – дійсні числа, які належать відрізку $[0, 1]$.

Прикладом гібридної мережі є Anfis (адаптивна нейронна система нечіткого висновку структури Сугено), рівняння ОК на основі якої має вид:

$$\hat{x}[k+n] = \sum_{\tau \in P} \sum_{m \in Q} \beta_m[\tau] \cdot \alpha_m[k-\tau], \quad (11.31)$$

де $\beta_m[\tau] = U_m^{-1}(\alpha_m[\tau] / \sum_m \alpha_m[\tau])$; $\alpha_m[k-\tau] = Tn_{l,m} \{L_{l,m}(u_m[k-\tau])\}$; $U = U(a_U)$;

$L = L(a_L)$.

Тут U_m^{-1} – функція, зворотна функції належності проміжного виходу m мережі з параметрами a_U ; α_m – значення проміжного виходу; Tn – довільна *t-норма* моделювання логічної операції «І»; $L_{l,m}$ – функція належності нечіткого правила l входу m з параметрами a_L .

Параметрами настройки НМ (11.31) є $\{a_U, a_L\} \subset a$, її навчання виконується аналогічно НМ (11.29).

Перевагою алгоритмів параметричного навчання НМ є простота і швидкодія, а недоліком – їх локальність (висока вірогідність застрягання в локальному екстремумі).

11.3.4. Нейронний вейвлет АФА.

У фільтрах з перетворенням, наприклад, в частотній області в порівнянні зі згорткою в часовій області, значно скорочується об'єм обчислень і поліпшуються властивості збіжності алгоритмів адаптації. При цьому, зважаючи на здібність до представлення нестационарних сигналів часто вибирають не частотне, а час-частотне (вейвлет) перетворення, причому, дискретне, із-за властивостей ортонормованості, компактності, відновлення без втрат і малого об'єму обчислень.

Прикладом такого фільтру є нейронний вейвлет (НВ) АФА (рис. 11.7):

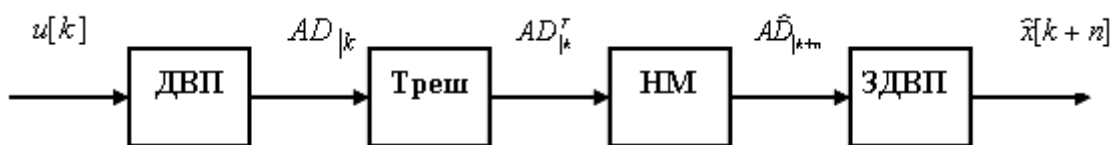


Рис. 11.7. Структура прогнозуючого нейронного вейвлет АФА

У ньому в основу фільтрації покладена процедура прямого дискретного вейвлет перетворення (ДВП). Для зменшення впливу шуму у фільтрі здійснюється порогове обмеження коефіцієнтів вейвлет розкладання – трешолдинг (Треш), а НМ застосовується для прогнозування значень коефіцієнтів, за якими за допомогою зворотного ДВП (ЗДВП) визначається прогнозований сигнал.

У НВ АФА для вхідного дискретного сигналу $u[k]$ тривалістю K ($k = \overline{1, K}$) його ДВП є набір вейвлет коефіцієнтів

$$AD|_k = \{A_L, D_L, D_{L-1}, \dots, D_1\}$$

з коефіцієнтами апроксимації по рівнях розкладання

$$A_L = \{a_{L,p}\} = \sum_{p=1}^{P_L} u[k] \cdot \varphi_{L,p}[k]$$

і коефіцієнтами деталізації

$$D_l = \{d_{l,p}\} = \sum_{l=1}^L \sum_{p=1}^{P_l} u[k] \psi_{l,p}[k]; \quad l = \overline{1, L},$$

де φ, ψ – масштабуюча і відповідна їй вейвлет функції; L – кількість рівнів розкладання; P_l – кількість коефіцієнтів на рівні розкладання l .

Коефіцієнти апроксимації представляють згладжений сигнал, а деталізації – його коливання. Для видалення шуму коефіцієнти, менше деякого граничного значення, обнулюються (процедура порогової обробки – трешолдинг T):

$$AD|_k^T = T(AD|_k).$$

На вході НМ вейвлет коефіцієнти помножуються на відповідні ваги і визначаються рівні активації нейронів, які формують прогноз вейвлет коефіцієнтів для моменту часу $[k + n]$:

$$A\hat{D}|_{k+n} = F_{NN}(AD|_k^T),$$

де F_{NN} – узагальнена функція перетворення НМ.

Для забезпечення асимптотичної стійкості АФА використовуються НМ без зворотних зв'язків і з нелінійними функціями активації (із-за нелінійності ОК і сигналів).

Тоді прогнозування сигналу $\hat{x}[k + n]$ глибиною n виконується за прогнозованими за допомогою НМ коефіцієнтами розкладання $A\hat{D}|_{k+n} = \{\hat{a}_{L,p}, \hat{d}_{l,p}\}$ відповідно до виразу ОДВП:

$$\hat{x}[k + n] = \sum_{p=1}^{P_L} \hat{a}_{L,p} \cdot \varphi_{L,p}[k + n] + \sum_{l=1}^L \sum_{p=1}^{P_l} \hat{d}_{l,p} \psi_{l,p}[k + n].$$

Навчання НВ АФА здійснюється в пакетному режимі, а адаптація – в реальному часі шляхом підстроювання параметрів АФА при обробці поточного блоку за похибкою прогнозу попереднього блоку тривалістю K .

До параметрів АФА, які навчаються (адаптуються) відносяться тип базисного вейвлету ψ , кількість рівнів розкладання L , а також параметри трешолдинга і НМ.

11.4. Ідентифікація нелінійних процесів за часовими реалізаціями

Ідентифікація процесу, як динамічної системи, полягає в одержанні чи уточненні за експериментальними даними математичної моделі цього процесу, висловленої за допомогою того чи іншого математичного апарату.

Нелінійний процес (динамічна система) зображається векторним рівнянням:

$$\dot{x} = \Phi(x, \lambda), \quad (11.32)$$

де Φ – нелінійна функція розмірності d ; x і λ – вектори координат і параметрів системи.

Процес у вигляді потоку (11.32) може бути також представлений дискретним відображенням Пуанкаре:

$$x[k + 1] = \Phi\{x[k], \lambda\}; \quad x[k] = \{x_1[k], \dots, x_{d-1}[k]\}, \quad (11.33)$$

де k – такт часу $t = k \cdot T$; T – період дискретизації.

Рівняння виду (11.32) і (11.33) залежно від значень параметрів порядку λ мають чотири стійких рішення: стан рівноваги, коли після перехідного процесу система досягає стаціонарного стану; періодичне і квазіперіодичне рішення, а також хаос. Цим типам рішень відповідають атрактори системи у вигляді стійкої рівноваги, граничного циклу, квазіперіодичного атрактора і хаотичного (дивного) атрактора.

Відмінною рисою останнього є його чутливість до початкових умов і дробова розмірність – фрактальність (властивість самоподоби на різних масштабах).

Зміна значень параметрів λ рівняння системи (11.32) і (11.33) викликає втрату стійкості одного стану (режиму функціонування) системи і перехід (біфуркацію) її в інший стан.

11.4.1. Характеристики нелінійних хаотичних процесів.

Найважливішою характеристикою хаотичного руху у фазовому просторі довільної розмірності є ентропія Колмогорова (сума старших показників Ляпунова), що описує динамічне поведіння на дивному аттракторі.

Безладдя (хаос) є поняттям теорії інформації, тому ентропія Колмогорова K пропорційна швидкості втрати інформації про стан динамічної системи з часом і показує наскільки динамічна система хаотична:

$$K = - \lim_{T \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} (K_{k+1} - K_k) = - \lim_{T \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \sum_{i_0 \dots i_k} P_{i_0 \dots i_k} \ln P_{i_0 \dots i_k}, \quad (11.34)$$

де $K_{k+1} - K_k$ – втрата інформації на інтервалі часу від k до $k+1$; $P_{i_0 \dots i_k}$ – спільна ймовірність перебування точки $x[0]$ в осередку фазового простору i_0 розміром ε , $x[1T]$ – в i_1 , ... і $x[kT]$ – в i_k ; N – тривалість часової реалізації.

K -ентропія дорівнює нулю для регулярного руху, нескінченна для випадкових систем, позитивна й обмежена для систем з детермінованим хаосом.

Колмогорівська ентропія дозволяє визначити середній час, на який можна передбачити стан системи з динамічним хаосом. Точне прогнозування стану цієї системи можливе тільки на інтервалі часу T_d , такому, що $\varepsilon \cdot e^{KT_d} = 1$, відкля

$$T_d = \frac{1}{K} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Точність визначення початкового стану системи характеризується величиною дискретизації фазового простору ε і впливає на T_d логарифмічно.

Відстань між найближчими точками аттрактора до і після біфуркацій знаходиться в універсальному відношенні. Самоподоба такого явища описується за допомогою фрактальної розмірності Хаусдорфа D_H , що характеризує швидкість росту числа осередків покриття $N(\varepsilon)$ даної множини при зменшенні розміру осередків ε :

$$D_H = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}, \quad (11.35)$$

де основа логарифма довільна.

11.4.2. Визначення характеристик стану нелінійних процесів.

Для рішення задачі ідентифікації необхідно визначити режим функціонування системи і її розмірність (порядок), а потім реконструювати модель системи (11.32) чи (11.33).

Експериментальний сигнал містить інформацію про режим роботи (атрактор) системи, що породжує. Якісними ознаками хаотичності руху системи є:

- нерегулярність часового сигналу;
- смугові складові на низьких частотах у його спектрі;
- швидкий спад автокореляційної функції сигналу;
- самоподібна структура його час-частотного (вейвлет) перетворення.

Для періодичних рухів спектр сигналу містить дискретні лінії, тоді як хаос через аперіодичність зображається смугою на низьких частотах.

Кореляційна функція для регулярних рухів постійна чи осцилює, а в хаотичному режимі експоненційно спадає.

Усі відомі дивні атрактори мають фрактальну розмірність (самоподібні), що легко видно за вейвлет перетворенням сигналу.

Доведено, що по одній часовій реалізації (що спостерігається) можна визначити наступні характеристики:

- фазовий портрет атрактора (режиму роботи);
- кореляційну розмірність D_C (нижню границю розмірності Хаусдорфа (11.35) $D_C < D_H$);

- розмірність вкладення атрактора d (розмірність фазового простору) динамічної системи;

- кореляційну ентропію K_C (нижню границю ентропії Колмогорова (11.34) $K_C < K$), що характеризує наскільки хаотичний сигнал.

По отриманій часовій реалізації (сигналу $x = x(t)$, що спостерігається), задавши затримку τ і розмірність d фазового простору, будується його дискретне відображення:

$$x[k] = \{x[k], x[k - m], x[k - 2m], \dots, x[k - (d - 1)m]\}, \quad (11.36)$$

де m – ціле число ($m = \tau / T$).

При переборі по k виходить дискретний набір точок у d -мірному просторі, що при сталому режимі системи відповідно до *теорема Такенса* є фазовим портретом атрактора.

Чисельне визначення розмірності атрактора виконується за допомогою кореляційної розмірності:

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(\sum_{i=0}^{N(\varepsilon)} p_i^2)}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon},$$

яка обчислюється за кореляційним інтегралом:

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-2} \sum_{i,j} \chi[\varepsilon - \|x_i - x_j\|], \quad (11.37)$$

оцінюваному за відображенням (11.36). Величина D_C пов'язана з $C(\varepsilon)$ у такий

спосіб: $\sum_{i=0}^{N(\varepsilon)} p_i^2$ – ймовірність того, що дві точки на атракторі лежать усередині

осередку ε^D (ймовірність того, що дві точки атрактора розділені відстанню, меншою ε); $\sum_{i,j} \chi[\varepsilon - \|x_i - x_j\|]$ – число пар i і j , для яких відстань $\|x_i - x_j\| < \varepsilon$; χ

– східчаста функція Хевісайда; $x_i = x[iT]$.

Значення розмірності D_C визначається по нахилу лінійної ділянки залежності $\log C(\varepsilon)$ від $\log \varepsilon$. Крім того, будується залежність $D_C(d)$ зі збільшенням d у виразі (11.36) доти, поки D_C не досягне насичення. Розмірність d , починаючи з якої D_C перестає змінюватися, є мінімальна розмірність вкладення атрактора, тобто найменша ціла розмірність фазового простору, що містить весь атрактор.

Разом з тим, із теореми про вкладення випливає, що оцінка розмірності фазового простору d визначається через оцінку розмірності атрактора D_C реальної динамічної системи (формула Мане):

$$d \geq 2D_C + 1. \quad (11.38)$$

На практиці значення d за виразом (11.38) для відображень виявляється завищеним, тому часто обмежуються простором розмірності $d \geq D_C$.

Оцінку (знизу) колмогорівської ентропії K можна одержати з урахуванням (11.34) і (11.37) у виді:

$$K_C = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \ln[C_k(\varepsilon)/C_{k+1}(\varepsilon)] \leq K,$$

де узагальнений кореляційний інтеграл $C_k(\varepsilon)$ обчислюється по відображенню (11.36) відповідно до виразу:

$$C_k(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-2} \sum_{i,j} \chi[\varepsilon - \|x_i - x_j\|_k] = \sum_{i_1 \dots i_k} P_{i_1 \dots i_k}^2.$$

Тут $\|x_i - x_j\|_k = \sqrt{\sum_{n=0}^{k-1} (x_{i+n} - x_{j+n})^2}$.

Значення $K_C = const > 0$ є достатньою умовою існування хаотичного режиму.

Оцінка (зверху) інтервалу передбачуваності виконується як:

$$T_C = \frac{1}{K_C} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \geq T_d.$$

За часи, більші T_C , можливе тільки статистичне прогнозування, інтервал (глибина) якого залежить від кореляційної функції процесу.

Реконструкція моделі динамічної системи на основі аналізу часових реалізацій полягає у виборі базисних функцій (структури) і їх коефіцієнтів (параметрів) моделі, а також визначенні значень параметрів моделі, оптимальним чином відповідних часовій реалізації.

Для рішення задачі реконструкції моделі (11.32), (11.33) формується d -мірне відображення виду:

$$\begin{aligned} x_{1,i+1} &= \Phi_1 \{x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{d,i} | \lambda\}; \\ &\dots\dots\dots \\ x_{d,i+1} &= \Phi_d \{x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{d,i} | \lambda\}, \end{aligned} \tag{11.39}$$

де $x_{j,i}$ – координати вектора стану в моменти часу $i \cdot T$; $j = \overline{1, d}$; $i = \overline{d, N-1}$.

Далі еволюційні функції $\Phi_j \{x_i\}$ відображаються у вигляді розкладання за деяким базисом із шуканими коефіцієнтами (параметрами) λ .

Традиційно для апроксимації функцій використовуються поліноми Лежандра, Колмогорова-Габора чи інші. Коефіцієнти цих поліномів утворюють невідомі параметри λ , значення яких обираються так, щоб якнайкраще відповідати часовим реалізаціям, що спостерігаються, наприклад, за критерієм мінімуму похибки:

$$E_x^2 = \sum_{j=1}^d \sum_{i=d}^{N-1} [x_{j,i+1} - \Phi_j \{x_i\}]^2 \rightarrow \min. \quad (11.40)$$

Для розв'язання системи (11.39) за критерієм (11.40) звичайно застосовується метод найменших квадратів (за умови, що N більше кількості параметрів λ).

Перевагою традиційного підходу є його простота (пошук тільки однієї функції Φ), а істотними недоліками – громіздкість одержуваної моделі, а також наявність процедури чисельного диференціювання, що призводить до великих похибок обчислень.

Більш продуктивним для апроксимації функцій $\Phi_j \{x_i\}$ є використання НМ чи гібридних НМ з нечіткою логікою, що є універсальними й ефективними апроксиматорами. Їх параметрами λ є ваги нейронів, а також коефіцієнти їх функцій активації і належності (для гібридних мереж). Навчання мереж здійснюється, наприклад, методом зворотного поширення похибки і полягає у визначенні значень параметрів λ , що оптимальним чином (за критерієм (11.40)) відповідають спостерігаємим часовим реалізаціям.

Реконструйована модель, що правильно передає динаміку на атракторі може бути неадекватною до опису траєкторії наближення до атрактора і виходу в сталий режим. Для вирішення таких проблем необхідно додатково обробляти реалізації, що характеризують процеси встановлення. Це може бути здійснене шляхом реалізації адаптивної ідентифікації ОК у процесі функціонування сис-

теми керування, що відносно просто виконується за допомогою нейронних і гібридних мереж, але дуже трудомістко при традиційному підході.

11.4.3. Приклади ідентифікації породжуючих процесів.

За приклад розглянемо ідентифікацію процесів, що породжують часову реалізацію відображення Ено та експериментальний сигнал γ_{+100} .

Нелінійне відображення Ено (Henon) описує поведження ротатора зі збудженням:

$$x_1[k+1]=1-ax_1^2[k]-bx_2[k]; \quad x_2[k+1]=x_1[k],$$

де a, b – параметри порядку $\lambda = \{a, b\}$; x_1, x_2 – координати; k – такт часу.

Параметр a характеризує просторовий розподіл взаємодії, а параметр b – загасання в системі. Він обернено пропорційний коефіцієнту тертя (реальними є значення $b > 0$). В залежності від значень параметрів порядку система Ено знаходиться в різних режимах: від рівноваги до хаосу.

Часові і частотні характеристики експериментального сигналу γ_{+100} наведені на рис. 11.8.

За їх видом можна сказати про нерегулярність процесу, що його породжує. Це впливає з нерегулярного вигляду часової реалізації сигналу γ_{+100} (див. рис. 11.8,*a*), експоненційного спаду його кореляційної функції (рис. 11.8,*б*), наявності значної частини енергії спектра сигналу в низькочастотній області (рис. 11.8,*в*) і самоподібного (фрактального) характеру його вейвлет перетворення (гілляста структура на рис. 11.8,*г* зберігається на різних масштабах).

На рис. 11.9 наведені фазові портрети сигналів процесів, що ідентифікують. Видно, що внесення в систему білого шуму (з амплітудою 0,1 від рівня сигналу) порушує тонку структуру фазового портрета відображення Ено (див. рис. 11.9,*a* і 11.9,*б*).

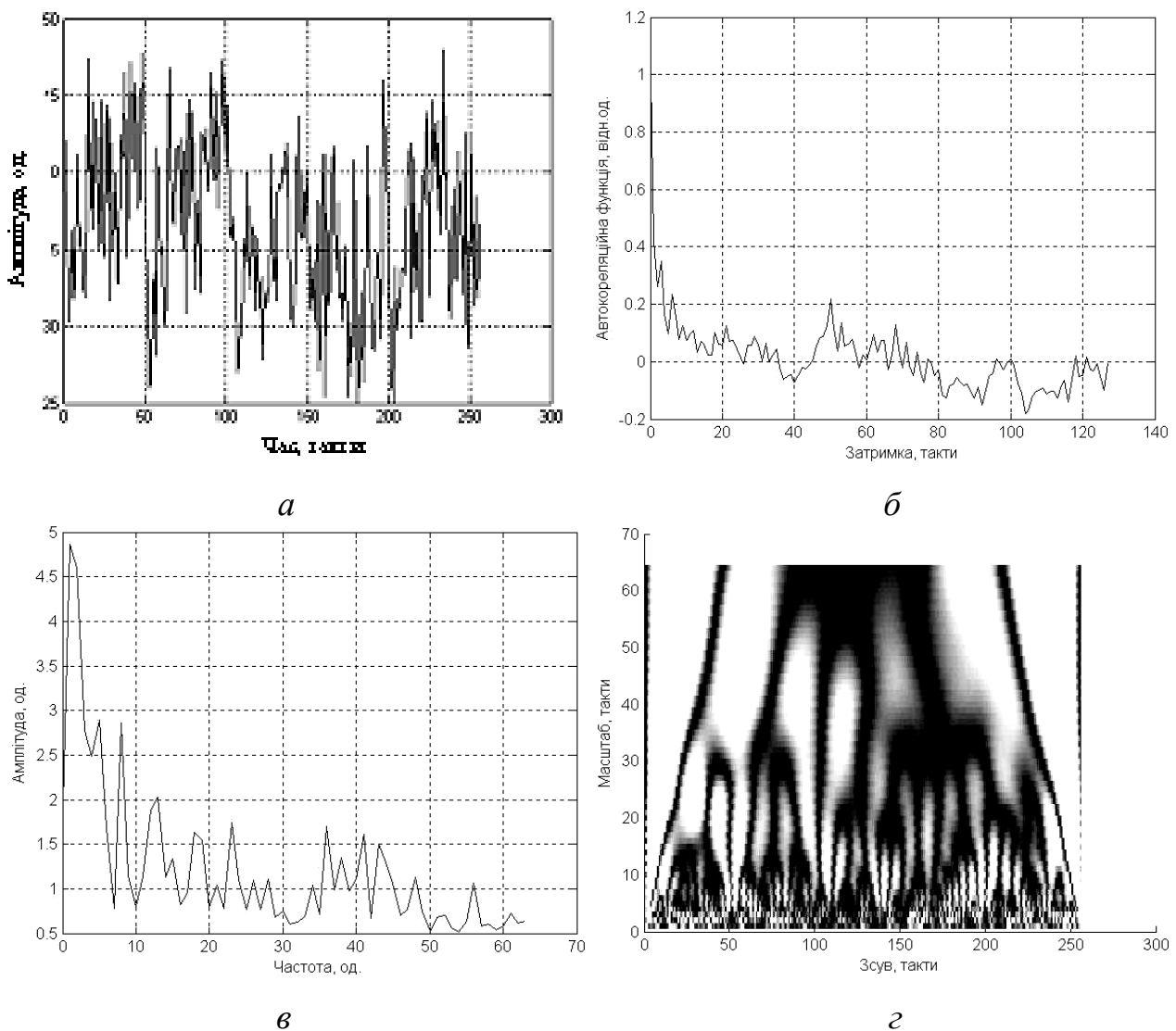


Рис. 11.8. Часова реалізація сигналу γ_{+100} (а), його кореляційна функція (б), спектральна щільність (в) і вейвлет перетворення (з)

Побудова фазових портретів сигналу γ_{+100} при розмірності $d \leq 3$ і варіації затримки τ не дозволила знайти закономірність руху (див рис. 11.9,в). Це може бути викликано або великим рівнем шуму в сигналі, або перебуванням процесу, що породжує, у несталому режимі, або розмірність фазового простору процесу більше 3.

Розрахунки визначили значення кореляційних ентропії і розмірності атракторів відображення Ено $K_{CE} = 0,47$ і $D_{CE} = 1,14$ (при значеннях параметрів $a = 1,85$ і $b = 0,05$), а також сигналу γ_{+100} – $K_{C\gamma} = 0,39$ і $D_{C\gamma} = 3,04$.

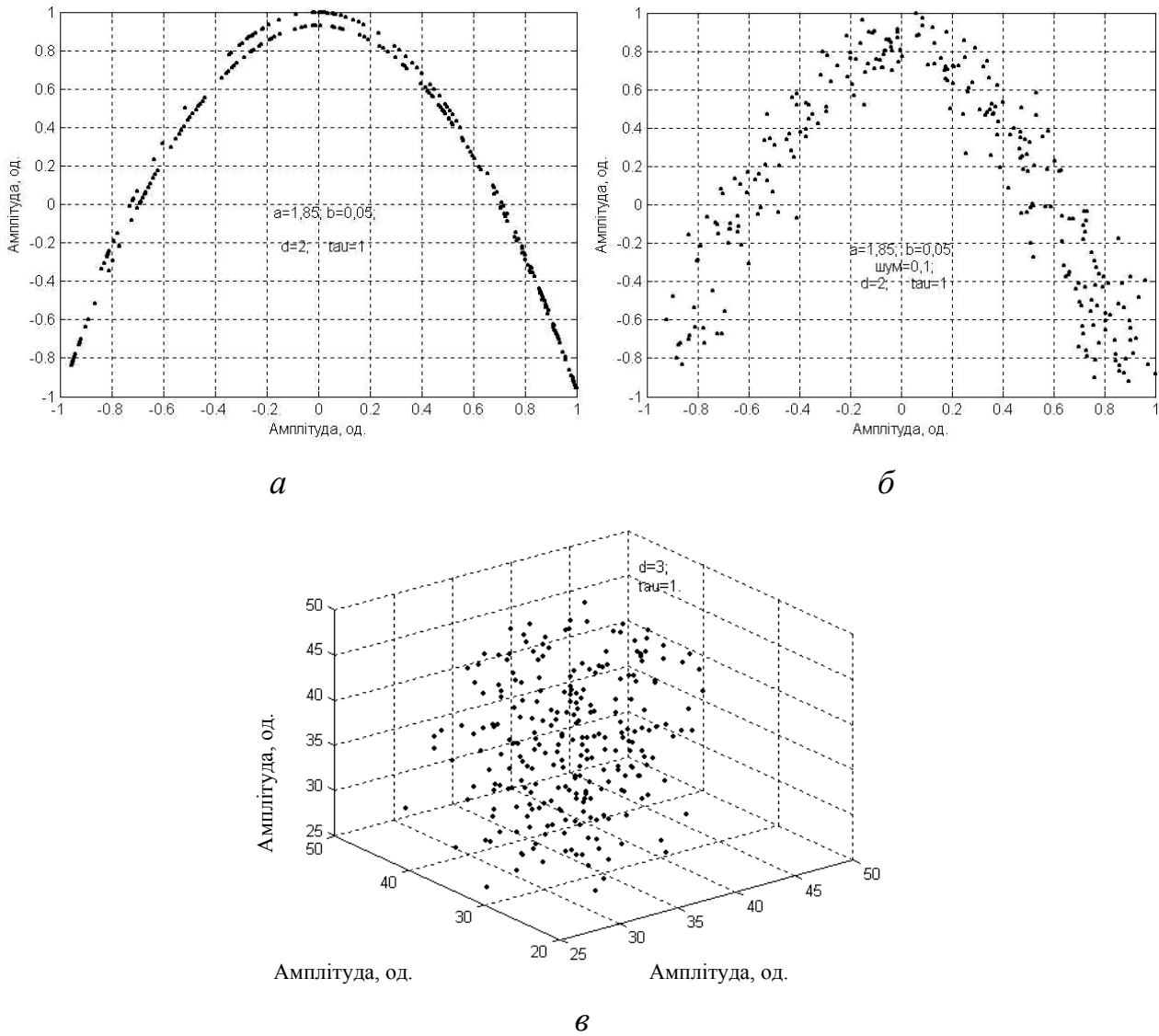


Рис. 11.9. Фазові портрети відображення Ено (а), відображення Ено із шумом (б) і сигналу γ_{+100} (в)

При цьому інтервали передбачуваності складають $T_{CE} = 3,42$ такту і $T_{C\gamma} = 4,11$ такту (згідно (11.36) тривалість такту дорівнює τ чи в дискретному часі – τ/T).

Для визначення розмірності фазового простору d_γ сигналу γ_{+100} за виразом (11.38) обчислювалася її оцінка зверху: $d_\gamma \leq 7,1$, а для оцінки значення d_γ знизу будувалась залежність $D_{C\gamma}(d_\gamma)$, що наведена на рис. 11.10. З неї випливає, що розмірність атрактора $D_{C\gamma}$ практично перестає зростати (входить у насичення) при розмірності фазового простору $d_\gamma \geq 4$.

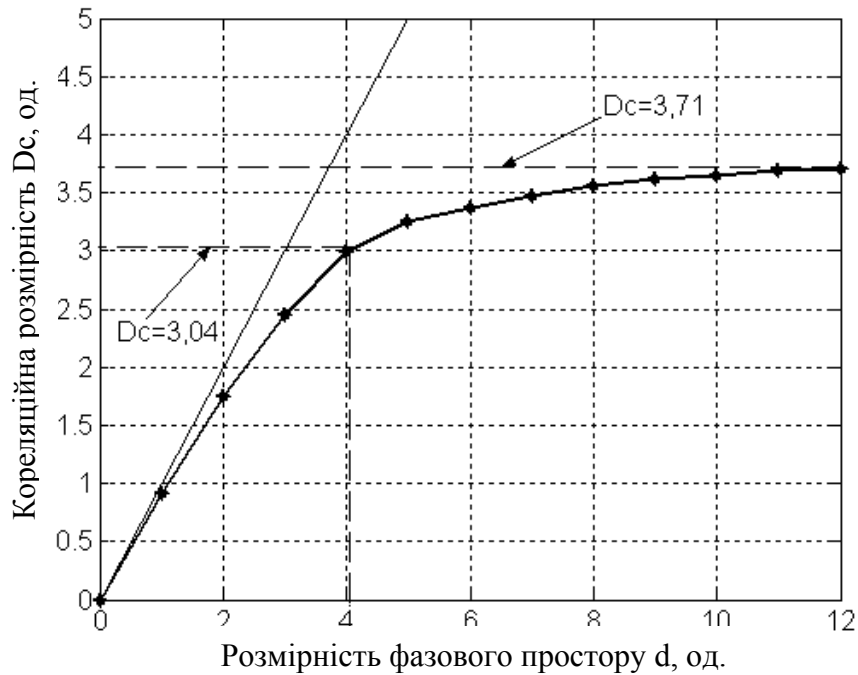


Рис. 11.10. Залежність розмірності атрактора від розмірності простору сигналу γ_{+100}

З урахуванням розрахунків і графіка на рис. 11.10 одержимо $D_{C\gamma} \cong 3,37$ і $4 \leq d_\gamma \leq 7$, що багато більше 3 і, відповідно, пояснює відсутність закономірності в русі на фазовому портреті сигналу γ_{+100} (див. рис. 11.9,в).

Для реконструкції моделі відображення Ено й експериментального сигналу γ_{+100} використовували адаптивну нейронну систему нечіткого висновку Anfis з дзвіноподібною функцією належності. На її вхід подавалися відповідні часові реалізації зі своїми розмірностями d (глибиною пам'яті $d - 1$). Реалізації розбивалися на навчальну і перевіірочну послідовності нарівно, а прогноз виконувався глибиною до 10 тактів, що перевищує отримані вище значення інтервалів точної передбачуваності T_{CE} і $T_{C\gamma}$.

Як показник ефективності прогнозування використовувалася відносна величина середньоквадратичної похибки (11.40), нормованої за діапазонами зміни сигналів. Результати розрахунків цієї похибки для прогнозування відображення

Ено, відображення Ено з білим шумом рівня 0,1, а також експериментального сигналу γ_{+100} наведені на рис. 11.11. Для сигналу γ_{+100} розмірність приймалась $d_\gamma = 5$.

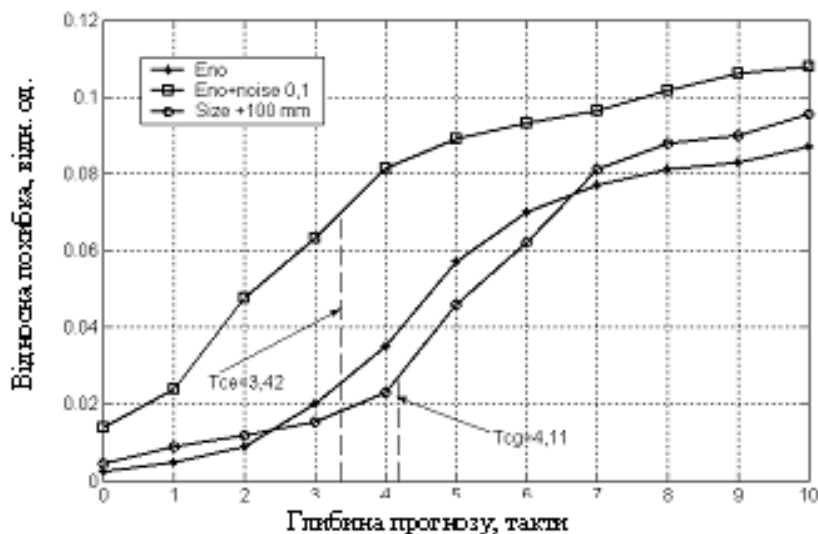


Рис. 11.11. Залежність відносної похибки від глибини прогнозу

З аналізу рис. 11.11 виходить, що відносна похибка прогнозування відображення Ено та сигналу γ_{+100} складає менше 0,10 при глибині прогнозу до 10 тактів та менше 0,03 для інтервалів передбачуваності цих сигналів. Для порівняння, відносна похибка прогнозування цих сигналів лінійними фільтрами (при лінійній апроксимації моделей породжуючих процесів) складає більше 0,20.

11.5. Структурно-параметрична ідентифікація об'єктів керування

11.5.1. Постановка задачі.

Сформулюємо задачу ідентифікації ОК таким чином: на підставі експериментальної множини функцій (часових рядів) збурень, керувань і виходів в умовах завад визначити структуру (узагальнену функцію Φ) і вектор параметрів a моделі виду:

$$\hat{Y}[k+n] = \Phi\{Y[k], u[k], w[k], \xi[k], a[k], k\}, \quad (11.41)$$

що достатньо точно (у сенсі деякого критерію) апроксимують ОК відносно вхідних і вихідних величин у всьому функціональному просторі. Тут

$Y[k], u[k], w[k], \xi[k]$ – відповідно, вектори (матриці) виходу процесу, його керувань, збурень і шуму до поточного часу k з відповідними глибинами пам'яті; n – глибина прогнозу (для компенсації чистого запізнювання і часу на синтез і реалізацію керування).

Вважаємо, що оцінка $\hat{Z}[k]$ стану ОК (11.41) виконується за допомогою відповідних фільтрів спостереження:

$$\hat{Z}[k] = \Phi_{\hat{Z}} \{Z[k - n_Z + 1], \varphi(Z[k - n_Z + 1]), \xi_{\hat{Z}}[k], a_{\hat{Z}}[k], k\}, \quad (11.42)$$

де $\{Y[k], u[k], w[k]\} \subset \hat{Z}[k]$ і $\hat{Z}[k]$ – вектор (матриця) оцінки стану каналу системи; $\Phi_{\hat{Z}}$ – узагальнена функція перетворення (метод, алгоритм); $Z[k - n_Z + 1], \varphi(Z[k - n_Z + 1]), \xi_{\hat{Z}}[k], a_{\hat{Z}}[k]$ – відповідно, вектор (матриця) відомих (вимірних) значень передісторії стану каналу (до моменту часу $k - n_Z + 1$); лінійно незалежні функції, що характеризують властивості часового ряду (наприклад, автокореляційна функція, дисперсія тощо); шуми вимірювань та параметри прогнозуючого фільтра.

Як міру точності ідентифікації використаємо, наприклад, критерій мінімуму похибки між експериментальними $Y^*[k + n]$ і модельними значеннями виходу (11.41):

$$J = E \left\{ \left\| Y^*[k + n] - \hat{Y}[k + n] \right\|^2 \right\} \rightarrow \min$$

при дотриманні обмежень на функціональний простір. Тут E – математичне очікування.

Таким чином, формування вектора $I_s = \{\Phi, a\}$ оцінки структури Φ (структурна ідентифікація) і параметрів a (параметрична ідентифікація) моделі ОК (11.41) здійснюється на основі векторів сигналів спостереження $\hat{Z}[k]$ (11.42) шляхом мінімізації прийнятого функціонала:

$$J[I_s] \rightarrow \min_{I_s \in S} J \Rightarrow I_s^{opt} = \{\Phi_{opt}, a_{opt}\}, \quad (11.43)$$

де обмеження S , в загальному випадку, рівні:

$$S = \begin{cases} \{h(I_s) \geq 0\} \subseteq S_h; \\ \{g(I_s) = 0\} \subseteq S_g; \\ \{\phi_i, i = \overline{1, D}\} \subseteq S_D. \end{cases} \quad (11.44)$$

Тут h, g – неперервні функції; ϕ_i – елементи дискретного вектора D можливих значень структурної функції $\Phi = \{\phi_i\}$.

При розв’язанні задачі (11.43)-(11.44) мають бути визначені (обрані):

- ефективні методи оптимізації;
- зміст критерію (функціонала) J ;
- засоби врахування обмежень S ;
- тип структури моделі;
- базисні функції.

11.5.2. Структурна оптимізація.

Вирази (11.43)-(11.44) є комбінацією безперервної задачі математичного програмування і задачі дискретного програмування. Остання при малих D вирішується шляхом повного перебору, а при великих D – або структурними методами, або зведенням дискретної задачі до безперервної і подальшим її вирішенням методами параметричного пошуку.

Крім того, задача (11.43)-(11.44), зважаючи на нелінійність ОК і довільний вигляд функціонала, є багатоекстремальною (полімодальною), що вимагає використання методів глобальної оптимізації.

Найбільш ефективними при глобальній оптимізації нелінійних систем є пошукові методи, в яких алгоритм пошуку оптимального рішення зв’язує наступні один за одним рішення: $I_s(K+1) = F[I_s(K)]$, де F – алгоритм пошуку, що вказує які операції слід зробити на кроці K при $I_s(K)$, щоб отримати рішення $I_s(K+1) \succ I_s(K)$. Тут знак переваги \succ при мінімізації функціонала має сенс:

$$J[I_s(K+1)] < J[I_s(K)]. \quad (11.45)$$

Алгоритм рішення задачі оптимізації F виконує функції збору інформації і прийняття рішення. Наприклад, в алгоритмах прямого випадкового пошуку

(ПВП) задаються напрямки пошуку і визначаються значення функціонала J в точках $I_s(K) \pm \gamma\sigma$. Рішення полягає у виборі кроку в напрямку зменшення цього функціонала:

$$I_s(K+1) = I_s(K) - \omega\sigma\{J[I_s(K) + \gamma\sigma] - J[I_s(K) - \gamma\sigma]\},$$

де ω, σ, γ – параметри, що визначають сфери прийняття рішення (ω) і збору інформації (γ) та одиничний випадковий напрямок (σ). У загальному випадку ці параметри можуть змінюватися (адаптуватися) до процедури пошуку і виду гіперповерхні прийнятого функціонала.

Розвитком методів випадкового пошуку, насамперед, у підвищенні ефективності процедур спрямованого пошуку, є еволюційні алгоритми, що реалізують біокібернетичний підхід для пошуку оптимальних рішень. Вони моделюють процес біологічної еволюції: мутації структури і параметрів δI_s , їх схрещування (розмноження) $I_s(K+1) = I_s(K) + \delta I_s(K)$ і правило добору. Це дозволяє виявляти їх сприятливі варіації, за допомогою яких будується послідовність поліпшуваних рішень із властивістю (11.45).

Найбільше поширення серед цих алгоритмів одержали генетичні алгоритми (ГА), засновані на моделюванні розвитку біологічної популяції на рівні геномів. Нехай у задачі оптимізації за допомогою ГА потрібно знайти мінімум функціонала (функції пристосованості) $J[I_s]$. Популяція (геном) являє собою набір векторів $R_t = \{I_{si}(t)\}, i = \overline{0, M}$, де M – розмір популяції, а t – час її життя (шаги K). Елементи $I_{si}(t)$ – особи (гени-рішення), а поточний набір $\{I_{si}(t)\}$ складає генофонд популяції.

Елементи множини R_t здатні еволюціонувати за наступними правилами:

1) якщо $J[I_{si}(t)]$ малий, то особа $I_{si}(t)$ вважається вдалою й одержує пріоритет при розмноженні. Ймовірність загибелі цієї особи знижується;

2) якщо $J[I_{si}(t)]$ великий, то особа $I_{si}(t)$ вважається невдалою, ймовірність розмноження для цієї особи знижується і підвищується ймовірність загибелі;

3) мутації: будь-яка особа має рівну ймовірність мутації, тобто зсуву на невелику величину $I_{si}(t) \rightarrow I_{si}(t) + \delta I_s$. Закон визначення δI_s залежить від реалізації алгоритму. Типовий вибір – багатомірний нормальний розподіл з нульовим математичним очікуванням;

4) розмноження (схрещування): відповідно до ймовірностей, визначених на кроках 1 і 2, кожна особа має ймовірність розмноження тим більшу, чим менше відповідний їй функціонал. При схрещуванні дві особи утворюють нові:

$$I_{si}(t+1) = c_t [I_{sj}(t) - I_{si}(t)] + I_{si} + \chi_t; \quad I_{sj}(t+1) = c_t [I_{si}(t) - I_{sj}(t)] + I_{sj} + \chi_t,$$

де c_t – скаляр і χ_t – вектор, що залежать від часу t ; $i, j \in M$.

Схрещування передбачає далекі (випадкові) стрибки в просторі пошуку, забезпечуючи можливість виходу з локальних екстремумів. Крім того, схрещування "лагодить" деякі ушкодження, що роблять мутації, і забезпечує постійну мінливість;

5) загибель (добір): відповідно до ймовірності, визначеної на кроках 1 і 2, особа може загинути, тобто бути вилученою з множини R_t .

Тут у наявності спадковість, мінливість і добір, – рушійні сили біологічної еволюції за Ч. Дарвіним.

До переваг ГА відносять здатність знаходження глобального екстремуму і продуктивність, а до їх недоліків – потребу у великому обсязі пам'яті (пропорційному розміру популяції) і відносно низьку швидкодію на фонеймановських ЕОМ.

11.5.3. Критерії оптимізації та обмеження.

При розв'язанні задачі (11.43)-(11.44) актуальним є також вибір ефективних для конкретного випадку критеріїв якості моделі (функціонала J). Для структурної ідентифікації ефективними вважаються зовнішні критерії, що адекватні задачі побудови моделей із мінімальною дисперсією похибки прогнозу, і поділяються на критерії регулярності і критерії незміщеності (мінімуму зсуву).

До критеріїв регулярності відноситься критерій мінімуму відносної похибки покрокового інтегрування:

$$J_{\varepsilon} = \frac{\|Y^*[k+n] - \hat{Y}[k+n]\|}{\|Y^*[k+n]\|}, \quad (11.46)$$

який обчислюється на всій вибірці експериментальних даних N , а також критерій мінімуму вибіркової відносної похибки:

$$J_{\varepsilon B} = \frac{\|Y^*[k+n] - \hat{Y}_A[k+n]\|_B}{\|Y^*[k+n]\|_B}. \quad (11.47)$$

Тут оптимізація моделі здійснюється на навчальній вибірці A (вихід моделі $\hat{Y}_A[k+n]$), а перевірка її ефективності (величини похибки) на перевірочній послідовності B , що відмічене в (11.47) індексом знизу. Вся вибірка $N = A + B$.

Критерії (11.46), (11.47) чутливі до рівня шуму в початкових даних і при збільшенні завад їх мінімум зміщується в область простіших моделей.

Стійкіші до завад критерії незміщенності. Наприклад, критерій мінімуму зсуву, заснований на аналізі рішень, має вигляд:

$$J_{см} = \frac{\|\hat{Y}_A[k+n] - \hat{Y}_B[k+n]\|}{\|Y^*[k+n]\|}, \quad (11.48)$$

де $\hat{Y}_A[k+n]$ і $\hat{Y}_B[k+n]$ – виходи моделей, навчених на вибірках A і B , відповідно. Тут обчислення зсуву здійснюється на всій вибірці N .

Для узгодження вимог критеріїв (11.46)-(11.48) використовується комбінований критерій з ваговим коефіцієнтом μ , наприклад, у вигляді:

$$J_{комб} = \mu J_{\varepsilon} + (1 - \mu) J_{см}; \quad 0 \leq \mu \leq 1.$$

Для критеріїв регулярності навчальна і перевірочна послідовності (вибірки) рівні $A = 0,7N$ і $B = 0,3N$, а для критеріїв мінімуму зсуву – $A = 0,5N$ і $B = 0,5N$.

Обмеження, що накладаються при розв'язанні задачі (11.43)-(11.44), $I_S(K) + \delta I_S(K) \in S$ припускають $\Phi + \delta\Phi \in S$ і $a + \delta a \in S$. Обмеження

$S_1 = S_h \cap S_g$ формують безперервну задачу математичного програмування, а $S_2 = S_h \cap S_D$ – задачу дискретного програмування. При цьому обмеження $S = \{S_1, S_2\}$ можна врахувати наступним чином:

- при обмеженнях типу нерівності $S = S_h$ вдалим вважається крок, коли виконується умова (11.45) і $I_s(K) \in S$, інакше крок невдалий і треба повернутися в попередній стан з подальшим новим кроком із нього;

- при обмеженнях типу рівності $S = S_g$ вводять коридор $\|g(I_s)\| < \varepsilon_{don}$, обмежений допустимою похибкою ε_{don} ;

- обмеження $S = S_h \cap S_g$ є комбінацією перших двох випадків;

- при обмеженнях на дискретність структурних функцій $S = S_D$ здійснюється випадковий вибір нової точки біля початкової точки: $\|I_{si}(K+1) - I_{si}(K)\| < \varepsilon$, де I_{si} – вектор структурно-параметричних факторів зі значенням структурної функції ϕ_i . Якщо $\Theta_\varepsilon(K)$ – множина векторів I_{si} , що задовольняє вищенаведеній умові, то на $K+1$ кроці із $\Theta_\varepsilon(K)$ обирають точку (значення I_{si}), яке задовольняє умовам $J[I_{si}(K+1)] < J[I_{si}(K)]$ і $I_{sz}(K+1) \in \Theta_\varepsilon(K)$. Очевидно, що при $S = S_h \cap S_D$ додатково потрібно, щоб $I_{si}(K+1) \in S_h$.

11.5.4. Структура і базисні функції моделі.

Для побудови і реалізації структури динамічної прогнозуючої моделі ОК (11.41) використовуються різні підходи. Нелінійна динамічна система (модель ОК) може бути представлена, наприклад, у вигляді моделі Вінера-Гаммерштайна (див. рис. 11.6).

Рівняння ОК (11.41) при використанні базових функцій у вигляді НМ прямого поширення з прихованим шаром являє собою рівняння згортки:

$$\hat{Y}[k+n] = \sum_{\tau \in P} \Phi_{\hat{Y}} \left\{ \sum_{l \in Q} v_l[\tau] \cdot \Phi_l \left(\sum_{m \in Q} v_{l,m}[\tau] \cdot y_m[k-\tau] \right) \right\}, \quad (11.49)$$

де P – множина глибини пам'яті відповідних входів; $\Phi_{\hat{Y}}$ – активаційна функція вихідного шару НМ; Q – множина входів нейронів; l – порядковий номер входу

вихідного шару НМ; v_l – вагові коефіцієнти вихідного шару; Φ_l – активаційна функція нейронів прихованого шару; m – порядковий номер входу НМ; $v_{l,m}$ – вагові коефіцієнти зв'язку m -го входу і l -го нейрона; y_m – вхід НМ.

У загальному випадку входами НМ (11.49) згідно (11.41), (11.42) є $\{\hat{Y}[k], \hat{Z}[k]\} \subset \{y_m[k - \tau]\}$, а її структурними характеристиками – $\{T_s, P, \Phi_{\hat{Y}}, \Phi_l, r_s\} \subset \Phi$, де T_s – тип структури і розмір прихованого шару – $r_s \subset Q$. При цьому параметрами НМ є $\{v_l, v_{l,m}\} \subset a$.

Рівняння ОК на основі НМ із РБФ має вигляд:

$$\hat{Y}[k+n] = \sum_{\tau \in P} \Phi_{\hat{Y}} \left\{ \sum_{l, m \in Q} v_l \cdot \Phi_l(\vartheta_l, \|y_m[k - \tau] - v_l\|) \right\}, \quad (11.50)$$

де ϑ_l, v_l – параметри РБФ l -го нейрона прихованого шару.

Структурними характеристиками НМ (11.50) є $\{T_s, P, \Phi_{\hat{Y}}, \Phi_l, r_s\} \subset \Phi$, а її параметрами – $\{v_l, \vartheta_l, v_l\} \subset a$.

Рівняння ОК на основі гібридної НМ з нечіткою логікою Anfis являє собою рівняння згортки виду:

$$\hat{Y}[k+n] = \sum_{\tau \in P} \sum_{m \in Q} \beta_m[\tau] \cdot \alpha_m[k - \tau], \quad (11.51)$$

де $\beta_m[\tau] = U_m^{-1}(\alpha_m[\tau] / \sum_m \alpha_m[\tau])$; $\alpha_m[k - \tau] = Tn \{L_{l,m}(y_m[k - \tau])\}$; $U = U(a_U)$;

$L = L(a_L)$.

Тут U_m^{-1} – функція, зворотна функції належності проміжного виходу m мережі із параметрами a_U ; α_m – значення проміжного виходу; Tn – довільна t -норма моделювання логічної операції «І»; $L_{l,m}$ – функція належності нечіткого правила l входу m із параметрами a_L .

Структурними характеристиками НМ (11.51) є $\{T_s, P, U_m, L_{l,m}, r_p\} \subset \Phi$, де кількість правил розкладання по входам $r_p \subset Q$, а її параметрами – $\{a_U, a_L\} \subset a$.

Ідентифікація параметрів (навчання) НМ прямого поширення (11.49) здійснюється, зазвичай, за допомогою градієнтних алгоритмів, наприклад, ал-

горитму зворотного поширення похибки в просторі параметрів $\{v_l, v_{l,m}\} \subset a$ при заданих структурі моделі ОК і структурних характеристиках Φ з метою мінімізації похибки прогнозу (11.43) чи (11.46).

При навчанні НМ із РБФ (11.50) спочатку визначаються центри і відхилення для радіальних елементів, після цього оптимізуються параметри лінійного вихідного шару: $\{v_l, \vartheta_l, v_l\} \subset a$.

Навчання гібридної НМ Anfis (11.51) виконується аналогічно НМ (11.49) шляхом оптимізації параметрів функцій належності мережі $\{a_U, a_L\} \subset a$.

Перевагою цих алгоритмів параметричного навчання НМ є простота і швидкодія, а недоліком – їх локальність (висока ймовірність застрявання у локальному екстремумі).

Таким чином до структурних характеристик необхідно віднести і множини методів навчання НМ.

Критерії (11.47)-(11.48) використовуються для структурної оптимізації, а критерій (11.46) – для параметричної.

Відповідно вищевикладеному, задача (11.43)-(11.44) має велику розмірність (кількість структурних характеристик і параметрів у реальності становлять сотні, тисячі й десятки тисяч). Внаслідок цього самостійне використання пошукових алгоритмів глобальної оптимізації для структурно-параметричної ідентифікації має низьку ефективність (малу швидкість збіжності) через їх відносно низьку швидкодію. Тому доцільним є реалізація спільного використання (композиція) алгоритмів глобальної оптимізації (для структурної ідентифікації моделі) і алгоритмів локальної оптимізації (для параметричного навчання та ідентифікації моделі).

11.5.5. Приклад структурно-параметричної ідентифікації нелінійного об'єкту.

Як приклад виконано ідентифікацію нелінійного ОК, що описується послідовно з'єднаними аперіодичною ланкою із запізненням та безінерційною квадратичною ланкою (ПТ2).

Для моделювання ОК (моделі ПТ2) в якості вхідного сигналу використовувався смуговий кореляційний нормований сигнал із гауссівським шумом амплітудою 10% від рівня сигналу (відношення сигнал/шум приблизно 20 дБ). При цьому, у відповідності із динамічними властивостями ОК глибина прогнозу складала $n = 3$ такти, глибина пам'яті – 4 такти, а розмір реалізації – $N = 1024$.

У якості критерію структурної оптимізації обрано комбінований критерій, поверхні якого для ОК у просторі «кількість нейронів прихованого шару НМ (11.49) – рівень шуму», а також «кількість нейронів – глибина прогнозу» наведені на рис. 11.12.

Легко бачити, що цей критерій має малу чутливість до варіації шуму і глибини прогнозу (малий зсув глобального мінімуму у просторі ознак).

Із рис. 11.12 можна також визначити обмеження на кількість нейронів прихованого шару в НМ (11.49) для ідентифікації ОК – від 20 до 80 нейронів.

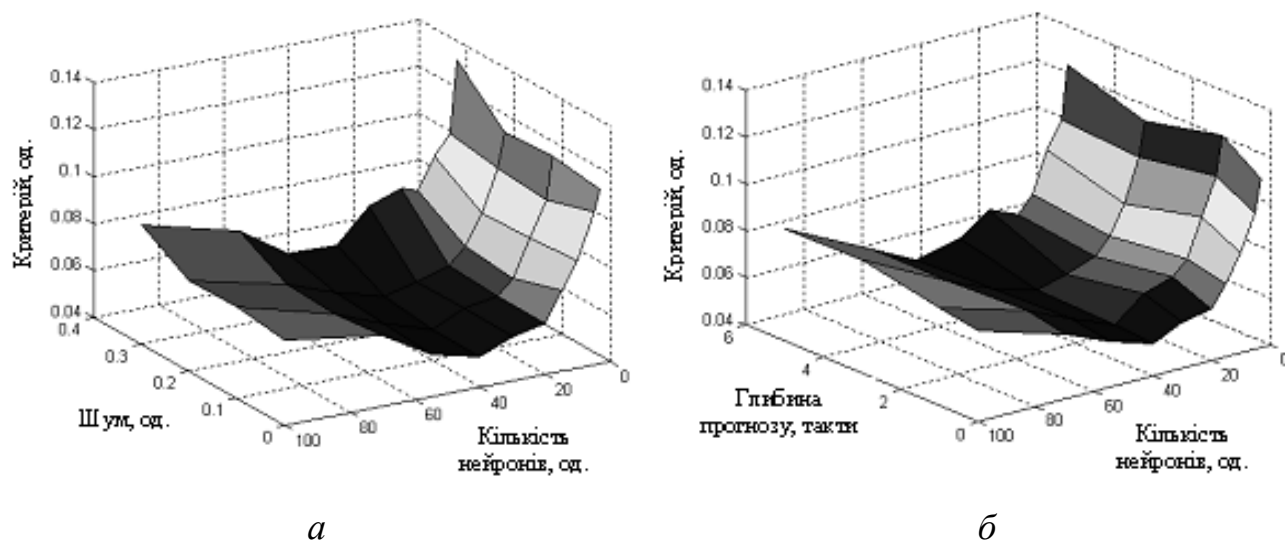


Рис. 11.12. Вигляд поверхні комбінованого критерію для ОК при варіаціях шуму (а) та глибини прогнозу (б)

При ідентифікації використовувалася структура моделей Вінера-Гаммерштайна із базисними функціями НМ (11.49)-(11.51), а у якості глобальних методів оптимізації застосовувалися алгоритм ПВП і ГА. Результати глоба-

льної оптимізації моделі ОК наведені на рис. 11.13,*a* і *б* (для ПВП) і на рис. 11.13,*в* і *г* (для ГА).

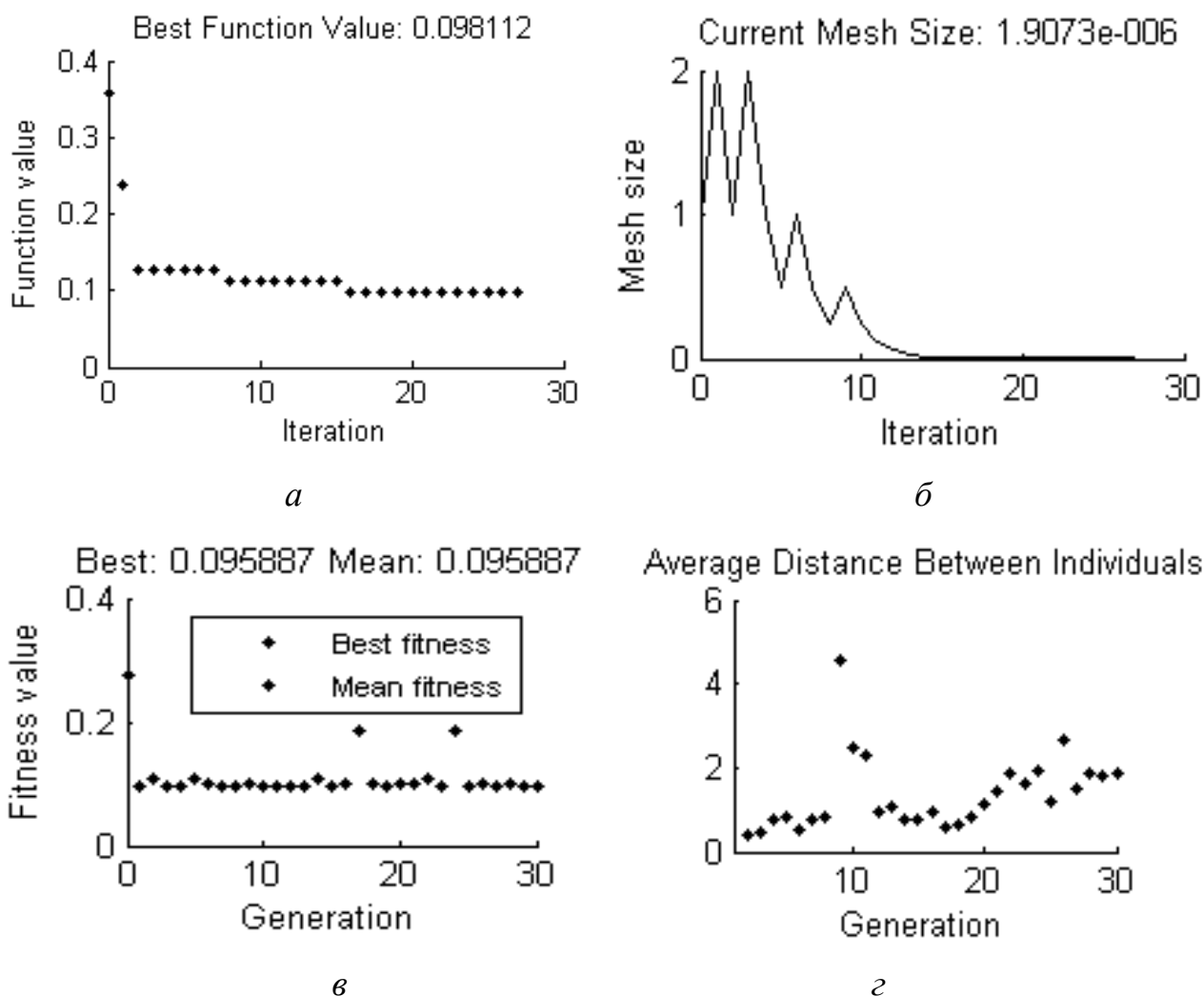


Рис. 11.13. Результати глобальної оптимізації структури моделі за ПВП (*a*, *б*) і за ГА (*в*, *г*)

ГА мав одноточечне схрещування, селективний вибір батьків та формування нової популяції із витисненням, а алгоритм ПВП – прискорювач (адаптивний механізм) кроку пошуку. Кількість ітерацій (для ГА – поколінь) обмежувалась 150, а розмір простору пошуку (популяції) – 30.

В цілому ці алгоритми по точності дали подібні результати. При цьому ГА виявив вищу швидкість збіжності (ГА виходить в область оптимальних рішень на перших поколіннях, а ПВП – після 15 ітерацій), а алгоритм ПВП – ви-

щу швидкодію (приблизно 6 с на ітерацію у ПВП і 9,5 с на покоління у ГА) при обчисленнях на комп'ютері із процесором Pentium IV.

В результаті моделювання встановлено, що мінімуму комбінованого критерію для розглянутих процесів відповідають каскадні НМ моделі прямого поширення (11.49) із логістичною функцією активації прихованого шару і лінійною функцією у вихідному шарі. При цьому кількість нейронів у прихованому шарі для моделі ОК складає 47 нейронів.

Тип методу параметричного навчання НМ виявився несуттєвим фактором.

Моделі у вигляді НМ із РБФ (11.50) потребують значно менше обчислень, але їх значення комбінованого критерію суттєво вище, що можна пояснити поганою прогностичною здатністю цих НМ.

Моделі у вигляді НМ із нечіткою логікою Anfis (11.51) мають достатню точність, але у них дуже низька швидкодія при розмірностях вектора входів більше 5.

Як міру точності ідентифікованої моделі використовувався критерій мінімуму відносної похибки покрокового інтегрування (11.46), значення якого склало – 0,0348.

Контрольні запитання

1. Наведіть класифікацію методів прогнозування.
2. Розкрийте суть метода найменших квадратів.
3. Розкрийте суть метода експоненційного згладжування.
4. В чому полягають кореляційний та регресійний аналізи?
5. Розкрийте суть методу групового урахування аргументів.
6. Яка мета дискретизації в задачах спостереження та ідентифікації?
7. У чому суть теорем дискретизації та відновлення Котельникова-Шеннона?

8. Які похибки виникають при дискретизації сигналів з обмеженим спектром?
9. Які особливості дискретизації сигналів з необмеженим спектром?
10. Які особливості відновлення дискретизованих сигналів?
11. Наведіть структурні схеми прогнозування сигналів та ідентифікації ОК за допомогою АФА.
12. Розкрийте суть лінійного АФА.
13. Розкрийте суть нейромережевого АФА.
14. Розкрийте суть нейронечіткого АФА.
15. Розкрийте суть нейронного вейвлет АФА.
16. Розкрийте суть методики ідентифікації нелінійних процесів за часовими реалізаціями.
17. Сформулюйте постановку задачі структурно-параметричної ідентифікації.
18. Наведіть приклади методів структурної оптимізації.
19. Наведіть приклади критеріїв структурно-параметричної ідентифікації.

Глава 12. ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ НЕЛІНІЙНИМИ ОБ'ЄКТАМИ

12.1. Основи синергетичної теорії керування

12.1.1. Основні поняття синергетики.

Синергетика вивчає нелінійні системи різної природи, самоорганізацію в них і використовує єдність таких основних понять, як *параметри порядку, аттрактори, біфуркація, дивні аттрактори, нерівноважність, дисипативні структури, когерентність* тощо.

Синергетичні системи – складні відкриті нерівноважні системи, які здатні на зовнішню дію відповідати самоорганізацією структур. Організація таких структур відбувається в результаті появи нової локальної впорядкованості, що підкорює собі всі інші, раніше не впорядковані елементи свого рівня з утворенням впорядкованих структур на вищому ієрархічному рівні. Властивості нової структури не можуть бути представлені у вигляді суми властивостей елементів, що утворили її. При цьому ні самі елементи, ні їх базові властивості не міняються, міняється тільки характер прояву цих властивостей: випадковий або хаотичний рух змінюється колективним, узгодженим.

В процесі впорядкування синергетичних систем відбувається різке зменшення системної інформації, оскільки при описі загальних (колективних) станів системи достатньо опису загальних властивостей і немає необхідності описувати кожен елемент окремо.

Виникнення в синергетичній системі впорядкованості є нелінійним результатом кооперації і колективної поведінки елементів попереднього рівня організації. Самоорганізація нелінійних систем народжується самою системою в результаті втрати стійкості якогось стану як фазового переходу.

Структура системи в синергетиці представляє стан, що виникає в результаті когерентної (узгодженої) поведінки великого числа елементів (частинок) системи. Такі структури називаються *дисипативними структурами*, які за ра-

хунок обміну із зовнішнім середовищем з одного стану рівноваги необоротно переходять в інший стан рівноваги.

При цьому, поведінка складної системи описується малою кількістю параметрів (*параметрами порядку*), а не численними параметрами вектора стану. Таке підпорядкування великого числа параметрів стану малій кількості параметрів порядку називають *принципом підпорядкування*.

Синергетична концепція в теорії керування спирається на ідею цілеспрямованої самоорганізації складних систем шляхом формування і навмисного введення в початкові моделі системи і підтримки за допомогою керуючих дій бажаних притягаючих інваріантних різноманіть в просторі станів системи, на яких природні властивості ОК найкращим чином узгоджуються з вимогами завдання керування.

В процесі цілеспрямованої самоорганізації в синергетичній системі відбувається послідовне зменшення міри свободи і їх підстроювання до макрозмінних, а його наслідком є утворення атракторів, до яких притягуються траєкторії системи (*принцип розширення-стиснення фазового простору*).

Процеси самоорганізації характеризуються наступними особливостями:

- розвиток відбувається через нестійкість, в точках (на межах) біфуркації відбувається перехід в якісно інший стан;
- нове з'являється як непередбачуване, але в той же час, наявне в спектрі можливих станів;
- сьогодення не тільки визначається минулим, але й формується з майбутнього;
- у нелінійному середовищі наперед задані всі майбутні стани, але реалізується в точці біфуркації лише один;
- хаос руйнівний, але він же і творчий при переході в нові стани.

У синергетичному підході встановлений глибокий зв'язок між інваріантними різноманіттями і деякими загальними оптимізуючими функціоналами систем, що синтезуються. При цьому вибраній сукупності інваріантних різноманіть завжди можна поставити у відповідність деяку сукупність супроводжую-

Для опису реальних збурень виберемо, наприклад, хвилеве представлення у вигляді напівдетермінованих виразів

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{W}[M_1(t), M_2(t), \dots, M_n(t); c_1, \dots, c_r], \quad (12.3)$$

де $M_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ — відомі функції, c_j , $j = \overline{1, r}$ — невизначені параметри, які можуть в невідомі моменти часу стрибком змінювати свої кусочно-постійні значення. Набір відомих функцій $M_i(t)$ у рівнянні (12.3) можна представити як лінійний хвилевий опис

$$M_i(t) = \sum_{k=1}^r c_{ik} M_{ik}(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (12.4)$$

Це означає, що збурення складається із зважених лінійних комбінацій сходинок і безперервних функцій часу. Хвилеве представлення збурень дає можливість визначити саме характер зміни $M_i(t)$ шляхом відповідного вибору базових функцій $M_{ik}(t)$, щонайменше, на коротких інтервалах часу. При цьому величина зміни $M_i(t)$ залишається невідомою, оскільки залежить від невідомих коефіцієнтів c_{ik} , поведінка яких має кусочно-постійний характер. Узагальнене представлення збурень у формі системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\omega}_{jM}(t) = g_{im}(\omega_1, \dots, \omega_\mu), \quad (12.5)$$

де $\omega_j(t) = M_j(t)$ для лінійного хвилевого опису (12.4), може бути представлено в канонічному вигляді

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1(t) &= \omega_2, \quad \dot{\omega}_2(t) = \omega_3, \dots, \dot{\omega}_{r-1}(t) = \omega_r, \\ \dot{\omega}_n(t) &= -a_1 \omega_1 - a_2 \omega_2 - \dots - a_r \omega_r. \end{aligned}$$

На основі моделей стану (12.5) можна перейти до формування рівнянь зв'язку (12.2), що складає зміст згаданого вище другого важливого завдання. Оскільки вибір структури рівнянь (12.2) впливає на структуру динамічного регулятора, що синтезується, то очевидно, що в (12.2) доцільно вводити ті координати початкового об'єкту x_1, \dots, x_n , похідні яких $\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)$ (12.1) містять в правих частинах відповідні збурення $\mathbf{M}_1(t), \dots, \mathbf{M}(t)_n$.

Після вибору рівнянь зв'язку (12.2) в результаті отримуємо розширену систему диференціальних рівнянь

а також гарантувати необхідні динамічні властивості декомпозованої $(n-m)$ системи керування при русі ЗТ уздовж перетину різноманіть $\psi_s = 0$ у заданий кінцевий стан.

Даний синергетичний підхід може бути викладений в термінах теорії оптимального керування.

Основні функціональні рівняння (12.7) є рівняннями Ейлера-Лагранжа для наступного узагальненого супроводжуючого оптимізуючого функціонала (СОФ):

$$J_{\Sigma} = \int_0^{\infty} \left[\sum_{s=1}^m \phi_s^2(\psi_s) + \sum_{s=1}^m T_s^2 \dot{\psi}_s^2(t) \right], \quad (12.8)$$

де m — розмірність вектора керування.

Очевидно, що рівняння вигляду (12.7) виділяють стійку підродину екстремалей, які доставляють безумовний мінімум функціоналу (12.8). У підінтегральному виразі (12.8) функції $\phi_s(\psi_s)$ повинні задовольняти наступним умовам:

- а) $\phi_s(\psi_s)$ однозначні, безперервні і диференційовані при всіх значеннях ψ_s ;
- б) $\phi_s(0) = 0$;
- в) $\phi_s(\psi_s)\psi_s > 0$ при будь-яких $\psi_s \neq 0$.

Інакше кажучи, функції $\phi_s(\psi_s)$ при виконанні зазначених умов будуть того ж знаку, що і ψ_s , а в нуль вони обертаються тільки на різноманіттях $\psi_s = 0$. Визначимо повну похідну функції:

$$\frac{d\psi_s}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_s(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} \dot{x}_k(t)$$

і підставимо замість $\dot{x}_k(t)$ праві частини початкової системи диференціальних рівнянь нелінійного об'єкту, зокрема зі скалярним керуванням ($m = 1$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, \dots, x_n); \quad i = \overline{1, (n-1)}; \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, \dots, x_n) + u, \end{aligned}$$

тоді отримаємо рівняння

$$\frac{d\psi}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} f_k(x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} u,$$

яке легко вирішується щодо керування u .

На основі відомої у варіаційному обчисленні властивості інваріантності по відношенню до заміни змінних, функціонал (12.8) з урахуванням останнього виразу може бути записаний в наступній формі:

$$J_{\Sigma} = \int_0^{\infty} \left[\phi^2(\psi) + T^2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_k} f_k + \frac{\partial \psi}{\partial x_k} u \right)^2 \right] dt.$$

СОФ (12.8) відображає загальні властивості як початкового об'єкту, так і його системи керування.

Завдання синтезу регуляторів на основі СОФ (12.8) з використанням агрегованих макрозмінних назване АКАР — *аналітичним конструюванням агрегованих регуляторів*. Агреговані макрозмінні ψ_s і функції $\phi_s(\psi_s)$ можуть вибиратися з різних міркувань, пов'язаних з бажаними перехідними і сталими режимами руху об'єкту — атракторами у фазовому просторі систем.

СОФ (12.8) має, по суті, різний вигляд для режимів малих відхилень, коли члени з високими ступенями робитимуть малий вплив ($\psi^3 = \dots = \psi^r \cong 0$) і для режимів великих відхилень, коли ці члени гратимуть домінуючу роль в перехідному процесі. Наявність у функціоналі (12.8) членів високих ступенів приведе до того, що закон керування, синтезований на його основі, буде активніше реагувати на великі відхилення і інтенсивно їх придушувати за малий час. В той же час у функціоналі є квадратичні члени ψ_s^2 , що дозволить отримати достатньо ефективне відпрацювання системою і малих відхилень від заданого стану.

Тут вагові коефіцієнти T_s визначають час руху ЗТ системи, що задається, до перетину різноманіть.

Для побудови функціональних рівнянь крім СОФ (12.8) можуть бути застосовані також і інші критерії теорії оптимального керування. Так, наприклад, використовуючи критерій швидкодії, можна отримати наступні рівняння:

- при двоканальному керуванні ($m = 2$)

$$\dot{\psi}_1(t) = \psi_2; \dot{\psi}_2(t) = -U_{\psi_{\max}} \text{sign} \mu(\psi_1, \psi_2),$$

$$\text{де } \mu(\psi_1, \psi_2) = \psi_1 + \frac{0,5}{U_{\psi \max}} \psi_2 |\psi_2|;$$

- при трьохканальному керуванні ($m = 3$)

$$\dot{\psi}_1(t) = \psi_2, \dot{\psi}_2(t) = \psi_3, \dot{\psi}_3(t) = -U_{\psi \max} \text{sign} \mu(\psi_1, \psi_2, \psi_3),$$

$$\text{де } \mu(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \psi_1 + \frac{1}{3} |\psi_3| (2\psi_2 + \psi_3 |\psi_3|) + (\psi_2 + 0,5\psi_3 |\psi_3|) \sqrt{|\psi_2 + 0,5\psi_3 |\psi_3||}.$$

В цьому випадку ЗТ системи спочатку за мінімальний час, визначуваний величиною $U_{\psi \max}$, потрапляє на відповідне підрізноманіття перетинів $\mu = 0$, а потім рухатиметься уздовж нього аж до попадання на бажане фінішне різноманіття.

Встановлений глибокий узагальнювальний зв'язок з основними методами теорії оптимального керування демонструє фундаментальну обґрунтованість синергетичної теорії АКАР і її важливу роль в проблемі синтезу систем керування нелінійними динамічними об'єктами.

12.1.4. Узагальнений метод аналітичного конструювання нелінійних агрегованих регуляторів.

Після вибору функцій ψ_s і $\phi_s(\psi_s)$ на основі функціональних рівнянь вигляду (12.7) можна синтезувати закони керування. Необхідно особливо підкреслити, що ці закони, на відміну від методів класичної теорії керування, визначають, в першу чергу, стратегію керування не окремими змінними, а колективними процесами самоорганізації систем. Суть вказаного синергетичного підходу до синтезу керувань полягає в підтримці бажаних зовні- і внутрішньосистемних динамічних інваріантів $\psi_s = 0$ у структурі фазового простору. Конкретне число (m) зовнішніх інваріантів, що паралельно вводяться в структуру системи, визначається числом каналів керування: $\psi_1 = 0, \dots, \psi_m = 0, m \leq n$. Кількість же внутрішньосистемних інваріантів, що послідовно вводяться, обмежується лише порядком розширеної системи: $\psi_{m+1} = 0, \dots, \psi_r = 0, r \leq n - m$.

Згідно методу АКАР, ЗТ розширеної системи (12.6) під дією «зовнішніх» керувань u_{i+1}, \dots, u_n потрапляє в околицю перетину різноманіть $\psi_1 = 0, \dots, \psi_m = 0, m \leq n$, рух уздовж якого описується рівняннями «внутрішньої» динаміки декомпозованої системи:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{j\psi}(t) &= g_j(\omega_{1\psi}, \dots, \omega_{\mu\psi}, v_{i+1}, \dots, v_n, x_{1\psi}, \dots, x_{m-1\psi}), \quad j = \overline{1, \mu}; \\ \dot{x}_{i\psi}(t) &= f_i(x_{1\psi}, \dots, x_{m-1\psi}, v_{i+1}, \dots, v_n), \quad i = \mu + 1, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad (12.9)$$

де v_{i+1}, \dots, v_n — «внутрішні» керування.

Синтезуємо «внутрішні» керування v_{i+1}, \dots, v_n , що забезпечують бажані динамічні властивості при русі ЗТ уздовж перетину різноманіть $\psi_1 = 0, \dots, \psi_m = 0, m \leq n$. Для цього використовується послідовно-паралельна сукупність інваріантних різноманіть.

Відповідно до принципу збереження керувань, викладеним в основних роботах по синергетиці, внутрішні керування v_k мають незмінну розмірність $\dim v_k = m$, співпадаючи з розмірністю зовнішніх керувань. Внутрішні керування v_k діють на підоб'єкт (12.9), декомпозуючи його до наступного підоб'єкту розмірності $n - m$ зі своїми керуваннями. Далі вказаний процес послідовної декомпозиції продовжується аж до попадання ЗТ на вибране фінішне різноманіття — атрактор, розмірність якого визначається співвідношенням

$$\dim A = n - rm,$$

де n — розмірність початкової розширеної системи (12.6), m — розмірність вектора керування, r — число атракторів, що послідовно вводяться.

В результаті описаної процедури знаходяться рекурентно зв'язані між собою внутрішні керування. Знаючи керування v_{i+1}, \dots, v_n , можна ввести тепер бажані макрозмінні, наприклад, лінійного вигляду:

$$\psi_s = \gamma_{s1}(x_{i+1} - v_1) + \dots + \gamma_{sm}(x_n - v_n), \quad s = \overline{1, m}. \quad (12.10)$$

На основі функціональних рівнянь вигляду (12.7), а також бажаних макрозмінних ψ_s (12.10) і через рівняння розширеної системи (12.6) відповідно до методу АКАР знаходяться «зовнішні» керування:

- можливістю формування бажаних еволюційних рівнянь низької розмірності, які описують стійкі асимптотичні фінішні режими руху і є рівняннями динамічного стану систем, що синтезуються на різноманіттях;

- *каскадністю синтезу* паралельно-послідовної сукупності «внутрішніх» керувань, що динамічно зв'язані між собою і забезпечують бажану поведінку декомповованої системи на атракторах.

У методі АКАР, заснованому на процедурі агрегації-декомпозиції, для забезпечення асимптотичної стійкості нелінійних систем високої розмірності, що синтезуються, використовується паралельно-послідовна сукупність функцій Ляпунова. При цьому спочатку вводяться прості функції Ляпунова вигляду $V_s = 0,5\psi_s^2$ для рівнянь (12.7) відносно макрозмінних $\psi_s(x_1, \dots, x_n)$, а потім на кінцевому різноманітті $\psi_r = 0$ досліджується стійкість руху тільки по відношенню до частини $(n - rm)$ координат, які описують поведінку ЗТ декомповованої системи на фінішному етапі руху.

Ці особливості методу АКАР дозволяють наділити системи, що синтезуються, чудовою властивістю грубості (робастності) перехідних процесів до структурних варіацій і параметричних збурень. Відомо, що асимптотична стійкість систем в певній області фазового простору є грубою властивістю, яка посилюється у разі експоненціальної стійкості систем. Системи керування, що синтезуються за синергетичними принципами, є як асимптотично стійкими в цілому (тобто у всій області фазового простору), так і експоненціально стійкими щодо інваріантних різноманіть $\psi_s = 0$. Це означає, що такі системи володіють відмітною властивістю грубості (робастності) перехідних процесів.

12.1.5. Приклади аналітичного конструювання скалярних регуляторів для нелінійних динамічних об'єктів.

Приклад 1. Нехай об'єкт описується диференціальними рівняннями

$$\dot{x}_1(t) = ax_1^3 + x_2; \quad \dot{x}_2(t) = u. \quad (12.14)$$

Особливістю об'єкту (12.14) при $a > 0$ є його істотна нестійкість, оскільки при $x_2(t) \rightarrow 0$ координата $x_1(t) \rightarrow \infty$. Це накладає додаткові вимоги до законів керування, що синтезуються $u(x_1, x_2)$, які повинні забезпечувати стабілізацію $(x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 0)$ системи за довільних початкових умов. Застосуємо метод АКАР для синтезу таких законів керування. Для цього виберемо функцію ψ спочатку у вигляді

$$\psi_1 = x_2 + \beta x_1 + b x_1^3. \quad (12.15)$$

Підставляючи (12.15) в рівняння

$$T_1 \dot{\psi}_1 + \phi(\psi_1) = 0,$$

отримуємо наступний загальний вираз:

$$u_1(x_1, x_2) = -(3bx_1^2 + \beta)(ax_1^3 + x_2) - \frac{1}{T_1} \phi(\psi_1), \quad T_1 > 0, \quad (12.16)$$

який залежно від вибраної функції $\phi(\psi_1)$ дозволяє отримати різні закони керування, що забезпечують асимптотично стійкий рух ЗТ в околицю різноманіття $\psi_1 = 0$, оскільки функція $\phi(\psi_1)$ вибирається такою, що $\phi(\psi_1)\psi_1 > 0$. Диференціальне рівняння, що описує рух упродовж $\psi_1 = 0$, має вигляд

$$\dot{x}_{|\psi_1|}(t) = -\beta x_{|\psi_1|} - (b-a)x_{|\psi_1|}^3. \quad (12.17)$$

Для оцінки стійкості рівняння (12.17) використовуємо функцію Ляпунова $V = 0,5x_{|\psi_1|}^2$. Її похідна за часом, визначена відповідно до рівняння (12.17), буде рівна

$$\dot{V}(t) = -\beta x_{|\psi_1|}^2 - (b-a)x_{|\psi_1|}^4 < 0.$$

Звідси витікає, що нерівності $\beta > 0$, $b \geq a$, $T_1 > 0$ є умовами асимптотичної стійкості в цілому синтезованої замкнутої системи (12.14)-(12.16):

$$\dot{x}_1(t) = ax_1^3 + x_2; \quad \dot{x}_2 = -(3bx_1^2 + \beta)(ax_1^3 + x_2) - \frac{1}{T_1} \phi(\psi_1). \quad (12.18)$$

Визначимо перші інтеграли системи (12.18), для чого представимо її в наступній симетричній формі:

$$\frac{dx_1}{ax_1^3 + x_2} = -\frac{T_1 dx_2}{T_1(3bx_1^2 + \beta)(ax_1^3 + x_2) + \phi(\psi_1)} = dt. \quad (12.19)$$

Поклавши в (12.19) $\psi_1 = 0$ і, отже $\phi(0) = 0$, після інтегрування знаходимо перший інтеграл: $ax_1 + bx_1^3 = -x_2$, який співпадає з виразом $\psi_1 = 0$ (12.15). Таким чином, задане інваріантне різноманіття $\psi_1 = 0$ (12.15) дійсно є бажаним притягуючим різноманіттям синтезованої нелінійної системи.

При $\phi = \psi_1 = x_2 + \beta x_1 + ax_1^3$ закон керування (12.16) приймає вигляд

$$u_1 = -\frac{\beta}{T_1} x_1 - \frac{1}{T_1} x_2 - \frac{a}{T_1} x_1^3 - (3ax_1^2 + \beta)(x_1^3 + x_2).$$

Як видно з рис. 12.1 для цього закону і параметрів $\beta = 1$, $a = 1$, $T_1 = 1$ фазові траєкторії зтягуються до початку координат. При цьому система є асимптотично стійкою з аперіодичним характером перехідних процесів.

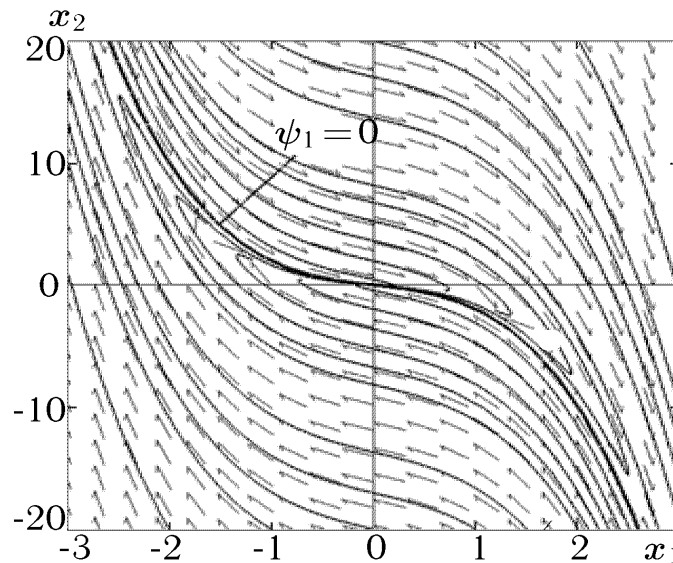


Рис. 12.1. Траєкторії руху замкнутої системи

Припустимо тепер, що на координату x_2 накладено обмеження $|x_2| \leq A$. Тоді, ввівши функцію

$$\psi_2 = x_2 + Ath(\beta x_1 + \beta x_1^3), \quad (12.20)$$

і рівняння $T_2 \dot{\psi}_2 + \phi(\psi_2) = 0$, отримуємо вираз для закону керування

$$u_2 = -\frac{A(\beta + 3bx_1^2)(ax_1^3 + x_2)}{ch^2(\beta x_1 + \beta x_1^3)} - \frac{1}{T_2} \phi(\psi_2), \quad T_2 > 0,$$

який переводить ЗТ в околицю різноманіття $\psi_2 = 0$ (12.20) і забезпечує залежно від вибраної функції $\phi(\psi_2)$ і параметрів β і a відповідну якість перехідних процесів. Рівняння руху уздовж різноманіття $\psi_2 = 0$ має вигляд

$$\dot{x}_{1\psi_2}(t) = x_{1\psi_2}^3 - Ath(\beta x_{1\psi_2} + \beta x_{1\psi_2}^3). \quad (12.21)$$

З рівняння руху (12.21) виходить, що умови $\beta > 0$, $b \geq 1$ забезпечують його асимптотичну стійкість тільки в певній області. Це означає, що введення обмеження $|x_2| \leq A$ і, отже, функції ψ_2 (12.20) звужує область асимптотичної стійкості замкнутої системи (12.14). На рис. 12.2, 12.3 і 12.4 наведені фазові портрети синтезованої системи, відповідно при $\phi(\psi_2) = \psi_2$, $\phi(\psi_2) = th\psi_2$, $\phi(\psi_2) = sign\psi_2$ і параметрах $b=1$, $T=1$, $A=1$.

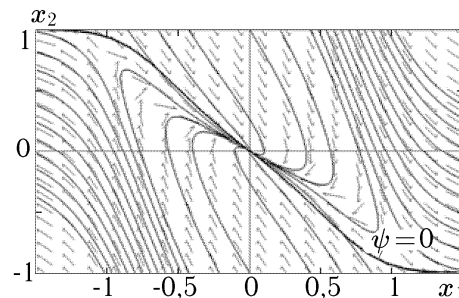


Рис. 12.2. Фазовий портрет синтезованої системи ($\phi(\psi_2) = \psi_2$)

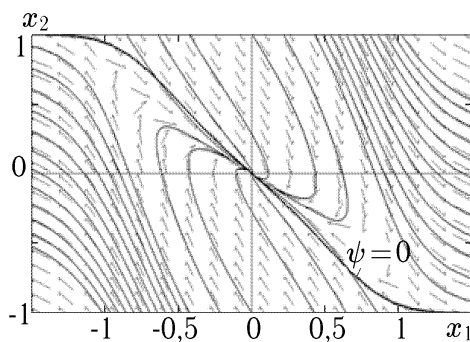


Рис. 12.3. Фазовий портрет синтезованої системи ($\phi(\psi_2) = th\psi_2$)

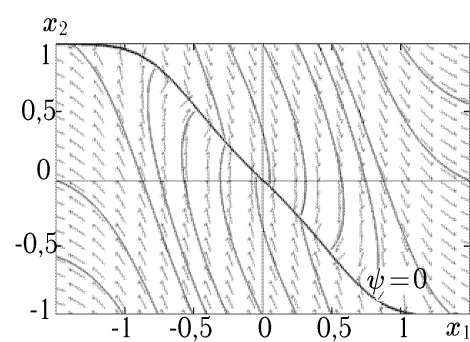


Рис. 12.4. Фазовий портрет синтезованої системи $\phi(\psi_2) = sign\psi_2$

Характер фазових траєкторій свідчить про наявність області асимптотичної стійкості з аперіодичними перехідними процесами в синтезованій системі.

Приклад 2. Синтезуємо закон керування об'єктом

$$\dot{x}_1(t) = x_1^2 + x_2, \quad \dot{x}_2(t) = u,$$

що має екстремальну нелінійність. Ввівши функцію

$$\psi = x_2 + \beta x_1 + ax_1|x_1|$$

і підставивши її у функціональне рівняння

$$T\dot{\psi}(t) + \psi = 0,$$

через рівняння об'єкту знайдемо наступний закон керування:

$$u = -\frac{\beta}{T}x_1 - \frac{a}{T}x_1|x_1| - \frac{1}{T}x_2 - (2a|x_1| + \beta)(x_1^2 + x_2). \quad (12.22)$$

Закон (12.22) переводить ЗТ в околицю різноманіття $\psi = 0$, рух уздовж якого описується диференціальним рівнянням

$$\dot{x}_{1\psi}(t) = x_{1\psi}^2 - \beta x_{1\psi} - a|x_{1\psi}|x_{1\psi}^2.$$

Досліджуємо стійкість останнього рівняння відносно $x_{1\psi} = 0$. Для цього введемо функцію Ляпунова $V = 0,5x_{1\psi}^2$ і визначимо її похідну:

$$\dot{V}(t) = x_{1\psi}^3 - \beta x_{1\psi}^2 - a|x_{1\psi}|x_{1\psi}^2.$$

Очевидно, що для $x_{1\psi} < 0$ похідна $\dot{V}(t) < 0$ при $\beta > 0$, $a > 0$, а для $x_{1\psi} > 0$ похідна $\dot{V}(t) < 0$ при $\beta > 0$, $a \geq 1$. Це означає, що при $\beta > 0$, $a \geq 1$ це рівняння й, таким чином, синтезована система має властивість асимптотичної стійкості в цілому відносно стану $x_1 = x_2 = 0$. На рис. 12.5 наведені траєкторії руху системи при $\beta = 1$, $T = 1$, $a = 2$.

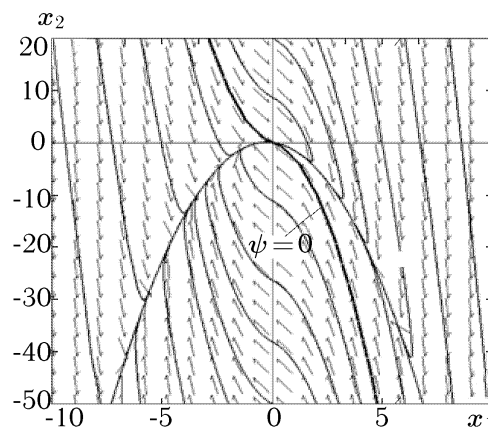


Рис. 12.5. Траєкторія руху системи при $\beta = 1$, $T = 1$, $a = 2$

Приклад 3. Синтезуємо селективно-інваріантну систему керування нелінійним об'єктом

$$\dot{x}_1(t) = x_2; \quad \dot{x}_2(t) = \sin x_1 + x_3; \quad \dot{x}_3(t) = u + f \quad (12.23)$$

при дії на нього гармонійного збурення $f = B \sin(2t)$ з невідомою, але обмеженою амплітудою. Рівняннями (12.23) описується рух математичного маятника у верхньому нестійкому положенні, при цьому x_1 — кут відхилення маятника від вертикалі; x_2 — швидкість відхилення; x_3 — момент, прикладений до маятника.

Потрібно знайти керування на вході виконавчого механізму, яке стабілізує маятник у верхньому положенні рівноваги, тобто забезпечує асимптотичну стійкість системи.

Для опису гармонійної збурюючої дії на систему виберемо хвилеве представлення в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(t) &= w_2; \\ \dot{w}_2(t) &= -4w_1; \\ f &= Bw_1. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Використовуючи (12.24), представимо систему (12.23) в розширеному вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1(t) &= \omega_2 + v_1(x_1, x_2, x_3); \\ \dot{\omega}_2(t) &= -4\omega_1 + v_2(x_1, x_2, x_3); \\ \dot{x}_1(t) &= x_2; \\ \dot{x}_2(t) &= \sin x_1 + x_3; \\ \dot{x}_3 &= u + \omega_1, \end{aligned} \quad (12.25)$$

де ω_1, ω_2 — оцінки змінних стану w_1, w_2 спостерігача збурюючої дії; $v_1(x_1, x_2, x_3), v_2(x_1, x_2, x_3)$ — функції зв'язку. При $v_1(x_1, x_2, x_3) = v_2(x_1, x_2, x_3) = 0$ перші два рівняння системи (12.25) є моделлю збурення (12.24). Для синтезу динамічного регулятора, що придушує збурення, введемо інваріантне різноманіття:

$$\psi = x_3 + \sin x_1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0. \quad (12.26)$$

Тоді на основі функціонального рівняння

$$T\dot{\psi}(t) + F(\psi) = 0$$

і вибору функцій зв'язку у вигляді $v_1(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 \psi$; $v_2(x_1, x_2, x_3) = \alpha_2 \psi$ отримаємо наступний закон керування:

$$u = -x_2 \cos x_1 - \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{T} \right) x_2 - \frac{\beta_1}{T} x_1 - \left(\frac{1}{T} + \beta_2 \right) (x_3 + \sin x_1) - \omega_1. \quad (12.27)$$

Рівняння для оцінки зовнішньої невимірюваної збурюючої дії мають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1(t) &= \omega_2 + \alpha_1 (x_3 + \sin x_1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2); \\ \dot{\omega}_2(t) &= -4\omega_1 + \alpha_2 (x_3 + \sin x_1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2). \end{aligned} \quad (12.28)$$

Закон керування (12.27) послідовно переводить ЗТ в околицю різноманіття (12.26). Цей закон спільно з рівняннями оцінок збурюючої дії (12.28) утворює динамічний регулятор, що поглинає гармонійну дію (12.24). На рис. 12.6 представлені результати моделювання системи керування. Моделювання проводилося при наступних параметрах регулятора: $T = \beta_1 = \beta_2 = 1$; $\alpha_2 = -1$; $\alpha_1 = -3$.

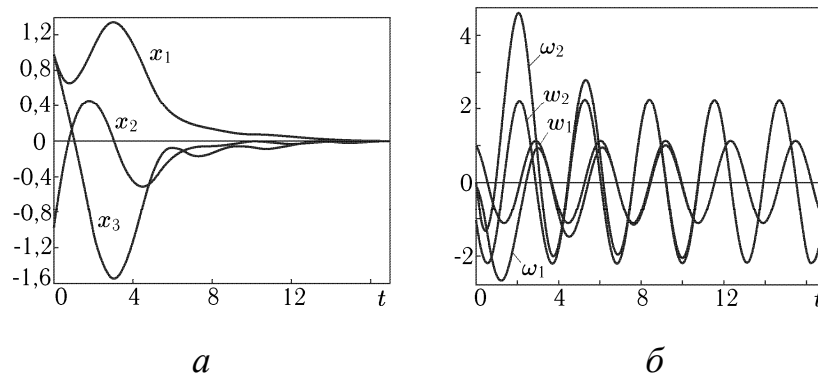


Рис. 12.6. Результати моделювання системи керування (12.23), (12.27) та (12.28)

Синтезований динамічний регулятор по своїй структурі визначається прийнятими рівняннями зв'язку, тобто в даному випадку залежить від вибору функцій зв'язку $v_1(x_1, x_2)$, які можуть бути інтерпретовані як деякі «внутрішні» керування, що діють на модель збурення. Зрозуміло, що ці керування самі по собі можуть бути синтезовані на основі методів теорії оптимального керування.

Залежно від вибраних рівнянь зв'язку в узагальненому методі АКАР можна побудувати різні динамічні регулятори, що компенсують збурення.

12.2. Принципи оптимального керування нелінійними об'єктами

12.2.1. Проблеми синтезу і реалізації оптимального керування нелінійними об'єктами.

Складні динамічні ОК мають нестационарні параметри, нелінійні залежності та стохастичні змінні.

З особливостей цих ОК випливає необхідність використання методів та алгоритмів синтезу в процесі функціонування САК оптимального керування, що враховують стохастичність змінних ОК та використовують адаптацію прогнозуючих моделей для компенсації запізнь і нестационарності параметрів з контролем збурень у реальному масштабі часу.

Використання математичних моделей не тільки на стадії проектування, але й у процесі функціонування систем, дозволяє реалізувати оптимальне керування складними ОК.

Традиційний шлях створення системи керування включає етапи:

- формулювання критерію (функціонала);
- розробка математичної моделі об'єкта;
- синтез законів (алгоритмів) керування;
- розробка алгоритмів адаптації законів керування по режимах функціонування об'єкта;
- здійснення отриманих законів.

Такий підхід призводить до звуження можливостей керуючих алгоритмів, тому що структура і параметри алгоритмів обираються для конкретних умов. Об'єднання ж останніх трьох етапів дозволяє створити на базі обчислювальних засобів керуючу систему, що здійснює синтез оптимальних керувань і саме керування в процесі функціонування об'єкта (*сполучений синтез керування*).

При оптимальному керуванні головна ціль (і обмеження) керування виражаються у вигляді функціонала (цільової функції, критерію) керування. При наявності декількох цілей оптимізація може здійснюватися, наприклад, по уза-

гальненій цільовій функції (підхід Парето). Проблема багатокритеріальної оптимізації розв'язується ітераційним шляхом: вибір і уточнення функціонала здійснюється за результатами, одержуваними шляхом моделювання і на реальному ОК.

Одна з провідних концепцій сучасної теорії автоматичного керування полягає у досягненні головної кінцевої мети на кожному етапі функціонування системи, що забезпечується шляхом оптимізації ОК у реальному масштабі часу. Це вимагає повного використання наявної апріорної інформації у вигляді моделей цього ОК і можливе при:

- оптимальному оцінюванні (фільтрації) динамічних процесів в ОК;
- ідентифікації (оптимальному оцінюванні структури і параметрів моделі) ОК;
- синтезі оптимального керування на кожному етапі функціонування системи;
- адаптації (настроюванні оптимального керування за неповної інформації).

Однією з основних проблем, що виникає на практиці, є проектування й реалізація САК, які забезпечують високу якість функціонування складних процесів. При цьому головним завданням є синтез автоматичних регуляторів, які могли б гарантувати асимптотичну стійкість замкнених систем і задовольнити певній сукупності інженерних вимог до властивостей САК у перехідних процесах та сталих режимах руху, а також до їхніх техніко-економічних показників.

Поставлене вище завдання – це завдання синтезу регулятора, найкращого в деякому сенсі, яке вирішується за допомогою теорії аналітичного конструювання оптимальних регуляторів (АКОР) Лєтова-Калмана. АКОР являє собою процедуру синтезу закону керування у функції координат стану ОК аналітичним шляхом, виходячи з вимог до якості перехідного процесу у формі мінімуму деякого обраного оптимізуемого функціонала (критерію якості). Таким чином, завдання АКОР – це завдання синтезу закону керування, що забезпечує мінімум критерію якості на траєкторіях руху ОК з довільного початкового в заданий кі-

нцевий стан. При цьому закон керування являє собою сукупність зворотних зв'язків по відповідним координатам ОК (рівняння оптимального регулятора).

Синтез оптимальних регуляторів базується на концепції Ляпунова збуреного руху. При цьому зміст завдання керування визначається як природою ОК, так і видом критерію оптимальності, а ефективне рішення завдання синтезу може бути досягнуте як застосуванням методів варіаційного обчислення, так і методу Беллмана.

Однак методи АКОР Лєтова-Калмана при практичному застосуванні стикаються з істотними труднощами обчислювального й принципового характеру. Так, з підвищенням порядку ОК швидко нарастають чисельні й особливо аналітичні труднощі, пов'язані з необхідністю рішення нелінійних рівнянь у частинних похідних щодо виробляючої функції, до яких зводиться процедура визначення законів керування.

Крім того, у теорії АКОР безпосередньо не розглядаються загальноприйняті в інженерній практиці прямі показники якості синтезованих систем, що є приводом для критики її методів, заснованих на постулюванні квадратичних критеріїв якості й надмірної формалізації процедур синтезу. Тобто, невирішене завдання проектування регуляторів по заданих первинних показниках якості була замінена іншим, побічно з ним зв'язаним.

Застосування методу АКОР Лєтова-Калмана для нелінійних ОК зводить завдання синтезу до пошуку рішення рівняння Беллмана – нелінійного диференціального рівняння в частинних похідних щодо виробляючої функції, яка визначає закон оптимального керування. У роботах А.М. Лєтова установлений тісний зв'язок між функціями Ляпунова, що задовольняють завданню асимптотичної стійкості руху, і зазначеним рівнянням Беллмана. Цей зв'язок полягає в тому, що рівнянню Беллмана задовольняє деяка множина виробляючих функцій. Виявляється, що дійсне рішення завдання оптимального синтезу можуть дати лише ті з них, які є функціями Ляпунова для замкненої системи. Відповідно, отримані на основі таких функцій регулятори будуть оптимальними й, крім того, вони забезпечують асимптотичну стійкість руху системи.

Синтез САК нелінійними ОК на відміну від лінійних незрівнянно більш складний. У більшості випадків реальні ОК повинні розглядатися як нелінійні, що визначається обмеженістю енергії й потужності процесів, які протікають в ОК, наявністю механічних, електричних і теплових обмежень, насичення тощо. Облік цих обмежень стає обов'язковим у зв'язку з вимогою інтенсифікації технологічних процесів, коли робочі режими близькі до граничних. Однак нездійсненність принципу суперпозиції для нелінійних моделей ОК суттєво утруднює аналіз і синтез нелінійних САК. Так для нелінійних ОК структура законів оптимального керування невідома й тому їх пошук за допомогою теорії АКОР є структурно-параметричним методом синтезу нелінійних систем.

Нехай математична модель неперервного ОК має лінійно вхідне керування:

$$\dot{x} = \phi_x(x, t) + \psi_x(x, t) \cdot u, \quad (12.29)$$

де x, u – вектори стану та керування; ϕ_x, ψ_x – диференційовані векторна та матрична функції; t – час.

Треба мінімізувати класичний функціонал (Летова-Калмана) з адитивними функціями витрат:

$$I_K = V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q_3[x(t), t] dt + K^{-1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} U_3[u(t), t] dt, \quad (12.30)$$

де V_3 – термінальна функція кінцевого стану етапу керування (цільова функція); Q_3, U_3 – позитивно визначені функції; t_1, t_2 – границі інтервалу (етапу) керування (оптимізації); K – позитивна матриця заданих коефіцієнтів.

Тоді рівняння Беллмана для ОК (12.29) і функціонала (12.30) має вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left\{ Q_3[x(t), t] + K^{-1} \cdot U_3[u(t), t] + \frac{\partial V}{\partial x} [\phi_x(x, t) + \psi_x(x, t) \cdot u] \right\} = 0,$$

згідно якому основне функціональне рівняння Гамільтона-Якобі при квадратичній функції витрат на керування приймає вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \phi_x(x, t) - \frac{K}{2} \cdot \left(\frac{\partial V^T}{\partial x} \cdot \psi_x^T(x, t) \right)^2 = -Q_3(x, t). \quad (12.31)$$

Рішення цього рівняння $V = V(x, t)$ при граничній умові $V(t_2) = V_3[x(t_2)]$ визначає оптимальне керування

$$u_{opt}(t) = -K \cdot \frac{\partial V^T}{\partial x} \cdot \psi_x^T(x, t). \quad (12.32)$$

Синтез оптимального керування зводиться до вирішення рівняння Беллмана, що для багатомірних нелінійних ОК зустрічає нерозв'язних труднощів, пов'язаних з дуже високою розмірністю множин при чисельному розв'язанні таких рівнянь. Аналітична ж побудова точних рішень існує лише для лінійних ОК і квадратичних функціоналів (див. п. 6.5.4).

У прикладному плані завдання синтезу закону керування (12.32) зводиться до пошуку змушеного рішення $V(x, t)$ рівняння (12.31), що є нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних. Методи аналітичного рішення цього рівняння відсутні. Таким чином, безпосереднє застосування методу АКОР Лєтова-Калмана для синтезу оптимальних керувань нелійними ОК натрапляють на практично непереборні труднощі виявлення структури й параметрів законів керування.

Розвитком теорії АКОР Лєтова-Калмана є принцип мінімуму узагальненої роботи, розроблений академіком О.А. Красовським, згідно з яким оптимізація керування здійснюється за функціоналом узагальненої роботи (ФУР). Цей функціонал напіввизначений за рахунок введення додаткового члена, що залежить саме від оптимального керування.

До характерної риси основного функціонального рівняння Гамільтона-Якобі при цьому відноситься те, що його ліву частину можна розглядати, як похідну $\dot{V}(t)$ при $u = 0$, тобто V є функцією Ляпунова, а це функціональне рівняння – рівняння Ляпунова для некерованого ОК.

Перевага методу АКОР за ФУР полягає в тому, що його функціональне рівняння, на відміну від функціонального рівняння по АКОР Лєтова-Калмана, являє собою лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних, що має принципово більш прості рішення.

Найбільш ефективний цей метод при використанні прогнозуючої моделі ОК. Метод оптимізації нелінійних динамічних систем за ФУР має, крім зазначених переваг обчислювального характеру, також і можливість сполученого синтезу законів керування, тобто формалізованого визначення керувань у процесі руху ОК (з поточною ідентифікацією математичної моделі ОК).

Розвиток нелінійної динаміки і пов'язаної з нею синергетики (теорії нерівноважних процесів) стало підґрунтям розробки принципово нових підходів до синтезу оптимального керування нелійними динамічними ОК.

Застосування ідей синергетики у керуванні полягає в цільовому способі самоорганізації синтезованих систем керування, при якому ціль – атрактор (асимптотично стійка множина, бажаний режим роботи) визначає самоврядування і спрямовану самоорганізацію нелінійного динамічного процесу.

Для застосування синергетичного підходу в системах керування необхідно перейти від роздільного розгляду моделей ОК і зовнішніх сил (у вигляді керувань, завдань і збурень) до розширеної постановки задачі, щоб зазначені сили стали внутрішніми взаємодіями загальної (замкнутої) системи. Для цього зовнішні впливи подають у вигляді інформаційних моделей, що поєднують (агрегують) у загальну структуру розширеної системи. Тоді проблема керування формулюється як задача пошуку законів взаємодії в розширеній системі, де виникають процеси самоорганізації, тобто виникає кінцеве число атракторів (принцип розширення-стиску фазового простору).

Метод синтезу керування в такій постановці одержав назву АКАР (див. п. 12.1.4). В основу АКАР покладене спільне використання теорії стійкості Ляпунова й оптимального керування. Метод забезпечує асимптотичну стійкість системи без пошуку рішень нелінійних динамічних рівнянь ОК. При цьому функціонал, що оптимізують, є супровідною інтегральною оцінкою якості перехідних процесів, що ефективно придушує великі відхилення за можливо малий час і використовується для стабілізації в режимі малих відхилень.

Синергетичний принцип оптимального керування полягає в цільовому способі самоорганізації синтезованих систем керування, при якому ціль –

атрактор (асимптотична стійка множина, бажаний режим роботи) визначає самоврядування і спрямовану самоорганізацію нелінійного динамічного ОК.

Синергетичний синтез за методом АКАР визначає закон керування, що забезпечує зближення стану ОК (12.29) із бажаним режимом роботи (інваріантним різноманіттям) $\Psi(x) = 0$ і наступний асимптотично стійкий рух ОК уздовж нього до початку координат фазового простору.

Потрібно визначити закон керування $u(\Psi) = u(x)$, що забезпечує зближення ЗТ з довільного початкового стану із деяким інваріантним різноманіттям (бажаним режимом) $\Psi = \varphi(x) = 0$ і наступний асимптотично стійкий рух уздовж нього до початку координат фазового простору.

Необхідна і достатня умова того, щоб $\Psi = \varphi(x) = 0$ було інваріантним різноманіттям є $\dot{\Psi} = 0$. При такому керуванні, якщо в умовах збурень ЗТ (вихід системи), зходить з бажаного різноманіття (необхідного режиму $\Psi = 0$), то через асимптотичну стійкість у цілому різноманіття, що притягає, ЗТ повернеться на нього.

Для ОК (12.29) основне функціональне рівняння Ейлера-Лагранжа

$$T_n \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \psi_x(x) \cdot u + T_n \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \phi_x(x) + \varphi(\Psi) = 0 \quad (12.33)$$

визначає закон керування

$$u = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \psi_x(x) \right)^{-1} \times \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \phi_x(x) + T_n^{-1} \cdot \varphi(\Psi) \right], \quad (12.34)$$

що доставляє мінімум супровідному функціоналу виду

$$I_S = \int_{t_1}^{t_2} \{ T_n^2 \dot{\Psi}^2 + \varphi^2(\Psi) \} dt, \quad (12.35)$$

де T_n – матриця позитивно визначених коефіцієнтів, φ – диференційована функція, яка характеризує потрібну якість перехідних процесів ОК.

Траєкторії системи з ОК (12.29), замкнутої керуванням $u(\Psi)$ (12.34), є характеристиками рівняння (12.33). Особливість такого керування в тому, що агрегована змінна Ψ задається (є метою керування). Функції Ψ можуть виби-

ратися різними способами, але доцільно вибирати їх структуру ідентичною правим частинам рівнянь ОК (12.29), що призводить до ненаголошених перехідних процесів.

Таким чином, нелінійна динаміка ОК у просторі станів апроксимується лінійною динамікою в просторі макрозмінних. А задача підбору макрозмінної Ψ зводиться до задачі синтезу стійкої однорідної системи диференціальних рівнянь.

Такий підхід інтерпретується послідовною оптимізацією нелінійних систем (спочатку у великому, а потім у малому).

12.2.2. Синтез оптимального керування за принципом мінімуму узагальненої роботи.

По способу реалізації процесу оптимізації керування розрізняють рішення завдання при проектуванні САК, коли на період функціонування системи покладається лише реалізація отриманого закону, а також сполучений синтез, коли всі оптимізаційні завдання формуються й вирішуються в процесі функціонування САК.

Синтез оптимального керування на етапі проектування САК. Нехай математична модель неперервного ОК має лінійно вхідне керування (12.29) і треба мінімізувати ФУР з адитивними функціями витрат:

$$I_1 = V_3[x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} Q_3[x(t), t] dt + K^{-1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \{U_3[u(t), t] + U_3^*[u_{opt}(t), t]\} dt, \quad (12.36)$$

де U_3^* – позитивно визначена функція, що приймає мінімальне значення при $u = u_{opt}$; u_{opt} – шукане оптимальне керування, що доставляє мінімум функціонала (наявність четвертого доданку в (12.36) відрізняє ФУР від класичного функціонала (12.30)).

Тоді рівняння Беллмана для ОК (12.29) і функціонала (12.36) має вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left\{ Q_3[x(t), t] + K^{-1} \cdot \{U_3[u(t), t] + U_3^*[u_{opt}(t), t]\} + \frac{\partial V}{\partial x} [\phi_x(x, t) + \psi_x(x, t) \cdot u] \right\} = 0,$$

де $V = V(x, t)$ – рішення основного функціонального рівняння Гамільтона-Якобі для автономного ($u_{opt} \equiv 0$) руху при граничній умові $V(t_2) = V_3[x(t_2)]$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \phi_x(x, t) = -Q_3(x, t). \quad (12.37)$$

Звідки оптимальне керування визначається із співвідношення:

$$K^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial u_{opt}} U_3(u_{opt}) = -\frac{\partial V^T}{\partial x} \cdot \psi_x^T(x, t)$$

і для квадратичних функцій витрат на керування гамільтоніан має єдиний мінімум при:

$$u_{opt}(t) = -K \cdot \frac{\partial V^T}{\partial x} \cdot \psi_x^T(x, t). \quad (12.38)$$

Тут, як відзначалось вище, на відміну від класичного підходу Лєтова-Калмана, де основне функціональне рівняння Гамільтона-Якобі має вигляд нелінійного диференціального рівняння в частинних похідних (12.31), при мінімізації за ФУР функціональне рівняння (12.37) має вид рівняння Ляпунова (лінійного диференціального рівняння в частинних похідних), чисельне розв'язання якого значно простіше, ніж (12.31).

Розгляд ОК з лінійно вхідним керуванням (12.29) обумовлений відносною простотою синтезу їх оптимального керування. ОК загального виду

$$\dot{x} = \phi_{x1}(x, u, t) \quad (12.39)$$

може бути приведений до форми (12.29) різними способами. Наприклад, якщо синтезовані керування мають малий діапазон зміни навколо значення u^0 , то шляхом лінеаризації функції ϕ_{x1} по u вираз (12.39) можна записати:

$$\dot{x} = \phi_{x1}(x, u^0, t) + [\partial \phi_{x1}(x, u, t) / \partial u]_{u=u^0} \cdot \Delta u,$$

звідки $\phi_x(x, t) \equiv \phi_{x1}(x, u^0, t)$ і $\psi_x(x, t) \cdot u \equiv [\partial \phi_{x1}(x, u, t) / \partial u]_{u=u^0} \cdot \Delta u$.

Розглянемо тепер розв'язання задачі синтезу оптимального керування для неперервного ОК з дискретною моделлю виду:

$$x[k+1] = \phi(x[k]) + \psi(x[k]) \cdot u[k] \quad (12.40)$$

за дискретним функціоналом:

$$I_2 = V_3(x[k_{j+1}]) + \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} Q_3(x[k], k) + K^{-1} \cdot \left\{ \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} U_3(u[k], k) + \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} U_3^*(u_{opt}[k], k) \right\}, \quad (12.41)$$

де k_j, k_{j+1} – початкові такти послідовних етапів (циклів) керування; $k = t/T$ – поточний такт часу; t – неперервний час; T – інтервал дискретизації.

Дискретне рівняння Беллмана записується у вигляді

$$V_i(x[i]) = E\{Q_3(x[i]) + V_{i+1}\{\phi(x[i]) + \psi(x[i]) \cdot u_{opt}[i]\}\} - \frac{\partial V_{i+1}^T}{\partial x[i+1]} \cdot \psi^T(x[i]) \cdot u_{opt}[i]\}, \quad (12.42)$$

де $i = k_{j+1} - 1, k_{j+1} - 2, \dots, k_j$.

При граничній умові $V_{k_{j+1}}(x[k_{j+1}]) = V_3(x[k_{j+1}])$ розв'язання рекурентного рівняння (12.42) визначається відповідно до рівності

$$K^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial u_{opt}} U_3(u_{opt}[i]) = - \frac{\partial V_{i+1}^T}{\partial x[i+1]} \cdot \psi^T(x[i])$$

і при квадратичній функції витрат на керування дорівнює:

$$u_{opt}[i] = -K \cdot \frac{\partial V_{i+1}^T}{\partial x[i+1]} \cdot \psi^T(x[i]). \quad (12.43)$$

Якщо тривалість інтервалу $[k_j, k_{j+1}]$ є необмеженою (нетермінальна задача з інтервалом $[0, \infty]$ на етапі проектування), то рішення (12.43) існує тільки для асимптотично стійких ОК.

Реалізація закону оптимального керування, отриманого на етапі проектування САК, ефективна, коли ОК мають сталі режими роботи і відсутні значні варіації збурень.

Синтез оптимального керування за ФУР в процесі функціонування САК.
В умовах варіації режимів ОК і збурень ефективними є універсальні алгоритми синтезу оптимального керування, що засновані на поточній ідентифікації (обробці поточної інформації в реальному масштабі часу) за прогнозуючими моделями та контролі збурень.

Розглянемо розв'язання задачі оптимального керування в процесі функціонування неперервним ОК з узагальненою моделлю виду:

$$Y[k+1] = \Phi_Y \{Y[k], u[k], w[k], \xi[k], a[k], k\}, \quad (12.44)$$

де Φ_Y – узагальнена функція (алгоритм) перетворення; $Y[k], u[k], w[k], \xi[k], a[k]$ – відповідно, вектори (матриці) виходу процесу, його керування, збурення, шуму і параметрів до поточного часу k з відповідними глибинами пам'яті.

Реалізація оптимального керування вимагає відповідного інформаційного забезпечення – апіорної (адекватні прогнозуючі моделі) і апостеріорної (поточні виміри і результати обробки) інформації. У загальному випадку ОК може мати різні запізнювання в різних каналах n_Z (збурення, керування і виходу). Тоді доцільно використовувати прогнозування виходу ОК відповідно до виразу (12.44), аргументи якого оцінюються за допомогою каналних прогнозуючих фільтрів (див. п. 11.5.1, формула (11.42)):

$$\hat{Z}[k] = \Phi_{\hat{Z}} \{Z[k-n_Z+1], \varphi(Z[k-n_Z+1]), \xi_{\hat{Z}}[k], a_{\hat{Z}}[k], k\}, \quad (12.45)$$

де $\{Y[k], u[k], w[k]\} \subset \hat{Z}[k]$. Тут $\hat{Z}[k]$ – вектор (матриця) оцінки стану каналу системи; $\Phi_{\hat{Z}}$ – узагальнена функція перетворення (метод, алгоритм); $Z[k-n_Z+1], \varphi(Z[k-n_Z+1]), \xi_{\hat{Z}}[k], a_{\hat{Z}}[k]$ – відповідно, вектор (матриця) відомих (вимірних) значень передісторії стану каналу (до моменту часу $k-n_Z+1$); лінійно незалежні функції, що характеризують властивості часового ряду (наприклад, автокореляційна функція, дисперсія тощо); шуми вимірювань та параметри прогнозуючого фільтра.

У якості керування будемо використовувати не координату, а її швидкість (зміну значення керуючої координати на поточний такт):

$$u^*[k] = u[k] - u[k-1]. \quad (12.46)$$

Тоді модель (12.44) із врахуванням (12.46) набуває розширеного виду з лінійно вхідним керуванням $u^*[k]$:

$$\begin{bmatrix} Y[k+1] \\ u[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_Y \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \cdot u^*[k], \quad (12.47)$$

або більш компактно

$$\vec{Y}[k+1] = \vec{\Phi} + \vec{\Psi} \cdot u^*[k], \quad (12.48)$$

де I – одинична матриця; $\vec{Y}[k+1] = \{Y[k+1], u[k]\}^T$; $\vec{\Phi} = \{\Phi_Y, u[k-1]\}^T$; $\vec{\Psi} = \{0, I\}^T$.

Нехай синтез здійснюється за стохастичним ФУР з адитивними функціями витрат на керування і дискретним часом:

$$\begin{aligned} J_1 = E \{ V_3(\vec{Y}[k_{j+1}]) + \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} Q_3(\vec{Y}[k], Y^{zad}[k], k) + \\ + \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} U_3(u^*[k], k) + \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} U_3^*(u_{opt}^*[k], k) \}, \quad (12.49) \end{aligned}$$

де E – математичне очікування; Y^{zad} – задане значення виходу процесу.

Відповідно до принципу поділу (теорема стохастичної еквівалентності – див. гл. 7) оптимальне у сенсі ФУР (12.49) керування стохастичним процесом (12.44) в умовах некорельованості цільової функції і похибок виміру ($\langle V_3 \cdot \xi[k] \rangle \approx 0$) може бути приблизно отримане, як оптимальне керування детермінованим процесом з точним виміром вектора стану $Z[k]$ шляхом заміни його дійсного значення на оцінку за його умовному математичному очікуванні $\hat{Z}[k] = E_y \{ Z[k] \}$. Отримані таким шляхом наближені рішення задачі синтезу закону керування стохастичним процесом тим точніші, чим вище точність оцінювання, тобто чим менше $\| Z[k] - \hat{Z}[k] \|$.

Дискретне рівняння Беллмана з урахуванням (12.48) записується у виді

$$V_i(\vec{Y}[i]) = E \{ Q_3(\vec{Y}[i], Y^{zad}[i]) + V_{i+1}(\vec{\Phi} + \vec{\Psi} \cdot u_{opt}^*[i]) - \frac{\partial V_{i+1}^T}{\partial \vec{Y}[i+1]} \cdot \vec{\Psi}^T \cdot u_{opt}^*[i] \}, \quad (12.50)$$

де $i = k_{j+1} - 1, k_{j+1} - 2, \dots, k_j$.

При граничній умові $V_{k_{j+1}}(\vec{Y}[k_{j+1}]) = V_3(\vec{Y}[k_{j+1}])$ розв'язання рекурентного рівняння (12.50) визначається відповідно до рівності

$$\frac{\partial}{\partial u_{opt}^*} U_3(u_{opt}^*[i]) = -\frac{\partial V_{i+1}^T}{\partial \vec{Y}[i+1]} \cdot \vec{\Psi}^T \quad (12.51)$$

і при квадратичній функції витрат на керування з урахуванням (12.47) дорівнює:

$$u_{opt}^*[i] = -\frac{\partial V_{i+1}^T}{\partial u[i+1]}. \quad (12.52)$$

Для алгоритмів синтезу оптимального керування за ФУР (12.49) із прогнозуючою моделлю (12.47) розв'язання рівнянь (12.50), (12.51) відносно u_{opt}^* виходить досить просто за (12.52), а його принциповою особливістю є зв'язок оптимального рішення з вільним рухом ОК (при $u^*=0$) на прогнозований цикл керування $[k_j, k_{j+1}]$.

Таким чином, регуляризація задачі синтезу шляхом виділення у ФУР (12.49) частини, що залежить від власне оптимального керування (четвертий доданок), спрощує розв'язання і зводить його до відшукування мінімуму функціонала на ковзному циклі керування із залученням у реальному масштабі часу інформації про стан ОК до нового циклу керування (12.45) і його майбутнього стану по прогнозуючій моделі ОК (12.44). При цьому використовуються природні власні рухи ОК.

Внаслідок граничного використання (і економії) енергії на керування необхідно синтез керування виконувати з максимальним використанням природних власних рухів ОК, що й забезпечується синтезом оптимального керування за ФУР.

Синтез і реалізація оптимального керування на новий цикл повинні здійснюватися з випередженням (глибиною прогнозу) на час, більший суми часу чистого запізнювання в системі, а також часу пошуку і реалізації оптимального

керування. Тоді виходом моделі ОК (12.44) буде оцінка прогнозу стану процесу $Y[k+1] \Rightarrow \hat{Y}[k+n]$ глибиною n тактів.

12.2.3. Синергетичний підхід до синтезу оптимального керування.

Синергетичний синтез оптимального керування на етапі проектування САК. Синтез керування за ФУР простий і ефективний, але для багатозв'язних ОК стає відносно громіздким. Для таких ОК більш ефективним є синергетичний підхід, що дозволяє синтезувати єдину САК з ієрархічним структуруванням локальних систем (підсистем).

У методі АКАР синтез наступного рівня (нижнього, підлеглого) здійснюють з урахуванням уже синтезованої за своїм критерієм підсистеми попереднього (верхнього) рівня. Для цього необхідно на наступних етапах використовувати підсистеми керування і математичні моделі підоб'єкту керування попереднього етапу. При цьому метод АКАР дозволяє здійснити послідовну оптимізацію за квадратичним критерієм в режимі малих відхилень і за критерієм швидкодії в режимі великих.

Розглянемо застосування АКАР для синтезу керування в САК, що складається з двох підсистем:

$$x_1[k+1] = F_1(x_1[k]) + G_1(x_1[k]) \cdot x_2[k]; \quad (12.53)$$

$$x_2[k+1] = F_2(x[k]) + G_2(x[k]) \cdot u[k],$$

де G, F – диференційовані функції; $x[k] = \{x_1[k], x_2[k]\}$ – стан ОК. Тут відповідно до (12.41) $\{Y[k], w[k]\} \subset x[k]$.

На першому етапі потрібно визначити $u = u(x)$, щоб у замкнутій цим керуванням системі досягалася ціль керування:

$$x[k+1] \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow +\infty. \quad (12.54)$$

Для цього необхідно обрати функцію виходу для ОК $y = \Psi(x)$ таку, щоб ціль (12.41) впливала з рівності:

$$\Psi(x[k+1]) \equiv 0 \text{ для усіх } k \geq 0. \quad (12.55)$$

Для підсистеми ОК (12.53) як внутрішній сигнал керування розглядається координата x_2 вектора стану. Термін “внутрішній” означає, що безпосереднє зовнішнє керування u не впливає на динаміку підсистеми (12.53). Нехай змінна $x_2[k] = \lambda(x_1[k])$, де λ – диференційована функція ($\lambda(0) = 0$), тоді підстановка x_2 в (12.53) означає виконання цілі (12.54) по змінній x_1 . У цьому випадку в якості макрозмінної (інваріантного різноманіття) Ψ доцільно обрати:

$$\Psi(x) = [x_2 - \lambda(x_1)]. \quad (12.55)$$

Якщо для (12.55) виконана рівність (12.54), тоді $\dot{\Psi} \equiv 0$ для $k \geq 0$ і $x_2[k] = \lambda(x_1[k])$, відкіля в силу умов стосовно λ буде виконаний граничний перехід (12.54) для $x_1[k]$, а оскільки $\lambda(0) = 0$, то і для x_2 досягається ціль (12.54).

На другому етапі в АКАР для вибору відповідного закону керування вводиться супровідний функціонал з адитивними квадратичними функціями витрат:

$$J_{SP} = \sum_{k=0}^{\infty} \{T_n^2 \cdot \Delta\Psi^2[k+1] + \varphi^2(\Psi[k])\}, \quad (12.56)$$

мінімуму якого повинні відповідати перехідні процеси за (12.55). Тут $\Delta\Psi[k+1] = (\Psi[k+1] - \Psi[k])/T$ – перша різниця, T – період дискретизації, а φ – диференційована функція, яка характеризує потрібну якість перехідних процесів ОК ($\varphi(0) = 0$).

Відповідно до варіаційних методів екстремаль J_{SP} прийме вигляд

$$T_n \dot{\Psi} + \varphi(\Psi) = 0 \quad \text{для усіх } k \geq 0, \quad T_n > 0. \quad (12.57)$$

Залежно від властивостей функції φ можна забезпечити необхідну якість перехідних процесів на виході $y = \Psi$. Головна вимога до φ : $\varphi(0) = 0$; $\Psi \cdot \varphi(\Psi) > 0$, якщо $\Psi \neq 0$. Рішення тоді має властивість (12.54).

З урахуванням (12.53)-(12.57) екстремаль можна виразити як

$$F_2(x) + G_2(x) \cdot u - \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} [F_1(x_1) + G_1(x_1) \cdot x_2] + T_n^{-1} \cdot \varphi[x_2 - \lambda(x_1)] = 0,$$

а керування в дискретному часі дорівнює

$$u[k] = -G_2^{-1}(x[k]) \cdot \{T_n^{-1} \cdot \varphi\{x_2[k] - \lambda(x_1[k]) + F_2(x[k]) - \partial\lambda / \partial x_1[k] \cdot x_1[k + 1]\}\}. \quad (12.58)$$

По отриманому керуванню (12.58) другої підсистеми обчислюють координату x_2 , що є оптимальним (у розглянутій постановці) керуванням першої підсистеми (12.53). Іншими словами, друга підсистема (верхнього рівня) формує керування (завдання) першій підсистемі (локальній системі нижнього рівня).

У такий спосіб використання АКАР дозволяє синтезувати оптимальні по загальному функціоналу САК багатозв'язних ОК шляхом послідовної декомпозиції оптимального керування в ієрархії вхідних підсистем.

Синергетичний синтез оптимального керування в процесі функціонування САК. Урахування впливу збурень можна здійснювати на ковзному циклі керування $[k_j, k_{j+1}]$. При цьому синергетичний синтез керування виконаємо з використанням прогнозуючих моделей і конструюванні макрозмінних з умови мінімуму енерговитрат на керування.

Розглянемо вибір функції $\Psi(x)$ на основі комбінації консервативної $\Psi_K(x)$ і дисипативної $\Psi_D(x)$ складових, де дисипативна вводиться для формування бажаного атрактора (режиму системи), а консервативна – визначає природну динаміку ОК і відповідає накладеним на систему консервативним зв'язкам:

$$\Psi[k + 1] = K_K \Psi_K[k + 1] + K_D \Psi_D[k + 1],$$

де K_K, K_D – коефіцієнти погодження.

Нехай є стохастичний ОК виду (12.37):

$$x[k + 1] = \phi(x[k]) + \psi(x[k]) \cdot u[k] + \xi[k], \quad (12.59)$$

а його еталонна модель – $\hat{x}[k + 1] = \hat{\phi}(\hat{x}[k], u[k])$. Тут відповідно до (12.41):

$$\{Y[k], w[k]\} \subset x[k],$$

а їх оцінки $\{Y[k], u[k], w[k]\} \subset \hat{Z}[k]$ визначаються спостерігачем за (12.45).

Нехай ціль – мінімізація узагальненої похибки керування:

$$Q(x, \hat{x}, u) = E\{\hat{x}[k+1] - x[k+1]\} \rightarrow 0.$$

Ціль виконана, якщо $x[k+1] = \hat{\phi}(x[k], u[k])$, тоді макрозмінну Ψ_δ приймемо у виді:

$$\Psi_\delta[k+1] = \Psi_\delta(x, u) = E\{\hat{\phi}(\hat{x}[k], u[k]) - x[k+1]\} = Q(x, \hat{x}, u).$$

Оскільки макрозмінна Ψ_κ характеризує рух ОК при $u = 0$, то Ψ_κ оберемо як функцію похідних векторів стану системи в автономному (при $u = 0$) режимі.

Для рівняння власного руху ОК

$$x_c[k+1] = \phi(x[k], a[k])$$

найбільш простою є макрозмінна

$$\Psi_\kappa[k+1] = E\{x_c[k+1] - x[k+1]\},$$

що аналогічно синтезу керування за ФУР. Тоді з урахуванням (12.59) одержимо

$$\Psi_\kappa[k+1] = -E\{\psi(x[k]) \cdot u[k]\},$$

звідки для реалізації різноманіття $\Psi_\kappa = 0$ необхідне керування $u = 0$.

$$\text{Остаточно } \Psi[k+1] = E\{K_\delta \Psi_\delta[k+1] - K_\kappa \psi(x[k]) \cdot u[k]\} = 0.$$

З урахуванням рівняння Ейлера-Лагранжа (12.57), що має в дискретній формі підродину стійких екстремалей

$$\Psi[k+1] \cdot \psi(x[k]) \cdot u[k] + \Psi[k+1] \cdot \phi(x[k]) + T_\delta^{-1} \cdot \phi(\Psi[k]) = 0; T_\delta > 1,$$

закон керування має вид:

$$u[k] = -(\Psi[k+1] \cdot \psi(x[k]))^{-1} \times \{\Psi[k+1] \cdot \phi(x[k]) + T_\delta^{-1} \cdot \phi(\Psi[k])\}.$$

Це керування оптимальне в сенсі супровідного функціоналу для ковзного циклу керування:

$$J_{SR} = E\left\{ \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} \{T_\delta^2 \cdot \Delta\Psi^2[k+1] + \phi^2(\Psi[k])\} \right\},$$

де E – математичне очікування.

Таким чином, синергетичний підхід забезпечує синтез оптимального керування нелінійним стохастичним ОК в процесі функціонування САК із мінімізацією витрат на керування.

12.3. Адаптивні системи оптимального керування з прогнозуючими моделями

12.3.1. Адаптивне регулювання з прогнозуючою моделлю.

Адаптивні САК, у яких недолік апріорної інформації заповнюється за рахунок відповідної обробки поточної інформації, дозволяють скоротити строки проектування, налагодження й випробувань, а також забезпечити ефективне керування в умовах збурень і неконтрольованих змін властивостей ОК. При цьому, у безпошукових адаптивних САК попередньо проводиться ідентифікація ОК, а потім, за визначеними параметрами моделі ОК, обчислюються коефіцієнти регулятора.

Для ідентифікації ОК використовуються адаптивні фільтри-апроксиматори (АФА), в яких процес адаптації включає оцінювання шуканого виходу фільтра і корегування його параметрів по значенню вихідної похибки (див. п. 11.3).

Нехай прогнозуюча модель ОК має вид:

$$\hat{Y}[k+n] = \Phi\{Y[k], u[k], \xi[k], a[k], k\}, \quad (12.60)$$

де Φ , a – узагальнена функція і параметри моделі (АФА); $u[k], \xi[k]$ – вектори керувань і завад до поточного часу k з відповідними глибинами пам'яті; n – глибина прогнозу (для компенсації чистого запізнювання і часу на синтез і реалізацію керування $-n \geq 1$).

Для ідентифікації ОК знайшли поширення безпошукові алгоритми параметричної ідентифікації з адаптивною моделлю, орієнтовані на функціонування в реальному масштабі часу, до яких відносяться градієнтні алгоритми. Процес ідентифікації при цьому полягає в адаптації параметрів a за величиною функціонала похибки J між реальним виходом і відгуком моделі (градієнтом функціонала в просторі параметрів):

$$\hat{a}[k] = \hat{a}[k-1] - K_a \cdot \nabla_{\hat{a}} J\{Y[k], \hat{Y}[k], k\}, \quad (12.61)$$

де $\hat{a}[k]$ – оцінка вектора параметрів, що адаптують, у поточному такті;
 $\nabla_{\hat{a}} = (\partial / \partial \hat{a})^T$ – символ градієнта; K_a – задана матриця коефіцієнтів.

Тут функціонал похибки J має, зазвичай, вид:

$$J_1 = E\{(e[k])^2\} = E\{(Y[k] - \hat{Y}[k])^2\}, \quad (12.62)$$

де E – математичне очікування; $e[k] = Y[k] - \hat{Y}[k]$ – похибка моделі ОК.

АФА (модель ОК) стає оптимальним при $\hat{a} = a_{opt}$, коли $J_1 = 0$, тоді завдання адаптації полягає в знаходженні оптимальних коефіцієнтів \hat{a} шляхом ітеративного визначення градієнта поверхні мінімальної середньоквадратичної похибки (12.62).

САК із самоналагоджувальним регулятором і прогнозуючою моделлю.
 Для автоматичного регулювання в умовах обмеженої апріорної інформації використовується самоналагоджувальна система з прогнозуванням виходу ОК за допомогою АФА (рис. 12.7).

Згідно класифікації це адаптивна система з ідентифікацією ОК шляхом настроювання його моделі або, іншими словами, безпошукова система непрямого адаптивного керування з еталонною моделлю, що навчається.

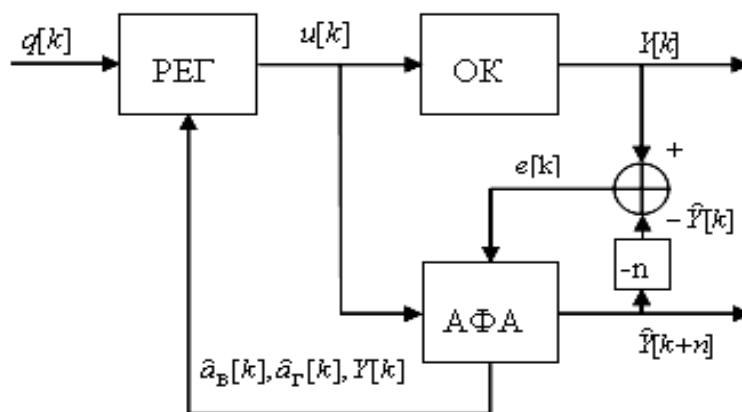


Рис. 12.7. Структура САК із самоналагоджувальним регулятором і прогнозуючою моделлю

ОК і регулятор (РЕГ) утворюють основний контур системи, а АФА виконує роль еталонної прогнозуючої моделі (апроксиматора) ОК, який корегує ко-

ефіцієнти регулятора і є інформаційним контуром. Тобто це САК з розімкнутим основним і замкненим інформаційним контурами.

Синтез адаптивного керування в цій САК на такті k полягає в:

- адаптації (оцінці) коефіцієнтів АФА $\hat{a}[k]$ за величиною похибки моделі ОК (12.60) (наприклад, згідно (12.61) по градієнту функціонала (12.62)), а потім обчисленні по адаптованому АФА прогнозу виходу ОК $\hat{Y}[k+n]$;

- обчисленні за завданням на наступний такт керування $q[k+1]$ похибки регулювання:

$$\varepsilon[k] = q[k+1] - \hat{Y}[k+n] \quad (12.63)$$

і визначенні по ній значення керування $u[k]$, що потім реалізується на ОК.

Для нелінійного ОК задача керованості зводиться до задачі розв'язання нелінійних рівнянь цих ОК, а здатність до адаптації основного контуру забезпечується якістю адаптації моделі ОК (малим значенням J_1), що реалізує параметричну інваріантність і є структурною характеристикою основного контуру, яка виражає компенсацію впливу параметричних збурень на його динамічні характеристики.

Розглянемо більш детально процедуру визначення керування $u[k]$. Метою регулювання є забезпечення нульової похибки $\varepsilon^*[k] = q[k+1] - Y[k+n] = 0$, де $Y[k+n]$ – відповідний до завдання $q[k+1]$ вихід ОК. При цьому, оскільки сигнал $Y[k+n]$ у момент часу k не спостерігається, то використовується його оцінка (прогноз) за АФА $\hat{Y}[k+n]$, що відповідає критерію регулювання для стохастичного ОК:

$$J_2 = E\{(\varepsilon[k])^2\} = E\{(q[k+1] - \hat{Y}[k+n])^2\}. \quad (12.64)$$

Тоді значення керування $u[k]$ з урахуванням (12.60) і (12.63) визначається із рівняння:

$$E\{(q[k+1] - \Phi\{Y[k], u[k], \xi[k], a[k], k\})^2\} \rightarrow \min, \quad (12.65)$$

що відповідає мінімуму функціоналу (12.64) і є задачею мінімізації функції однієї змінної.

Рішення (12.65) відносно $u[k]$ залежно від виду функції Φ (і, у загальному випадку, від характеру функціонала J_2) шукається відомими аналітичними або чисельними методами.

При лінійно вхідному керуванні в моделі (12.60) визначення керування не вимагає додаткового залучення спеціальних методів. Так, нехай модель ОК (12.60) може бути представлена у вигляді рівняння з лінійно вхідним керуванням:

$$\hat{Y}[k+n] = B\{Y[k], \hat{a}_B[k]\} + \Gamma\{Y[k], \hat{a}_\Gamma[k]\} \cdot u[k], \quad (12.66)$$

де B – функція частини ОК, інваріантної до керування (функція автономного руху ОК); Γ – функція чутливості керування; $\hat{a}_B[k], \hat{a}_\Gamma[k]$ – вектори настроюваних параметрів узагальнених функцій B і Γ , відповідно.

Якщо параметри $\hat{a}_B[k], \hat{a}_\Gamma[k]$ відомі (адаптовані, наприклад, згідно (12.61)-(12.62)), то керуючий вплив поточного такту визначається згідно (12.66) за рівнянням регулятора (при $Y[k+n] = q[k+1]$ й $\hat{Y}[k+n] \approx Y[k+n]$), що має вид:

$$u[k] = \frac{q[k+1] - B\{Y[k], \hat{a}_B[k]\}}{\Gamma\{Y[k], \hat{a}_\Gamma[k]\}}. \quad (12.67)$$

ОК загального виду (12.60) може бути приведений до форми (12.66) з лінійно вхідним керуванням різними способами (див. п. 12.2.2). По-перше, якщо синтезовані керування мають малий діапазон зміни Δu навколо значення u^0 , то шляхом лінеаризації функції Φ по u вираз (12.60) можна записати:

$$\hat{Y}[k+n] = \Phi\{Y[k], u^0[k], \xi[k], a[k], k\} + (\partial\Phi / \partial u)_{u=u^0} \cdot \Delta u,$$

де $B\{Y[k], \hat{a}_B[k]\} = \Phi\{Y[k], u^0[k], \xi[k], a[k], k\}$ і $\Gamma\{Y[k], \hat{a}_\Gamma[k]\} = (\partial\Phi / \partial u)_{u=u^0}$ у відповідності із (12.66).

Однак при такому підході звужується діапазон керуючих впливів і, відповідно, знижується ефективність керування.

Більш продуктивним є спосіб, коли керуванням є не керуючий вплив, а його швидкість (зміна значення керуючої координати на поточний такт):

$$u^*[k] = u[k] - u[k-1]. \quad (12.68)$$

Тоді модель (12.60) із врахуванням (12.68) набуває розширеного виду:

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}[k+n] \\ u[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi \\ u[k-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \cdot u^*[k],$$

або більш компактно

$$\vec{Y}[k+n] = \vec{B} + \vec{\Gamma} \cdot u^*[k], \quad (12.69)$$

де I – одинична матриця; $\vec{Y}[k+n] = \{\hat{Y}[k+n], u[k]\}^T$; $\vec{B} = \{\Phi, u[k-1]\}^T$; $\vec{\Gamma} = \{0, I\}^T$; $\{\hat{a}_\Phi, \hat{a}_\Gamma\} \subset \hat{a}$; $n \geq 1$.

Цей спосіб призводить до розширення фазового простору і, у загальному випадку, вимагає переформулювання функціонала (12.64), але не знижує ефективності керування.

Остаточно розширене рівняння регулятора відповідно до (12.67) і (12.69) має вид:

$$u^*[k] = (\vec{q}[k+1] - \vec{B}) \cdot \vec{\Gamma}^{-1},$$

де $\vec{q}[k+1] = \{q[k+1], u[k]\}^T$.

Адаптивна САК з ПІД-регулятором і прогнозуючою моделлю.
Пропорційно-інтегрально-диференціальні регулятори (ПІД-Р) широко використовуються в системах регулювання технологічними процесами, зокрема, нелінійними ОК. Їх перевагами є швидкодія, відгук як на відхилення, так і на швидкість його зміни.

Структура адаптивної САК з ПІД-регулятором і прогнозуючою моделлю у вигляді АФА представлена на рис. 12.8. Це замкнена САК як за основним, так і за інформаційним контурами.

Синтез адаптивного керування в цій САК також включає процедуру обчислення прогнозу $\hat{Y}[k+n]$ по адаптованій моделі ОК, яка аналогічна розглянутій вище, і процедуру визначення керуючого впливу $u[k]$, що має певні особливості.

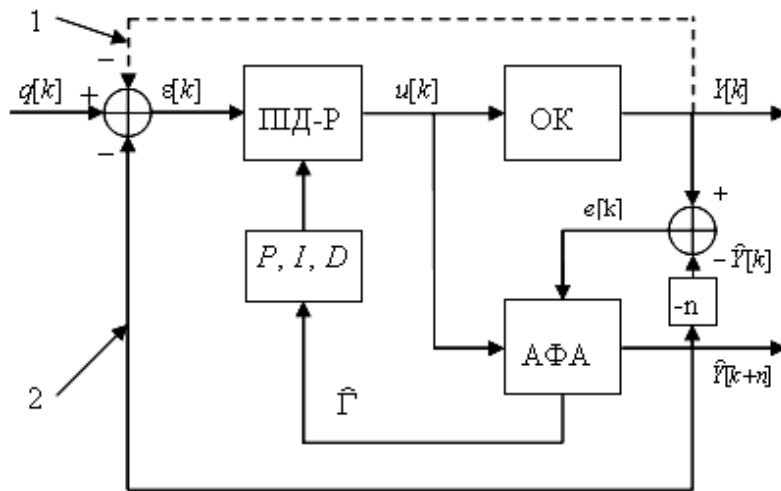


Рис. 12.8. Структура адаптивної САК з ПД-регулятором і прогнозуючою моделлю

ПД-регулятор у дискретній формі описується рівнянням:

$$u[k] = u[k-1] + P[k] \cdot (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-1]) + I[k] \cdot \varepsilon[k] + D[k] \cdot (\varepsilon[k] - 2\varepsilon[k-1] + \varepsilon[k-2]), \quad (12.70)$$

де $\varepsilon[k]$ – похибка регулювання (12.63), $\Theta = \{P, I, D\}$ - коефіцієнти відповідних каналів регулятора.

Таким чином процедура визначення керуючого впливу $u[k]$ в цій САК полягає в знаходженні значень параметрів Θ , що згідно (12.70) визначають керуючий вплив, який є рішенням рівняння (12.65) і відповідає мінімуму функціонала (12.64). Це є задачею мінімізації функції декількох змінних і рішення (12.65) відносно Θ залежно від виду функції Φ шукається відомими аналітичними або чисельними методами.

Так, наприклад, при задоволенні вимог по використанню градієнтних методів (гладкість функції Φ і її диференційованість) мінімуму функціонала (12.64) з урахуванням (12.70) відповідає $\partial J_2[k] / \partial \Theta[k] = 0$ і $\Theta[k] = \{P[k], I[k], D[k]\}$, звідки поточні значення параметрів $\Theta[k]$ визначаються (адаптуються) аналогічно виразу (12.61):

$$\Theta[k] = \Theta[k-1] - \mu_{\Theta} \cdot \partial J_2[k] / \partial \Theta[k], \quad (12.71)$$

де $\mu_{\Theta} = \{\mu_P, \mu_I, \mu_D\}$ – коефіцієнти настроювання ПД-каналів.

Для моделей ОК з лінійно вхідним керуванням (12.68) рівняння (12.71) відповідно до (12.70) приймає вид:

$$P[k] = P[k-1] + \mu_P \cdot \varepsilon[k] \cdot \Gamma\{Y[k], \hat{a}_\Gamma[k]\} \cdot (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-1]);$$

$$I[k] = I[k-1] + \mu_I \cdot \varepsilon[k] \cdot \Gamma\{Y[k], \hat{a}_\Gamma[k]\} \cdot \varepsilon[k];$$

$$D[k] = D[k-1] + \mu_D \cdot \varepsilon[k] \cdot \Gamma\{Y[k], \hat{a}_\Gamma[k]\} \cdot (\varepsilon[k] - 2\varepsilon[k-1] + \varepsilon[k-2]).$$

Оцінку якості адаптивного регулювання з інтелектуальним прогнозуванням виконаємо шляхом моделювання.

У якості моделей ОК використовувалися: лінійна аперіодична ланка із запізненням (ПІТ), послідовно з'єднані аперіодична ланка із запізненням та безінерційна квадратична ланка (ПІТ2), відображення Ено в хаотичному режимі (ВЕХР) та відображення Ено при біфуркації режимів (ВЕБР).

Глибина прогнозу прийнята $n = 3$ такти, а глибина пам'яті – 4. У якості завдання (Set-point) використовувалася східчаста функція Хевісайда, а нестаціонарність ОК складала 20 % від номінальних значень їх параметрів за час спостереження.

Для прогнозування стану ОК використовувався АФА (АФА) у вигляді каскадної НМ прямого поширення із логістичною функцією активації прихованого шару і лінійною функцією у вихідному шарі та кількістю нейронів у прихованому шарі – 47.

Моделювалась робота САК із самоналагоджувальним регулятором і прогнозуючою моделлю (СНС+АФА), САК з ПІД-регулятором і прогнозуючою моделлю (PID+АФА), а також адаптивна САК з ПІД-регулятором без АФА і відсутнім зворотним зв'язком 2 (див. рис. 12.8) та присутнім зворотним зв'язком 1 (PID).

Для розв'язання оптимізаційної задачі (12.65) в системі СНС+АФА використовувався метод золотого перетину, а в системах з ПІД-регулятором – симплекс-метод Нелдера-Міда (Nelder-Mead). Як міри точності прогнозування та регулювання використовувалися середньоквадратичні похибки \bar{e} і $\bar{\varepsilon}$ зі змістом (12.62) і (12.64), відповідно.

Результати регулювання ОК за допомогою адаптивних САК наведені на рис. 12.9 і 12.10, а значення похибок прогнозування та регулювання ОК – в табл. 12.1.

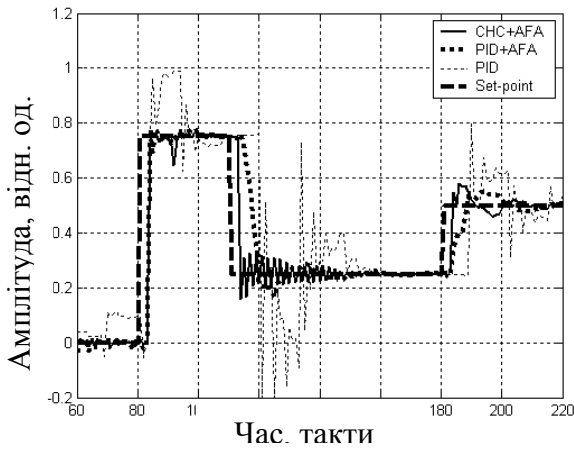
Таблиця 12.1 Похибки прогнозування та регулювання ОК

Об'єкт керування	Похибка прогнозування \bar{e} , од.		Похибка регулювання $\bar{\epsilon}$, од.		
	СНС+AFA	PID+AFA	СНС+AFA	PID+AFA	PID
ПТ2	0,018	0,021	0,037	0,046	0,127
ВЕХР	0,008	0,031	0,031	0,049	0,178
ВЕБР	0,022	0,022	0,019	0,024	0,067
ПТ	0,027	0,024	0,048	0,047	0,043

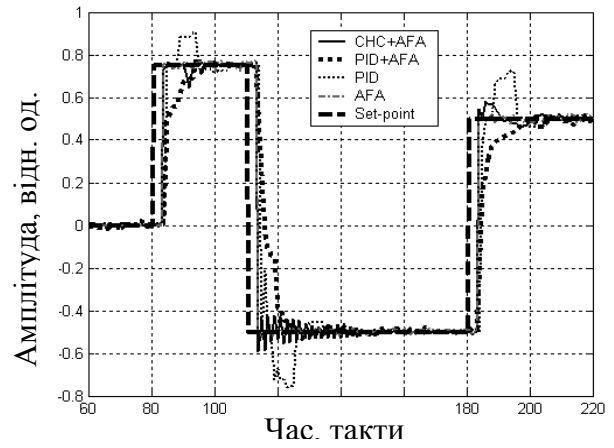
Аналіз отриманих результатів свідчить, що для нелінійних ОК системи з прогнозуванням (СНС+AFA та PID+AFA) мають в 3...5 разів меншу похибку регулювання, ніж САК без прогнозування (PID). При цьому система СНС+AFA має вищу точність, ніж система PID+AFA, а система PID має перерегулювання більше 150 %. Для лінійного ОК ефективність розглянутих САК є порівняною.

12.3.2. Адаптивне керування за мінімумом узагальненої роботи.

Структура адаптивної системи оптимального керування (АСОК) наведена на рис. 12.11 і визначається принципом поділу (теоремию стохастичної еквівалентності). Відповідно до нього АСОК складається з оптимальної підсистеми оцінювання й ідентифікації та підсистеми оптимального керування, побудованої для умов точного виміру вектора стану і вектора параметрів, але при використанні оцінки цих величин (вихідних сигналів підсистеми оцінювання й ідентифікації).

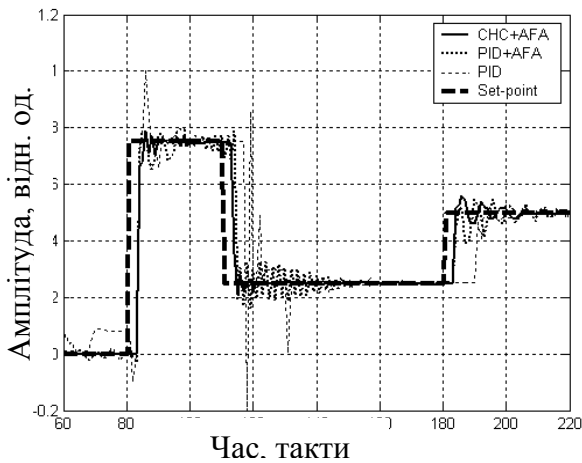


a

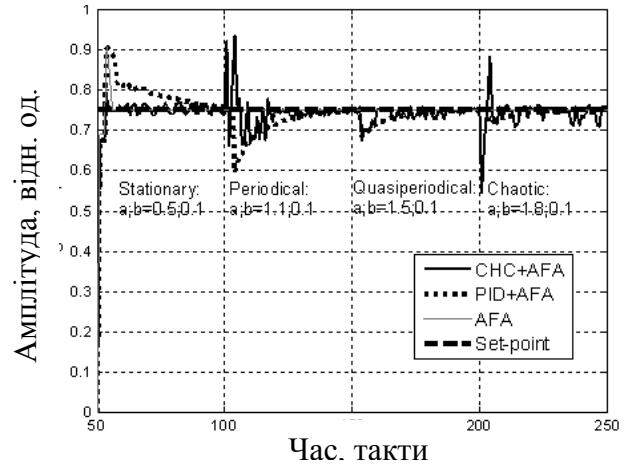


б

Рис. 12.9. Результати регулювання нелінійним ПТ2 (*a*) та лінійним ПТ (*б*) ОК



a



б

Рис. 12.10. Результати регулювання ОК у вигляді відображення Ено в хаотичному режимі (*a*) та при біфуркації режимів (*б*)

Керований процес в умовах впливу збурень w контролюється (спостерігається) за допомогою первинних вимірювальних перетворювачів (датчиків) з похибками вимірів ξ . Вектор сигналів спостереження надходить у підсистему оптимального оцінювання й ідентифікації, на виході якої формується оцінка вектора стану \hat{Z} , оцінка вектора параметрів \hat{a} (параметрична ідентифікація) й оцінка структури $\hat{\Phi}$ (структурна ідентифікація) математичної моделі керованого процесу.

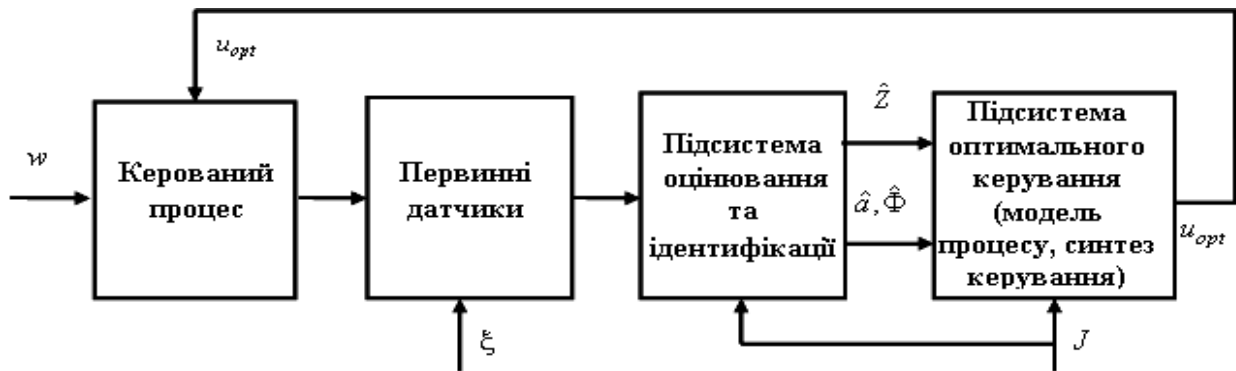


Рис 12.11. Загальна структура АСОК

Підсистема оптимального керування на основі моделі керованого процесу, поточної оцінки вектора стану і критерію оптимізації J (функціонала), що надходить від системи старшого рівня, формує оптимальне керування u_{opt} , яке впливає на керований процес.

АСОК реалізує адаптацію на основі поточного оцінювання стану й ідентифікації ОК, а також формування за їх результатами оптимального керування в процесі функціонування ОК. Згідно із класифікацією це сполучений синтез оптимального керування, який реалізується так званими універсальними САК. У них властивість універсальності забезпечується адаптацією оптимальних алгоритмів, заснованою на поточному автоматичному оцінюванні й ідентифікації ОК, а також довільним (у межах заданої структури) змістом ФУР.

Такі САК близькі за ефективністю до систем дуального керування (які складаються з фільтра Калмана-Б'юсі й оптимального регулятора), виграючи у них в питаннях реалізуємі (немає необхідності шукати рішення рівняння Ріккати).

Синтез оптимального керування здійснюється за стохастичним ФУР з адитивними функціями витрат на керування і дискретним часом:

$$J_{FR1} = E\{V_3(\hat{Y}[k_{j+1}]) + \sum_{k=k_j+n}^{k_{j+1}-1} Q_3(\hat{Y}[k], Y[k], k) +$$

$$+ K^{-1} \cdot \left\{ \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-n-1} U_3(u[k], k) + \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-n-1} U_3^*(u_{opt}[k], k) \right\}, \quad (12.72)$$

де E – математичне очікування; V_3 – термінальна функція кінцевого стану етапу керування (цільова функція); Q_3, U_3 – позитивно визначені функції витрат; U_3^* – позитивно визначена функція, що приймає мінімальне значення при $u = u_{opt}$; u_{opt} – шукане оптимальне керування, що приносить мінімум функціоналу; k_j, k_{j+1} – початкові такти послідовних етапів (циклів) керування; K – позитивна матриця заданих коефіцієнтів; n – глибина прогнозу; Y, \hat{Y} – вихід ОК та його оцінка.

Керування повинно здійснюватися з випередженням (глибиною прогнозу n) на час, більший суми часу чистого запізнювання в системі, а також часу пошуку і реалізації оптимального керування. Тоді виходом моделі ОК є оцінка прогнозу стану процесу глибиною $n \geq 1$ (задача ідентифікації):

$$\hat{Y}[k+n] = \Phi_{\hat{Y}} \{Y[k], u[k], w[k], \xi[k], a_{\hat{Y}}[k], k\}; \quad a_{\hat{Y}} \subset a. \quad (12.73)$$

де $\Phi_{\hat{Y}}$ – узагальнена функція (алгоритм) перетворення; $Y[k], u[k], w[k], \xi[k], a_{\hat{Y}}[k]$ – відповідно, вектори (матриці) виходу процесу, його керування, збурення, завад і параметрів до поточного часу k з відповідними глибинами пам'яті.

Вираз (12.73) припускає, що запізнювання існує тільки по виходу ОК. У загальному ж випадку система може мати різні запізнювання в різних каналах n_Z (збурення, керування і виходу). Тоді можливе прогнозування виходу ОК, наприклад, відповідно до виразу (12.73), аргументи якого оцінюються за допомогою каналних прогнозуючих фільтрів $\hat{Z}[k]$ (див. п.п. 11.5.1 та 12.2.2).

Слід зазначити, що у функціоналі (12.72) якість процесу (другий доданок) оцінюється на інтервалі $[k_j+n, k_{j+1}-1]$, а керування (третій й четвертий доданки) – на інтервалі $[k_j, k_{j+1}-n-1]$, що відповідає фізичному змісту задачі синтезу оптимального керування за прогнозуючими моделями (12.73).

Структурно-параметрична ідентифікація та оцінювання нелінійних динамічних ОК здійснюється відповідно до процедур, розглянутих в п.п. 11.3-11.4.

Навчання моделей здійснюється шляхом настроювання параметрів НМ у відповідності із функціоналом (12.72) (функцією витрат Q_3), наприклад, шляхом мінімізації норми різниці між модельними і реальними значеннями.

Для визначення (адаптації) вектора параметрів a моделі (12.73) (ідентифікація й оцінка) використовуються, наприклад, градієнтні алгоритми:

$$\hat{a}[k_{j+1}] = \hat{a}[k_j] - K_1 \cdot \partial / \partial \hat{a} \{Q_3(\hat{Y}[k_j], Y[k_j], k)\}^T,$$

де $\hat{a}[k_{j+1}]$ – оцінка вектора параметрів на новий цикл керування; K_1 – задана матриця коефіцієнтів,

Задача синтезу оптимального керування ОК за принципом мінімуму узагальненої роботи розв'язується відповідно до п. 12.2.2.

Нехай прогнозуючі моделі ОК виду (12.73) мають лінійно вхідне керування:

$$\hat{Y}[k+n] = \phi(x[k], \xi[k], a_\phi[k], k) + \psi(x[k], \xi[k], a_\psi[k], k) \cdot u[k], \quad (12.74)$$

де відповідно до (12.73) $\{Y[k], w[k]\} \subset \{x[k]\}$, $\{a_\phi, a_\psi\} \subset a_{\hat{Y}}$, $\{\phi, \psi\} \subset \Phi_{\hat{Y}}$.

Тоді дискретне рівняння Беллмана записується у виді

$$V_i(\hat{Y}[i+n]) = E\{Q_3(\hat{Y}[i+n], Y[i+n]) + V_{i+1}\{\phi(x[i]) + \psi(x[i]) \cdot u_{opt}[i]\} - \frac{\partial V_{i+1}^T}{\partial \hat{Y}[i+n+1]} \cdot \psi^T(x[i]) \cdot u_{opt}[i]\}, \quad (12.75)$$

де $i = k_{j+1} - n - 1, k_{j+1} - n - 2, \dots, k_j$. Тут для спрощення сприйняття в функціях Q_3, ϕ і ψ не наведені аргументи k, ξ, a_ϕ і a_ψ .

При граничній умові $V_{k_{j+1}}(\hat{Y}[k_{j+1}]) = V_3(\hat{Y}[k_{j+1}])$ рішення рекурентного рівняння (12.75) визначається відповідно до рівності

$$K^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial u_{opt}} U_3(u_{opt}[i]) = - \frac{\partial V_{i+1}^T}{\partial \hat{Y}[i+n+1]} \cdot \psi^T(x[i])$$

і, наприклад, при квадратичній функції витрат на керування дорівнює (гамільтоніан має єдиний мінімум при):

$$u_{opt}[i] = -K \cdot \frac{\partial V_{i+1}^T}{\partial \hat{Y}[i+n+1]} \cdot \psi^T(x[i]). \quad (12.76)$$

Алгоритмічна структура АСОК наведена на рис. 12.12 і містить наступні етапи:

1) оцінку поточного стану ОК в моменті початку чергового інтервалу керування (k_j) за допомогою каналних прогнозуючих фільтрів;

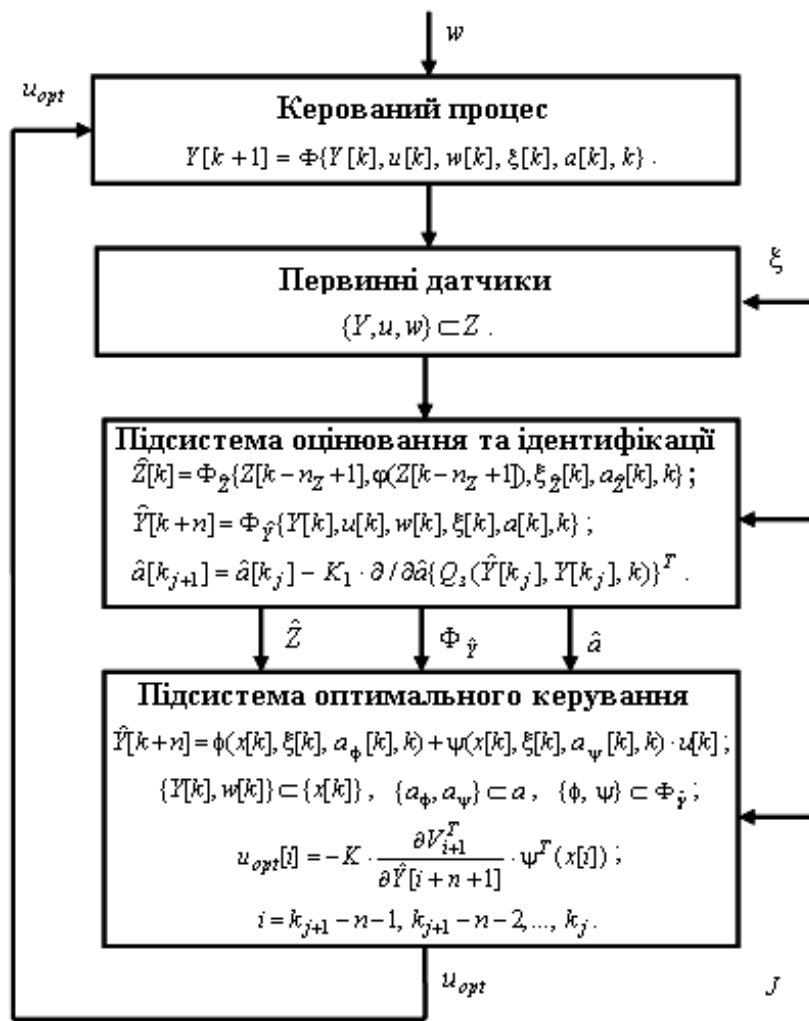


Рис. 12.12. Алгоритмічна структура АСОК за ФУР із прогнозуючою моделлю

2) ідентифікацію структури $\Phi_{\hat{Y}}$ та параметрів a моделі ОК (12.73);

3) прогнозування вільного руху ОК за моделлю (12.73) (у модифікації (12.74)) на заданому інтервалі $[k_j + n, k_{j+1} - 1]$ оптимізації керування;

4) обчислення градієнта цільової функції $V_{i+1}(\hat{Y}[i+n+1])$ для поточного стану ОК і формування сигналу оптимального керування згідно (12.76).

Тобто, відповідно до принципу поділу в АСОК на кожному циклі керування послідовно вирішуються оптимізаційні задачі:

1) визначення оптимальних (у сенсі обраного функціонала оцінки й ідентифікації) коефіцієнтів a і структури Φ моделей (12.73);

2) синтез оптимального керування (у сенсі обраного функціонала керування) за адаптованими у п.1 моделями.

Адаптація є різновидом керування і полягає в цілеспрямованій зміні керуючих факторів системи для підтримки екстремуму заданого функціонала. У нашому випадку до множини керуючих факторів відносяться: при параметричній адаптації – $\{a, u_{opt}\}$ і при структурно-параметричній адаптації – $\{a, \Phi, u_{opt}\}$, де $\{a_{\hat{z}}, a_{\hat{y}}\} \subset a$ і $\{\Phi_{\hat{z}}, \Phi_{\hat{y}}\} \subset \Phi$.

12.3.3. Ієрархічне адаптивне керування за синергетичним принципом.

Структура ієрархічної АСОК наведена на рис. 12.13 і складається з підсистеми оцінювання й ідентифікації та підсистеми оптимального керування, які утворюють перший (верхній) рівень керування, та підсистеми локального регулювання – другий (нижній) рівень керування.

Підсистема оптимального керування на основі моделі керованого процесу, поточної оцінки вектора стану і критерію керування J , що надходить від системи старшого рівня, формує оптимальне завдання на керування $u_{opt}^{зад}$ для підсистеми локального регулювання, яка впливає на керований процес v_{opt} .

Ієрархічна побудова САК доцільна для складних багатозв'язних ОК, що мають велику розмірність, оскільки дозволяє шляхом структурування загальної задачі керування на підзадачі спростити рішення й забезпечити еволюцію САК із уже наявними системами регулювання.

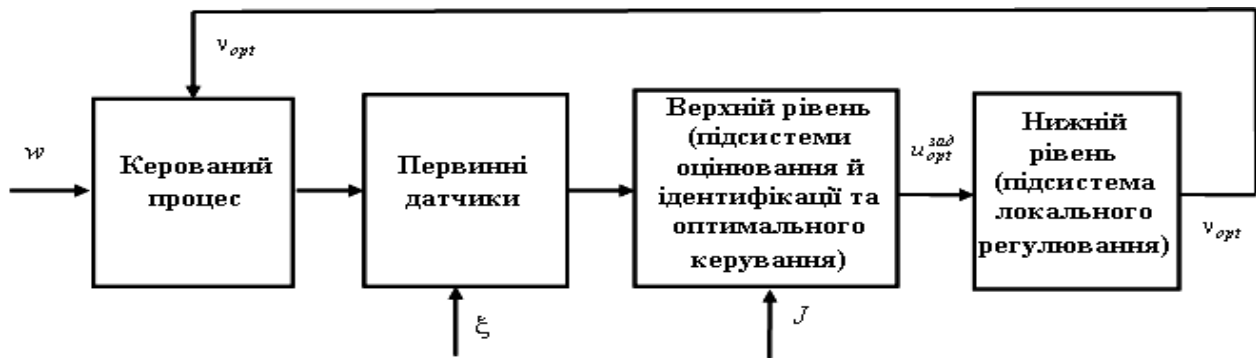


Рис 12.13. Загальна структура ієрархічної АСОК

Оцінювання та ідентифікація в ієрархічній АСОК виконуються аналогічно процедурам, розглянутим в п. 12.3.2.

Відповідно до п. 12.2.3, синергетичний синтез оптимального керування полягає у визначенні закону керування, що забезпечує зближення стану ОК (12.74) із бажаним режимом роботи (атрактором – цільовою макрозмінною):

$$\Psi[k] = \Psi(x[k]) = 0 \quad (12.77)$$

і наступний асимптотично стійкий рух ОК уздовж нього до початку координат фазового простору.

Відповідно до моделі ОК (12.74) основне функціональне рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \psi(x) \cdot u + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \phi(x) + T_n^{-1} \cdot \varphi(\Psi) = 0; T_n > 0$$

в дискретній формі має підродину стійких екстремалей виду:

$$\Psi[k+1] \cdot \psi(x[k]) \cdot u[k] + \Psi[k+1] \cdot \phi(x[k]) + T_\delta^{-1} \cdot \varphi(\Psi[k]) = 0; T_\delta > 1,$$

які визначають закон керування

$$u[k] = -\{\Psi[k+1] \cdot \psi(x[k])\}^{-1} \cdot \{\Psi[k+1] \cdot \phi(x[k]) + T_\delta^{-1} \cdot \varphi(\Psi[k])\}, \quad (12.78)$$

що доставляє мінімум супровідному функціоналу виду

$$J_{SR1} = E \left\{ \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-n-1} \{T_\delta^2 \cdot \Delta \Psi^2[k+1] + \varphi^2(\Psi[k])\} \right\}. \quad (12.79)$$

Тут E – математичне очікування; $\Delta\Psi[k+1] = (\Psi[k+1] - \Psi[k])/T$ – перша різниця; T – період дискретизації; T_n, T_∂ – позитивно визначені коефіцієнти; φ – диференційована функція, яка характеризує потрібну якість перехідних процесів ОК ($\varphi(0) = 0$), n – глибина прогнозу.

У функціоналі (12.79) якість процесу оцінюється на інтервалі $[k_j, k_{j+1} - n - 1]$, на якому формується керування (12.78), а прогнозування за моделями (12.73), (12.74) здійснюється на інтервалі $[k_j + n, k_{j+1} - 1]$.

Керування (12.78) забезпечує аперіодичність перехідних процесів в ОК із часом регулювання $(3...5) \cdot T_n$.

Синтез керування в адаптивних САК, що розглянуті в п. 12.2.1, полягає в адаптації коефіцієнтів моделі ОК по каналу регулювання \hat{Y}_v (наприклад, виду (12.60) чи (12.73)) за величиною її похибки, обчисленні прогнозу за адаптованою моделлю і визначенні за оптимальним завданням на керування u_{opt}^{zad} ($u[k]$ згідно (12.78)) регулюючого впливу v_{opt} , що потім реалізується на ОК:

$$v_{opt}[k] = \Phi_{CAK} \{u_{opt}^{zad}[k_j, k_{j+1} - n - 1], \hat{Y}_v[k + n_v]\}, \quad (12.80)$$

де $\hat{Y}_v[k + n_v]$ – оцінка прогнозу по каналу регулювання ОК глибиною n_v ; Φ_{CAK} – функція (алгоритм) синтезу закону регулювання адаптивної САК. Тут слід зазначити, що у загальному випадку термін циклу керування $[k_j, k_{j+1} - n - 1]$ багато більше терміну такту часу k .

Алгоритмічна структура ієрархічної АСОК за синергетичним принципом із прогнозуючою моделлю наведена на рис. 12.14 і містить наступні етапи:

- 1) оцінку поточного стану ОК в моменті початку чергового інтервалу керування (k_j) за допомогою каналних прогнозуючих фільтрів;
- 2) ідентифікацію структури $\Phi_{\hat{y}}$ та параметрів a моделі ОК (12.73);

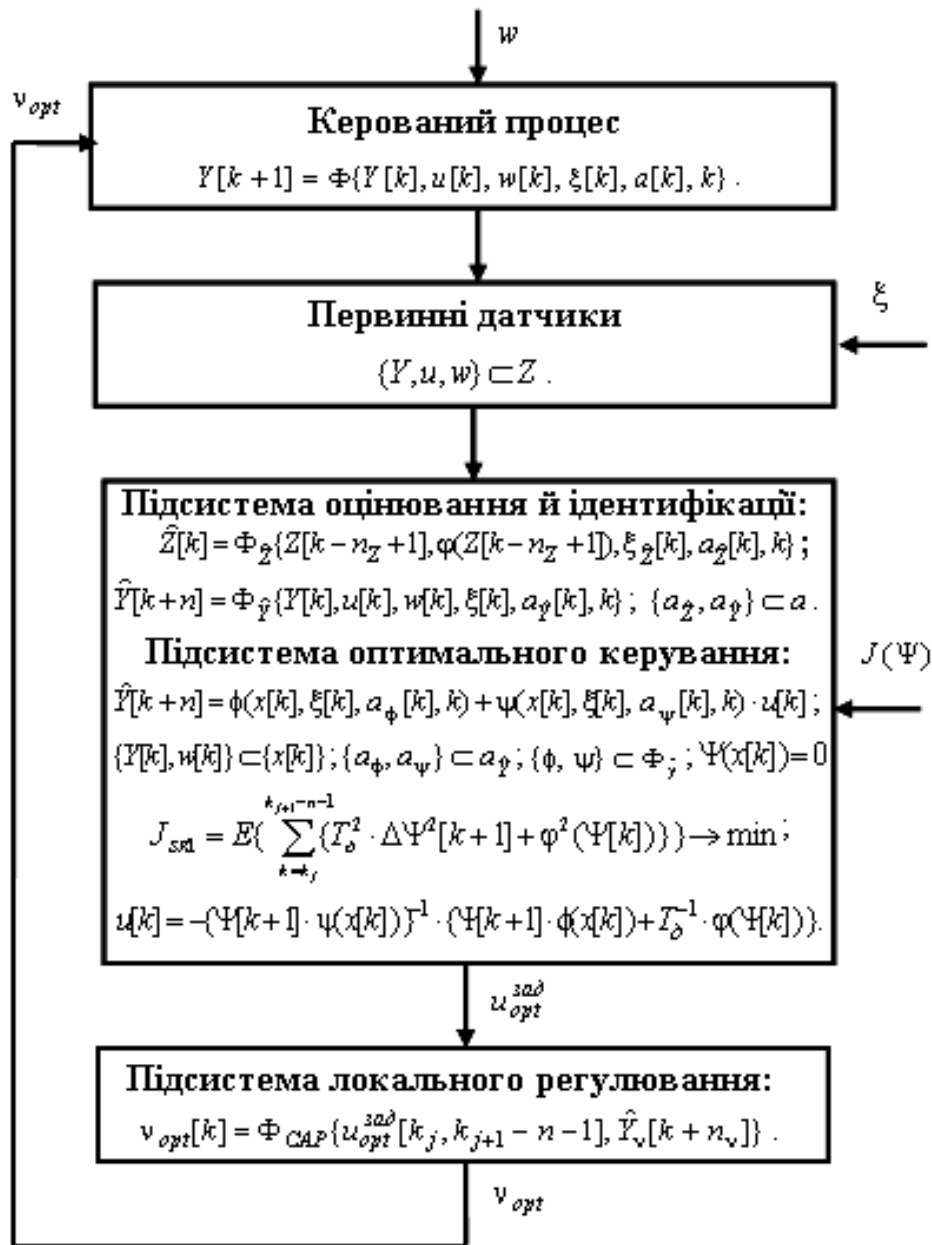


Рис. 12.14. Структура ієрархічної АСОК за синергетичним принципом із прогнозуючою моделлю

- 3) прогнозування вільного руху ОК за моделлю (12.73) (у модифікації (12.74)) на заданому інтервалі $[k_j + n, k_{j+1} - 1]$ оптимізації керування;
- 4) обчислення цільової макрозмінної $\Psi[k+1]$ для поточного стану ОК і формування сигналу оптимального керування згідно (12.78);
- 5) реалізацію на ОК у відповідності із оптимальним керуванням регулюючих впливів згідно (12.80).

Отже, в ієрархічній АСОК синтез оптимального керування за синергетичним принципом зводиться до визначення закону керування із залученням у реальному масштабі часу інформації про стан ОК до нового циклу керування і його майбутнього стану по прогнозуючій моделі ОК (12.74). Це забезпечує зближення стану ОК із бажаним режимом роботи (12.77) і наступний рух в ньому з мінімізацією супровідного функціонала (12.79) якості перехідних процесів на ковшкому інтервалі часу (циклі керування).

При цьому забезпечується асимптотична стійкість системи без пошуку рішень нелінійних динамічних рівнянь ОК (12.74). Визначене таким чином оптимальне керування являє собою завдання, що відпрацьовується локальним регулюванням (12.80) на ОК.

Контрольні запитання

1. Розкрийте основні поняття синергетики.
2. Сформулюйте постановку задачі синергетичного керування.
3. Розкрийте суть супроводжуваних оптимізуваних функціоналів.
4. Розкрийте суть метода АКАР.
5. В чому полягають проблеми синтезу і реалізації оптимального керування нелінійними об'єктами?
6. Наведіть рішення задачі синтезу оптимального керування за принципом мінімуму узагальненої роботи.
7. Наведіть рішення задачі синтезу оптимального керування за синергетичним принципом.
8. Які особливості адаптивного регулювання з прогнозуючою моделлю?
9. Розкрийте структуру системи адаптивного керування за мінімумом узагальненої роботи.
10. Розкрийте структуру системи ієрархічного адаптивного керування за синергетичним принципом.

Таблиця 6.3. Оптимізація лінійних систем з квадратичним критерієм якості за відсутності обмежень на значення керуючих функцій

№	Рівняння руху системи	Початкові і кінцеві умови	Критерій якості $J[\mathbf{u}]$	Оптимальний закон керування (у сенсі мінімуму $J[\mathbf{u}]$), $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*(t, \mathbf{x})$	Оптимальні значення критерію якості
1	$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$, $A(t)$ – матриця розмірності $n \times n$, $B(t)$ – матриця розмірності $n \times m$.	t_0 – задано, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ – задано, $t_0 \leq t \leq t_1$, t_1 – задано, $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ – вільно.	$J[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \mathbf{x}_1^T R_1 \mathbf{x}_1 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{x}^T Q(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T P(t) \mathbf{u}] dt$, $R_1, Q(t)$ – позитивно напіввизначені симетричні матриці розмірності $n \times n$; $P(t)$ – позитивна визначена симетрична матриця розмірності $m \times m$.	$\mathbf{u}^* = -P^{-1}(t)B^T(t)R(t)\mathbf{x}$, де $R(t)$ – рішення матричного рівняння Ріккати: $\dot{R}(t) = -R(t)A(t) - A(t)R(t) - Q(t) + R(t)B(t)P^{-1}(t)B^T(t)R(t)$, $R(t_1) = R_1$ (інтегрування від t_1 до t_0) або $\frac{d}{dt}(R^{-1}(t)) = AR^{-1} + R^{-1}A^T - BP^{-1}B^T + R^{-1}QR^{-1}$, $R^{-1}(t_1) = R_1^{-1}$.	$J^* = J_{\min} = V(t_0, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \times R(t_0) \mathbf{x}(t_0)$.
2	$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$; A, B – постійні матриці розмірності $n \times n$ і $n \times m$ відповідно; $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$.	$t_0 = 0$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ – задано, $0 \leq t \leq t_1$, t_1 – задано, $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$, \mathbf{x}_1 – вільно.	$J[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \mathbf{x}_1^T R_1 \mathbf{x}_1 + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} [\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T P \mathbf{u}] dt$, Q, R_1 – постійні позитивно напіввизначені симетричні матриці розмірності $n \times n$; P – постійна позитивно визначена симетрична матриця розмірності $m \times m$.	$\mathbf{u}^* = -K(t_1 - t)\mathbf{x}$, де $K(t_1 - t) = P^{-1}B^T R(t_1 - t)$; $R(t_1 - t)$ – рішення матричного рівняння Ріккати: $\frac{dR}{d\tau} = R(\tau)A + A^T R(\tau) + Q - R(\tau)BP^{-1}B^T R(\tau)$, $R(0) = R_1$, $\tau = t_1 - t$, $0 \leq \tau \leq t_1$.	$J^* = J_{\min} = V(t_0, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \times R(t_1 - t_0) \mathbf{x}(t_0)$; $t_0 = 0$.

3	$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$ A, B – постійні матриці розмірності $n \times n$ і $n \times m$, відповідно; $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$.	$t_0 = 0$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ – задано, $0 \leq t \leq t_1 = \infty$, $\mathbf{x}(t_1)$ – вільно.	$J[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T P \mathbf{u}] dt$, Q – постійна позитивна напіввизначена симетрична матриця розмірності $n \times n$; P – постійна позитивно визначена симетрична матриця розмірності $m \times m$.	$\mathbf{u}^* = -K\mathbf{x}$, де $K = P^{-1} B^T R_0$ – постійна матриця; R_0 – стале рішення матричного рівняння Ріккати, тобто $R_0 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau)$, де $\frac{dR}{d\tau} = RA + A^T R + Q - RBP^{-1} B^T R$; $R(0) = 0$, R_0 може бути також визначене з квадратного матричного алгебраїчного рівняння Ріккати $R_0 A + A^T R_0 + Q - R_0 B P^{-1} B^T R_0$; $R_0 = 0$, як його єдине позитивно визначене рішення.	$J^* = J_{\min} = V(t_0, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T R_0 \mathbf{x}_0$.
4	$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}$, де $A(t), B(t), \mathbf{x}, \mathbf{u}$ – матриці і вектори, що визначені в п. 1.	t_0 – задано, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ – задано, $0 \leq t \leq t_1$, t_1 – задано але $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$, \mathbf{x}_1 – вільно.	$J[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \mathbf{x}_1^T R_1 \mathbf{x}_1 + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} [\mathbf{x}^T, \mathbf{u}^T] \times \begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} dt$, де $Q - NP^{-1}N^T \geq 0$; $N(t)$ – матриця розмірності $n \times m$; $P(t)$ – позитивно визначена матриця розмірності $m \times m$; R_1 – див. п. 1.	$\mathbf{u}^* = -P^{-1}[B^T R + N^T] \mathbf{x}$, де $\dot{R} = -RA - A^T R + (RB + N)P^{-1} \times (N^T + B^T R) - Q$, $R(t_1) = R_1$.	
5	$\dot{\mathbf{x}} = (A - BP^{-1}N^T) \times \mathbf{x} + B\mathbf{u}$, де $A(t), B(t), \mathbf{x}, \mathbf{u}$ – матриці і вектори, що визначені в п. 1.	t_0 – задано, \mathbf{x}_0 – задано, $0 \leq t \leq t_1$, t_1 – задано але $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$,	$J[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \mathbf{x}_1^T R_1 \mathbf{x}_1 + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} [\mathbf{x}^T, \mathbf{u}^T] \times \begin{bmatrix} Q - NP^{-1}N^T & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \times$	$\mathbf{u}^* = -P^{-1} B^T R \mathbf{x} = \mathbf{u}_{(4)}^* + P^{-1} N^T \mathbf{x}$, де R і $\mathbf{u}_{(4)}^*$, що визначені в п. 4.	

		\mathbf{x}_1 – вільно	$\times \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} dt .$		
6	$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}$, де $A(t), B(t), \mathbf{x}, \mathbf{u}$ - матриці і векто- ри, визначені в п. 1.	t_0 – зада- но, \mathbf{x}_0 – задано, $t_0 \leq t \leq t_1$, t_1 – задано але $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$, \mathbf{x}_1 – вільно.	$J[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [(y(t) -$ $-M(t)\mathbf{x}^T Q(t)(y(t) -$ $-M(t)\mathbf{x}) +$ $+ \mathbf{u}^T P(t)\mathbf{u}] dt$, де $y(t)$ – задана функція (бажа- ний вхідний сиг- нал); $M(t)$ – матриця розмірності $n \times n$; $P(t), Q(t)$ – див. п. 2; $M(t)\mathbf{x}$ – отри- маний вихідний сигнал $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$.	$\mathbf{u}^* = -C(t)\mathbf{x} + \mathbf{h}(t)$, де $C = P^{-1} B^T R$; $\mathbf{h} = P^{-1} B^T \mathbf{g}$, а матриця $R(t)$ і вектор $\mathbf{g}(t)$ визначаються з рі- шень рівнянь: $\dot{R} = -RA - A^T R +$ $+ RBP^{-1} B^T R - M^T Q M$, $R(t_1) = 0$, $\dot{\mathbf{g}} = -(A^T - RBP^{-1} B^T)\mathbf{g} +$ $+ M^T Q \mathbf{y}$, $\mathbf{g}(t_1) = 0$.	
7	$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} +$ $+ B(t)\mathbf{u} + \mathbf{f}(t)$, де $\mathbf{f}(t)$ – відомий n -мірний вектор; $A(t), B(t), \mathbf{x}, \mathbf{u}$ - матриці і векто- ри, визначені в п. 1.	t_0 – задано, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ – задано, $t_0 \leq t \leq t_1$, t_1 – задано але $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ – вільно.	$J[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \mathbf{x}_1^T R_1 \mathbf{x}_1 +$ $+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{x}^T Q(t)\mathbf{x} +$ $+ \mathbf{u}^T P(t)\mathbf{u}] dt$, $R_1, Q(t), P(t)$ – див. п. 1.	$\mathbf{u}^* = -P^{-1} B^T (R\mathbf{x} + \mathbf{w})$, де $\dot{R} = -RA - A^T R - Q +$ $+ RBP^{-1} B^T R$, $R(t_1) = R_1$ $\dot{\mathbf{w}} = (RBP^{-1} B^T - A^T)\mathbf{w} - R\mathbf{f}$ $\mathbf{w}(t_1) = 0$.	
8	$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}$, де $A(t), B(t), \mathbf{x}, \mathbf{u}$ - матриці і век- тори, визначені в п. 1.	t_0 – задано, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ – задано, $t_0 \leq t \leq t_1$, t_1 – задано але $M\mathbf{x}(t_1) = \phi_1$, M – мат- риця ($q \times n$); ϕ_1 – зада- ний q – мі- рний век- тор $q \leq n$.	$J[\mathbf{u}] =$ $= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{x}^T Q(t)\mathbf{x} +$ $+ 2\mathbf{x}^T N(t)\mathbf{u} +$ $+ \mathbf{u}^T P(t)\mathbf{u}] dt +$ $+ \frac{1}{2} \mathbf{x}_1^T R_1 \mathbf{x}_1$, $Q(t), N(t), P(t), R_1$ – див. п. 1.	$\mathbf{u}^* = -P^{-1} [N^T + B^T \times$ $\times (R - FG^{-1} F^T)] \mathbf{x} -$ $- P^{-1} B^T F G^{-1} \phi_1$ де $\dot{R} = -RA - A^T R - Q +$ $+ (RB + N) P^{-1} (N^T + B^T R)$ $R(t_1) = R_1$, $\dot{F} = -[A^T - (RB +$ $N) P^{-1} B^T] F$, $F(t_1) = M^T$, $\dot{G} = F^T B P^{-1} B^T F$, $G(t_1) = 0$.	$J^* = J_{\min} =$ $= V(t_0, \mathbf{x}_0) =$ $= \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T (R(t_0) -$ $- F(t) G^{-1}(t) \times$ $\times F^T(t)) \mathbf{x}_0 +$ $+ (F G^{-1} \phi_1) \times$ $\times \mathbf{x}_0 - \frac{1}{2} \phi_1^T G^{-1}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Адаптивные фильтры / Под ред. К.Ф. Коузэна и П.М. Гранта. – М.: Мир, 1988. – 392 с.
2. Ажогин В.В. Методы фильтрации и управления стохастическими процессами с распределенными параметрами / В.В. Ажогин, М.З. Згуровский, Ю.С. Корбич – К.: Вища школа, 1988. – 446 с.
3. Беллман Р. Некоторые вопросы математической теории процессов управления / Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс. – М.: Иностранная литература, 1962. – 354 с.
4. Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом / В.Н. Буков. – М.: Наука, 1987. – 288 с.
5. Волкова В.Н. Основы теории систем и системного анализа : учебник для вузов / В.Н. Волкова, А.А. Денисов. – 3-е изд. – СПб. : Изд-во СПбГТУ, 2003. – 346 с.
6. Воронов, А.А. Основы теории автоматического управления / А.А. Воронов. – М. : Энергия, 1980. – Т. 1. – 456 с.
7. Егоренков Д.Л. Основы математического моделирование / Д.Л. Егоренков, А.Л. Фрадков, В.Ю. Харламов. – СПб: Солон, 1994. – 186 с.
8. Интеллектуальные системы автоматического управления / под. ред. И. М. Макарова, В. М. Лохина. – М. : Физматлит, 2001. – 425 с.
9. Колесников А.А. Синергетическая теория управления / А.А. Колесников. – Таганрог: ТРТУ, М.: Энергоатомиздат, 1994. – 344 с.
10. Красовский А.А. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами / А.А. Красовский, В.Н. Буков, В.С. Шендрик. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
11. Кузнецов С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов. – М.: Физматлит, 2002. – 296 с.
12. Лапа В.Г. Методы предсказания и предсказывающие системы / В.Г. Лапа. – К.: Вища школа, 1980. – 183 с.

13. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов / А.М. Летов // Автоматика и телемеханика. – I. –1960. – № 4. – С. 436-441; II. –1960. – № 5. – С. 561-568; III. –1960. – № 6. – С. 661-665; IV. –1961. – № 4. – С. 425-435; V. –1962. – № 11. – С. 1405-1413.
14. Льюнг Л. Идентификация систем: теория для пользователя / Л. Льюнг. – М.: Наука, 1991. – 400 с.
15. Мита Ц. Введение в цифровое управление: Пер. с японск. / Ц. Мита, С. Хара, Р. Кондо. – М.: Мир, 1994. – 256 с.
16. Растрингин Л.А. Адаптация сложных систем / Л.А. Растрингин. – Рига: Зинатне, 1981. – 375 с.
17. Ротштейн А. П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети / А. П. Ротштейн. – Винница: «УНІВЕРСУМ-Вінниця», 1999. – 320 с.
18. Современная прикладная теория управления: Синергетический подход в теории управления / Под ред. А.А.Колесникова. – Таганрог: Изд. ТРТУ, 2000. – Ч. II. – 559 с.
19. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
20. Теория систем и методы системного анализа в управлении и связи / В.Н. Волкова, В.А. Воронков, А.А. Денисов и др. – М. : Радио и связь, 1983. – 248 с.
21. Теория управления. Терминология. – М.: Наука, 1988. – Вып. 107. – 56 с.
22. Терехов В. А. Нейросетевые системы управления / В. А. Терехов, Д. В. Ефимов, И. Ю. Тюкин. – М. : ИПРЖР, 2002. – Кн. 8. – 650 с.
23. Федер Е. Фракталы / Е. Федер. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
24. Хакен Г. Информация и самоорганизация / Г. Хакен. — М.: Мир, 1991. – 432 с.
25. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение / Г. Шустер. – М.: Мир, 1988. – 256 с.

Навчальне видання

Корнієнко Валерій Іванович
Гусєв Олександр Юрійович
Герасіна Олександра Володимирівна
Щокін Вадим Петрович

ТЕОРІЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Підручник

Видано в редакції авторів

Підп. до друку 21.04.2017. Формат 30x42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 21,0.
Обл.-вид. акр.21,0. Тираж 120 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видруковано
у Державному вищому навчальному закладі
«Національний гірничий університет».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК №1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19.