МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

А. Б. Телейко, Р. К. Чорней

Математико-статистичні методи в соціології та психології

Навчальний посібник

Київ 2007

ББК 60.5в6я73
Т31

Рецензенти: *П. С. Кнопов*, д-р фіз.-мат. наук, проф.
О. М. Іксанов, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом (протокол № 3 від 25.03.03)

Телейко А. Б.
Т31 Математико-статистичні методи в соціології та психології : Навч. посіб. / А. Б. Телейко, Р. К. Чорней. — К. : МАУП, 2007. — 424 с.—Бібліогр. : с. 411–412 .

ISBN 978-966-608-728-0

У навчальному посібнику викладено основні теоретичні положення, принципи математико-статистичних досліджень і напрями розвитку сучасних математико-статистичних методів у соціології та психології. Особливу увагу приділено унаочненню матеріалу.

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямами "Соціологія" та "Психологія", і для всіх, хто займається соціологічними чи психологічними дослідженнями.

ББК 60.5в6я73 +88в6я73

ISBN 978-966-608-728-0

Переднє слово

Існують усталені твердження про поділ усіх наук на дві великі групи — природничі та гуманітарні. Узвичаїлась також думка про те, що одні люди легко сприймають природничі науки, а інші схильні до гуманітарних наук. Хоча відомо багато прикладів щодо історичних постатей, які спростовують ці твердження й думки.

На думку авторів, з природничих наук “найприродничішою” є математика, а з гуманітарних “найгуманітарнішою” — філософія. Видається, ніби філософ не може цікавитись математикою, а математик — філософією. Проте й математик, і філософ помітять з-поміж попередників одні й ті самі прізвища: Рене Декарт, Готфрід Лейбніц, Ісаак Ньютон, Блез Паскаль та ін. Відомо й багато інших вчених, чиї “природничі” та “гуманітарні” здібності гармонійно поєднувалися. Поетами були математик П’єр Ферма і хімік Михайло Ломоносов, художником — математик та інженер Леонардо да Вінчі, письменником — математик Льюїс Керролл. Визнаний “король” математики Карл Гаус знав усі класичні європейські мови. До 19 років він вагався, чому присвятити життя — філології чи математиці.

Чому ж все таки загальноприйнято протиставляти природничі й гуманітарні науки? Доводиться визнати, що існує кілька причин. Переважна їх більшість криється в минулому. Річ у тім, що до XIX ст. включно математика, фізика, хімія й інші природничі науки, з одного боку, і філософія, соціально-політичні, соціально-економічні та інші гуманітарні науки — з іншого розвивалися здебільшого окремо.

Лише іноді гуманітарні науки брали “на озброєння” окремі популярні “природничі” відкриття.

Проте у XX ст. ситуація змінилася. Природничі науки, а насамперед математика, почали масований наступ на гуманітарні. Першою “постраждала” економіка. До середини минулого століття в економіці виокремилося кілька дисциплін, які інтенсивно й ефективно почали застосовувати математичні методи. Наступною “жертвою” стала соціологія. У повоєнні роки в соціологію було привнесено низку математичних методів, які вже застосовувалися в економічних науках.

Відомо багато вчених, які привнесли математичні методи в соціально-економічні науки. Серед них є й лауреати Нобелівської премії, зокрема Рагнар Фріш, Пол Самюельсон, Джон Хікс, КеннетЕрроу, Леонід Канторович, Бертін Фрідмен, Тьяллінг Купманс, Бертін Олін, Герберт Саймон, Джерард Дебре, Амартія Сен.

У сучасних “гуманітарних” науках математика використовується доволі ефективно. Існують навіть “математико-гуманітарні” дисципліни. Зокрема, в економіці — економетрія, дослідження операцій, мікроекономіка, фінансовий аналіз, актуарна математика, теорія прийняття рішень, теорія ігор, у соціології — кількісні методи соціологічних досліджень, математичні моделі соціальних процесів, теорія соціального вибору, у мовних науках — математична лінгвістика, у психології — статистичні дослідження та ін.

Сучасна наука вже вийшла за межі, коли для повноцінної дослідницької діяльності вченому-гуманітарію достатньо було глибоко знати “власну” галузь. Нині він повинен знати комплекс методів з багатьох інших галузей, у тому числі й природничих. Зокрема, він має бути до певної міри математиком. А для цього необхідно ознайомитись з основними математичними методами, що використовуються в “його” науці. Допомогти цьому й покликаний пропонований навчальний посібник.

У цьому посібнику не наводитиметься весь спектр математичних методів, які використовують вчені-гуманітарії. Розглянемо лише невеликий підрозділ математики — математичну статистику — і спробуємо описати її можливі застосування в нематематичній сфері.

Єдине узагальнення, якого зроблено спробу досягти в посібнику, полягає в такому. Існує дві важливі науки, які вивчають поведінку людини. На рівні суспільства — це соціологія, на індивідуальному рівні — психологія. Отже, спробуємо поєднати ці два напрями дослідження людини в контексті застосування одних і тих самих математико-статистичних методів. Одразу зауважимо, що це поєднання доволі умовне.

З одного боку, у соціологічному дослідженні на відміну від психологічного частіше вдається отримати репрезентативну вибірку. З іншого боку, типові задачі, які доводиться розв'язувати психологам та соціологам, дещо різняться. Крім того, психологи, застосовуючи статистичні методи, часто змушені нехтувати деякими умовами, які формально повинні виконуватись. Усе це вносить деяку специфіку у використання математико-статистичних методів у цих галузях.

Якою мірою авторам вдалося розв'язати поставлене завдання — вирішувати читачам.

Зауважимо також, що оскільки цей посібник призначений суто для соціологів та психологів, зроблено спробу максимально адаптувати його саме для цієї читацької аудиторії. Тут не наводиться багато формул і жодного доведення. Крім того, кожне поняття, кожний метод проілюстрований великою кількістю прикладів і наочних задач.

В основу посібника покладено розширені курси лекцій з дисциплін "Математико-статистичні методи в соціології" та "Математико-статистичні методи у психології", які читалися авторами для студентів напрямів "Соціологія" та "Психологія" Міжрегіональної Академії управління персоналом. Посібник стане у пригоді й тим, хто опановує курс "Кількісні методи соціологічних досліджень", призначений для студентів освітньо-кваліфікаційних рівнів бакалавра і магістра низки українських вищих навчальних закладів.

Вступ

Для дослідження поведінки людини використовують багато різних математичних методів. У переважній більшості сучасних практичних і наукових літературних джерел соціально-психологічного напряму для аналізу досліджуваних проблем застосовують різні розділи математики, часом надто абстрактні. А один розділ — математичну статистику — використовують найчастіше.

Інтенсивне застосування в соціально-психологічних науках методів математичної статистики пов'язано насамперед з природою поведінки людини. Поведінку людини неможливо описати достеменно точно, вона не детермінована. Людина не повною мірою передбачувана у вчинках як на індивідуальному, так і на глобальному суспільному рівні.

Отже, кожна особа унікально індивідуальна. Не існує двох ідентичних людей. Тому, намагаючись описати найважливіші властивості, притаманні певній групі людей, необхідно знайти й виокремити такі їх характеристики, які найчастіше виявляються у групі.

З огляду на це поведінку людини і суспільства зазвичай описують за допомогою ймовірнісних підходів. Закономірності стохастичної природи виявляються в багатьох аспектах індивідуального та суспільного життя. А математична статистика забезпечує методи аналізу сукупностей даних ймовірнісної природи.

Розглянемо основні методи математичної статистики, які застосовуються в соціології та психології. При цьому акцентуватимемо увагу на практичних аспектах застосування цих методів, нехтуючи часом теоретичним обґрунтуванням.

Структурно посібник складається із семи розділів, які формують основну його частину, і двох додатків. Найважливіші поняття подано у вигляді окремих означень, а основні теоретичні результати, що використовуються, — у вигляді теорем. Для зручності в кінці посібника наведено термінологічний словник з короткими поясненнями до всіх понять, які вивчаються, і предметний покажчик.

У розділі 1 наведено основні умовні позначення, найважливіші означення основних об'єктів дослідження математичної статистики з численними прикладами.

У розділі 2 описано найважливіші статистичні характеристики сукупностей даних і методи їх безпосереднього знаходження. Зокрема, наведено поняття пропорції, усереднені показники, міри розсіювання сукупностей даних, частотні розподіли даних та їх використання.

Основні статистичні розподіли та їх властивості розглянуто в розділі 3. Цей розділ має переважно допоміжний характер і потрібний для ґрунтовнішого пояснення статистичних методів. Серед наведених результатів у практиці найширше застосовують процедури рівноміризації шкал.

Розділ 4 присвячений вибірковому дослідженню. Тут пояснено, для чого використовують вибіркову процедуру, наведено методи формування і основні принципи аналізу вибірок. Крім того, висвітлено основні вибіркові розподіли. Викладена в цьому розділі інформація розвивається в подальших розділах.

У розділі 5 розкрито теорію оцінювання параметрів генеральної сукупності. Зокрема, проаналізовано властивості точкових оцінок параметрів і детально розглянуто найважливіші точкові оцінки. Основне прикладне навантаження розділу припадає на частину, де вивчаються інтервальні оцінки параметрів. Розглянуто низку стандартних задач інтервального оцінювання, а також методи оцінювання мінімального обсягу вибірки, необхідного для забезпечення заданої точності дослідження.

Найважливіші статистичні критерії та приклади їх застосування до розв'язування завдань тестування гіпотез наведено в розділі 6.

Тут висвітлено кілька класичних практичних проблем, для дослідження яких використовують процедуру перевірки гіпотез. Зокрема, проаналізовано проблеми порівняння ознак, розпізнавання зсувів, перевірки узгодженості розподілів, а також проблему аналізу зміни ознаки під впливом контрольованих умов.

У розділі 7 наведено основи регресійно-кореляційного аналізу. Показано, як перевірити наявність лінійної та криволінійної кореляцій між ознаками. Розглянуто також метод Спірмена аналізу кореляції між нечисловими ознаками.

Кожний розділ завершується висновками з переліком ключових понять розділу, вправами та дослідницьким проектом.

У додатках наведено допоміжну інформацію: таблиці основних статистичних розподілів, процедури генерування випадкових значень та термінологічний словник.

Насамкінець подано список літературних джерел, якими можна скористатися для вивчення різноманітних питань і проблем з розглядуваної тематики.

Наведемо кілька рекомендацій щодо того, як читати поданий у посібнику матеріал. Звісно, для якнайповнішого пізнання методів статистичного аналізу краще опрацювати матеріал повністю. Разом з тим підходи до роботи можуть різнитися для психолога і соціолога. Зокрема, для студента-соціолога рекомендується більше уваги приділити розділам 1–5. Саме в розділі 5 наведено методи, які найчастіше використовують для прикладного соціологічного дослідження. При подальшому вивченні рекомендуємо ознайомитись з підрозділом 6.1 та розділом 7.

Студенту-психологу, на наш погляд, варто опрацювати матеріал розділів 1, 2, 6, підрозділів 3.1, 3.2, 4.1, 4.2. При подальшому вивченні психологу варто ознайомитися з підрозділами 7.1 та 7.2.

Зауважимо також, що в посібнику наведено багато прикладів, які детально ілюструють кожне нове поняття та кожний розглянутий метод з урахуванням специфіки як соціологічного, так і психологічного дослідження. Числові дані прикладів не обов'язково відповідають реальним ситуаціям.

Розділ 1

Основні символьні позначення, домовленості, означення і приклади об'єктів дослідження математичної статистики

Насамперед наведемо основні символьні позначення, які використовуватимемо далі:

$+, -$	—	операції додавання та віднімання
$\cdot, \times$	—	операція множення
$/$	—	операція ділення
$=$	—	дорівнює

$\approx$	—	приблизно дорівнює
$\sim$	—	поводиться подібно чомусь
X^2	—	верхній індекс означає піднесення до степеня
$(a;b)$	—	інтервал значень, які лежать між числами a та b
$(a;b]$	—	інтервал значень, більших від числа a і не менших від числа b
$\in$	—	символ належності (наприклад, $x \in (1;8)$ означає, що $x > 1$ і $x < 8$)
X, Y	—	великими латинськими літерами позначаються ознаки
X_i, Y_i	—	великими латинськими літерами з нижнім індексом позначаються елементи сукупності
$\lvert x \rvert$	—	абсолютне значення числа x
$[x]$	—	операція округлення числа x до найближчого меншого цілого
lg, ln	—	логарифми десятковий та натуральний
∞	—	символ нескінченності

1.1. Сукупності

У прикладному соціологічному або психологічному дослідженні часто вивчають властивості певних великих або малих груп людей, намагаючись встановити характерні для них властивості та закономірності. Іншими словами, одним з основних об'єктів аналізу в соціології та психології є сукупності людей.

Приклад 1.1.1. У соціологічних дослідженнях часто вивчають загальну чисельність населення певної країни, сукупності всіх сімей у країні, усіх дорослих громадян, усіх підлітків, усіх жінок, усіх громадян з вищою освітою тощо.

Приклад 1.1.2. Психолог часто досліджує сукупності вчителів початкових класів, дітей середнього шкільного віку, людей, схильних до алкоголізму, хворих на шизофренію тощо.

Отже, центральним поняттям математичної статистики є сукупність.

Означення 1.1. Під *сукупністю*, або *статистичною сукупністю*, розуміється певний набір (математики кажуть множину) об'єктів.

Природа об'єктів сукупності може бути довільною. Зазвичай вважають, що об'єкти мають подібні властивості. У цьому разі йдеться про їх однорідність. Об'єктами сукупності можуть бути люди, країни, будівлі, числові значення тощо.

Означення 1.2. Кількість об'єктів у сукупності називають її *обсягом.*

Як правило, статистичні сукупності великі за обсягом, тобто складаються з великої кількості об'єктів. Повне дослідження таких сукупностей надзвичайно складне, потребує багато матеріальних, людських та часових ресурсів. Тому у статистиці замість повного дослідження сукупності намагаються виявити її основні властивості та закономірності.

1.2. Ознаки

Досліджуючи сукупність, виокремлюють одну або кілька властивостей її об'єктів і статистичний аналіз сукупності зводять до аналізу цих властивостей.

Означення 1.3. Досліджувані властивості об'єктів сукупності називають її *ознаками*.

Іншими словами, у статистиці вивчають не безпосередньо сукупності, а ознаки їх об'єктів. Фактично, виділивши в окремий набір даних визначені для кожного об'єкта значення ознаки, отримаємо нову сукупність, а саме сукупність характеристик об'єктів за певною ознакою.

Приклад 1.2.1. При вивченні сукупності всіх дорослих громадян певної країни, як правило, становить інтерес певна інформація. Наприклад, рівень прибутків громадян, як вони проголосують на чергових виборах, працюють вони чи безробітні. Тоді йдеться про одну сукупність дорослих громадян країни і кілька сукупностей значень їх ознак. У розглядуваному прикладі маємо ознаки відповідно “рівень прибутку”, “політичне переконання” і “наявність постійної роботи”. А відповідні цим ознакам три сукупності сформовані невідомими значеннями прибутків громадян, прізвищами політичних лідерів, за яких вони планують голосувати, та словами “безробітний” і “працюючий”.

Приклад 1.2.2. Якщо психолог досліджує деяку експериментальну групу як сукупність людей, то для нього можуть становити інтерес, наприклад, такі ознаки: “рівень комунікативності”, “рівень невербального інтелекту”, “тип характеру”. Значення будь-якої з цих ознак для всіх членів групи і утворять нову сукупність. І саме таку сукупність їх характеристик вже вивчатиме дослідник.

На жаль, наведена ієрархія термінів (сукупність об’єктів та сукупності значень ознаки) дещо утруднена для використання. Тому скористаємося такою домовленістю.

Основна домовленість. Ототожнюватимемо поняття сукупності об’єктів і сукупності їх характеристик за деякою конкретною ознакою. Конкретний зміст поняття сукупності залежатиме від контексту дослідження, а саме від того, яка ознака вивчається.

Приклад 1.2.3. При дослідженні деякої характеристики сукупності, наприклад, рівня прибутків дорослих киян, під словосполученням “сукупність дорослих киян” розумітиметься сукупність значень їх прибутків.

Приклад 1.2.4. При вивченні рівня комунікативності в експериментальній групі під сукупністю членів групи розумітиметься сукупність їх рівнів комунікативності.

1.3. Шкали

У процесі статистичного аналізу дослідник вивчає деякі ознаки конкретної сукупності об’єктів. Значення ознаки об’єкта — це деяка його характеристика. Яку ж природу може мати ця характеристика? Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1.3.1. При дослідженні ознаки “рівень прибутків” для деякої сукупності індивідуумів значення цієї ознаки для конкретного індивідуума є числом, тобто має числову природу.

Приклад 1.3.2. Нехай при вивченні рівня тривожності в деякій групі його визначають за допомогою тесту. Припустимо, цей тест може охарактеризувати рівень тривожності опитаного одним з таких значень: “дуже низький”, “низький”, “середній”, “високий” та “дуже високий”. Як бачимо, у такому разі значення ознаки мають нечислову природу.

Зауважимо, що при цьому можна впорядкувати значення ознаки. Іншими словами, можна сказати, який рівень тривожності вищий, а який нижчий.

Приклад 1.3.3. При дослідженні рівня безробіття в певній сукупності громадян деякої країни потрібно застосувати опитування за ознакою “наявність роботи”. Ця ознака має два можливих значення: “безробітний” та “працюючий”. Ці значення нечислові. Мало того, неможливо встановити, яке з них більше. Іншими словами, їх можна впорядкувати лише на основі довільної домовленості.

Наведені приклади засвідчують, що природа значень ознак може бути різною. Для систематизації цього факту використовують такий підхід. Кажуть, що кожна ознака вимірюється за деякою шкалою.

Означення 1.4. *Шкала* — це сукупність усіх можливих значень ознаки.

За природою можливих значень розрізняють шкали кількох типів. Найпростішою є така класифікація шкал[1]:

- номінальні;
- порядкові;
- числові.

1.3.1. Номінальні шкали

Якщо всі можливі значення ознаки рівноправні, то кажуть, що ознака вимірюється за *номінальною* шкалою. Іншими словами, номі-

[1] Існують і складніші класифікації. Найчастіше числові шкали розбивають на кілька підшкал за природою числових значень ознаки.

нальна шкала складається з назв, які дають змогу лише розрізняти значення ознаки.

Раніше було розглянуто приклад ознаки "наявність роботи", що вимірюється за номінальною шкалою. Розглянемо ще кілька прикладів ознак, які вимірюються за номінальними шкалами.

Приклад 1.3.4. Нехай уряд країни проводить референдум з метою визначити думку громадськості з приводу приєднання країни до деякого військово-політичного блоку. Припустимо, кожний громадянин у своєму бюлетені може вибрати лише два варіанти: "я за приєднання" та "я проти приєднання". У результаті буде отримано ознаку "ставлення до вступу у блок", яка вимірюється за номінальною шкалою[1].

Приклад 1.3.5. На виборах президента кожному виборцеві пропонується відмітити одну з кандидатур у президенти. У цьому разі маємо ознаку, яка визначає бажання виборця обрати президентом уподобану кандидатуру. Ця ознака вимірюється за номінальною шкалою, яка може складатись з багатьох різних назв, а саме з кандидатур.

Приклад 1.3.6. У багатьох психологічних тестах передбачаються завдання, в яких потрібно вибрати один, наприклад, найулюбленіший з кількох кольорів або одну з кількох геометричних фігур. Сукупності відповідних кольорів чи фігур утворюють номінальні шкали, в яких вимірюється досліджувана ознака.

З позицій математики номінальні шкали незручні, з ними складно працювати. Річ у тім, що таку шкалу неможливо оцифрувати, оскільки всі її значення рівноправні. Єдиний спосіб статистично проаналізувати ознаку, яка вимірюється за номінальною шкалою, полягає в підліченні кількості об'єктів сукупності, які мають конкретне значення за нею. У наведених раніше прикладах можна було б полічити кількість людей, які за приєднання до блоку, кількість прихильників певного кандидата у президенти, кількість індивідуумів в експериментальній групі, яким подобається жовтий колір, тощо.

[1] Номінальну шкалу, яка має лише два значення, називають *дихотомічною*.

1.3.2. Порядкові шкали

Певною мірою зручніші від номінальних порядкові шкали. Під *порядковою*, або *ординальною*, розуміють шкалу, значення якої можна порівнювати. Отже, щодо порядкових шкал можна визначити, які її значення більші, а які менші. Раніше вже наводився приклад ознаки, яка вимірюється в порядковій шкалі, а саме “рівень тривожності”.

Приклад 1.3.7. Чи не найуживанішою порядковою шкалою є шкала оцінювання успішності студентів. Зазвичай вона складається з чотирьох значень[1]: “незадовільно”, “задовільно”, “добре” та “відмінно” [2]. Ці значення легко впорядкувати (власне їх ми і записали в порядку зростання).

Приклад 1.3.8. Нехай потрібно описати матеріальний рівень жителів деякого невеликого міста на основі лише даних про їх нерухомість. Для цього можна сформувати шкалу з таких значень: “не має власної квартири”, “має однокімнатну квартиру”, “власник двокімнатної квартири”, “має трикімнатну квартиру” та “власник квартири, де чотири або більше кімнат”. Отримана шкала є порядковою.

Про значення порядкової шкали можна лише сказати, які з них більші від інших. Проте неможливо визначити, наскільки одне значення перевищує інше. Скажімо, у прикладі 1.3.7 різниця рівня знань між оцінками “добре” та “відмінно” може бути більшою, ніж між оцінками “незадовільно” та “задовільно”.

[1] В українській школі нині використовують іншу, 12-бальну систему.

[2] Для зручності ці рівні шкали оцінок часто спрощено записують числами “2”, “3”, “4” та “5”. Проте ці числа позначають лише відповідні слова (оцінки). Різниця між оцінками “3” та “4” і “4” та “5” може бути різною. Мало того, кожний викладач має власну інтерпретацію цих оцінок, яка до того ж може різнитися за академічними групами.

Тому взагалі працювати з оцінками “2”, “3”, “4” та “5” як числами великою мірою некоректно. Скажімо, некоректно визначати середній бал у групі студентів.

Проте середню оцінку визначають часто і тому в подальшому викладі за традицією в деяких прикладах оцінки “2”, “3”, “4” та “5” трактуватимемо не як слова, а як числа.

На відміну від номінальних шкал порядкові можуть бути оцифровані, тобто порядкову шкалу можна перевести в числову. Для цього існує багато процедур. Одну з них розглянемо в п. 1.3.5.

1.3.3. Числові шкали

Найзручніші для статистичного дослідження ознаки, можливі значення яких мають числову природу, тобто є числами. Шкали, за якими вимірюються такі ознаки, називатимемо *числовими*[1]. Найчастіше у прикладних дослідженнях числові ознаки зустрічаються у фізичних або економічних моделях. При їх вивченні можна використовувати більше методів, ніж при аналізі ознак, які вимірюються за нечисловими шкалами.

Зауважимо, що будь-яка числова шкала автоматично є порядковою, тому що з будь-яких двох різних чисел можна визначити більше.

Важливо не плутати порядкові та числові шкали. Часто рівні порядкової шкали задають числами, скажімо, як у шкалі шкільних оцінок чи психологічних тестах. У таких випадках числа є синонімами значень порядкової шкали. У числових же шкалах значення вимірюються за певним еталоном.

Приклад 1.3.9. Зріст людини вимірюється в числовій шкалі. При цьому еталоном, наприклад, є 1 см. Так само за числовою шкалою вимірюється маса людини чи її заробітна плата.

Приклад 1.3.10. Відомо, що IQ — індекс інтелекту людини — вимірюється в балах, тобто в цілих числах. Здається, природа IQ-індексу є числовою. Проте це не так. Якщо IQ деякої людини дорівнює, наприклад, 115, це означає, що під час експериментального випробування протягом півгодини вона розв'язала 18 з 40 задач IQ-тесту. При цьому всі задачі різняться за складністю. Порівняння двох задач за складністю завжди є умовною процедурою. Можна сказати лише, що одна задача складніша від іншої (хоча для декого

[1] У літературі такі шкали часто називають *метричними* (див., наприклад, [9]).

вона може виявитись простішою). Але при цьому неможливо виміряти, якою мірою вона складніша. Іншими словами, еталонної задачі для IQ-тесту не існує.

Подібна ситуація з більшістю психологічних тестів. Як правило, вони всі мають не числову, а порядкову природу.

Відомо кілька спеціальних видів числових шкал. Опишемо деякі з них.

Дискретні та неперервні шкали

В основу поділу числових шкал на дискретні та неперервні покладено такий підхід. У точних науках розрізняють два "ідеальних" типи числових множин. Множини першого типу мають таку властивість "неперервності": між кожними двома числами у множині міститься ще хоча б одне число з цієї множини. Іншими словами, у "неперервній" множині немає порожніх проміжків між її елементами.

Інший тип становлять множини "дискретної" природи: кожний елемент множини має найближчих меншого та більшого "сусідів" і у проміжках між цим елементом та його сусідами немає інших значень множини.

Класичним прикладом "неперервної" множини є множина всіх чисел, а "дискретної" — множина цілих чисел.

Згідно з цим підходом числові шкали поділятимемо на два види:

- *дискретні*, в яких усі значення належать дискретній множині;
- *неперервні*, в яких усі значення належать неперервній множині.

Кількість дітей у сім'ї, кількість нещасних випадків на виробництві за певний період, кількість відвідин кінотеатрів людиною за рік — це все дискретні шкали. Прикладами неперервних шкал є фінансові величини, час, зріст.

Як правило, неперервні та дискретні ознаки моделюються різними ймовірнісними розподілами.

Інтервальні та пропорційні шкали

Як зазначалося раніше, характеристична властивість числових шкал полягає в тому, що вимірювання в них здійснюють, використовуючи еталонні значення. При цьому зазвичай деяке значення числової шкали вважається нульовим. Залежно від того, яким є це нульове значення — відносним чи абсолютним[1], числові шкали поділяють відповідно на *інтервальні* та *пропорційні*[2].

Принципова відмінність між цими шкалами полягає в тому, що за першими визначають, наскільки одне якесь значення перевищує інше, а за другими — у скільки разів.

Приклад 1.3.11. Температуру повітря вимірюють у градусах Цельсія. Ця шкала лише інтервальна. Якщо сьогодні температура повітря дорівнює 20 °C, а вчора вона становила 10 °C, то не можна сказати, що сьогодні вдвічі тепліше. Справді, якби за нуль було вибрано точку замерзання не води, а якоїсь іншої речовини, то числові значення температур вчора і сьогодні були б зовсім інші. Різниця між ними збереглася б, а відношення не збереглися б.

Приклад 1.3.12. Якщо на відміну від прикладу 1.3.11 вимірювати температуру у градусах Кельвіна, то отримаємо пропорційну шкалу. Справді, як відомо з фізики, існує найнижча можлива температура. Саме вона є абсолютним нулем у шкалі Кельвіна.

Приклад 1.3.13. Середньомісячні доходи людини вимірюються у пропорційній шкалі. Справді, найменшим доходом є нульовий. Але це спостерігається тоді, коли не йдеться про витрати людини.

Поряд з валовими надходженнями в економіці розглядають чисті прибутки. Зокрема, для людини — це доходи мінус витрати. Чисті прибутки можуть бути від'ємними, скажімо, у нефортунного картяра. Тому чистий прибуток вимірюється в інтервальній шкалі.

Поміркуємо ще й так. Про нульовий прибуток зазвичай йдеться тоді, коли немає жодних надходжень. Проте нульовим прибутком

[1] Нульове значення називають відносним, якщо шкала містить як від'ємні, так і додатні числа. Нульове значення абсолютне, якщо на шкалі немає від'ємних чисел.

[2] Пропорційні шкали часто називають шкалами рівних відношень (див., наприклад, [17]).

людини можна було б вважати ситуацію, коли її заробіток дорівнює, наприклад, вартості споживчого кошика. Тому нульова точка у шкалі прибутків доволі умовна, тобто відносна.

Приклад 1.3.14. Маса людини вимірюється за пропорційною шкалою. Справді, маса не може бути від'ємною. Тому серед осіб масою 50 і 80 кг друга важча, ніж перша, у $80/50 = 1{,}6$ раза.

Приклад 1.3.15. Якщо вимірювати час з моменту створення Всесвіту, то це буде пропорційна шкала. Якщо ж вимірювати час, наприклад, від Різдва Христового, то це буде інтервальна шкала.

У соціології та психології більшість числових шкал інтервальні.

Рівномірні шкали

Розглянемо такий приклад. Нехай досліджуватимемо рівень доходів членів конкретної сім'ї. Припустимо, бабуся і дідусь отримують пенсію розміром відповідно 50 і 100 ум. од., а мама і тато заробляють відповідно 1000 і 1050 ум. од. Зауважимо, що різниця між доходами дідуся і бабусі дорівнює різниці між доходами тата і мами й становить 50 ум. од.

Разом з тим мама і тато заробляють приблизно однаково (їх заробітні плати різняться приблизно на 5 %), а доходи дідуся вдвічі перевищують доходи бабусі.

Отже, при вимірюванні доходів з точністю до умовної одиниці для коректного порівняння доходів двох індивідуумів потрібно знати не тільки різницю між їхніми доходами, а й власне доходи.

Для того щоб співвідношення будь-яких двох значень залежало лише від різниці між ними[1], шкали рівноміризують за допомогою так званих процедур рівноміризації. Як правило, вони такі: множину значень початкової шкали, за якою вимірюється ознака, поділяють на кілька суцільних інтервалів не обов'язково однакового розміру. Потім кожному інтервалу призначають ціле число (номер) так, щоб номери сусідніх інтервалів відрізнялись на одиницю. Отримані номери інтервалів і утворюють нову шкалу. Наприклад, для останнього розглянутого випадку дослідження доходів сім'ї прибутки бабусі та

[1] Цю властивість називають *властивістю рівномірності шкали.*

дідуся могли б потрапити в різні інтервали (тобто розрізнялися новою шкалою), а мами і тата — в один (тобто не розрізнялися). Питання полягає лише в тому, як виконати цю процедуру, щоб забезпечити рівномірність. Такі процедури розглянемо в п. 3.3.2.

1.3.4. Якісні та кількісні ознаки

Отже, як тепер знаємо, існує три типи шкал: номінальні, порядкові та числові. При цьому порядкові шкали, як і числові, часто задаються числами. Принципова відмінність полягає в тому, що в порядковій шкалі числові значення лише впорядковують елементи сукупності, а в числовій вони мають усі властивості чисел. Іншими словами, їх можна додавати, віднімати тощо.

Цю відмінність покладено в основу таких означень. Ознаку називають *кількісною*, якщо арифметичні операції над нею не суперечать здоровому глузду. У противному разі ознаку називають *якісною*.

За такою класифікацією якісними називають ознаки, які вимірюються за номінальною або порядковою шкалою, а кількісними — ознаки, які вимірюються за числовою шкалою.

Наприклад, IQ — це якісна ознака людини, заробіток індивідуума — кількісна.

1.3.5. Ранжування

Часто у статистичному аналізі, наприклад, при порівнянні сукупностей даних, використовують процедуру *ранжування*. Ця процедура призначає значенням, які вимірюються принаймні за порядковою шкалою, певні *ранги*. При цьому ранги пам'ятають порядок значень, але забувають відстань між значеннями.

Опишемо цю процедуру. Нехай маємо деяку сукупність даних обсягом n. Впорядкуємо її за зростанням. Припустимо, одержано таку послідовність даних:

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{n-1}, X_n.$$

Можливі два випадки: ідеальний, коли всі значення в сукупності різні, і такий, коли деякі значення повторюються.

Ідеальний випадок. У ситуації, коли всі значення в сукупності різні, найменшому значенню (елементу) X_1 призначимо ранг 1, наступному за розміром елементу X_2 — ранг 2 і так до кінця. Найбільший елемент X_n матиме ранг n.

Випадок з повтореннями. У цій ситуації спочатку призначимо кожному елементу ранги так, ніби повторень немає. Назвемо ці ранги попередніми.

Впорядковані значення	X_1	X_2	X_3	$\ldots$	X_{n-1}	X_n
Попередні ранги	1	2	3	$\ldots$	$n-1$	n

Якщо деяке значення не має повторень, його попередній ранг і є рангом. Для однакових елементів попередні ранги потрібно модифікувати. Покажемо, як це зробити. Розглянемо деяку групу однакових значень (нехай решта даних у сукупності мають інші значення) з їх попередніми рангами.

Група однакових значень	X_i	X_{i+1}	$\ldots$	X_{i+k}
Попередні ранги	i	$i+1$	$\ldots$	$i+k$

Усім елементам цієї групи призначимо однаковий ранг, який дорівнює середньому значенню їх попередніх рангів:

$$\frac{i+(i+1)+\cdots+(i+k)}{k+1}.$$

Зауважимо, що значення цього виразу можна обчислити простіше. Воно дорівнює середньому значенню двох крайніх елементів групи, тобто

$$\frac{i+(i+k)}{2}.$$

Процедура ранжування не складна, а скоріше механічна. Проте дослідники, виконуючи ранжування вручну, часто помиляються. Для контролю правильності ранжування прийнято перевіряти таку властивість: якщо сукупність має обсяг n, то загальна сума рангів її елементів дорівнює

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Приклад 1.3.16. Нехай психолог за допомогою тесту оцінив рівень роздратованості у групі вчителів початкових класів за семибальною шкалою. Наведемо результати дослідження.

Номер учителя у списку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Рівень роздратованості	1	5	2	5	3	3	7	1	2	2	2	4	5	1

Проранжуємо цей список. Для цього запишемо послідовність рівнів роздратованості в порядку зростання

$$1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 7.$$

Призначимо цим значенням попередні ранги.

Рівень роздратованості	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4	5	5	5	7
Попередній ранг	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Після цього підправимо ранги в кожній підгрупі однакових значень. Для підгрупи елементів з рівнем 1 маємо попередні ранги $1, 2, 3$. Тому ранг елементів підгрупи дорівнює

$$\frac{1+3}{2} = 2.$$

Попередні ранги підгрупи з рівнем роздратованості 2 дорівнюють 4, 5, 6 та 7. Крайнім позиціям відповідають ранги 4 і 7. Отже, спільний ранг підгрупи дорівнює

$$\frac{4+7}{2} = 5{,}5.$$

Аналогічно знаходимо ранги підгруп з рівнями 3 і 5:

$$\frac{8+9}{2} = 8{,}5;$$
$$\frac{11+13}{2} = 12.$$

Оскільки рівні 4 і 7 мають лише по одному індивідууму, їх ранги збігаються з попередніми рангами відповідно 10 і 14.

Запишемо результати ранжування.

Рівень роздратованості	1	2	3	4	5	7
Ранг	2	5,5	8,5	10	12	14

Перевіримо правильність ранжування, враховуючи кількості повторень рангів:

$$\text{Сума рангів} = 2\cdot 3 + 5{,}5\cdot 4 + 8{,}5\cdot 2 + 10 + 12\cdot 3 + 14 = \\ = 6 + 22 + 17 + 10 + 36 + 14 = 105,$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{14(14+1)}{2} = 7\cdot 15 = 105.$$

Оскільки контрольна рівність

$$\text{Сума рангів} = \frac{n(n+1)}{2}$$

правильна, маємо всі підстави вважати, що ранжування було здійснено без помилок.

Остаточні результати ранжування зведемо в таблицю.

Номер учителя у списку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Рівень роздратованості	1	5	2	5	3	3	7	1	2	2	2	4	5	1
Ранг	2	12	5,5	12	8,5	8,5	14	2	5,5	5,5	5,5	10	12	2

Висновки

У прикладних соціологічних та психологічних дослідженнях часто застосовують методи математичної статистики. При цьому основними об'єктами, що вивчаються, є сукупності. Кожна сукупність складається з кількох елементів, які мають зазвичай однорідну природу.

Властивості елементів сукупності називають їх ознаками. Кожна ознака може приймати кілька значень. При вивченні деякої ознаки елементів сукупності її значення для всіх елементів утворюють нову сукупність, а саме сукупність даних. Фактично математична статистика вивчає методи аналізу загальних характеристик сукупностей даних.

Для зручності викладу і спрощення термінології поняття “сукупність об’єктів” та “сукупність даних” вважатимемо тотожними.

Властивості сукупностей вивчають різними методами математичної статистики. Найпринциповішим фактором для можливості застосування певного статистичного методу при дослідженні конкретної сукупності даних є найзагальніші характеристики цих даних, які визначаються можливими значеннями ознаки сукупності.

Можливі значення ознаки називають її *шкалою вимірювання.* Існує кілька типів і класифікацій шкал, і саме від типу шкали залежить можливість (або неможливість) використання конкретного статистичного методу.

Ключові поняття

Обсяг сукупності
Ознаки:
- кількісна
- якісна

Ранг
Ранжування
Сукупність

Шкали:
- дискретна
- дихотомічна
- інтервальна
- неперервна
- номінальна
- порядкова
- пропорційна
- рівномірна
- числова

Вправи

1. Наведіть приклад ознаки, яка вимірюється за номінальною непорядковою шкалою з трьох значень і реально застосовується у психології.

2. Припустимо, необхідно виміряти рівень інтелекту людини. За стандартною процедурою тестування визначається її IQ-індекс[1]. Проте, якщо особа заповнить кілька різних тестів, можна отримати різні значення IQ-індексу. Припустимо, пропонується заповнити 4 різних тести з тижневим інтервалом. Середнє значення отриманих IQ-індексів вважається модифікованим IQ-індексом. За якою шкалою вимірюється модифікований IQ-індекс: порядковою чи номінальною?

3. Нехай для групи з 12 абітурієнтів проводилося вступне тестування. Результати тесту в балах були такі:

$$18, 27, 26, 38, 42, 19, 30, 30, 42, 36, 19, 42.$$

Обчисліть ранги значень цієї сукупності.

Дослідницький проект

Як зауважувалось у прикладі 1.3.7, не коректно вважати числовими характеристиками оцінки “2”, “3”, “4” та “5” рівня успішності студентів. Спробуємо обґрунтувати цю тезу.

Деякі викладачі виставляють оцінки на екзамені за багатобальною методикою. Припустимо, один з них підготував завдання для екзамену так, що максимально студент може набрати 100 балів. Викладач ставить студентові оцінку “5”, якщо той набирає 81–100 балів, оцінку “4” — при 61–80 балах, оцінку “3” — при 41–60 балах. Якщо студент набирає 40 або менше балів, то отримує оцінку “2”.

Припустимо, викладач проводить екзамен у двох групах по 10 студентів і виставляє оцінки за щойно описаним правилом. Далі викладач заповнює оцінками відомості груп і передає їх до деканату.

Якщо два студенти набирають відповідно 81 і 80 балів, то вони скоріше мають однаковий рівень знань, проте для деканату один з них отримує оцінку “відмінно”, а інший — лише “добре”. Разом з тим рівні знань двох студентів, які отримали відповідно 61 та 80 балів, скоріше значно різняться, проте в деканаті цього не бачать, тому що обидва студенти отримують оцінку “добре”.

[1] Нагадаємо, що IQ-індекс вимірюється за порядковою шкалою.

Припустимо, за результатами екзамену деканатом встановлено середні оцінки з певного предмету в кожній з двох груп. Незалежно від деканату середні оцінки в кожній групі визначив і викладач. При цьому, маючи повну інформацію про результати екзамену, він користувався списком набраних студентами балів, а не остаточним списком оцінок. Отже, викладач спочатку обчислив середні бали груп за 100-бальною шкалою, а потім перевів отримані результати у стандартні п'ятибальні оцінки за описаним раніше правилом.

У результаті виявились певні суперечності щодо результатів викладача і деканату:

1. За обчисленнями деканату в першій групі середня оцінка становила 4,1, а за обчисленнями викладача — 5.
2. Середня оцінка другої групи — відповідно 3,9 за обчисленнями деканату і 3 — викладача.

Отже, розбіжності отриманих деканатом та викладачем значень середньої оцінки становлять майже 1 бал у кожній групі.

На Вашу думку, чи можлива така ситуація? Ймовірно, деканат або викладач помилились під час обчислення? Якщо ж така ситуація можлива, чи можете Ви змоделювати її, тобто визначити отримані на екзамені студентами обох груп бали за 100-бальною шкалою?

Розділ 2

Аналіз статистичних даних

Уявімо, що вивчається деяка сукупність статистичних даних. Ця сукупність може бути велика, її елементи суттєво різнитися. Як правило, неможливо одразу побачити очевидні закономірності розглядуваної групи даних. Тому для того щоб проаналізувати сукупність і виявити її основні властивості та характеристики, потрібно докласти значних зусиль і витратити багато часу.

Припустимо, що цю сукупність даних проаналізовано. Для кожного дослідника наступним етапом є передання своїх висновків іншим спеціалістам, керівництву чи широкій громадськості. Постає завдання: лаконічно в кількох абзацах тексту за допомогою таблиць або діаграм навести результати виконаного аналізу. Адже жодна людина не захоче витрачати власний час і зусилля для повторення здійсненого аналізу.

Отже, великою мірою важливо навчитися за досліджуваною сукупністю статистичних даних формувати короткий звіт, який акумулює пояснення її основних властивостей. І насамперед слід навчитися обчислювати кілька найзагальніших показників, для визначення яких не потрібно докладати великих зусиль (надто за сучасної комп'ютерної ери) і за допомогою яких можна доволі коротко описати найголовніші властивості сукупності даних.

2.1. Пропорції

Застосування пропорцій — це найпростіший метод аналізу даних, за допомогою якого можна досліджувати ознаки, що вимірюються навіть за номінальною шкалою.

Нехай досліджується деяка сукупність даних, які вимірюються принаймні за номінальною шкалою. Припустимо, x — одне з можливих значень шкали. Тоді природно постає питання, як часто зустрічається значення x у сукупності.

Означення 2.1. Припустимо, n — обсяг сукупності, значення x в якій зустрічається m разів. Тоді *пропорцією*[1] значення x у сукупності називають число

$$P = \frac{m}{n}.$$

Часто пропорцію виражають у відсотках. Отже, її можна також визначати за формулою

$$P = \frac{m}{n} \cdot 100\,\%.$$

Приклад 2.1.1. У результаті парламентських виборів кожна партія набирає деяку кількість голосів. Тоді назви партій утворюють значення номінальної шкали. Припустимо, у виборах взяли участь 27 894 563 особи. Нехай з них 3 587 421 особа віддала голос за деяку конкретну партію. Тоді пропорція цієї партії буде такою:

$$P = \frac{3\,587\,421}{27\,894\,563} \approx 0{,}1286, \quad \text{або } 12{,}86\,\%.$$

[1] У науковій літературі, написаній українською мовою, часто вживаються також терміни “*частка*” та “*відсоток*” (див., наприклад, [9]).

Приклад 2.1.2. Припустимо, під час дослідження рівня безробіття в деякому місті було опитано 350 осіб працездатного віку. Нехай з них 62 особи зазначили, що не мають постійної роботи, 38 мають постійну сезонну роботу, решта працює постійно. Тоді в опитаній сукупності пропорції безробітних, сезонних працівників і постійно працюючих відповідно

$$
\begin{aligned}
P_{\text{безроб}} &= \frac{62}{350} \cdot 100\,\% \approx 17{,}7\,\%;\\
P_{\text{сезон}} &= \frac{38}{350} \cdot 100\,\% \approx 10{,}9\,\%;\\
P_{\text{пост}} &= \frac{350-62-38}{350} \cdot 100\,\% \approx 71{,}4\,\%.
\end{aligned}
$$

Зауважимо, що пропорцію постійно працюючих можна визначити також по-іншому, зважаючи на те, що сума пропорцій за всіма значеннями ознаки дорівнює 100 %:

$$P_{\text{пост}} \approx 100\,\% - 17{,}7\,\% - 10{,}9\,\% = 71{,}4\,\%.$$

При цьому, як бачимо, використано знак наближеної рівності "$\approx$", позаяк значення пропорцій безробітних та сезонних працівників так само визначено наближено.

Часто поняття пропорції трактують ширше, ніж в означенні 2.1. Припустимо, сформульовано деяку властивість значень ознаки. У цьому разі пропорцією є відсоток елементів сукупності, які мають цю властивість.

Приклад 2.1.3. Припустимо, 400 громадян працездатного віку опитано про їх місячні прибутки. Слід визначити, скажімо, частину досліджуваної сукупності з прибутками в межах 100–500 ум. од. Якщо таких громадян у сукупності виявилось 32, можна визначити їх пропорцію:

$$P = \frac{32}{400} \cdot 100\,\% = 8\,\%.$$

2.2. Усереднені показники

Усереднені показники є чи не найважливішими характеристиками сукупності статистичних даних. Використовуючи їх, можна одним числом навести найзагальніший опис досліджуваного набору даних. Проте часом усереднені характеристики (точніше їх некоректне чи недоцільне використання) можуть істотно спотворити уявлення про сукупність даних.

Як правило, використовують три види усереднених показників: середнє арифметичне, моду та медіану.

2.2.1. Середнє арифметичне

Середнє арифметичне сукупності значень — це величина, загальновідома зі школи. Проте як не є, а нагадаємо це поняття.

Означення 2.2. Нехай аналізується сукупність статистичних даних, яка складається з n чисел $X_1, X_2, \ldots, X_n$. *Середнє арифметичне* цих чисел визначають так:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

При цьому $\overline{X}$ (або $\overline{Y}$, $\bar{Z}$ та ін.) є стандартним позначенням середнього арифметичного.

Отже, щоб визначити середнє арифметичне, потрібно розрахувати суму всіх значень сукупності й поділити її на їх кількість. У статистиці середнє арифметичне називають ще *середнім значенням*.

Приклад 2.2.1. Нехай студенти деякої академічної групи отримали такі оцінки на екзамені.

Номер студента у списку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Оцінка на екзамені	“5”	“4”	“5”	“3”	“3”	“2”	“2”	“3”	“5”	“5”	“4”

Тоді середнє значення[1] оцінки (іншими словами, середня оцінка) групи

$$\overline{X} = \frac{5+4+5+3+3+2+2+3+5+5+4}{11} = \frac{41}{11} \approx 3{,}73.$$

[1] Нагадаємо, що визначати середнє значення оцінки певною мірою некоректно.

Зауважимо, що тут точне значення середньої оцінки округлено до двох десяткових знаків.

Приклад 2.2.2. Нехай досліджується середній заробіток програміста в Києві. Для цього було здійснено Internet-опитування. Нехай 8 програмістів анонімно зазначили свій середній щомісячний заробіток (див. таблицю).

Номер програміста у списку	1	2	3	4	5	6	7	8
Заробіток, ум. од.	600	550	800	950	1100	700	900	850

Тоді середній щомісячний заробіток в опитаній групі

$$\overline{X} = \frac{600 + 550 + 800 + 950 + 1100 + 700 + 900 + 850}{8} = \frac{6450}{8} =$$
$$= 806{,}25.$$

Навряд чи в цьому разі можна стверджувати, що середній заробіток усіх програмістів становить 806,25 ум. од. Навіть неможливо поки що вважати значення 806,25 близьким до середнього заробітку. Проте це число є деякою оцінкою середнього заробітку, якої цілком достатньо для формування певних висновків на побутовому рівні.

2.2.2. Мода

Означення 2.3. Нехай аналізується сукупність статистичних даних $X_1, X_2, \ldots, X_n$. *Модою* цих даних називають значення, яке зустрічається в сукупності найчастіше. Позначатимемо моду так: **Mo**.

Зауважимо, що мода — не завжди єдине значення. В окремих випадках мода може складатися з кількох чисел, які зустрічаються однакову кількість разів (але найчастіше).

Приклад 2.2.3. Повернімося до прикладу 2.2.1. Легко розрахувати, що оцінку “2” на екзамені у групі отримали 2 студенти, оцінку “3” — 3, оцінку “4” — 2, оцінку “5” — 4. Отже, найбільше студентів отримали оцінку “5” і саме вона є модою цієї сукупності:

$$\mathbf{Mo} = 5.$$

Приклад 2.2.4. Казати про моду у прикладі 2.2.2 певною мірою некоректно, тому що кожне значення зустрічається рівно один раз. Формально тут модою є всі 8 значень.

Приклад 2.2.5. Відома класифікація психологічних типів людини визначає чотири ідеальних характери: сангвінік, холерик, меланхолік та флегматик. Припустимо, маємо тест з 40 питань для аналізу характеру людини за наведеною класифікацією. Нехай на кожне питання є чотири варіанти відповіді, причому кожний варіант відповідає одному з типів.

Нехай за цією методикою опитано деяку людину. Припустимо, 6 з її відповідей зараховано до типу "сангвінік", 8 — "холерик", 3 — "меланхолік", 23 — "флегматик". Тоді модою цих даних є тип "флегматик", позаяк він найчастіше зустрічається у відповідях. Отже, цей тип переважає в характері опитаного.

Зауважимо також, що розглянуто дані, які вимірюються за номінальною шкалою. Отже, моду на відміну від середнього значення можна застосовувати навіть для аналізу нечислових значень.

Приклад 2.2.6. Розглянемо результати соціологічного дослідження, здійсненого з метою встановлення середньої кількості дітей у сім'ї. Загалом було опитано 84 сім'ї. Наведемо результати опитування.

Кількість дітей у сім'ї	0	1	2	3	4 і більше
Кількість сімей	16	23	23	14	8

У цьому разі моду досліджуваної групи сімей утворюють значення 1 і 2:

$$\mathbf{Mo} = \{1; 2\}.$$

2.2.3. Медіана

Меншою мірою прозорим, ніж мода і середнє значення, є поняття "*медіана*". Якщо казати нестрого, то медіана є середнім щодо розміщення на числовій прямій значенням у групі. Іншими словами, половина значень у групі перевищує медіану, а половина менша від неї. Точніше означення медіани наведемо у вигляді алгоритму її обчислення.

Означення 2.4. Нехай досліджується група N статистичних даних. Упорядкуємо цю групу за зростанням. Припустимо, отримано таку послідовність значень: $X_1, X_2, \ldots, X_N$ (зауважимо, що деякі числа в цій послідовності можуть повторюватись, якщо, наприклад, вони зустрічаються кілька разів у вихідній групі). Можливі два випадки.

1. Кількість значень N у групі непарна, тобто $N = 2n - 1$. Тоді медіаною є число X_n, що міститься посередині списку.

2. Кількість значень N у групі парна, тобто $N = 2n$. Тоді медіана обчислюється за формулою

$$\frac{X_n + X_{n+1}}{2}.$$

Отже, у цьому разі медіана є середнім арифметичним двох розміщених посередині списку чисел.

Медіану позначатимемо **Me**.

Приклад 2.2.7. Повернімось знову до прикладу 2.2.1. Маємо список з 11 оцінок. Цей список невпорядкований. Тому насамперед упорядкуємо його. Отримаємо таку послідовність оцінок:

$$2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5.$$

Оскільки кількість студентів $N = 11$ у списку непарна, подамо її в такому вигляді: $N = 2n - 1$. Маємо

$$11 = 2 \cdot 6 - 1.$$

Отже, шоста за порядком оцінка міститься в середині списку з 11 осіб. Як легко визначити, шостою оцінкою є “4”. Тому $\mathbf{Me} = 4$.

За результатами аналізу цих даних, здійсненого в п. 2.2.1 і 2.2.2, отримуємо

$$\overline{X} = 3{,}73;$$
$$\mathbf{Mo} = 5;$$
$$\mathbf{Me} = 4.$$

Таким чином, для однієї й тієї самої сукупності даних середнє значення, мода і медіана можуть мати різні значення.

Приклад 2.2.8. Нехай у результаті тестування відомі IQ-індекси шістьох співробітників відділу маркетингу компанії (через анонімність не вказано посади співробітників).

Номер співробітника у списку	1	2	3	4	5	6
IQ-індекс	124	131	128	142	132	140

Визначимо медіану цих значень. Для цього, упорядкувавши список, отримаємо таку послідовність IQ-індексів:

$$124, 128, 131, 132, 140, 142.$$

Оскільки кількість значень у групі парна (6 індексів), для визначення медіани потрібно розглянути два числа, які містяться посередині списку — 131 та 132. Отже, обчислюємо медіану:

$$\mathbf{Me} = \frac{131 + 132}{2} = 131{,}5.$$

2.2.4. Порівняння середнього значення, медіани та моди

Як було встановлено раніше, середнє значення, мода і медіана можуть різнитися навіть для однієї й тієї самої сукупності статистичних даних. Кожна з цих величин дає певну інтерпретацію поняття середнього: мода — щодо частоти появи значення, медіана — щодо середньої позиції у впорядкованому списку даних, середнє значення враховує як частоту появи даних, так і їх значення. Природно постає питання, яка з цих характеристик краща. Однозначної відповіді не існує. Залежно від сукупності даних будь-яка з цих величин може стати як найкращою, так і найгіршою усередненою характеристикою.

Приклад 2.2.9. Розглянемо сукупність з шести осіб. Наведемо дані про їх сукупні річні прибутки.

Номер особи у списку	1	2	3	4	5	6
Сукупний річний прибуток X, ум. од.	150	200	200	1250	10000	1000000

Поміркуємо, який рівень прибутку можна вважати середнім для цієї групи.

За наведеними даними насамперед визначимо моду, медіану та середнє значення:

$$\mathbf{Mo} = 200;$$

$$\mathbf{Me} = \frac{200 + 1250}{2} = 725;$$

$$\overline{X} = \frac{150 + 2 \cdot 200 + 1250 + 10000 + 1000000}{6} = \frac{1011800}{6} \approx 168633.$$

У результаті отримано три різні інтерпретації середнього прибутку. Визначимо, яка з них найкраща.

Розглянемо спочатку значення моди 200. Це значення вибрано тільки тому, що зустрілося двічі, а решта лише один раз. Такої невеликої переваги недостатньо, щоб стверджувати, що 200 зустрічається набагато частіше, ніж інші значення, і тому найкраще описує середній рівень прибутку. Для цього потрібні додаткові аргументи. Припустимо, що у другої особи прибуток становить не 200, а 201 ум. од. Тоді взагалі не може навіть йтися про моду[1], а ситуація у групі майже не змінилась.

Тепер розглянемо значення медіани, що становить 725. Це значення міститься всередині впорядкованого списку всіх прибутків. Отже, це позитивна властивість значення 725. Проте 83 % даних (5 з 6) істотно відрізняються від медіани: три з них (150, 200, 200) менші від медіани більше як втричі, одне (10000) — більше на порядок, ще одне (1000000) — на три порядки. А це вже негативні характеристики для значення 725.

Якщо ж для опису середнього рівня використати середнє арифметичне (що перевищує 150000 ум. од.), то може скластися враження про дуже високий рівень життя цієї групи. Але, як бачимо, це не так: 50 % членів групи перебувають за межею бідності, одна особа з прибутком 1250 ум. од. балансує на межі бідності і ще одна має відносно високий як для України (у розвинених державах це так само межа бідності) рівень річного доходу — 10000 ум. од.

[1] Точніше, мода складається з усіх шести значень.

Отже, як випливає, кожна з трьох наведених інтерпретацій може спотворити уявлення про реальний рівень прибутку у групі. У такому разі доцільно наводити всі три характеристики середнього[1].

Приклад 2.2.10. Незалежна соціологічна служба Великобританії здійснила дослідження зросту десятирічних хлопчиків. Наведемо дані зросту для випадкової вибірки зі 100 хлопчиків[2].

Зріст X, дюймів	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Кількість хлопчиків	1	3	10	24	30	22	7	2	1

Спробуємо оцінити середній рівень зросту для цієї групи.

Очевидно, $\mathbf{Mo} = 56$ (значення 56 зустрічається найчастіше — 30 разів). Так само легко перевірити, що 55-й та 56-й рівні зросту у впорядкованому списку становлять 56 дюймів кожний. Тому

$$\mathbf{Me} = \frac{56+56}{2} = 56.$$

Середнє арифметичне значення зросту

$$\overline{X} = \frac{1}{100}(1\cdot 52 + 3\cdot 53 + 10\cdot 54 + 24\cdot 55 + 30\cdot 56 + \\ + 22\cdot 57 + 7\cdot 58 + 2\cdot 59 + 1\cdot 60) = \frac{5589}{100} = 55{,}89.$$

[1] У робастній статистиці в таких ситуаціях використовують *растровий метод*, згідно з яким із сукупності попередньо викидають найбільше та найменше значення, вважаючи їх нетиповими, а після цього розраховують середнє значення отриманої сукупності. У розглянутому прикладі із сукупності потрібно викинути значення 150 та 1000000. Тоді середнє значення нової групи даних становитиме

$$\frac{2\cdot 200 + 1250 + 10000}{4} = \frac{11650}{4} = 2912{,}5.$$

Як бачимо, отримане значення так само не повною мірою описує нову сукупність. Якщо до растрового методу ставитись не так формально, то можна викидати найнетиповіші значення. У розглядуваному прикладі такими можна вважати значення 1000000 та 10000. Тоді середнє значення нової сукупності становитиме

$$\frac{150 + 2\cdot 200 + 1250}{4} = \frac{1900}{4} = 472{,}5.$$

Однак і цей результат спірний щодо опису сукупності.

[2] Ідею цього прикладу запозичено з [25].

Як бачимо, усі три характеристики приблизно однакові (56 дюймів), отже, 56 дюймів можна вважати середнім рівнем зросту у групі.

Приблизна рівність медіани, моди та середнього значення — це ідеальний випадок. Як правило, найлегше описуються лише такі сукупності даних, що мають цю властивість. Мало того, у статистиці в цьому разі йдеться про середній рівень досліджуваної величини. Наприклад, якщо середній зріст десятирічних хлопчиків 56 дюймів, то автоматично вважається, що мода, медіана і середнє значення різняться неістотно.

Отже, розглянуто два приклади, в яких зроблено спробу оцінити середній рівень сукупності. Якщо в першому це було важко зробити (найпростіше навести повний список групи), то у другому спостерігався ідеальний випадок, коли середній рівень визначити було доволі легко. Тепер розглянемо приклад проміжної ситуації.

Приклад 2.2.11. Редакція щомісячного журналу здійснила опитування потенційних читачів. Одним із питань було таке: "Яку кількість номерів нашого журналу Ви купили минулого року?" У результаті аналізу 100 анкет отримано наведені далі дані[1].

Кількість куплених номерів	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кількість опитаних	40	15	3	2	1	1	1	1	2	2	3	10	19

Визначимо усереднені характеристики цієї сукупності. Оскільки 40 осіб (зі 100) не купили жодного номера, а $40 + 15 = 55$ купили 0 або 1 номер, то середні позиції 50 і 51 припадають на значення 1. Отже, медіана цієї сукупності становить один куплений номер журналу за рік.

Якщо до розрахунку моди ставитись формально, то, очевидно, вона дорівнює нулю, позаяк більше опитаних (40 індивідуумів) не купили жодного номера журналу[2].

[1] Ідею прикладу запозичено з [25].

[2] Проте частіше в подібних ситуаціях застосовують не такий формальний підхід. Як бачимо, значення більшості елементів сукупності становить 0, 1 для тих, хто майже не купував журнал, і 11, 12 для постійних читачів журналу. Іншими словами, серед значень вихідної сукупності є два "піки". Тому природно визначити моду для кожного з цих "піків". У результаті отримуємо два значення моди: 0 та 12.

Обчислимо середнє значення сукупності:

$$\overline{X} = \frac{1}{100}\big(40 \cdot 0 + 15 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + \\ + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 10 + 10 \cdot 11 + 19 \cdot 12\big) = \\ = \frac{451}{100} = 4{,}51.$$

Остаточно маємо такі усереднені характеристики: мода дорівнює нулю, медіана — одиниці, середнє значення становить 4,51.

Як бачимо, середнє арифметичне погано описує сукупність. Справді, лише дві особи купили 4–5 номерів журналу. Використання ж як середніх показників моди та медіани призвело б до висновку про непопулярність журналу. Проте близько 30 % опитаних читають цей журнал регулярно.

Знову маємо ситуацію, коли формальне ставлення до усереднених характеристик спотворює уявлення про вихідну сукупність. Проте цей випадок на відміну від прикладу 2.2.9 все ж таки можна доволі легко описати, враховуючи інформацію зноски 2 на с. 37. Найприродніший такий опис сукупності: 55 % опитаних не купували жодного або купили один номер журналу, а 29 % регулярно купували журнал (11 або 12 номерів за рік).

Отже, як засвідчують наведені приклади, не можна віддати однозначної переваги одному з трьох усереднених показників. Проте найважливішим з них вважають середнє арифметичне сукупності. Це пов'язано з ширшими можливостями в разі його використання порівняно з модою та медіаною. До основних належать такі переваги середнього.

1. Середнє значення частіше виявляється кращою характеристикою, ніж мода та медіана.

2. При зведенні даних з кількох сукупностей в одну можна обчислити лише середнє значення утвореної сукупності, знаючи середні значення початкових груп. За відомими значеннями моди чи медіани двох груп неможливо обчислити відповідно моду чи медіану об'єднаної групи.

Розглянемо зазначене на прикладі середнього арифметичного. Нехай маємо дві групи обсягом n_1 та n_2, середні значення яких становлять відповідно $\overline{X_1}$ та $\overline{X_2}$. Тоді середнє значення утвореної об'єднанням цих двох груп сукупності можна обчислити за формулою[1]

$$\overline{X} = \frac{n_1\overline{X_1} + n_2\overline{X_2}}{n_1 + n_2}.$$

3. Іноді доцільною є й така властивість середнього значення. Якщо відомі середнє значення $\overline{X}$ і обсяг сукупності n, можна обчислити суму всіх значень сукупності, обчисливши добуток $n\overline{X}$.

Наприклад, якщо відомо, що минулого року у країні в середньому за місяць траплялось 3250 дорожньо-транспортних пригод, то можна стверджувати, що сумарна їх кількість становитиме $12 \cdot 3250 = 39000$.

На жаль, ні медіана, ні мода не мають такої властивості.

2.2.5. Усереднені характеристики і шкали вимірювання

Нагадаємо, що елементи статистичної сукупності даних можна вимірювати за різними шкалами. У підрозд. 1.3 розглянуто номінальну, порядкову та числову шкали. При цьому наведені означення моди, медіани та середнього значення були сформульовані в термінах числової шкали. Виявляється, в окремих випадках вони можуть поширюватись і на інші шкали.

Припустімо, значення сукупності даних вимірюються за номінальною або порядковою шкалою. У цьому разі можна визначити частоту появи в сукупності кожного рівня шкали, тобто фактично може йтися про моду сукупності. Подібний випадок розглянуто у прикладі 2.2.5.

[1] У загальному випадку, коли відомі середні значення $\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_k}$ у k групах обсягами відповідно $n_1, \ldots, n_k$, середнє значення сукупності можна обчислити за формулою

$$\overline{X} = \frac{n_1\overline{X_1} + \cdots + n_k\overline{X_k}}{n_1 + \cdots + n_2}.$$

На жаль, мода є єдиною характеристикою, доступною для оцінки середнього рівня за номінальною шкалою. Для порядкової шкали можна вже використовувати медіану.

Справді, нехай маємо сукупність даних, що вимірюються за порядковою шкалою. У цьому разі можна впорядкувати ці дані. А далі все залежить від того, парна чи непарна кількість елементів у списку. Якщо вона непарна, то як медіану беремо середній за порядком елемент у списку. У разі парної кількості елементів визначити медіану буде дещо важче, якщо два середніх елементи матимуть різні рівні ознаки. Справді, не можна обчислювати середнє арифметичне двох нечислових значень. У цьому разі потрібно викинути одне значення зі списку для того, щоб отримати непарну кількість значень у списку. При цьому "зайве" значення потрібно викидати випадково, а не довільно (для цього можна застосувати метод, описаний у дод. 7.3).

Приклад 2.2.12. Нехай маємо психологічний тест, за допомогою якого можна оцінити рівень агресивності індивідуума за такою шкалою: "дуже агресивний", "агресивний", "нейтральний", "майже не агресивний", "не агресивний".

Нехай за допомогою цього тесту оцінено рівні агресивності групи з 32 студентів, які наведено далі.

Рівень агресивності	Кількість студентів у групі з таким рівнем
"Дуже агресивний"	3
"Агресивний"	8
"Нейтральний"	5
"Майже не агресивний"	12
"Не агресивний"	4

Нехай потрібно визначити медіану групи. Як бачимо, дані вже впорядковано і можна розглянути 16-й та 17-й елементи списку — це рівні відповідно "нейтральний" та "майже не агресивний". Якби ці елементи мали однакове значення, його можна було б вважати медіаною. Проте ці елементи мають різні рівні агресивності, і тому доведеться випадково викинути один елемент зі списку.

Для цього застосуємо процедуру, описану в дод. 7.3. Припустимо, отримано число 29. Викидаючи 29-й елемент зі списку, отримаємо нову групу вже з 31 значення.

Рівень агресивності	Кількість студентів у групі з таким рівнем
"Дуже агресивний"	3
"Агресивний"	8
"Нейтральний"	5
"Майже не агресивний"	12
"Не агресивний"	3

У цій сукупності середній елемент вже єдиний, і він посідає 16-ту позицію у списку. Рівень цього елемента "нейтральний". Отже, медіаною вихідної сукупності беремо значення "нейтральний".

Як зазначалось у підрозд. 1.3, значеннями порядкової шкали часто є числа. У цьому разі можна формально визначити середнє значення сукупності. Проте потрібно пам'ятати, що це не повною мірою коректно.

Зауваження 2.1. Якщо між двома середніми елементами статистичного ряду даних міститься значення порядкової шкали, яке не зустрічалося в отриманих даних, його можна вважати медіаною вихідної сукупності. Наприклад, якщо у прикладі 2.2.12 не знайшлося студента з рівнем агресивності "нейтральний", у той час як першому та останньому рівням відповідає однакова кількість студентів, то медіаною такої сукупності можна вважати рівень агресивності "нейтральний".

Зауваження 2.2. На практиці часто в разі незбіжності значень двох середніх елементів упорядкованої сукупності даних як медіану вказують обидва значення.

2.3. Міри розсіювання

У підрозд. 2.2 розглядалося кілька показників (середнє значення, мода і медіана) статистичної сукупності даних, які характеризують її усереднені властивості.

Проте в більшості випадків цих усереднених характеристик недостатньо для того, щоб узагальнити властивості статистичної сукупності. Проблема полягає в тому, що за усередненими показниками неможливо встановити, як істотно відрізняються від них значення сукупності.

Приклад 2.3.1. Деякий вищий навчальний заклад досліджував кількість прочитаної художньої літератури у двох академічних групах (одна — гуманітарної спрямованості, інша — технічної). Кожна група складалась з 15 студентів. Кількість прочитаної художньої літератури оцінювалась за таким показником, як загальна кількість друкованих аркушів у прочитаних за минулий рік виданнях. Впорядковані за зростанням дані дослідження наведені в таблиці.

Позиція у впорядкованому списку	Кількість друкованих аркушів у прочитаній за минулий рік художній літературі серед студентів групи спрямованості	
	гуманітарної	технічної
1	2	3
1	99	64
2	102	65
3	103	67
4	106	68
5	108	70
6	112	90
7	115	105
8	115	115
9	117	115
10	120	135
11	121	150
12	122	165
13	126	167
14	128	172
15	131	177

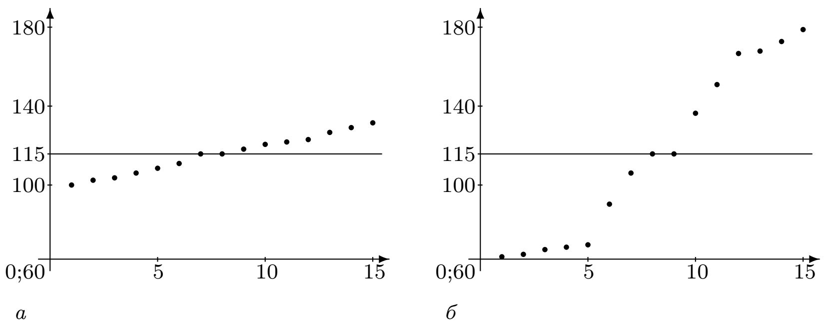
Легко перевірити, що і в першій, і у другій групі медіана (позиція 8 у списку) дорівнює 115 і для обох груп це єдине значення, яке зустрічається двічі, а решта лише раз. Отже, мода для обох груп так само однакова і дорівнює 115.

Виявляється, що і середнє значення в обох групах однакове й так само становить 115. Справді, суми у графах 2 і 3 дорівнюють 1725, а

$$\frac{1725}{15} = 115.$$

Отже, в обох групах усі три усереднені характеристики однакові і становлять 115 [1]. Проте не можна стверджувати, що ці групи мають однакову структуру за досліджуваним показником.

Розглянемо діаграми, де показник зображений в обох групах. Як бачимо, усі значення у групі гуманітарної спрямованості сконцентровані доволі близько до середнього значення 115. Водночас більшість значень у групі технічної спрямованості значно відрізняються від середнього значення.



Графічне зображення даних таблиці: *а* — група гуманітарної спрямованості; *б* — група технічної спрямованості

Іншими словами, значення 115 добре описує групу гуманітарної спрямованості, а ось для опису групи технічної спрямованості потрібна додаткова інформація (наприклад, така: приблизно по третині студентів мають показники в околі відповідно 70, 115 та 170).

[1] Звісно, числові дані тут підібрані так, щоб підкреслити основну думку прикладу. Проте подібні ситуації, коли всі три показники в обох групах приблизно однакові, трапляються доволі часто. Зауважимо також, що в цьому прикладі моду навряд чи можна вважати усередненим показником. Адже більшість значень (усі, окрім 115) у групах зустрічаються лише раз.

Отже, у статистиці важливо враховувати не лише усереднені характеристики, а й відхилення значень від цих характеристик. Далі розглянемо саме статистичний аналіз відхилень.

2.3.1. Абсолютні та відносні відхилення

Як зазначалося, середній рівень статистичної сукупності найчастіше описують за допомогою середнього значення. Іноді для цього доцільно використовувати й інші характеристики, наприклад, моду або медіану.

Дослідимо деяку групу даних $X_1, X_2, \ldots, X_n$. При цьому для опису середнього рівня цієї групи використаємо деяку усереднену характеристику ϑ. Нехай треба оцінити, як значення X_i групи відрізняються від ϑ. Така оцінка виявить, як значення ϑ описує вихідну сукупність.

Якщо досліджувана група невелика, то цілком реально оцінити відмінності від ϑ кожного елемента X_i. Наведемо поняття, за допомогою яких можна дослідити ці індивідуальні відмінності.

Означення 2.5. *Індивідуальним відхиленням*, або *відхиленням* значення X_i від характеристики ϑ, називають різницю $X_i - \vartheta$.

Означення 2.6. *Абсолютним відхиленням* значення X_i від характеристики ϑ називають число

$$|X_i - \vartheta|.$$

Нагадаємо, що $|x|$ означає абсолютне значення числа x, іншими словами, $|x|$ ігнорує знак числа x.

Означення 2.7. *Відносним відхиленням* значення X_i від характеристики ϑ називають число

$$\frac{|X_i - \vartheta|}{\vartheta} \cdot 100\,\%,$$

яке виражає абсолютне відхилення X_i від ϑ у відсотках відносно ϑ.

Приклад 2.3.2. Повернімося до прикладу 2.2.9. Нагадаємо, що в ньому досліджувався рівень прибутків у сукупності з шести осіб.

Для зручності знову наведемо дані сукупності.

Номер особи у списку	1	2	3	4	5	6
Сукупний річний прибуток X, ум. од.	150	200	200	1250	10000	1000000

Мода, медіана та середнє значення за цими даними такі:

$$\mathbf{Mo} = 200,$$
$$\mathbf{Me} = 725,$$
$$\overline{X} \approx 168633.$$

Раніше переконливо не встановлено, яка з цих характеристик краще описує середній рівень групи. Тепер повернімось до розв'язання цієї задачі, скориставшись поняттями відхилень.

Наведемо абсолютні відхилення значень сукупності від моди, медіани та середнього арифметичного.

Номер особи у списку	1	2	3	4	5	6
Абсолютне відхилення від моди	50	0	0	1050	9800	999800
Абсолютне відхилення від медіани	575	525	525	525	9275	999275
Абсолютне відхилення від середнього значення	168483	168433	168433	167383	158633	831637

З наведених даних одразу бачимо, що відхилення від середнього арифметичного дуже великі, а три значення незначно відхиляються від моди. Тому, якщо враховувати індивідуальні абсолютні відхилення, то здається, що мода є кращою характеристикою, ніж медіана, а медіана кращою, ніж середнє значення.

Тепер наведемо відносні відхилення, округлені до цілих значень.

Номер особи у списку	1	2	3	4	5	6
Відносне відхилення від моди, %	25	0	0	525	4900	499900
Відносне відхилення від медіани, %	79	72	72	72	1279	137831
Відносне відхилення від середнього значення, %	100	100	100	99	94	493

Наприклад, для першої особи відхилення від моди визначено так:

$$\frac{|200-150|}{200}\cdot 100\,\% = \frac{50}{200}\cdot 100\,\% = 0,25\cdot 100\,\% = 25\,\%.$$

В останній таблиці контраст між рядками вже не такий разючий, як для абсолютних відхилень. Скажімо, у цьому разі вже важче віддати перевагу медіані порівняно із середнім значенням. Мало того, зовсім не очевидно, що мода найкраще описує ситуацію у групі, оскільки маємо 50 % малих відхилень проти 50 % надто великих.

Приклад 2.3.3. Повернімось до прикладу 2.3.1. Розглянемо відносні відхилення кількості прочитаної студентами літератури від значення 115, яке, нагадаємо, було одночасно модою, медіаною та середнім арифметичним в обох групах (див. таблицю).

Позиція у впорядкованому списку	Відносні відхилення від усередненого показника серед студентів групи спрямованості, %	
	гуманітарної	технічної
1	14	44
2	11	43
3	10	42
4	8	41
5	6	39
6	3	22
7	0	9
8	0	0
9	2	0
10	4	17
11	5	30
12	6	43
13	10	45
14	11	50
15	14	54

Як бачимо, у групі гуманітарної спрямованості значення відхиляються від середнього рівня щонайбільше на 14 %, а технічної — на 54 %.

Отже, пара показників (середній рівень; максимальне відносне відхилення) може набагато виразніше проілюструвати ситуацію у статистичній сукупності, ніж лише середній рівень.

На жаль, аналізуючи велику групу даних, нераціонально наводити у звіті всі індивідуальні відхилення. У цьому разі для характеристики абсолютних відхилень можна використовувати такі показники:

- максимальне відхилення;
- середнє арифметичне відхилень;
- сумарне значення сукупності відхилень.

При використанні останнього показника може бути корисний такий результат.

Теорема 2.1 (Основна властивість медіани). *Сумарне значення абсолютних відхилень усіх елементів статистичної сукупності від медіани менше, ніж від будь-якої іншої величини.*

Приклад 2.3.4. Поблизу автобусного маршруту в мікрорайоні планується побудувати районну поліклініку. При цьому на маршруті з'явиться нова зупинка. Наведемо дані про існуючі зупинки на маршруті та чисельність населення, що мешкає поблизу зупинок[1].

Місце маршруту, на якому розташовано зупинку, км від початку	0	0,6	1,1	2	2,6	3,2	3,5
Чисельність населення, що мешкає поблизу зупинки, тис. осіб	5	2	3	4	1	4	3

Доцільно розташувати поліклініку так, щоб сумарна відстань, яку проїжджатимуть потенційні пасажири до неї, була найкоротшою.

Насамперед для того, щоб врахувати різну чисельність населення, що мешкає поблизу кожної зупинки, формально вважатимемо, що кожна група з тисячі осіб має свою зупинку. Наприклад, вважатимемо, що на початку маршруту є не одна, а 5 зупинок (по одній для кожної групи з 5 тисяч населення). Тоді отримаємо нову сукуп-

[1] Ідею цього прикладу взято з [15].

ність даних:

$$\underbrace{0;\ \ldots;\ 0}_{\text{5 разів}};\ 0{,}6;\ 0{,}6;\ 1,1;\ 1,1;\ 1,1;\ \underbrace{2;\ \ldots;\ 2}_{\text{4 рази}};$$
$$2{,}6;\ \underbrace{3{,}2;\ \ldots;\ 3{,}2}_{\text{4 рази}};\ 3{,}5;\ 3{,}5;\ 3{,}5.$$

У цій сукупності налічується така кількість елементів:

$$5+2+3+4+1+4+3=22.$$

За основною властивістю медіани сума абсолютних відхилень елементів цієї сукупності від медіани менша, ніж від будь-якої іншої величини. Тому для розв'язання поставленої задачі потрібно знайти медіану.

Для групи з 22 елементів середніми є позиції 11 і 12 у впорядкованому списку. Як бачимо, у розглядуваній сукупності на цих позиціях маємо значення 2. Тому її медіаною є число 2.

Отже, поліклініку найдоцільніше розташувати на другому кілометрі від початку маршруту, де, до речі, вже є зупинка.

2.3.2. Середнє абсолютне відхилення

Припустимо, середній рівень статистичної сукупності вже оцінено. Вважатимемо, що цю оцінку визначено як середнє арифметичне сукупності, адже саме такий підхід використовують найчастіше.

Нехай у звіті про аналіз сукупності необхідно навести дані про відхилення її елементів від середнього значення. У цьому разі найкраще зазначити всі відхилення. Проте цей спосіб прийнятний лише за невеликої сукупності. Якщо ж сукупність велика, бажано отримати оцінку відхилень у вигляді деякої усередненої характеристики, тобто у вигляді одного чи щонайбільше кількох чисел.

Безсумнівно, найприродніший такий підхід: спочатку визначити всі абсолютні відхилення, а потім їх середнє значення. Зробити це не тільки природно, а й легко.

Означення 2.8. *Середнім абсолютним відхиленням*, або *середнім відхиленням*, називають середнє арифметичне значення абсолютних відхилень елементів статистичної сукупності від її середнього значення. Середнє абсолютне відхилення позначатимемо $\overline{\Delta}$[1].

Середнє абсолютне відхилення є простою і зручною характеристикою індивідуальних відхилень у сукупності. Для складніших форм статистичного аналізу, з якими ознайомимося пізніше, вміти визначати середнє абсолютне відхилення недостатньо. З позицій теорії для статистичного аналізу зручніше застосовувати інші величини, а саме дисперсію та стандартне відхилення, процедура обчислення яких не така примітивна.

Приклад 2.3.5. Повернімося знову до прикладу 2.3.1 про кількість літератури, прочитаної студентами двох академічних груп. Як встановлено раніше, середнє значення (а взагалі й середній рівень) цього показника в обох групах становить 115 друкованих аркушів на рік.

У прикладі 2.3.3 наведено індивідуальні відносні відхилення від 115. Там же дано такий опис груп: у групі гуманітарної спрямованості індивідуальні значення відхиляються від середнього рівня 115 щонайбільше на 14 %, а у групі технічної спрямованості — щонайбільше на 54 %.

Продовжимо аналіз цих двох груп, скориставшись поняттям середнього абсолютного відхилення. Наведемо індивідуальні та абсолютні відхилення від 115.

Відхилення від усередненого значення для студентів групи спрямованості					
гуманітарної			технічної		
Значення	Індивідуальне відхилення	Абсолютне відхилення	Значення	Індивідуальне відхилення	Абсолютне відхилення
1	2	3	4	5	6
99	−16	16	64	−51	51
102	−13	13	65	−50	50
103	−12	12	67	−48	48

[1] Середнє абсолютне відхилення часто називають середнім лінійним відхиленням.

1	2	3	4	5	6
106	−9	9	68	−47	47
108	−7	7	70	−45	45
112	−3	3	90	−25	25
115	0	0	105	−10	10
115	0	0	115	0	0
117	2	2	115	0	0
120	5	5	135	20	20
121	6	6	150	35	35
122	7	7	165	50	50
126	11	11	167	52	52
128	13	13	172	57	57
131	16	16	177	62	62
Сума	0	120	Сума	0	552

Як бачимо, суми індивідуальних відхилень дорівнюють нулю. Це не випадково. *Якщо індивідуальні відхилення визначено правильно, то їх сума повинна дорівнювати нулю.* Цю властивість використовують для контролю правильності обчислень.

У розглядуваному прикладі важливішими є визначені суми абсолютних відхилень. Знаючи, що кожна група складається з 15 осіб, обчислимо середні абсолютні відхилення:

$$\overline{\Delta}_{\text{гум}} = \frac{120}{15} = 8;$$

$$\overline{\Delta}_{\text{тех}} = \frac{552}{15} = 36{,}8.$$

Насамкінець доходимо таких висновків. У групі гуманітарної спрямованості середньорічна кількість прочитаної художньої літератури становить 115 друкованих аркушів, а індивідуальні обсяги прочитаної літератури відхиляються від значення 115 у середньому на 8 друкованих аркушів. Для групи технічної спрямованості середньорічний рівень так само дорівнює 115 друкованих аркушів, проте індивідуальні відхилення від середнього значення значно більші й у середньому дорівнюють 36,8 друкованих аркушів.

2.3.3. Дисперсія і стандартне відхилення

У статистиці, досліджуючи розсіювання даних, найчастіше використовують такі характеристики, як стандартне відхилення і дисперсію. Ці характеристики важливі завдяки зручності їх математичних перетворень, необхідних у статистичному аналізі. Та ці поняття не такі прозорі, як середнє абсолютне відхилення, й обчислюються дещо важче.

Опишемо ці поняття за допомогою алгоритму їх обчислення.

Означення 2.9. Нехай необхідно дослідити статистичну сукупність даних $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Припустимо, що середнє арифметичне сукупності становить $\overline{X}$. Для визначення *дисперсії* потрібно виконати такі дії:

- визначити всі індивідуальні відхилення $X_i - \overline{X}$ від середнього значення;
- обчислити квадрати індивідуальних відхилень $(X_i - \overline{X})^2$;
- розрахувати середнє значення отриманих квадратів.

Іншими словами, *дисперсія — це середнє арифметичне квадратів індивідуальних відхилень від середнього значення сукупності.*

Дисперсію позначатимемо **D**.

Одразу зауважимо, що дисперсія ігнорує знаки відхилень, адже вони підносились до квадрата. За цією властивістю дисперсія подібна до середнього абсолютного відхилення.

Крім того, завдяки піднесенню до квадрата дисперсія підсилює вплив великих відхилень (> 1) та певною мірою нехтує малими відхиленнями (< 1). Завдяки цій властивості дисперсія є надійнішою характеристикою відхилень, ніж середнє абсолютне відхилення.

Проте використання дисперсії має й недоліки. На відміну від середнього абсолютного відхилення дисперсія характеризує розсіювання даних у термінах квадратних, а не лінійних одиниць. Наприклад, якщо становлять інтерес відхилення індивідуальних прибутків від середньогрупового, то за допомогою дисперсії можна отримати їх характеристику у квадратних гривнях. Зрозуміло, природніше описувати відхилення прибутків за допомогою показника, який вимірюється у гривнях.

Для того щоб врахувати цей недолік, у статистиці замість дисперсії використовують поняття стандартного відхилення[1].

Означення 2.10. *Стандартним відхиленням* сукупності називають квадратний корінь з її дисперсії. Позначають стандартне відхилення σ.

Отже,

$$\sigma = \sqrt{\mathbf{D}}.$$

Через цю рівність у статистиці дисперсію часто позначають σ^2, підкреслюючи більшу важливість стандартного відхилення.

Зауважимо, що стандартне відхилення завжди перевищує середнє абсолютне відхилення. З позицій статистики це означає вищу надійність висновків про розсіювання в термінах стандартних відхилень.

Приклад 2.3.6. Знову повернімося до прикладу 2.3.1 про кількість художньої літератури, прочитаної за рік студентами двох академічних груп. У прикладі 2.3.5 обчислено середні абсолютні відхилення у групах: для групи гуманітарної спрямованості — 8, технічної — 36,8 друкованих аркушів.

За допомогою вже відомих індивідуальних абсолютних відхилень від середнього значення 115 визначимо дисперсію і стандартне відхилення для обох груп.

Для цього насамперед обчислимо квадрати абсолютних відхилень та їх суми для кожної групи і зведемо їх у таблицю.

Абсолютні відхилення і квадрати абсолютних відхилень від усередненого значення для студентів груп спрямованості					
гуманітарної			технічної		
Значення	Абсолютне відхилення	Квадрат абсолютного відхилення	Значення	Абсолютне відхилення	Квадрат абсолютного відхилення
1	2	3	4	5	6
99	16	256	64	51	2601
102	13	169	65	50	2500

[1] У теорії ймовірностей замість терміна “стандартне відхилення” використовують термін “середньоквадратичне відхилення”.

1	2	3	4	5	6
103	12	144	67	48	2304
106	9	81	68	47	2209
108	7	49	70	45	2025
112	3	9	90	25	625
115	0	0	105	10	100
115	0	0	115	0	0
117	2	4	115	0	0
120	5	25	135	20	400
121	6	36	150	35	1225
122	7	49	165	50	2500
126	11	121	167	52	2704
128	13	169	172	57	3249
131	16	256	177	62	3844
	Сума	1368		Сума	26286

За отриманими даними обчислюємо дисперсії (як середнє значення квадратів абсолютних відхилень) і стандартні відхилення (як квадратний корінь з дисперсії):

$$\mathbf{D}_{\text{гум}} = \frac{1368}{15} = 91{,}2, \qquad \mathbf{D}_{\text{тех}} = \frac{26286}{15} = 1752{,}4,$$
$$\sigma_{\text{гум}} = \sqrt{91,2} \approx 9{,}55; \qquad \sigma_{\text{тех}} = \sqrt{1752{,}4} \approx 41{,}86.$$

Зауважимо, що

$$\sigma_{\text{гум}} \approx 9{,}55 > 8 = \overline{\Delta}_{\text{гум}};$$
$$\sigma_{\text{тех}} \approx 41{,}86 > 36{,}8 = \overline{\Delta}_{\text{тех}},$$

тобто стандартні відхилення дещо перевищують середні абсолютні відхилення, як зазначалося раніше.

Приклад 2.3.7. Як бачимо з прикладу 2.3.6, дисперсію і стандартне відхилення доцільно визначати, записуючи результати проміжних обчислень у таблиці. Для наочності розглянемо ще один приклад.

Для перевірки засвоєння нової теми студентами академічної групи було проведено планову контрольну роботу. Результати контрольної і обчислені середнє значення та дисперсію зведено в таблицю (через анонімність прізвищ студентів не подано; обчислення зроблено з точністю до двох десяткових знаків)[1].

Номер студента у списку групи	Оцінка за контрольну роботу	Відхилення від середнього	Квадрат відхилення
1	3	−0,67	0,44
2	4	0,33	0,11
3	3	−0,67	0,44
4	5	1,33	1,78
5	4	0,33	0,11
6	5	1,33	1,78
7	4	0,33	0,11
8	4	0,33	0,11
9	3	−0,67	0,44
10	2	−1,67	2,78
11	5	1,33	1,78
12	2	−1,67	2,78
Сума	44	Сума	12,67
Середнє значення	$\frac{44}{12} \approx 3{,}67$	Дисперсія	$\frac{12{,}67}{12} \approx 1{,}06$

Звідси стандартне відхилення

$$\sigma \approx \sqrt{1{,}06} \approx 1{,}03.$$

Остаточно доходимо такого висновку: середнє значення оцінки[2] за контрольну роботу становить 3,67 бала, стандартне відхилення оцінок — 1,03 бала.

[1] Нагадаємо, що оцінки вимірюються за порядковою шкалою і тому оперувати ними як числами не повною мірою коректно.

[2] Легко перевірити, що мода і медіана цієї сукупності дорівнюють по 4 бали, що добре узгоджується із середнім значенням. Тому цілком правомірно замість словосполучення “середнє значення оцінки” використати термін “середня оцінка”.

Насамкінець наведемо ще одну формулу для обчислення дисперсії. Нехай потрібно визначити дисперсію сукупності даних $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Тоді

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2}{n} = \\
&= \frac{(X_1^2 - 2X_1\overline{X} + \overline{X}^2) + \cdots + (X_n^2 - 2X_n\overline{X} + \overline{X}^2)}{n} = \\
&= \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{n} - 2\overline{X}\,\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} + \frac{n\overline{X}^2}{n} = \\
&= \overline{X^2} - 2\overline{X} \cdot \overline{X} + \overline{X}^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2,
\end{aligned}$$

де X^2 — сукупність даних $X_1^2, X_2^2, \ldots, X_n^2$.

Остаточно

$$\mathbf{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2. \tag{2.1}$$

Зазвичай формулу (2.1) використовують, якщо до квадрата легше піднести дані X_i сукупності, ніж індивідуальні відхилення $X_i - \overline{X}$.

Приклад 2.3.8. Припустимо, на останньому екзамені студенти академічної групи отримали такі оцінки:

$$3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5.$$

Тоді середнє значення цієї сукупності

$$\overline{X} = \frac{3+3+4+4+4+5+5+5}{8} = \frac{33}{8} = 4{,}125.$$

Для обчислення дисперсії середнє значення потрібно відняти від елементів сукупності:

$$-1{,}125;\ -1{,}125;\ -0{,}125;\ -0{,}125;\ -0{,}125;\ 0{,}875;\ 0{,}875;\ 0{,}875.$$

Після цього отримані числа слід піднести до квадрата. Але квадрати вихідних значень сукупності обчислити легше! Тому, скориставшись формулою (2.1), дістаємо

$$\mathbf{D} = \frac{3^2+3^2+4^2+4^2+4^2+5^2+5^2+5^2}{8} - 4{,}125^2 =$$
$$= \frac{2\cdot 9 + 3\cdot 16 + 3\cdot 25}{8} - 17{,}015625 = \frac{141}{8} - 17{,}015625 =$$
$$= 17{,}625 - 17{,}015625 = 0{,}609375.$$

2.3.4. Коефіцієнт варіації

Коефіцієнт варіації — це показник, який виражає стандартне відхилення не в абсолютних одиницях, а у відсотках середнього значення.

Означення 2.11. Нехай $\overline{X}$ — середнє значення статистичної сукупності $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Припустимо, стандартне відхилення цієї сукупності дорівнює σ. Тоді *коефіцієнт варіації*

$$k_{\mathrm{var}} = \frac{\sigma}{\overline{X}} \cdot 100\,\%.$$

Як правило, коефіцієнт варіації використовують за наявності кількох сукупностей даних одного типу, коли середні значення в сукупностях різняться, а стандартні відхилення пропорційні середнім значенням. У такому разі за коефіцієнтом варіації можна дійти узагальнених висновків про властивості досліджуваних даних.

Приклад 2.3.9. Нехай у кількох містах України було досліджено ціни квадратного метра житлової площі минулого місяця. Для цього в кожному місті було випадковим чином відслідковано деяку кількість угод продажу житла. Результати цих досліджень наведено в таблиці.

Номер міста в деякому списку	1	2	3	4	5
Середні ціни за 1 м^2 $\overline{X}$, ум. од.	1000,4	480	581,6	672,4	460,8
Стандартне відхилення σ	144	61,2	84,8	106,0	67,6
Коефіцієнт варіації $\frac{\sigma}{\overline{X}} \cdot 100\,\%$	14,4	12,8	14,6	15,8	14,7

Як бачимо з даних таблиці, і середня ціна, і її стандартне відхилення суттєво різняться за містами. Водночас значення коефіцієнтів варіації коливаються неістотно. Легко перевірити, що в середньому коефіцієнт варіації становить 14,4 %. При цьому відхилення коефіцієнтів варіації від середнього рівня незначні. Тому для стислішого опису наведених даних можна було б залишити в таблиці середні ціни, а для опису розсіювання цін замість рядка стандартних відхилень подати лише усереднене значення коефіцієнта варіації — 14,4 %.

2.3.5. Розмах варіації

Означення 2.12. Нехай вивчаємо деяку сукупність даних. Припустимо, що $X_{\text{макс}}$ та $X_{\text{мін}}$ — значення сукупності відповідно максимальне та мінімальне. Тоді *розмах варіації*, або *варіаційний розмах*,

$$R_{\text{var}} = X_{\text{макс}} - X_{\text{мін}}.$$

Іншими словами, розмах варіації є абсолютною характеристикою ширини інтервалу значень сукупності. Використовують розмах варіації рідко, переважно для достатньо однорідних сукупностей, без значних коливань. Для більшості ж ситуацій цей показник непридатний.

Очевидні недоліки розмаху варіації такі:

- надмірна чутливість до випадкових відхилень через залежність від двох крайніх значень;
- процес ручного обчислення може виявитись трудомістким через велику невпорядкованість сукупності;
- навіть якщо відомо розмахи варіації двох сукупностей, то цього недостатньо для визначення розмаху варіації об'єднаної сукупності.

В окремих випадках показник розмаху варіації модифікують, викидаючи значення одиничних (іншими словами, випадкових) великих відхилень від середнього рівня.

2.4. Частотні розподіли даних

У реальних задачах обсяги досліджуваних статистичних сукупностей зазвичай великі. Загалом на першому етапі дослідження конкретної сукупності відомі лише значення її елементів, тобто велика кількість даних.

Звісно, можна визначити лише кілька числових характеристик сукупності, скажімо, оцінити середній рівень або ступінь розсіювання її елементів. Часом у дослідженнях так і роблять. Проте зрозуміло, що наведення як результату аналізу інформації про одну чи дві характеристики вихідних даних, не є вичерпним описом їх властивостей.

Річ у тім, що порожнява між вихідною сукупністю та наведеними її числовими характеристиками доволі велика. Її треба заповнити додатковими характеристиками, що поліпшать опис досліджуваної сукупності.

Далі розглянемо, як аналізувати сукупність з огляду на частість появи в ній конкретних її значень.

2.4.1. Емпіричні частотні розподіли

Приклад 2.4.1. Припустимо, необхідно проаналізувати показники успішності деякої академічної групи за перший семестр. Нехай на час дослідження кожний студент групи вже склав 4 екзамени. Вважатимемо, що студент засвоїв деякий курс лише за умови, що склав екзамен з нього на "відмінно" або "добре". У цьому разі показником успішності студента є кількість отриманих ним добрих оцінок на чотирьох перших екзаменах.

Показники успішності студентів групи наведено в таблиці.

Номер студента у списку групи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Кількість добрих оцінок	2	3	0	4	4	2	3	2	1	4	1	2	0	3	3

Оскільки досліджується успішність всієї групи, інформація про успішність конкретних студентів не потрібна. Інтерес становить лише послідовність індивідуальних показників успішності (записаних у довільному порядку). Наведені дані таблиці можна записати компактніше у вигляді послідовності:

$$2,\ 3,\ 0,\ 4,\ 4,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1,\ 4,\ 1,\ 2,\ 0,\ 3,\ 3.$$

Недолік цього запису полягає в тому, що дані не впорядковані. Тому перепишемо їх:

$$0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4.$$

Цей запис зручніший для роботи, ніж вихідна таблиця. Проте його можна покращувати й далі.

Зауважимо, що в наведеній послідовності показників успішності є лише п'ять різних значень: 0 (для студентів, які не склали жодного екзамену хоча б на "добре"), 1, 2, 3 та 4 (для тих, хто всі екзамени склав на добрі оцінки). Але кожне з цих значень зустрічається кілька разів. Наприклад, у послідовності є два значення 0 (тобто у групі два явно слабких студенти). Тому природно підрахувати, як *часто* кожний показник успішності зустрічається в послідовності. Дані зведемо в таблицю.

Показник успішності (кількість добрих оцінок)	0	1	2	3	4
Кількість студентів з таким показником	2	2	4	4	3

У цій таблиці акумульовано всю інформацію, що може бути потрібною для аналізу успішності групи. Мало того, як побачимо далі, ця таблиця вже сама є характеристикою вихідної сукупності.

Принагідно зауважимо, що остання таблиця не набагато менша від вихідної. Разом з тим у разі дослідження успішності всього курсу — а це може бути близько 100 осіб — вихідна таблиця була б суттєво більшою, а результуюча не змінилася б.

Опишемо наведену процедуру формальніше.

Означення 2.13. Нехай вивчаємо сукупність статистичних даних $X_1, X_2, \ldots, X_n$, які вимірюються за числовою шкалою. Запишемо цю сукупність у порядку збільшення її елементів. Отриману послідовність називають *варіаційним рядом* [1].

[1]Це поняття можна сформулювати для даних, які вимірюються хоча б за порядковою шкалою.

Загалом окремі значення у варіаційному ряду можуть повторюватись. Отже, необхідно розрізняти два поняття: елемента варіаційного ряду та значення у варіаційному ряду. Два різних елементи можуть мати одне й те саме числове значення.

Означення 2.14. Нехай необхідно дослідити деяку ознаку сукупності об'єктів. Ця ознака може набувати певних значень. Нехай після обчислення значень ознаки для кожного об'єкта сукупності та їх впорядкування побудовано варіаційний ряд сукупності. Можливі значення ознаки, за якою вимірюються об'єкти сукупності, називають *варіантами* утвореного варіаційного ряду. Варіанти позначатимемо малими латинськими буквами.

Кожна варіанта може зустрічатись у варіаційному ряду кілька разів або жодного разу. Розглянемо найважливіше поняття цього підрозділу.

Означення 2.15. Кількість значень варіанти у варіаційному ряду називають її *частотою.*

Зауважимо, що сума частот усіх варіант дорівнює обсягу варіаційного ряду.

Приклад 2.4.2. Повертаючись до прикладу 2.4.1, опишемо виконану процедуру за новими термінами. З метою аналізу успішності студентської групи варіаційний ряд сформовано за вихідними даними про індивідуальні успішності, визначено його варіанти (0, 1, 2, 3 або 4 екзамени, успішно складені студентом) і частоти цих варіант. Результати оформимо у вигляді таблиці.

Показник успішності (кількість добрих оцінок)	0	1	2	3	4
Кількість студентів з таким показником	2	2	4	4	3

Припустимо, маємо дуже велику сукупність даних. Кожне значення в цій сукупності може повторюватись багато разів. Якщо випадково вибиратимемо з цієї сукупності дані, то деякі значення зустрічатимуться частіше від інших. Іншими словами, частота характеризує якою мірою ймовірніше можна вибрати одне значення, ніж інші. Що більша частота значення, то вища ймовірність вибору цього значення.

Проте частота і ймовірність — характеристики різної природи. На відміну від частоти ймовірність є абстрактним поняттям. Для того щоб отримати для варіант аналог поняття ймовірності, використовують такий підхід.

Означення 2.16. Нехай вивчаємо варіаційний ряд деякої сукупності обсягом N і дані цього ряду вимірюються за шкалою, яка має m варіант $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Тоді *відносною частотою*, або *частістю*, варіанти в цьому варіаційному ряду називають відношення її частоти до обсягу ряду N.

Якщо досліджується варіаційний ряд обсягом N з можливими варіантами $x_1, x_2, \ldots, x_m$, то частоту варіанти x_i зазвичай позначають n_i, а її відносну частоту — w_i. Тепер поняття відносної частоти можна записати компактніше:

$$w_i = \frac{n_i}{N},$$

де i — номер варіанти x_i.

Зауважимо, що сума відносних частот усіх варіант варіаційного ряду дорівнює 1, а кожна відносна частота перебуває в межах від 0 до 1. Останній факт часто використовують для запису відносних частот у відсотках. Нагадаємо, що для запису у відсотках числа з інтервалу $[0;1]$ потрібно помножити його на 100 %.

Приклад 2.4.3. У прикладі 2.4.2 частоти варіант, тобто індивідуальних показників успішності 0, 1, 2, 3, 4, становили відповідно[1]

$$n_1 = 2,\ n_2 = 2,\ n_3 = 4,\ n_4 = 4,\ n_5 = 3.$$

Обчислимо відносні частоти:

$$N = 2 + 2 + 4 + 4 + 3 = 15;$$

$$w_1 = w_2 = \frac{2}{15} \approx 0{,}13;\ w_3 = w_4 = \frac{4}{15} \approx 0{,}27;\ w_5 = \frac{3}{15} = 0{,}2.$$

У відсотковому записі

$$w_1 = w_2 \approx 13\ \%;\ w_3 = w_4 \approx 27\ \%;\ w_5 = 20\ \%.$$

[1] Не плутайте порядкові номери частот з їх значеннями!

Приклад 2.4.4. Повернімося до прикладу 2.2.11, де розглядалася сукупність даних обсягом $N = 100$. Значеннями сукупності були індивідуальні кількості куплених за рік номерів журналу для опитаних респондентів. Ці кількості, а саме $0, 1, 2, \ldots, 12$, є варіантами відповідного варіаційного ряду. У прикладі 2.2.11 були наведені частоти цих варіант. Нагадаємо їх (для зручності в дужках вказано значення варіант):

$$n_1(0) = 40,\ n_2(1) = 15,\ n_3(2) = n_{11}(10) = 3,$$
$$n_4(3) = n_9(8) = n_{10}(9) = 2,$$
$$n_5(4) = n_6(5) = n_7(6) = n_8(7) = 1,$$
$$n_{12}(11) = 10,\ n_{13}(12) = 19.$$

Обчислимо відносні частоти варіант і запишемо їх у відсотках:

$$w_1 = \frac{n_1}{N} \cdot 100\,\% = \frac{40}{100} \cdot 100\,\% = 40\,\%,$$
$$w_2 = 15\,\%,\ w_3 = w_{11} = 3\,\%,\ w_4 = w_9 = w_{10} = 2\,\%,$$
$$w_5 = w_6 = w_7 = w_8 = 1\,\%,\ w_{12} = 10\,\%,\ w_{13} = 19\,\%.$$

Приклад 2.4.5. Повернімося до прикладу 2.2.9, де розглядалася сукупність річних прибутків 6 осіб. Нагадаємо значення цих прибутків (ум. од.):

$$150,\ 200,\ 200,\ 1250,\ 10000,\ 1000000.$$

Зауважимо, що наведена послідовність фактично є варіаційним рядом розглядуваної сукупності.

Поміркуємо, якими є варіанти цього ряду. Для цього слід визначити значення, яких може набувати сукупний річний прибуток особи. Зауважимо, що грошові суми прийнято визначати з точністю до двох десяткових цифр. Вважаючи випадок від'ємного річного балансу нульовим прибутком, значення прибутку вважатимемо невід'ємним. Разом з тим неможливо зазначити максимально можливе значення річного прибутку. Отже, варіанти досліджуваного варіаційного ряду утворюють таку нескінченну послідовність значень (ум. од.):

$$0;\ 0{,}01;\ 0{,}02;\ 0{,}03;\ 0{,}04, \ldots$$

Обчислимо частоти цих варіант, тобто кількість їх появ у ряду (для зручності опускаємо індекси і в дужках зазначаємо значення варіант):

$$n(100) = n(1250) = n(10000) = n(1000000) = 1,\ n(200) = 2.$$

Частоти решти варіант дорівнюють нулю.

Відносні частоти

$$w(100) = w(1250) = w(10000) = w(1000000) = \frac{1}{6} \cdot 100\ \% \approx 16{,}7\ \%;$$

$$w(200) = \frac{2}{6} \cdot 100\ \% \approx 33{,}3\ \%.$$

Відносні частоти решти варіант дорівнюють нулю.

Означення 2.17. *Емпіричним*, або *частотним*, *розподілом*[1] сукупності називають список варіант її варіаційного ряду разом з відповідними їм частотами і/або відносними частотами[2].

Як правило, емпіричні розподіли подають у табличному вигляді, записуючи в одному рядку (чи стовпчику) значення варіант, а у другому — їх частоти. Звісно, це застосовно лише за невеликої кількості нетривіальних (тобто з ненульовими частотами) варіант[3]. Для великої кількості нетривіальних варіант потрібно використовувати інші підходи (див. п. 2.4.4).

Зауважимо, що раніше для прикладів 2.2.10, 2.2.11, 2.4.2 та інших вже неодноразово було використано емпіричні розподіли для запису статистичних даних.

[1] У математичній статистиці такі розподіли називають *статистичними* розподілами вибірки.

[2] Поняття варіанти, частоти, відносної частоти і емпіричного розподілу можна дослівно перенести на випадок порядкової шкали. Мало того, якщо при означенні цих понять не використовувати проміжної побудови варіаційного ряду, а одразу формулювати їх для вихідної сукупності, то вони застосовні навіть для номінальної шкали.

[3] Іноді поняття варіанти звужують лише до значень ознаки, які зустрічаються у варіаційному ряду, нехтуючи тими, які могли б там зустрітись. Скажімо, у прикладі 2.4.5 варіантами можна було вважати лише значення 100, 200, 1250, 10000 і 1000000. Тоді з одного боку втрачається деяка інформація про вихідну сукупність (точніше, про ознаку, за якою вимірюються її дані), а з іншого — спрощується запис емпіричного розподілу.

2.4.2. Графічне зображення частотних розподілів

Як зазначалося, таблиця емпіричного розподілу дає майже повну інформацію про вихідну сукупність даних. Проте для зорового сприйняття табличні дані не дуже зручні. Для швидшого сприйняття основних властивостей частотного розподілу використовують графічні методи.

За допомогою графічного зображення розподілу можна як підкреслити найважливіші властивості вихідної сукупності, так і спотворити уявлення про них. При цьому спотворення часто здійснюють цілком свідомо з метою ввести в оману читачів звіту про досліджувані дані.

Наведемо три методи графічного зображення варіаційного ряду: за допомогою полігону, гістограми і кумуляти частот.

Полігон частот

Нехай за варіаційним рядом побудовано його емпіричний розподіл.

Варіанта	x_1	x_2	$\dots$	x_m
Частота	n_1	n_2	$\dots$	n_m
Відносна частота	w_1	w_2	$\dots$	w_m

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої послідовно з'єднують між собою точки

$$(x_1, n_1),\ (x_2, n_2), \dots,\ (x_m, n_m).$$

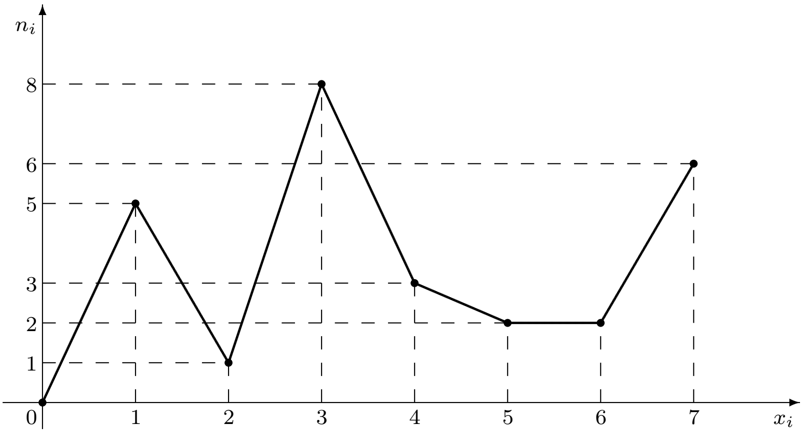
Так само *полігоном відносних частот* називають ламану, відрізки якої послідовно з'єднують між собою точки

$$(x_1, w_1),\ (x_2, w_2), \dots,\ (x_m, w_m).$$

Приклад 2.4.6. Нехай у групі з 27 осіб здійснено опитування, одним із запитань якого було таке: "Як часто ви відвідували кінотеатр минулого року?" За відповідями на це запитання було побудовано варіаційний ряд, варіантами якого були можливі кількості відвідувань кінотеатрів за рік. Емпіричний розподіл частот цього ряду наведено у вигляді таблиці (оскільки більше як 7 разів жодний з опитаних не відвідував кінотеатр, наведемо дані лише про варіанти, значення яких не перевищують 7).

Варіанта x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Частота n_i	0	5	1	8	3	2	2	6

Побудуємо за цим розподілом полігон частот[1]. Для цього на осі абсцис відкладемо значення варіант x_i, на осі ординат — значення відповідних їм частот n_i. Послідовно з'єднавши точки (x_i, n_i) відрізками, отримаємо ламану, що і є полігоном частот.



Полігон частот розподілу кількості відвідувань кінотеатрів за рік

Гістограма частот

Гістограмою частот емпіричного розподілу

Варіанта	x_1	x_2	...	x_m
Частота	n_1	n_2	...	n_m
Відносна частота	w_1	w_2	...	w_m

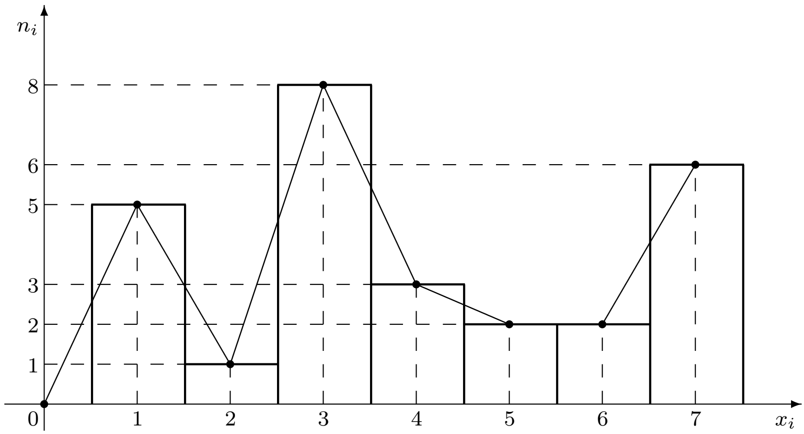
[1] Числові дані цього прикладу та зображення полігону частот взято з [15].

досліджуваного варіаційного ряду називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, які будують у такий спосіб. Для кожної варіанти x_i з ненульовою частотою у прямокутній системі координат будують прямокутник висотою n_i, основа якого лежить на осі абсцис так, щоб значення варіанти x_i розміщувались посередині основи.

Гістограма відносних частот будується подібно. При цьому висотами прямокутників є значення відносних частот w_i.

Зауважимо, що полігон (відносних) частот з'єднує середини вершин прямокутників гістограми (відносних) частот.

Приклад 2.4.7. Далі зображено гістограму частот для розподілу з прикладу 2.4.6 (тонка лінія — полігон частот).



Гістограма частот розподілу кількості відвідувань кінотеатрів за рік

Кумулята частот

Третім методом графічного зображення емпіричного розподілу є кумулята частот. Для опису поняття кумуляти частот попередньо потрібно сформулювати означення.

Означення 2.18. Нехай відомо емпіричний розподіл досліджуваного варіаційного ряду.

Варіанта	x_1	x_2	$\dots$	x_m
Частота	n_1	n_2	$\dots$	n_m
Відносна частота	w_1	w_2	$\dots$	w_m

Тоді *накопиченою частотою* варіанти x_i називають суму частот усіх варіант від x_1 до x_i. Накопичену частоту варіанти x_i позначають cn_i.

Запишемо означення поняття накопиченої частоти формулою:

$$cn_i = n_1 + n_2 + \dots + n_i.$$

Так само можна записати *накопичену відносну частоту* cw_i варіанти x_i:

$$cw_i = w_1 + w_2 + \dots + w_i.$$

Накопичені частоти варіант легко обчислити за допомогою таких очевидних співвідношень:

$$\begin{aligned}
cn_1 &= n_1,\\
cn_2 &= n_1 + n_2 = cn_1 + n_2,\\
cn_3 &= n_1 + n_2 + n_3 = (n_1 + n_2) + n_3 = cn_2 + n_3,\\
&\dots\dots\dots\\
cn_i &= cn_{i-1} + n_i,\\
&\dots\dots\dots\\
cn_m &= cn_{m-1} + n_m = N,
\end{aligned}$$

де $N = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ — обсяг вибірки.

Подібними є співвідношення і для накопичених відносних частот.

Крім того, співвідношення між накопиченими частостями[1] та частотами має такий вигляд:

$$cw_i = \frac{cn_i}{N}.$$

[1] Нагадаємо, що терміни “частість” і “відносна частота” є синонімами.

Тепер можна ввести поняття кумуляти. *Кумулятою частот* називають ламану, відрізки якої послідовно з'єднують точки

$$(x_1, cn_1),\ (x_2, cn_2), \ldots,\ (x_m, cn_m).$$

Так само *кумулятою відносних частот* називають ламану, відрізки якої послідовно з'єднують точки[1]

$$(x_1, cw_1),\ (x_2, cw_2), \ldots,\ (x_m, cw_m).$$

Приклад 2.4.8. Побудуємо кумуляту частот для розглядуваного у прикладі 2.4.6 частотного розподілу показника відвідування кінотеатрів. Для цього насамперед потрібно визначити накопичені частоти (для наочності в дужках наведено значення варіант):

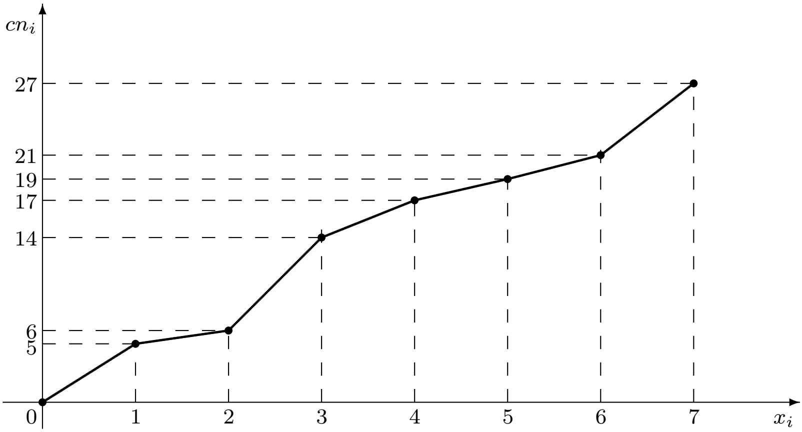
$$\begin{aligned}
&cn_1(0) = 0, && cn_2(1) = 0 + 5 = 5,\\
&cn_3(2) = 5 + 1 = 6, && cn_4(3) = 6 + 8 = 14,\\
&cn_5(4) = 14 + 3 = 17, && cn_6(5) = 17 + 2 = 19,\\
&cn_7(6) = 19 + 2 = 21, && cn_8(7) = 21 + 6 = 27.
\end{aligned}$$

Отже, потрібно послідовно з'єднати точки

$$(0, 0);\ (1, 5);\ (2, 6);\ (3, 14);\ (4, 17);\ (5, 19);\ (6, 21);\ (7, 27).$$

У результаті отримаємо кумуляту.

[1] Усі наведені графічні методи зображень (полігон, гістограма та кумулята частот) формально працюють лише для ознак, які вимірюються в числовій шкалі. Проте їх можна легко адаптувати для порядкової шкали. Зазвичай для цього значення порядкової шкали відкладають на осі абсцис на однаковій відстані одне від одного.



Кумулята частот розподілу кількості відвідувань кінотеатрів за рік

Вплив графічних зображень на уявлення про сукупність

Як зазначалося, графічні зображення емпіричного розподілу вихідної сукупності можуть не лише допомогти краще зрозуміти її основні властивості, а й спотворити уявлення про сукупність[1].

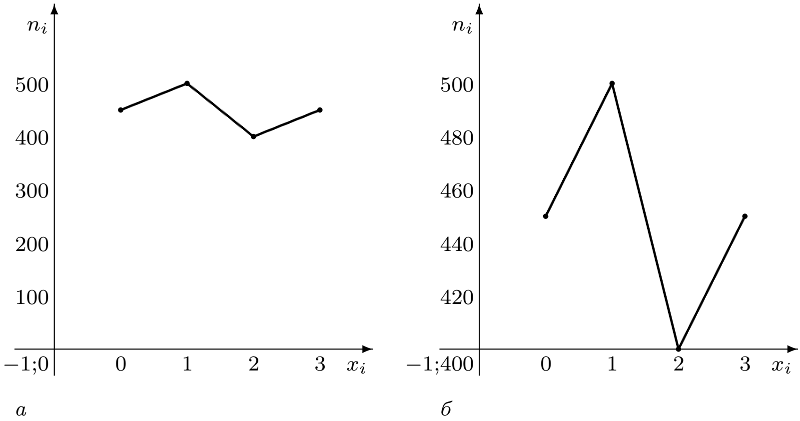
Проілюструємо наведене на прикладі.

Приклад 2.4.9. Припустімо, опитано 1800 сімей киян про кількість назв газет, які вони періодично купують. У результаті аналізу анкет отримано такий частотний розподіл цього показника.

Варіанта (кількість назв газет)	0	1	2	3
Частота (кількість сімей)	450	500	400	450

Наведемо графічне зображення полігону частот цього розподілу (див. рисунок *а*). Оскільки всі значення частот перебувають у межах від 400 до 500, полігон розміщується вгорі. Отже, втрачається багато корисної площі!

[1] Для того щоб краще навчитись використовувати графічні зображення статистичних даних, рекомендуємо переглянути відповідний параграф з [9].



Варіанти графічного зображення полігону частот розподілу кількості назв газет, які періодично купують 1800 київських сімей: *а* — абсолютна вісь ординат; *б* — локалізована вісь ординат

У цьому разі часто застосовують такий метод. На осі ординат передбачають лише ті значення частот, які зустрічаються в розподілі, тобто локалізують вісь ординат так, щоб графічне зображення повністю використовувало площу рисунка. При цьому зображення виходить деталізованішим завдяки збільшенню масштабу осі ординат.

Для розглядуваного випадку (оскільки $n = 400 \dots 500$) отримуємо інше зображення полігона частот (див. рисунок *б*).

Отже, маємо два зображення полігона частот. Яке з них краще? З позицій статистики обидва зображення рівноцінні. Тому для відповіді на поставлене запитання потрібно враховувати низку суб'єктивних факторів. Серед них виокремимо насамперед такий. Рисунок *а* на перший погляд створює враження рівномірності частот (тобто що вони мало різняться). Проте рисунок *б* одразу переконує, що частоти істотно різняться.

Тому якщо вважати, що частоти варіант різняться значно[1], слід використовувати рисунок *б*, а якщо неістотно — рисунок *а*.

[1] Чи бажати переконати в цьому інших!

На наш погляд, у розглянутому прикладі частоти різняться неістотно. Справді, вони відхиляються від середнього рівня щонайбільше на 10 %. Тому вважаємо, що в цій ситуації рисунок *б* швидше спотворює уявлення про розподіл, ніж допомагає зрозуміти його властивості.

2.4.3. Обчислення характеристик сукупності за допомогою розподілів

Якщо проаналізувати послідовність викладу матеріалу, може скластися враження, що при дослідженні статистичних сукупностей спочатку обчислюють значення основних числових характеристик сукупності і лише потім частотний розподіл сукупності. Проте на практиці все здійснюють навпаки: спочатку визначають і аналізують частотний розподіл, а потім за його допомогою — числові характеристики сукупності [1].

Далі розглянемо, як, попередньо визначивши емпіричний частотний розподіл сукупності, обчислити її основні числові характеристики. При цьому наведемо методи обчислення не тільки вже відомих величин, а й нових параметрів сукупностей.

Отже, нехай маємо емпіричний частотний розподіл варіаційного ряду сукупності обсягом N. Припустимо, його записано у вигляді таблиці.

Варіанта	x_1	x_2	...	x_m
Частота	n_1	n_2	...	n_m
Відносна частота	w_1	w_2	...	w_m

Опишемо, як за цими даними визначати числові характеристики сукупності [2].

[1] Дотримувана послідовність викладу матеріалу зумовлена лише методичними причинами.

[2] Нагадаємо, що

$$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$$

і для кожної варіанти x_i її відносна частота обчислюється за формулою

$$w_i = \frac{n_i}{N} = \frac{n_i}{n_1 + n_2 + \cdots + n_m}.$$

Обчислення пропорції

Найпростіше за емпіричним розподілом обчислити пропорції варіант. Справді, пропорція значення x_i становить

$$P(x_i) = \frac{n_i}{N} \cdot 100\,\% = w_i \cdot 100\,\%.$$

Іншими словами, якщо відсотки інтерпретувати як частки одиниці, то пропорції варіант збігаються з їх відносними частотами.

Обчислення моди

Так само просто визначати за емпіричним розподілом значення моди. Справді, оскільки мода — це таке значення в сукупності, яке зустрічається найчастіше, бачимо, що моду утворюють усі варіанти x_i, частоти n_i яких максимальні.

Обчислення середнього арифметичного

Нагадаємо, що середнє значення сукупності обчислюють за формулою

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}.$$

При цьому зауважимо, що X_i — не варіанти, а дані сукупності! Перегруповуючи дані X_i сукупності

$$\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{n_1 \text{ разів}}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{n_2 \text{ разів}}, \ldots, \underbrace{x_m, \ldots, x_m}_{n_m \text{ разів}},$$

отримуємо

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{1}{N}\bigl(\underbrace{x_1 + \cdots + x_1}_{n_1 \text{ разів}} + \underbrace{x_2 + \cdots + x_2}_{n_2 \text{ разів}} + \cdots + \underbrace{x_m + \cdots + x_m}_{n_m \text{ разів}}\bigr) = \\ &= \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_m x_m}{N} = \\ &= w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_m x_m.\end{aligned}$$

Випадок медіани

Для того щоб визначити медіану сукупності, найдоцільніше скористатися поняттям накопичених частот варіант. Нагадаємо, що накопичена частота варіанти x_i обчислюється за формулою

$$cw_i = w_1 + w_2 + \cdots + w_i.$$

Оскільки медіана — середній елемент сукупності з позицій їх впорядкованого розташування, а варіанти у варіаційному ряду впорядковані, то медіаною сукупності буде така варіанта x_i, для якої $cw_{i-1} < 0{,}5$, а $cw_i > 0{,}5$.

У разі рівності $cw_i = 0{,}5$ медіану обчислити дещо складніше. Її значення дорівнює

$$\frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

Обчислення середнього абсолютного відхилення

Як і в разі середнього значення, формули для обчислення середнього абсолютного відхилення $\overline{\Delta}$ можна вивести, попередньо перегрупувавши дані сукупності в порядку збільшення варіант:

$$\overline{\Delta} = \frac{n_1|x_1 - \overline{X}| + n_2|x_2 - \overline{X}| + \cdots + n_m|x_m - \overline{X}|}{N},$$

або

$$\overline{\Delta} = w_1|x_1 - \overline{X}| + w_2|x_2 - \overline{X}| + \cdots + w_m|x_m - \overline{X}|.$$

Обчислення дисперсії та стандартного відхилення

Одразу запишемо формулу для обчислення дисперсії:

$$\mathbf{D} = \frac{n_1(x_1 - \overline{X})^2 + n_2(x_2 - \overline{X})^2 + \cdots + n_m(x_m - \overline{X})^2}{N},$$

або

$$\mathbf{D} = w_1(x_1 - \overline{X})^2 + w_2(x_2 - \overline{X})^2 + \cdots + w_m(x_m - \overline{X})^2.$$

Раніше вже було виведено ще одну формулу для обчислення дисперсії [див. (2.1)]:

$$\mathbf{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2.$$

Скориставшись цією формулою, отримаємо інший вираз для обчислення дисперсії в термінах варіант:

$$\mathbf{D} = \frac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \cdots + n_m x_m^2}{N} - \overline{X}^2 = \\ = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + \cdots + w_m x_m^2 - \overline{X}^2.$$

Нагадаємо, що стандартне відхилення визначають за дисперсією, використовуючи формулу

$$\sigma = \sqrt{\mathbf{D}}.$$

Варіаційний розмах

За частотним розподілом так само легко обчислити варіаційний розмах сукупності:

$$R_{\text{var}} = x_m - x_1.$$

Справді, варіанта x_m — найбільше значення сукупності, а варіанта x_1 — найменше.

Асиметрія і ексцес емпіричного розподілу

Для характеристики властивостей емпіричного розподілу (а отже, і вихідної сукупності) крім наведених вже параметрів часто застосовують ще два, а саме коефіцієнт асиметрії та ексцес. У математичній статистиці ці поняття є похідними. З метою спрощення викладу наведемо означення, скориставшись практичним підходом, а саме навівши формули для їх обчислення.

Означення 2.19. *Коефіцієнт асиметрії* статистичної сукупності даних обчислюють за формулою

$$A = \frac{w_1(x_1 - \overline{X})^3 + w_2(x_2 - \overline{X})^3 + \cdots + w_m(x_m - \overline{X})^3}{\sigma^3}.$$

Означення 2.20. *Ексцес* статистичної сукупності даних обчислюють за формулою

$$E = \frac{w_1(x_1 - \overline{X})^4 + w_2(x_2 - \overline{X})^4 + \cdots + w_m(x_m - \overline{X})^4}{\sigma^4} - 3.$$

Коефіцієнт асиметрії і ексцес характеризують загальне розташування значень сукупності відносно середнього значення. При цьому за допомогою коефіцієнта асиметрії можна порівнювати кількості більших від середнього значень з меншими. А ексцес характеризує, які значення переважають у сукупності, близькі до середнього чи далекі від нього.

Роз'яснимо сказане. Залежно від знаку коефіцієнта асиметрії розрізняють три випадки[1].

$A \gg 0$. Якщо коефіцієнт асиметрії набагато більший від нуля, то більшість значень менші від середнього значення сукупності. Іншими словами, більшість значень розміщуються ліворуч середнього значення сукупності. У цьому разі кажуть про *лівосторонній частотний розподіл* (рис. 2.1, а).

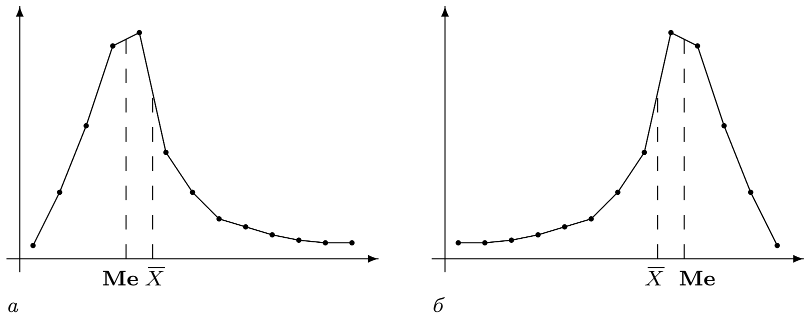


Рис. 2.1. **Графічне зображення полігонів частот залежно від значення коефіцієнта асиметрії: *а* — лівосторонній розподіл; *б* — правосторонній розподіл**

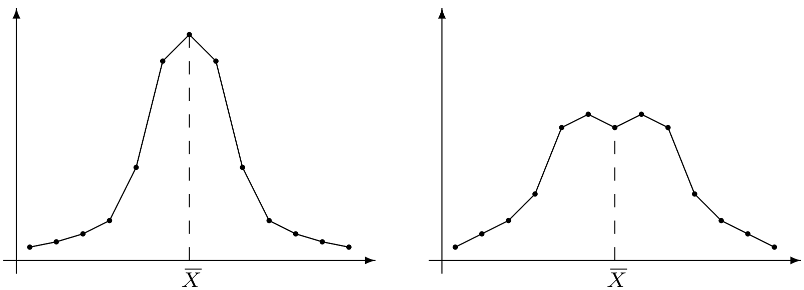
[1]Знаки "$\gg$", "$\ll$" та "$\approx$" означають відповідно "набагато більше", "набагато менше" та "приблизно дорівнює".

Якщо розглянути емпіричний частотний розподіл, то частоти лівих (менших) варіант загалом перевищують частоти правих (більших). Можна навести ще й таку інтерпретацію: для лівостороннього розподілу медіана розміщується ліворуч (тобто є меншою) середнього значення.

$A \ll 0$. Якщо коефіцієнт асиметрії значно менший від нуля, то більшість значень перевищують середнє значення, тобто розміщуються праворуч середнього значення сукупності. У цьому разі кажуть про *правосторонній частотний розподіл.* Частоти лівих (менших) варіант загалом менші від частот правих (більших), а медіана розміщується праворуч середнього значення (рис. 2.1, б).

$A \approx 0$. Якщо коефіцієнт асиметрії майже не відрізняється від нуля, маємо "симетричний" частотний розподіл сукупності. Медіана сукупності й середнє значення приблизно дорівнюють один одному, як і кількості значень, розташованих ліворуч та праворуч середнього значення.

Розглянемо тепер випадок ексцесу. Залежно від його знаку розрізняють два види розподілів (рис. 2.2).



а *б*

Рис. 2.2. **Графічне зображення полігонів частот залежно від значення ексцесу: *а* — додатний ексцес; *б* — від'ємний ексцес**

$E > 0$. У разі додатного ексцесу більшість значень сконцентровані близько до середнього (рис. 2.2, а). Тому мода і медіана сукупності неістотно відрізняються від середнього значення. Отже, середнє значення можна вважати середнім рівнем сукупності.

$E < 0$. У цьому разі в сукупності переважають крайні значення, розташовані далеко від середнього.

Якщо ексцес від'ємний, розподіл часто має два піки, розташовані ліворуч та праворуч середнього. Саме таку ситуацію наведено на рис. 2.2, б).

При цьому зауважимо, що розподіли з однаковим значенням стандартного відхилення можуть мати ексцеси різних знаків.

Умовні варіанти та їх використання

Часом при дослідженні сукупності $X_1, X_2, \ldots, X_N$ простіше аналізувати сукупність

$$CX_1 + B, CX_2 + B, \ldots, CX_N + B, \tag{2.2}$$

отриману множенням елементів вихідної сукупності на деяку константу C та додаванням до добутків іншої константи B. Такий підхід пов'язаний з існуванням простих формул для обчислення основних характеристик сукупності (2.2).

Позначимо CX сукупність, отриману множенням елементів вихідної сукупності на константу C, а $X + B$ — сукупність, отриману додаванням до елементів сукупності X константи B. Тоді

$$\overline{CX} = C\overline{X}, \qquad \overline{X + B} = \overline{X} + B, \tag{2.3}$$

$$\sigma(CX) = C\sigma, \qquad \sigma(X + B) = \sigma, \tag{2.4}$$

де $\overline{X}$, σ — середнє значення та стандартне відхилення вихідної сукупності.

Покажемо, як можна отримати ці формули. Маємо

$$\overline{CX} = \frac{CX_1 + CX_2 + \cdots + CX_N}{N} = C\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N} = C\overline{X},$$

$$\overline{X + B} = \frac{(X_1 + B) + (X_2 + B) + \cdots + (X_N + B)}{N} =$$

$$= \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} + \frac{NB}{N} = \overline{X} + B.$$

Щоб отримати формули (2.4), скористаємося формулою (2.1):

$$\begin{aligned}
\sigma(CX) &= \sqrt{\overline{(CX)^2} - \overline{CX}^2} = \sqrt{\overline{C^2X^2} - (C\overline{X})^2} = \\
&= \sqrt{C^2\overline{X^2} - C^2\overline{X}^2} = C\sqrt{\overline{X^2} - \overline{X}^2} = C\sigma, \\
\sigma(X+B) &= \sqrt{\overline{(X+B)^2} - \overline{X+B}^2} = \\
&= \sqrt{\overline{X^2 + 2XB + B^2} - (\overline{X} + B)^2} = \\
&= \sqrt{\overline{X^2} + 2B\overline{X} + B^2 - \overline{X}^2 - 2B\overline{X} - B^2} = \\
&= \sqrt{\overline{X^2} - \overline{X}^2} = \sigma.
\end{aligned}$$

Нехай початкова сукупність даних породжує такий статистичний розподіл.

Варіанта	x_1	x_2	...	x_m
Частота	n_1	n_2	...	n_m

В окремих випадках такий розподіл вдається спростити, використовуючи заміну:

$$u_1 = \frac{x_1 - B}{C}, u_2 = \frac{x_2 - B}{C}, \dots, u_m = \frac{x_m - B}{C},$$

де B, C — спеціально підібрані константи.

Тоді u_i називають *умовними варіантами*, а розподіл

Варіанта	u_1	u_2	...	u_m
Частота	n_1	n_2	...	n_m

умовним статистичним.

Легко побачити, що

$$x_1 = Cu_1 + B, x_2 = Cu_2 + B, \dots, x_m = Cu_m + B.$$

Позначимо $\overline{U}$ та $\sigma(U)$ відповідно середнє значення та стандартне відхилення умовного статистичного розподілу. Тоді, використовуючи формули (2.3), (2.4), отримуємо

$$\begin{aligned} \overline{X} &= C\overline{U} + B; \\ \sigma &= C\sigma(U). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Отримані формули доцільно використовувати тоді, коли середнє значення та стандартне відхилення обчислюються для умовного статистичного розподілу простіше, ніж для вихідного.

Приклад 2.4.10. Нехай у деякій компанії працює 1000 працівників. За кваліфікацією вони поділяються на 5 категорій. Працівники кожної категорії мають чітко визначений контрактом місячний оклад: 1100, 1200, 1300, 1400 або 1500 грн. Чисельність працівників у порядку зростання їх кваліфікації відповідно 250, 350, 200, 150 та 50.

Припустимо, необхідно дослідити основні характеристики наведеної сукупності окладів працівників, а саме її середнє значення та стандартне відхилення. Запишемо статистичний розподіл сукупності.

Варіанта	1100	1200	1300	1400	1500
Частота	250	350	200	150	50

Спростимо цей статистичний розподіл. Оскільки найбільше працівників (350 осіб) отримує оклад 1200 грн, то природно від усіх варіант відняти значення 1200. Мало того, як бачимо, усі оклади кратні 100 грн. Тому для спрощення обчислень зручно поділити всі варіанти на 100.

Отже, побудуємо умовні варіанти за формулою

$$u_i = \frac{x_i - 1200}{100}.$$

Отримаємо умовний статистичний розподіл U.

Варіанта	-1	0	1	2	3
Частота	250	350	200	150	50

Для цього розподілу вже легко обчислити середнє значення $\overline{U}$ та стандартне відхилення $\sigma(U)$. Справді, середнє значення

$$\overline{U} = \frac{250 \cdot (-1) + 350 \cdot 0 + 200 \cdot 1 + 150 \cdot 2 + 50 \cdot 3}{1000} = \frac{400}{1000} = 0{,}4.$$

Стандартне відхилення обчислюємо за допомогою формули (2.1):

$$\sigma(U) = \sqrt{\frac{250 \cdot (-1)^2 + 350 \cdot 0^2 + 200 \cdot 1^2 + 150 \cdot 2^2 + 50 \cdot 3^2}{1000} - 0{,}4^2} = \\ = \sqrt{\frac{1500}{1000} - 0{,}16} = \sqrt{1{,}34} \approx 1{,}16.$$

Тепер легко обчислити середнє значення $\overline{X}$ та стандартне відхилення σ вихідної сукупності за формулами (2.5):

$$\overline{X} = 100\overline{U} + 1100 = 100 \cdot 0{,}4 + 1100 = 1140;$$
$$\sigma = 100\sigma(U) \approx 100 \cdot 1{,}16 = 116.$$

2.4.4. Інтервальні розподіли

Нагадаємо (див. п. 1.3.3), що однією з класифікацій числових шкал є їх поділ на дискретні та неперервні. Теоретично у вигляді таблиці можна записати лише варіаційний ряд, значення якого вимірюються за дискретною шкалою. Неперервна шкала має нескінченну кількість значень, і тому принципово неможливо зобразити у вигляді таблиці варіаційний ряд, значення якого вимірюються за неперервною шкалою.

На практиці поділ на дискретні та неперервні шкали доволі умовний. Адже точність будь-яких вимірювань обмежується технічними можливостями конкретних вимірювальних приладів чи технік вимірювання. З позицій практики будь-яка числова шкала дискретна.

Проте проблема зображення варіаційного ряду у вигляді таблиці залишається. З практичних позицій вона полягає в тому, що розмір таблиці, яку можна побудувати, обмежений, наприклад, форматом книги чи звіту. Тому, якщо статистичний розподіл містить надто багато варіант, потребується інший підхід для його компактного запису.

Цю проблему можна розв'язати, скориставшись інтервальними розподілами. Побудова інтервального розподілу варіаційного ряду полягає в тому, що множина всіх варіант розбивається на інтервали і підлічуються значення сукупності, що потрапляють до кожного інтервалу.

Означення 2.21. Розглянемо ознаку сукупності, яка вимірюється за числовою шкалою. Зафіксуємо деякі числа:

$$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1} < a_k.$$

Інтервальним розподілом сукупності, який породжується числами $a_0, a_1, \ldots, a_k$, називають таблицю

0-й інтервал	1-й інтервал	2-й інтервал	...	k-й інтервал	$(k+1)$-й інтервал
$(-\infty; a_0]$	$(a_0; a_1]$	$(a_1; a_2]$	...	$(a_{k-1}; a_k]$	$(a_k; +\infty)$
n_0	n_1	n_2	...	n_k	n_{k+1}

У цій таблиці ∞ — символ нескінченності; інтервал $(a; b]$ складається з усіх значень, що перевищують a та не перевищують b; $n_0, n_1, \ldots, n_{k+1}$ — кількість значень сукупності, що потрапляють до відповідних інтервалів. Числа n_i називатимемо *інтервальними частотами.*

Теоретично при побудові інтервального розподілу числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ можна вибирати довільно. Практично ж їх підбирають так, щоб таблиця інтервального розподілу була якомога зрозумілішою. При цьому довжину внутрішніх (обмежених) інтервалів зазвичай беруть одну[1].

Зауважимо, що при переході від звичайного розподілу до інтервального частина інформації про вихідну сукупність втрачається. Іншими словами, унаочнення запису розподілу супроводжується втратою повноти інформації про нього. Тому важливо вміти формувати

[1]Інший підхід до побудови інтервального розподілу полягає в тому, що інтервали підбирають так, щоб інтервальні частоти були однакові.

інтервальний розподіл так, щоб він якнайкраще відображав властивості досліджуваної сукупності. Цьому допомагають прості формули.

Зрозуміло, що зі збільшенням інтервалів в інтервальному розподілі зменшуватимуться втрати інформації. Проте для наочності запису доцільніше використовувати менше інтервалів. Як знайти золоту середину між цими двома крайнощами? Для відповіді на це запитання опишемо такий підхід. Нехай вихідна сукупність має обсяг N. Тоді оптимальна кількість внутрішніх інтервалів[1]

$$k_{\text{опт}} = \lceil 1 + 3{,}2 \lg N \rceil, \tag{2.6}$$

де $\lceil \cdot \rceil$ — операція округлення до більшого цілого; lg — функція десяткового логарифму.

Позначимо $X_{\max}$ та $X_{\min}$ значення сукупності відповідно найбільше та найменше. Тоді оптимальна довжина внутрішніх інтервалів

$$h_{\text{опт}} = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{k_{\text{опт}}}.$$

При цьому довжина інтервалу може вийти якою завгодно. На практиці її добирають такою, щоб таблиця інтервального розподілу була якомога зрозумілішою. Наприклад, $h_{\text{опт}}$ роблять кратним 5 або 10. При такому підході для вибору оптимального інтервального розподілу замість формули (2.6) використовують формулу

$$h_{\text{опт}} = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{1 + 3{,}2 \lg N}. \tag{2.7}$$

Проаналізуємо, як наведений підхід розв'язує поставлене завдання якомога компактнішого запису вихідної сукупності. З формули (2.6) бачимо, що кількість інтервалів в оптимальному інтервальному розподілі дорівнює

$$\lceil 1 + 3{,}2 \lg N \rceil + 2 = 3 + \lceil 3{,}2 \lg N \rceil.$$

[1] Загальна кількість інтервалів разом з двома крайніми необмеженими становитиме $k_{\text{опт}} + 2$.

В останній формулі враховано два зовнішніх нескінченних інтервали.

Припустимо, що обсяг вихідної сукупності дорівнює 100. Тоді для запису інтервального розподілу необхідна кількість інтервалів

$$3 + \lceil 3{,}2 \lg 100 \rceil = 3 + \lceil 3{,}2 \cdot 2 \rceil = 3 + 7 = 10.$$

Нехай тепер обсяг сукупності дорівнює 1000. Тоді загальна кількість стовпчиків у таблиці інтервального розподілу становитиме

$$3 + \lceil 3{,}2 \lg 1000 \rceil = 3 + \lceil 3{,}2 \cdot 3 \rceil = 3 + 10 = 13.$$

Насамкінець зауважимо, що дані в таблицю інтервального розподілу зручніше записувати вертикально, а не горизонтально.

Графічні зображення інтервальних розподілів

Полігон, гістограму та кумуляту частот можна будувати і для інтервальних розподілів.

При побудові полігону або кумуляти частот інтервального розподілу використовують поняття *середньої точки інтервалу*. При цьому середні точки внутрішніх інтервалів є серединами відповідних відрізків. Наприклад, середня точка інтервалу $(a_{i-1}; a_i]$ дорівнює

$$\frac{a_{i-1} + a_i}{2}.$$

Для зовнішніх необмежених інтервалів вони обчислюються так: середня точка інтервалу $(-\infty; a_0]$ становить

$$a_0 - \frac{h}{2},$$

а інтервалу $(a_k; +\infty)$ —

$$a_k + \frac{h}{2},$$

де h — довжина внутрішніх інтервалів.

Полігон частот будують, послідовно з'єднуючи точки вигляду

(середня точка інтервалу; інтервальна частота), а кумуляту — послідовно з'єднуючи точки вигляду[1]

(середня точка інтервалу; накопичена інтервальна частота).

Гістограму частот інтервального розподілу будують, викреслюючи прямокутники, основами яких є інтервали розподілу довжиною h[2], а висота кожного з них дорівнює відношенню n_i/h. Отже, площа i-го прямокутника дорівнює

$$h\frac{n_i}{h} = n_i,$$

тобто i-й інтервальній частоті.

Площа гістограми частот дорівнює сумі всіх частот, тобто обсягу вихідної сукупності.

Приклад 2.4.11. На один з факультетів вищого навчального закладу було зараховано 100 студентів. Перед зарахуванням кожний з них мав співбесіду з психологом. Одним з елементів співбесіди був IQ-тест, результати якого (IQ-індекси першокурсників у порядку збільшення) наведені в таблиці.

81	95	102	108	111	115	118	123	129	134
86	96	102	108	112	115	118	125	129	135
87	97	102	108	112	115	119	125	130	138
87	97	103	109	112	115	119	125	130	138
87	100	105	110	112	116	120	125	130	140
92	100	105	110	112	116	120	126	130	147
92	101	106	110	113	116	120	128	131	148
93	101	106	110	113	116	120	128	131	149
93	101	106	110	114	116	122	129	132	149
93	102	107	111	114	117	123	129	132	149

Для розрахунку оптимального співвідношення педагогічного навантаження між навчальними дисциплінами потрібно проаналізува-

[1] Накопичені інтервальні частоти обчислюються подібно до накопичених частот звичайних розподілів.

[2] При цьому зовнішні необмежені інтервали замінюють інтервалами $(a_0-h; a_0]$ і $(a_k; a_k+h]$.

ти розподіл цих даних. Зрозуміло, що такий аналіз зручніше здійснювати, попередньо побудувавши інтервальний розподіл. Знайдемо його.

Маємо

$$X_{\min} = 81;$$
$$X_{\max} = 149.$$

За формулою (2.7) теоретична оптимальна довжина інтервалів

$$h_{\text{опт}} = \frac{149 - 81}{1 + 3{,}2 \lg 100} = \frac{68}{7{,}4} \approx 9{,}2.$$

Оскільки значення $h_{\text{опт}}$ близьке до 10, довжину інтервалів природно взяти такою, що дорівнює 10. Мало того, тоді отримаємо інтервали вигляду

$$(81; 91], (91; 101], \ldots$$

Проте наочніше працювати з інтервалами

$$(80; 90], (90; 100], \ldots!$$

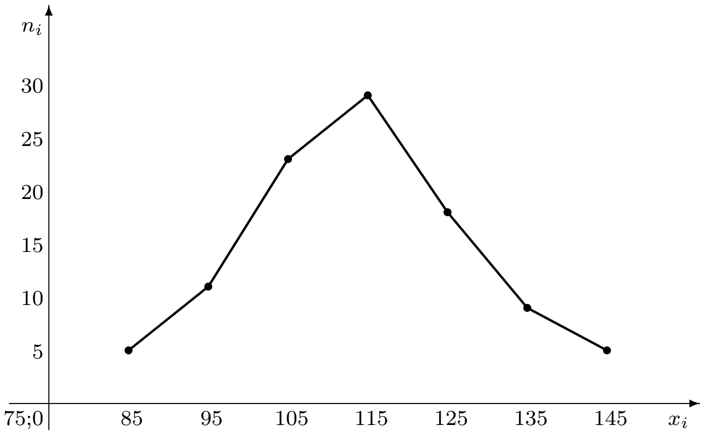
Тому будуватимемо інтервальний розподіл за інтервалами

$$(-\infty; 90],\ (90; 100],\ (100; 110],\ (110; 120],$$
$$(120; 130],\ (130; 140],\ (140, +\infty).$$

Розрахувавши інтервальні частоти, остаточно отримаємо таблицю інтервального розподілу, дані в яку запишемо у стовпцях.

Інтервал	Середня точка	Частота
$(-\infty; 90]$	85	5
$(90; 100]$	95	11
$(100; 110]$	105	23
$(110; 120]$	115	29
$(120; 130]$	125	18
$(130; 140]$	135	9
$(140; +\infty)$	145	5

Використовуючи середні точки інтервалів, побудуємо полігон частот цього розподілу (див. рисунок).



Полігон частот розподілу IQ-індексу 100 першокурсників

З інтервального розподілу, наприклад, випливає, що 70 % студентів мають IQ у межах 100–130 балів, у 5 % IQ не перевищує 90 балів. З полігону частот бачимо, що основна маса даних розміщується симетрично в околі "піку" 115 балів.

Висновки

Результати аналізу статистичної сукупності даних прийнято записувати у вигляді короткого звіту, в якому насамперед вказують значення найважливіших характеристик, найчастіше середнього рівня сукупності та розсіювання даних у сукупності. В окремих задачах основними характеристиками є пропорції значень сукупності.

З усереднених показників з низки причин найчастіше використовують середнє значення. Проте часом середній рівень краще описувати за допомогою моди або медіани. Крім того, іноді не можна віддати перевагу жодній з цих трьох характеристик. А найзручніше працювати із сукупностями, в яких середнє значення, мода та медіана приблизно збігаються.

Як правило, лише усереднених показників недостатньо для якісного опису сукупності. Насамперед це пов'язано з тим, що дані навколо середнього рівня можуть групуватися по-різному. Багато статистичних показників характеризують рівень розсіювання даних навколо середнього рівня. З них найчастіше застосовують стандартне відхилення і пов'язану з ним дисперсію. Часто використовують також середнє абсолютне відхилення. Меншою мірою у статистиці використовують коефіцієнт варіації та варіаційний розмах.

Найкраще уявлення про сукупність дає її частотний розподіл. При цьому його можна зобразити за допомогою як таблиць, так і графіків. Найуживанішими графічними зображеннями частотних розподілів є полігон, гістограма та кумулята частот. В окремих випадках для повнішого опису частотного розподілу використовують ще дві характеристики — коефіцієнт асиметрії і ексцес.

За великої досліджуваної сукупності таблиця емпіричного розподілу може виявитися надто громіздкою. У цьому разі у звіт включають таблицю і/або графічні зображення інтервального розподілу.

Ключові поняття

Абсолютне відхилення
Варіанта
Варіаційний ряд
Відносна частота
Відносне відхилення
Гістограма частот
Дисперсія
Ексцес
Емпіричний частотний розподіл
Інтервальна частота
Інтервальний частотний розподіл
Коефіцієнт асиметрії
Коефіцієнт варіації
Кумулята частот
Медіана
Міри розсіювання
Мода
Накопичена частота
Полігон частот
Пропорція
Розмах варіації
Середнє абсолютне відхилення
Середнє арифметичне
Стандартне відхилення
Умовні варіанти
Усереднені показники
Частота

Вправи

1. У групі з 20 осіб здійснили анонімне опитування про середню кількість годин на тиждень, які вони витрачають на власні потреби в робочий час. Отримані дані зведено в таблицю.

Номер у списку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Час щотижневих "прогулів", год	0	1	3	2	6	0	0	1	3	3
Номер у списку	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Час щотижневих "прогулів", год	2	5	4	0	2	3	1	1	0	5

Обчислити середнє значення, моду, медіану та стандартне відхилення цієї сукупності.

2. Таке саме дослідження, як у вправі 1, було здійснено для сукупності з 200 осіб. Результати наведено у вигляді частотного розподілу.

Час щотижневих "прогулів", год	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Кількість осіб	25	23	17	5	4	6	30	48	42

Обчислити середнє значення, моду, медіану та стандартне відхилення цієї сукупності.

3. Порівняти коефіцієнти варіації для сукупностей даних з вправ 1 та 2.

4. Навести приклади шести сукупностей даних, кожна з яких має відповідну властивість:

$$\text{мода} < \text{медіана} < \text{середнє значення};$$
$$\text{мода} < \text{середнє значення} < \text{медіана};$$
$$\text{середнє значення} < \text{медіана} < \text{мода};$$
$$\text{медіана} < \text{середнє значення} < \text{мода};$$
$$\text{середнє значення} < \text{мода} < \text{медіана};$$
$$\text{медіана} < \text{мода} < \text{середнє значення}.$$

5. Навести приклад двох сукупностей з однаковим середнім значенням, які мають такі дві властивості: стандартне відхилення першої сукупності перевищує стандартне відхилення другої; розмах варіації першої сукупності менший від розмаху варіації другої.

6. Нехай відомі звіти двох незалежних досліджень рівня прибутків громадян України. У першому з них середньомісячний прибуток у вибірці зі 100 громадян становив 139,3 ум. од. У другому дослідженні у вибірці обсягом 275 середньомісячний прибуток дорівнював 118,5 ум. од.

Обчислити середньомісячний прибуток в об'єднаній вибірці з 375 громадян.

7. Нехай відомі звіти двох незалежних досліджень президентського рейтингу популярності відомого політика. У першому з них пропорція його прихильників у вибірці з 1200 громадян дорівнює 23 %. У другому дослідженні у вибірці обсягом 875 громадян пропорція його прихильників становить 19,2 %.

Обчислити пропорцію прихильників політика в об'єднаній вибірці.

8. Навести приклад частотного розподілу, для якого коефіцієнт асиметрії менший від нуля, але медіана розміщується ліворуч середнього значення.

9. Нехай досліджується сукупність обсягом 216. Оцінити оптимальну кількість інтервалів, необхідну для запису її інтервального розподілу.

10. Побудувати гістограму, кумуляту та полігон частот сукупності із вправи 1.

Дослідницький проект

IQ-індекси індивідуумів з групи, що складається з 150 студентів економічних спеціальностей, наведено в таблиці.

111	105	106	136	118	99	117	117	97	113
115	113	127	127	108	110	89	111	110	130
117	114	109	106	130	109	117	115	101	108
117	112	97	106	109	132	128	108	123	108
108	123	98	121	128	104	115	111	117	118
101	135	117	108	109	115	134	127	116	136
86	121	106	103	112	118	129	139	114	89
114	102	107	111	117	108	103	118	123	116

135	112	107	125	121	110	109	116	106	111
118	121	116	111	117	129	102	118	111	131
121	129	117	121	117	107	117	95	115	121
126	124	119	119	115	123	111	99	124	129
109	127	115	128	112	114	133	119	133	130
98	116	118	109	110	109	109	103	97	123
117	87	118	97	118	111	119	125	124	115

Проаналізувати цю сукупність даних, виконавши такі завдання:

1. Побудувати частотний розподіл сукупності.
2. Обчислити моду, медіану та середнє значення, порівняти їх і дійти висновку про середній рівень IQ у групі.
3. Обчислити стандартне відхилення, середнє абсолютне відхилення, коефіцієнт варіації та розмах варіації. Порівняти їх значення і сформулювати висновок про ступінь розсіювання даних у сукупності.
4. Обчислити коефіцієнт асиметрії і ексцес сукупності. Інтерпретувати отримані значення.
5. Побудувати полігон частот сукупності.
6. Побудувати інтервальний частотний розподіл сукупності за допомогою формули (2.7). Побудувати гістограму частот інтервального розподілу.
7. Написати короткий звіт за результатами досліджень пп. 1–6.

Розділ 3

Основні статистичні розподіли

Раніше розглядалося, як будувати графічні зображення емпіричних частотних розподілів. Найважливішим з них, мабуть, варто вважати полігон частот. Зауважимо, що в більшості випадків полігон частот є ламаною лінією. Проте якщо варіант досліджуваної сукупності дуже багато, полігон інтервального[1] розподілу її варіаційного ряду зазвичай здаватиметься плавною, а не ламаною лінією.

Раніше вже йшлося про поділ числових шкал на дискретні та неперервні. При цьому зауважувалося, що на практиці фактично застосовують лише дискретні шкали. У теоретичних дослідженнях часто виникають модельні "сукупності", які вимірюють за неперервними шкалами. Полігони частот розподілів таких "сукупностей" є

[1] Якщо частоти сусідніх варіант варіаційного ряду відрізняються неістотно, то плавною лінією може здаватися навіть полігон вихідного неінтервального розподілу.

плавними неперервними кривими, а власне розподіли називають неперервними.

Отже, неперервні розподіли узагальнюють за формою полігонів частот як дискретні, так й інтервальні розподіли. Зауважимо також, що в інтервальних розподілах фактично інтерес становлять не частоти окремих варіант, а інтервальні частоти. У неперервних розподілах частота "варіанти" завжди нульова, тому щодо них взагалі доцільно казати тільки про інтервальні частоти.

Насправді при побудові неперервного розподілу інтерес становлять навіть не інтервальні частоти, а відносні інтервальні частоти. Коли йдеться про відносну інтервальну частоту деякого інтервалу $(a, b]$, фактично становить інтерес ймовірність потрапляння випадково взятої варіанти до інтервалу $(a, b]$.

Далі розглянемо кілька часто вживаних у статистиці форм теоретичних розподілів, як дискретних, так і неперервних.

При цьому зауважимо, що для неперервних розподілів неможливо визначити поняття середнього арифметичного через нескінченну кількість варіант і те, що їх частоти дорівнюють нулю. Замість нього в разі неперервних розподілів застосовують загальніше поняття математичного сподівання, яке зазвичай позначають символами μ або $\mathbf{M}$[1].

До того ж стандартне відхилення неперервного розподілу так само обчислюють за дещо складнішою формулою, ніж емпіричних розподілів. При цьому достатньо лише знати, що стандартне відхилення в обох випадках має один зміст і характеризує одні властивості розподілів.

Для графічного зображення неперервних розподілів використовують аналог полігону відносних частот емпіричного розподілу. Цей аналог називатимемо *кривою частот* розподілу, або просто *кривою* розподілу.

[1]Тут свідомо не наводитимемо означення математичного сподівання, оскільки не матимемо потреби прямо обчислювати його. Достатньо лише знати, що математичне сподівання — це "середнє арифметичне" неперервного розподілу.

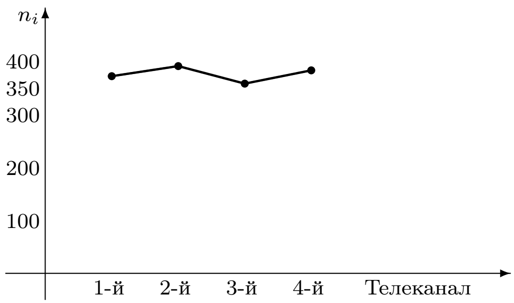
3.1. Різновиди форм емпіричних розподілів

Наведемо кілька прикладів, що свідчать про розмаїття форм кривих частот розподілів.

Приклад 3.1.1. Почнемо з найпростішої форми емпіричного розподілу. Припустимо, що в деякій країні є чотири національних телеканали. Нехай деяка соціологічна служба здійснила опитування 1500 респондентів з тим, щоб з'ясувати, якому національному телеканалу вони віддають перевагу. Дані дослідження наведено в таблиці.

Телеканал	1-й	2-й	3-й	4-й
Кількість респондентів, які віддають йому перевагу n_i	371	390	357	382

Побудуємо полігон частот цього розподілу.



Полігон частот розподілу оцінки рейтингу чотирьох національних телеканалів

Як бачимо, полігон частот розглядуваного розподілу мало відрізняється від прямої лінії. Це пов'язано з тим, що уподобання щодо телеканалів опитаної аудиторії розділилися майже порівну.

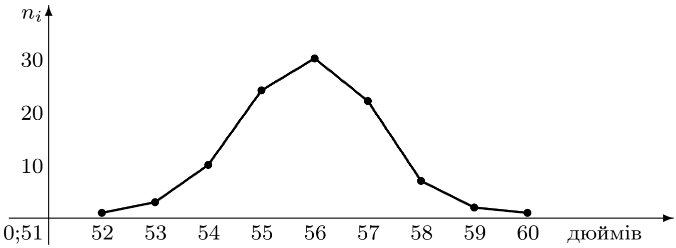
На практиці подібні випадки рідкісні. Якщо ж таке трапляється, то постає питання, чи має хоча б одна з варіант (у розглядуваному прикладі один з телеканалів) реальну перевагу над іншими.

Теоретичні розподіли такої простої форми розглянемо в підрозділі 3.2.

Приклад 3.1.2. Розглянемо ідеальну з позицій статистики криву частот. Наведемо дані про зріст випадково вибраних 100 десятирічних хлопчиків з прикладу 2.2.10.

Зріст X, дюймів	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Кількість хлопчиків	1	3	10	24	30	22	7	2	1

Побудуємо полігон частот цього розподілу.



Полігон частот розподілу зросту 100 десятирічних хлопчиків

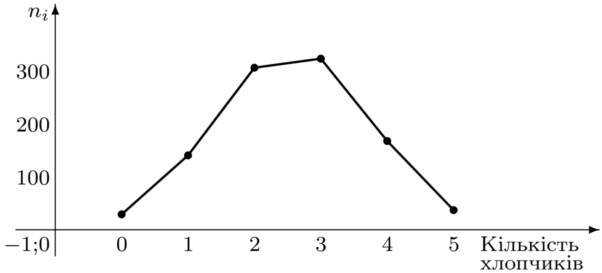
Виразно бачимо, що середній рівень вихідної сукупності становить 56 дюймів. При цьому крива частотного розподілу симетрична щодо цього рівня. Крім того, хлопчиків, зріст яких значно відрізняється від середнього рівня, небагато і їх кількість швидко зменшується при значному відхиленні від середнього рівня. Розподіли схожої форми часто називають *куполоподібними*. Теоретичні моделі таких розподілів розглянемо в підрозділі 3.3.

Приклад 3.1.3. Наведемо дані дослідження кількості хлопчиків у групі з 1000 сімей, що мають п'ятьох дітей[1].

Кількість хлопчиків	0	1	2	3	4	5
Кількість сімей	29	140	305	322	167	37

[1] Ідею прикладу взято з [25].

Побудуємо полігон частот розподілу цієї сукупності.



Полігон частот розподілу кількості хлопчиків у 1000 сім'ях з п'ятьма дітьми

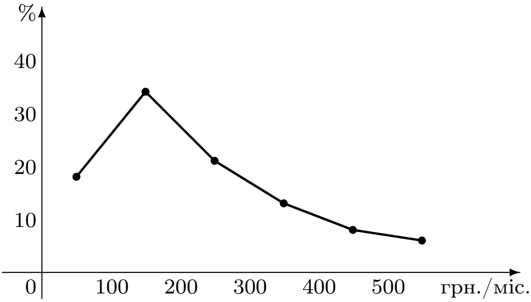
Як бачимо, за формою полігон, як і у прикладі 3.1.2, куполоподібний. Проте наведений розподіл має іншу природу. Вона пов'язана зі структурою досліджуваної ознаки. Маємо властивість дітей "стать", яка може приймати лише два значення — "хлопчик" або "дівчинка", і вивчаємо ознаку, яка полягає в розрахунку кількості появ одного з цих значень — "хлопчик" — у групах з фіксованою кількістю дітей, а саме в сім'ях з п'ятьма дітьми.

Теоретичні розподіли подібних ознак розглянемо в підрозділі 3.4.

Приклад 3.1.4. Нехай деяка соціологічна служба досліджувала рівень щомісячних прибутків громадян України. У результаті аналізу даних опитування випадкової вибірки громадян було отримано такий інтервальний розподіл.

Інтервал, грн./міс.	< 100	$[100; 200)$	$[200; 300)$	$[300; 400)$	$[400; 500)$	$\geqslant 500$
Серединна точка інтервалу, грн./міс.	50	150	250	350	450	550
Відсоток опитаних	18	34	21	13	8	6

Побудуємо полігон частот цього розподілу, з якого виразно бачимо асиметричність вихідного розподілу. Значний відсоток опитаних має низький рівень доходів і лише невелика частина — середній або високий рівень доходів.

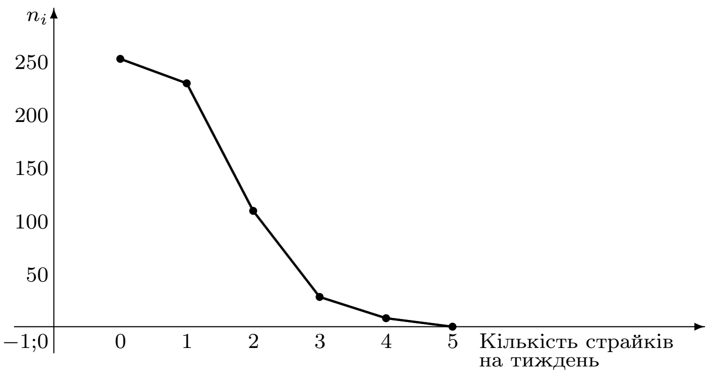


Полігон частот розподілу рівня щомісячних прибутків громадян України

Приклад 3.1.5. Наведемо статистичні дані про кількість страйків на тиждень у Великобританії за період з 1948 по 1959 р.[1].

Кількість страйків на тиждень	0	1	2	3	4	5 або більше
Кількість тижнів	252	229	109	28	8	0

Побудуємо полігон частот цього розподілу.



Полігон частот розподілу кількості страйків на тиждень у Великобританії за період з 1948 по 1959 р.

[1] Інформацію взято з [25].

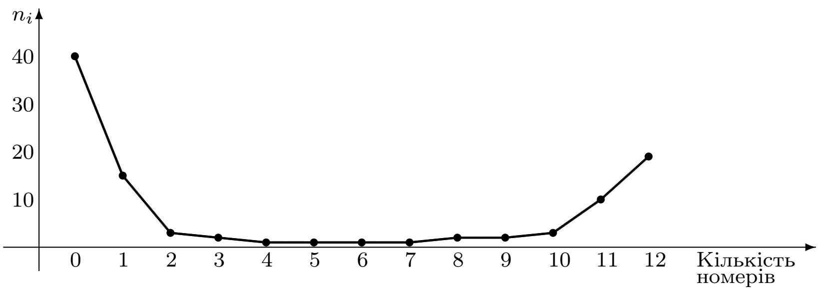
Як і у прикладі 3.1.4, маємо здебільшого малі значення ознаки, а саме 0, 1 або 2 страйки на тиждень, і дуже рідко — середні та великі.

Про ознаки, які мають подібні до прикладів 3.1.4 і 3.1.5 властивості, кажуть, що вони підпорядковані закону виняткових подій [1]. Теоретичні розподіли, які описують схожі властивості, розглянемо в підрозділі 3.5.

Приклад 3.1.6. Нагадаємо дані опитування потенційних читачів одного щомісячного журналу з прикладу 2.2.11. У таблиці наведено частотний розподіл відповідей на таке запитання: "Яку кількість номерів нашого журналу Ви купили минулого року?"

Кількість куплених номерів	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кількість опитаних	40	15	3	2	1	1	1	1	2	2	3	10	19

Побудуємо полігон частот цього розподілу.



Полігон частот розподілу кількості куплених номерів журналу протягом року

Як бачимо, вихідна сукупність має два виразних "піки" — більшість опитаних або читають журнал регулярно, або практично не читають його. Схожі за формою розподіли часто називають *U-подібними.* Теоретичні моделі таких розподілів розглянемо в підрозділі 3.6.

[1] Точніше, розподіл з прикладу 3.1.4 можна вважати підпорядкованим закону виняткових подій, якщо середній прибуток вимірювати в масштабі 100 грн/міс.

Одним з найважливіших завдань статистики є опис частотних розподілів, які виникають на практиці, за допомогою невеликої кількості модельних теоретичних розподілів. Іншими словами, вивчаючи деяку сукупність даних, соціолог чи психолог намагається підібрати деякий теоретичний розподіл, який якнайкраще описуватиме емпіричний розподіл сукупності. Вибравши такий теоретичний модельний розподіл $f_{\text{т}}$, дослідник повинен перевірити його узгодженість з емпіричним. Якщо теоретичний розподіл добре узгоджується з емпіричними даними, то кажуть, що досліджуваний емпіричний розподіл *поводиться* як $f_{\text{т}}$.

Розглянемо невеликий набір модельних розподілів, які найчастіше зустрічаються у прикладному соціологічному або психологічному дослідженні, а методи перевірки узгодженості розподілів — у підрозділі 6.4.

3.2. Рівномірні розподіли

На практиці іноді виникають сукупності з неістотно відмінними частотами варіант. Теоретичною моделлю розподілів таких сукупностей є рівномірні розподіли. Рівномірні розподіли можуть бути як дискретними, так і неперервними.

3.2.1. Дискретні рівномірні розподіли

Розглянемо сукупність, варіаційний ряд якої має n послідовних натуральних варіант. Якщо відносні частоти всіх варіант однакові, тобто дорівнюють $1/n$, частотний розподіл сукупності називають *рівномірним*.

Зауважимо, що середнє значення рівномірного розподілу з n варіантами дорівнює

$$\frac{x_1 + x_n}{2},$$

а стандартне відхилення становить

$$\frac{x_n - x_1}{2\sqrt{3}}.$$

Зобразимо полігон відносних частот рівномірного розподілу з варіантами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (рис. 3.1).

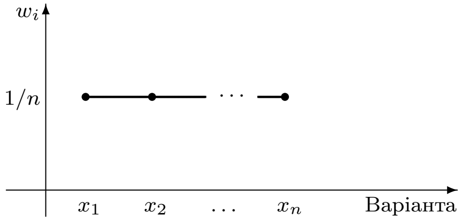


Рис. 3.1. **Полігон відносних частот рівномірного розподілу**

3.2.2. Неперервні рівномірні розподіли

Розглянемо вигляд рівномірних розподілів у неперервному разі. Не наводитимемо відповідне означення, а лише опишемо властивості таких розподілів. Насамперед зауважимо, що неперервний рівномірний розподіл визначається інтервалом $[a; b]$ можливих значень своїх варіант.

Крива рівномірного розподілу — це відрізок прямої $y = 1/(b - a)$ між значеннями $x = a$ і $x = b$ (рис. 3.2).

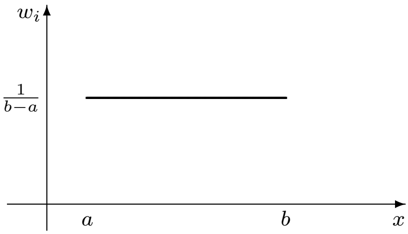


Рис. 3.2. **Крива рівномірного розподілу**

Математичне сподівання рівномірного розподілу дорівнює

$$\mu = \frac{a+b}{2},$$

а стандартне відхилення становить

$$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

3.3. Нормальні розподіли

Чи не найважливішими в математичній статистиці є так звані нормальні розподіли. З різних позицій нормальна форма вважається ідеальною для емпіричних частотних розподілів. Крім того, нормальні розподіли виникають у низці теоретичних результатів, які є основою багатьох прикладних методів досліджень.

Часто вивчення довільного нормального розподілу можна звести до так званого стандартного нормального розподілу. Принаймні для обчислення відносних інтервальних частот нормального розподілу достатньо вміти обчислювати їх для стандартного нормального розподілу.

3.3.1. Основні властивості нормальних розподілів

Форма і властивості *нормального* розподілу визначаються двома параметрами: його математичним сподіванням μ та стандартним відхиленням σ. Тому нормальний розподіл з параметрами μ і σ зазвичай позначають $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$[1].

Опишемо основні властивості нормального розподілу $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

1. Математичне сподівання розподілу $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ дорівнює μ, а його стандартне відхилення σ. Ці два параметри повністю визначають розподіл $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

2. Мода і медіана[2] нормального розподілу дорівнюють μ, тобто збігаються з математичним сподіванням. Фактично можна вважати μ середнім рівнем нормально розподіленої сукупності.

[1] У математичній статистиці використовують також позначення $\mathcal{N}(\mu, \mathbf{D})$, вважаючи первинним поняттям дисперсію, а не стандартне відхилення.

[2] Тут не обговорювалось, як означити моду і медіану для неперервного розподілу, проте достатньо знати, що ці поняття мають такий самий зміст, як і для емпіричних розподілів.

3. Крива нормального розподілу симетрична відносно вертикальної прямої $x = \mu$ і має куполоподібну форму (рис. 3.3).

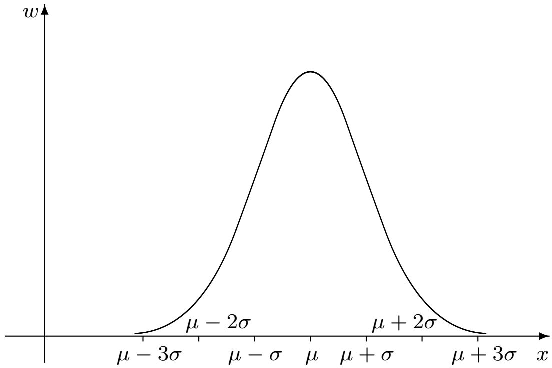


Рис. 3.3. **Крива нормального розподілу**

4. Імовірність[1] потрапляння випадково взятої варіанти до інтервалу $(\mu - \sigma; \mu + \sigma)$ становить 68,3 %, а до інтервалу $(\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma)$ — 95,4 %.

5. Імовірність потрапляння випадково взятої варіанти до інтервалу $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$ становить 99,7 %, тобто на відстані 3σ від μ розміщуються *майже всі* варіанти нормального розподілу. Цю властивість називають *правилом трьох сигм.*

6. Середнє абсолютне відхилення нормального розподілу дорівнює 0,8 його стандартного відхилення, тобто $0{,}8\sigma$. З огляду на це можна формулювати властивості нормального розподілу в термінах лінійних, а не квадратичних відхилень.

7. Крива нормального розподілу задається формулою

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

[1] Імовірність потрапляння випадкової варіанти до інтервалу (a, b) графічно дорівнює площі фігури, обмеженої зверху кривою розподілу, знизу — віссю абсцис, по краях — відрізками вертикальних прямих $x = a$ та $x = b$. Ті, хто вивчав курс теорії ймовірності, одразу збагнуть, що під кривою розподілу розуміється графік функції щільності розподілу.

3.3.2. Процедури рівномірризації

У п. 1.3.3 розглядалося поняття числової шкали. І зауважувалось, що однією з її бажаних властивостей є рівномірність. Рівномірність шкали означає, що співвідношення будь-яких двох значень залежить лише від різниці між ними. На жаль, у природі такі шкали зустрічаються дуже рідко. Тому у прикладних дослідженнях до природних шкал часто застосовують так звані *процедури рівномірризації*. За деяких обмежень вони дають змогу з нерівномірної шкали зробити рівномірну. Найчастіше такі процедури застосовують у психології.

Припустимо, досліджується сукупність, емпіричний розподіл якої нагадує за виглядом полігону частот та властивостями нормальний розподіл. Зокрема, нехай майже виконуються властивості 1–5 нормального розподілу. Тоді можна застосувати процедури рівномірризації[1].

Розглянемо дві такі процедури, а саме методи побудови шкали стенів та процентильної шкали.

Шкала стенів

Процедуру побудови шкали стенів можна застосовувати за умов нормальності емпіричного розподілу вихідної сукупності та її достатньо великого обсягу (понад 200 даних).

Схема побудови цієї шкали проста: за середнім значенням $\overline{X}$ та стандартним відхиленням σ емпіричного розподілу будують 10 інтервалів, кожному з яких призначають порядковий номер — *стен* — як у табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Шкала стенів

Стен	Інтервал
1	2
I	$(-\infty; \overline{X} - 2\sigma]$
II	$(\overline{X} - 2\sigma; \overline{X} - 1{,}5\sigma]$

[1]Формально для цього потрібно перевірити узгодженість емпіричного розподілу з теоретичним нормальним, скориставшись одним зі статистичних критеріїв з підрозд. 6.4. Проте на практиці часто обмежуються перевіркою умов 1–5.

Закінчення табл. 3.1

1	2
III	$(\overline{X} - 1{,}5\sigma; \overline{X} - \sigma]$
IV	$(\overline{X} - \sigma; \overline{X} - 0{,}5\sigma]$
V	$(\overline{X} - 0{,}5\sigma; \overline{X}]$
VI	$(\overline{X}; \overline{X} + 0{,}5\sigma]$
VII	$(\overline{X} + 0{,}5\sigma; \overline{X} + \sigma]$
VIII	$(\overline{X} + \sigma; \overline{X} + 1{,}5\sigma]$
IX	$(\overline{X} + 1{,}5\sigma; \overline{X} + 2\sigma]$
X	$(\overline{X} + 2\sigma; +\infty)$

Тоді рівномірна шкала для вихідної сукупності складатиметься з 10 стенів. При цьому стен елемента сукупності визначається інтервалом, до якого потрапляє значення елемента.

Приклад 3.3.1. Припустимо, необхідно розробити психологічний тест з визначення рівня деякої психологічної ознаки. Нехай для цього підготовлено 50 рівноправних запитань, на кожне з яких є два варіанти відповіді: “Так” або “Ні”. Кожна відповідь “Так” підвищує рівень ознаки індивідуума, а “Ні” — знижує. Тоді характеристикою рівня ознаки може бути сумарна кількість позитивних відповідей на запитання тесту.

Проте отримана в такий спосіб шкала незручна. Насамперед вона має надто багато градацій — 51 (від 0 до 50). Крім того, ця шкала, наприклад, розрізняє рівні 49 та 50 позитивних відповідей (або 1 та 2 тощо), що навряд чи можна вважати позитивною властивістю.

Отже, постає проблема рівноміризації отриманої шкали. Для того щоб здійснити процедуру рівноміризації, потрібні статистичні дані. Насамперед потрібно провести апробацію тесту на великій та репрезентативній вибірці індивідуумів. Потім за отриманими результатами тестування, якщо їх розподіл не надто відрізнятиметься від нормального[1], можна здійснити рівноміризацію тесту.

Припустимо, за допомогою досліджуваного тесту опитано групу індивідуумів обсягом 200. Нехай ця група була доволі репрезента-

[1]А цього ймовірніше можна очікувати. Як засвідчує практика, кількість позитивних відповідей у більшості індивідуумів потраплятиме до середньої зони і лише рідко до крайніх.

тивна. Результати тестування наведено в таблиці (під рівнем ознаки розуміється кількість правильних відповідей). Для наочності в цій таблиці наведено частоти всіх варіант у межах від 15 до 44, у тому числі нульові.

Рівень ознаки	Кількість індивідуумів	Рівень ознаки	Кількість індивідуумів	Рівень ознаки	Кількість індивідуумів
15	2	25	6	35	14
16	2	26	10	36	6
17	6	27	20	37	0
18	4	28	12	38	0
19	0	29	18	39	4
20	0	30	16	40	0
21	4	31	16	41	2
22	0	32	10	42	2
23	12	33	6	43	2
24	8	34	14	44	4

Проаналізуємо, чи подібний розподіл сукупності нормальному. Для цього насамперед наведемо його графічне зображення.

Зауважимо, що будувати полігон частот сукупності недоцільно через велику кількість варіант (їх 30). Тому додатково побудуємо інтервальний розподіл для цієї сукупності.

За формулою (2.7) обчислимо оптимальну довжину інтервалів:

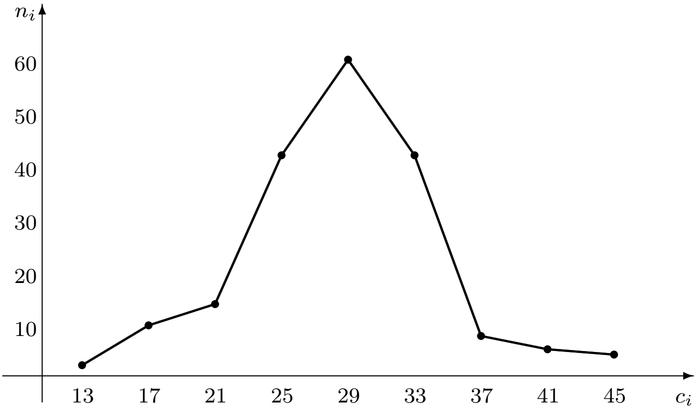
$$\frac{44 - 15}{1 + 3{,}2 \lg 100} \approx 3{,}92.$$

Для спрощення розрахунків округлимо це значення до 4. У результаті отримаємо інтервальний розподіл для досліджуваної сукупності, наведений у вигляді таблиці.

Інтервал значень	Середня точка c_i	Інтервальна частота
1	2	3
$(-\infty; 15]$	13	2
$(15; 19]$	17	12
$(19; 23]$	21	16
$(23; 27]$	25	44

1	2	3
(27; 31]	29	62
(31; 35]	33	44
(35; 39]	37	10
(39; 43]	41	6
(43; +∞)	45	4

За середніми точками інтервалів побудуємо полігон частот цього розподілу.



Полігон частот розподілу психологічної ознаки для розроблюваного психологічного тесту

Як бачимо, полігон інтервального розподілу сукупності має куполоподібну форму.

Наведемо без обчислень середнє значення та стандартне відхилення сукупності:

$$\overline{X} = 29{,}28;$$
$$\sigma \approx 5{,}90.$$

За отриманими значеннями середнього арифметичного та стандартного відхилення перевіримо властивості 4, 5 нормального розподілу. Для цього порівняємо реальні та теоретичні відсотки потрапляння даних до тестових інтервалів (див. таблицю).

Порівняння реальних і теоретичних відсотків потрапляння даних до тестових інтервалів

Інтервал	Відсоток потрапляння до інтервалу	
	реальний	теоретичний
$(\overline{X}-\sigma; \overline{X}+\sigma) \approx (23{,}38; 35{,}18)$	75	68,3
$(\overline{X}-2\sigma; \overline{X}+2\sigma) \approx (17{,}48; 41{,}08)$	91	95,4
$(\overline{X}-3\sigma; \overline{X}+3\sigma) \approx (11{,}58; 46{,}98)$	100	99,7

Як бачимо, емпіричні значення відсотків потрапляння до контрольних інтервалів неістотно відрізняються від теоретичних. Отже, доходимо висновку, що емпіричний розподіл сукупності подібний до нормального[1].

Із зазначеного випливає, що процедура рівноміризації можлива. За допомогою емпіричних значень середнього арифметичного та стандартного відхилення визначаємо граничні точки між стенами і їх округлені значення.

Стени	Гранична точка	Округлене значення
I, II	$\overline{X}-2\sigma \approx 17{,}48$	17
II, III	$\overline{X}-1{,}5\sigma \approx 20{,}43$	20
III, IV	$\overline{X}-\sigma \approx 23{,}38$	23
IV, V	$\overline{X}-0{,}5\sigma \approx 26{,}33$	26
V, VI	$\overline{X} \approx 29{,}28$	29
VI, VII	$\overline{X}+0{,}5\sigma \approx 32{,}23$	32
VII, VIII	$\overline{X}+\sigma \approx 35{,}18$	35
VIII, IX	$\overline{X}+1{,}5\sigma \approx 38{,}13$	38
IX, X	$\overline{X}+2\sigma \approx 41{,}08$	41

Округлені значення граничних точок між стенами варто вважати границями між рівнями ознаки. Так, найнижчий рівень мають ті, хто набрав 17 або менше позитивних відповідей, другий рівень — ті,

[1]Зауважимо, що тут не перевіряється його узгодженість з нормальним. У цьому разі інтерес становить лише візуальна подібність з нормальним розподілом. На практиці цього часто достатньо.

хто набрав 18, 19 або 20 позитивних відповідей, найвищому рівню (X стен) відповідає 42 або більше позитивних відповідей.

Процентильна шкала

Окрім шкали станів існують також інші методи побудови шкал з властивістю рівномірності. Один з них — процентильна шкала. Цей метод ґрунтується на тому, що всі значення сукупності розбиваються на рівні за частотою появи групи.

Якщо необхідно отримати рівномірну шкалу, яка має, наприклад, 10 значень, то за сукупністю визначимо накопичені частоти значень вихідної шкали, а потім скористаємося даними табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Процентильна шкала

Рівень процентильної шкали	Накопичена частота значення, %
I	<10
II	10–20
III	20–30
IV	30–40
V	40–50
VI	50–60
VII	60–70
VIII	70–80
IX	80–90
X	>90

Приклад 3.3.2. У прикладі 3.3.1 здійснено рівноміризацію шкали балів деякого тесту за допомогою стенів. Тепер скористаємося процентильною шкалою для розв'язання цієї ж задачі.

Насамперед обчислимо накопичені частоти балів, отриманих при апробації тесту.

Обчислення накопичених частот балів, отриманих при розробці психологічного тесту

Рівень ознаки	Накопичена частота	Рівень ознаки	Накопичена частота	Рівень ознаки	Накопичена частота
1	2	3	4	5	6
15	2 (1 %)	25	44 (22 %)	35	180 (90 %)

1	2	3	4	5	6
16	4 (2 %)	26	54 (27 %)	36	186 (93 %)
17	10 (5 %)	27	74 (37 %)	37	186 (93 %)
18	14 (7 %)	28	86 (43 %)	38	186 (93 %)
19	14 (7 %)	29	104 (52 %)	39	190 (95 %)
20	14 (7 %)	30	120 (60 %)	40	190 (95 %)
21	18 (9 %)	31	136 (68 %)	41	192 (96 %)
22	18 (9 %)	32	146 (73 %)	42	194 (97 %)
23	30 (15 %)	33	152 (76 %)	43	196 (98 %)
24	38 (17 %)	34	166 (83 %)	44	200 (100 %)

Далі за накопиченими частотами визначимо рівні процентильної шкали, відводячи по 10 % значень на кожний рівень. При цьому для порівняння наведемо отримані у прикладі 3.3.1 стени значень тесту.

Порівняння результатів процедур рівноміризації за шкалою стенів і процентильною шкалою

Рівень процентильної шкали	Рівень ознаки	Стен	Рівень ознаки
I	0–22	I	0–17
II	23–24	II	18–20
III	25–26	III	21–23
IV	27	IV	24–26
V	28	V	27–29
VI	29	VI	30–32
VII	30–31	VII	33–35
VIII	32–33	VIII	36–38
IX	34	IX	39–41
X	35 і більше	X	42–50

Насамкінець сформулюємо рекомендацію. Якщо емпіричний розподіл досліджуваної сукупності подібний до нормального, краще використовувати шкалу стенів, в інших випадках — процентильну шкалу.

3.3.3. Стандартний нормальний розподіл

Раніше вже зауважувалося, що всі нормальні розподіли мають подібні властивості. Фактично нормальний розподіл визначається двома параметрами: математичним сподіванням μ і стандартним відхиленням σ. Тому вивчення всього класу нормальних розподілів природно звести до одного стандартного випадку.

Зокрема, найважливіша практична задача, що пов'язана з вивченням розподілів, полягає у визначенні ймовірності потрапляння досліджуваного параметра до деякого інтервалу (a, b) можливих значень. У контексті сформульованої ідеї це означає, що хотілося б знати, як розв'язання цієї задачі загалом можна звести до її розв'язання для деякого стандартного розподілу з класу нормальних.

Таким стандартним розподілом у класі нормальних вважають розподіл $\mathcal{N}(0; 1)$ з математичним сподіванням 0 та стандартним відхиленням 1.

Означення 3.1. Розподіл $\mathcal{N}(0; 1)$ називають *стандартним нормальним* розподілом.

Параметр, розподілений за стандартним нормальним законом, прийнято позначати z, а параметр, розподілений за довільним нормальним законом, — x.

Крива стандартного нормального розподілу задається формулою

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Зобразимо її.

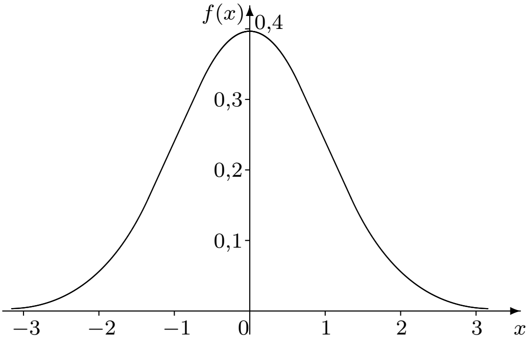


Рис. 3.4. **Крива стандартного нормального розподілу**

Як бачимо з рис. 3.4, ця крива подібна до кривих інших нормальних розподілів. Виявляється, є проста формула зв'язку між кривою стандартного нормального розподілу та кривою довільного розподілу $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Теорема 3.1. *Для того щоб перейти від кривої частот нормально розподіленого за законом $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ параметра x до кривої частот нормально розподіленого за законом $\mathcal{N}(0, 1)$ параметра z, потрібно здійснити таку заміну змінних:*

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}. \tag{3.1}$$

За формулою (3.1) для обчислення ймовірності потрапляння параметра x до інтервалу (a, b) достатньо обчислити ймовірність потрапляння параметра z до інтервалу

$$\left(\frac{a - \mu}{\sigma}, \frac{b - \mu}{\sigma} \right).$$

Отже, потрібно навчитися визначати ймовірність потрапляння стандартного параметра z до заданого інтервалу.

Означення 3.2. *Функція Лапласа* $\Phi(t)$ є означеною для $t > 0$ і дорівнює ймовірності потрапляння розподіленого за стандартним нормальним законом параметра z до інтервалу $(0, t)$.

Іншими словами, значення функції Лапласа $\Phi(t)$ дорівнює площі фігури, обмеженої зверху кривою стандартного нормального розподілу, знизу — віссю абсцис, а по краях — відрізками прямих $z = 0$ та $z = t$.

Для зручності використання значення функції Лапласа протабульовані (див. табл. Д.2.1). Як використовувати функцію Лапласа покажемо на прикладі.

Приклад 3.3.3. Нехай параметр x нормально розподілений за законом $\mathcal{N}(8{,}2; 2{,}5)$, тобто математичне сподівання його розподілу дорівнює 8,2, а стандартне відхилення — 2,5. Обчислимо ймовірність потрапляння параметра до інтервалу:

1) $(4; 15)$;

2) $(10; 12)$;

3) $(6; 8)$.

Розглянемо ці випадки окремо.

1. Насамперед потрібно перейти до стандартного параметра z, використовуючи формулу (3.1):

$$\frac{4-8{,}2}{2{,}5} = -1{,}68,$$
$$\frac{15-8{,}2}{2{,}5} = 2{,}72.$$

Отже, потрібно визначити ймовірність потрапляння стандартного параметра z до інтервалу $(-1{,}68; 2{,}72)$. Але, як зауважувалося, ця ймовірність дорівнює площі фігури, обмеженої зверху кривою стандартного нормального розподілу, знизу — віссю абсцис, а по краях — відрізками прямих $z = -1{,}68$ та $z = 2{,}72$. Цю фігуру можна розбити на дві частини: перша — від $z = -1{,}68$ до $z = 0$, друга — від $z = 0$ до $z = 2{,}72$. Тоді шукана площа дорівнює сумі площ цих двох частин.

Отже, шукана ймовірність дорівнює сумі ймовірностей потрапляння стандартного параметра z до інтервалів $(-1{,}68; 0)$ та $(0; 2{,}72)$. За означенням функції Лапласа друга з цих ймовірностей дорівнює $\Phi(2{,}72)$. Для того щоб визначити ймовірність потрапляння до першого інтервалу, зауважимо, що крива стандартного нормального розподілу симетрична відносно осі ординат $z = 0$. Тому ймовірність потрапляння параметра z до інтервалу $(-1{,}68; 0)$ дорівнює ймовірності його потрапляння до $(0; 1{,}68)$, а отже, значенню функції Лапласа $\Phi(1{,}68)$.

Остаточно, скориставшись даними табл. Д.2.1, отримаємо, що шукана ймовірність дорівнює

$$\Phi(1{,}68) + \Phi(2{,}72) = 0{,}4535 + 0{,}4967 = 0{,}9502 = 95{,}02\,\%.$$

2. За формулою (3.1) перейдемо до стандартного параметра z:

$$\frac{10-8{,}2}{2{,}5} = 0{,}72,$$
$$\frac{12-8{,}2}{2{,}5} = 1{,}52.$$

Необхідно визначити ймовірність потрапляння стандартного параметра z до інтервалу $(0{,}72; 1{,}52)$, тобто площу фігури, обмеженої зверху кривою стандартного нормального розподілу, знизу — віссю абсцис, а по краях — відрізками прямих $z = 0{,}72$ та $z = 1{,}52$. Цю площу можна знайти, віднявши від площі фігури між $z = 0$ і $z = 1{,}52$ площу фігури між $z = 0$ і $z = 0{,}72$.

Отже, шукана ймовірність дорівнює (див. табл. Д.2.1)

$$\Phi(1{,}52) - \Phi(0{,}72) = 0{,}4357 - 0{,}2642 = 0{,}1715 = 17{,}15\,\%.$$

3. За формулою (3.1) перейдемо до стандартного параметра z:

$$\frac{6 - 8{,}2}{2{,}5} = -0{,}88,$$
$$\frac{8 - 8{,}2}{2{,}5} = -0{,}08.$$

Як бачимо, цей випадок симетричний випадку 2. Отже, задача визначення ймовірності потрапляння параметра z до інтервалу $(-0{,}88; -0{,}08)$ рівносильна задачі обчислення ймовірності його потрапляння до $(0{,}08; 0{,}88)$.

Таким чином, шукана ймовірність дорівнює (див. табл. Д.2.1)

$$\Phi(0{,}88) - \Phi(0{,}08) = 0{,}3106 - 0{,}0319 = 0{,}2787 = 27{,}87\,\%.$$

3.4. Біноміальні розподіли

Припустимо, вивчається ознака, яка може набувати два можливих значення. Нагадаємо, що в п. 1.3.1 шкали вимірювання таких ознак було названо дихотомічними. Нехай одне з цих двох значень “важливіше” від іншого.

Припустимо також, що з вихідної сукупності даних за певним критерієм вибрано деякі підгрупи однакового обсягу. Тоді можна розглянути похідну від початкової ознаку. Зокрема, у кожній підгрупі можна розрахувати кількість “важливих” значень. Іншими словами, підгрупи утворюють нову сукупність, яка вивчається за ознакою “кількість “важливих” значень у підгрупі”.

Пояснимо наведені міркування на прикладах. У прикладі 3.1.3 аналізувалась ознака “кількість хлопчиків у сім’ях з п’ятьма дітьми”. Твірною ознакою для неї була “стать дитини”, “важливим” значенням — “хлопчик”, вихідною сукупністю — сукупність усіх дітей, вибраними підгрупами в ній — діти сімей з п’ятьма дітьми.

Наведемо інший приклад. Розглянемо дихотомічну ознаку, утворену двома можливими значеннями “потяг прийшов на кінцеву станцію із запізненням” та “потяг прийшов на кінцеву станцію без запізнення”. Інтерес може становити, наприклад, ознака “кількість запізнень за день”, і цю ознаку можна вивчати тривалий час.

Виявляється, емпіричні розподіли подібних сукупностей часто добре описуються такою моделлю. Нехай маємо групи незалежних даних обсягом n. Припустимо, що ці дані можуть приймати лише два можливих значення — “важливе” та “неважливе” і “важливе” значення зустрічається з теоретичною відносною частотою p [1]. Розподіл кількості “важливих” значень у групах називають *біноміальним* з параметрами $(p; n)$.

Наведемо основні властивості біноміального розподілу з параметрами $(p; n)$.

1. Варіантами біноміального розподілу є можливі кількості “важливих” значень у групі з n даних, тобто числа $0, 1, 2, \ldots, n$. Тому біноміальний розподіл дискретний.

2. Середнє значення μ біноміального розподілу дорівнює np.

3. Стандартне відхилення біноміального розподілу

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$

4. Якщо значення p мале, то біноміальний розподіл має лівосторонню асиметрію. Якщо значення $p \approx 50\,\%$, то полігон біноміального розподілу має куполоподібну форму. Якщо значення p близьке до $100\,\%$, то біноміальний розподіл має виразну правосторонню асиметрію. Типові форми полігону відносних частот біноміального розподілу при різних значеннях p зображено на рис. 3.5.

[1] Іншими словами, з імовірністю p.

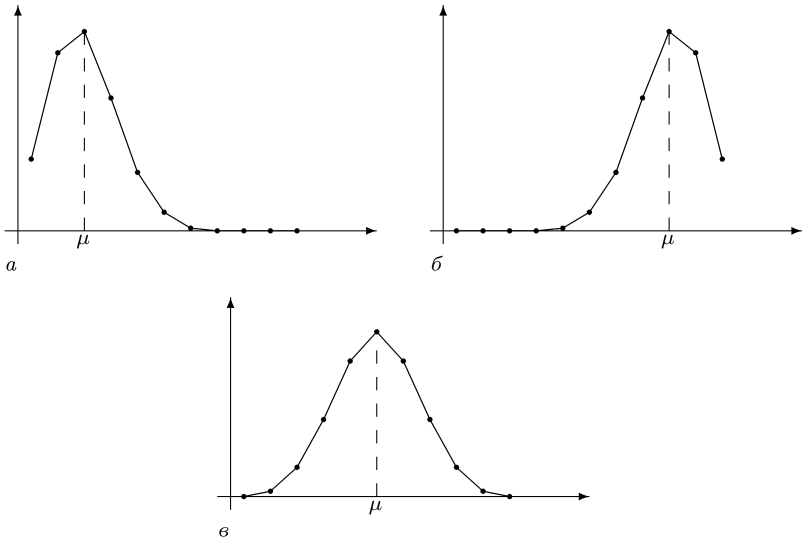


Рис. 3.5. **Полігон відносних частот біноміального розподілу при різних значеннях p: *а* — невеликому; *б* — великому; *в* — такому, що дорівнює 50 %**

5. Відносна частота варіанти m біноміального розподілу

$$w(m) = \frac{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n) \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}}{\big(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m\big)\big(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-m)\big)}.$$

Насамкінець зауважимо, що біноміальні розподіли виникають не лише при дослідженні деяких реальних сукупностей даних. Вони мають важливе значення при оцінці пропорцій у великих сукупностях даних (див. зокрема, п. 4.4.2).

3.5. Пуассонові розподіли

Раніше було розглянуто приклади 3.1.4 і 3.1.5 розподілів із сильною лівосторонньою асиметричністю. У цих розподілах переважають невеликі значення ознаки і рідко зустрічаються великі. Такі розподіли часто вдається описати за допомогою теоретичного розподілу Пуассона.

Опишемо основні властивості розподілу Пуассона.

1. Розподіл Пуассона повністю визначаються єдиним параметром, який позначають λ.

2. Розподіл Пуассона дискретний, його варіанти — це цілі невід'ємні числа $0, 1, 2, 3, \ldots$

3. Математичне сподівання та дисперсія розподілу Пуассона збігаються і дорівнюють його параметру λ[1].

4. Відносна частота варіанти m розподілу Пуассона

$$w(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m}.$$

Полігон відносних частот розподілу Пуассона має дві типові форми: при малих та великих значеннях λ. Їх приклади наведено на рис. 3.6 (*а* — розподіл Пуассона з $\lambda = 2$, *б* — з $\lambda = 7$).

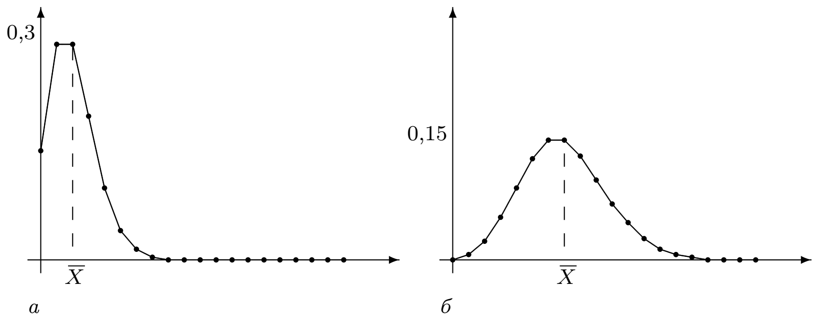


Рис. 3.6. **Полігон відносних частот розподілу Пуассона при різних значеннях λ: *а* — малому; *б* — середньому та великому**

[1] Отже, для того щоб описати за допомогою розподілу Пуассона деякий емпіричний розподіл, потрібно, щоб середнє значення і дисперсія емпіричного розподілу різнилися неістотно.

3.6. U-подібні розподіли

У прикладі 2.2.11 було розглянуто розподіл статистичних даних U-подібної форми (див. також зображення полігону частот з прикладу 3.1.6). Найпростішим теоретичним розподілом, крива якого має U-подібну форму, є так званий арксинус-розподіл [22, т. II, с. 70] (рис. 3.7). Крива цього розподілу задається формулою

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

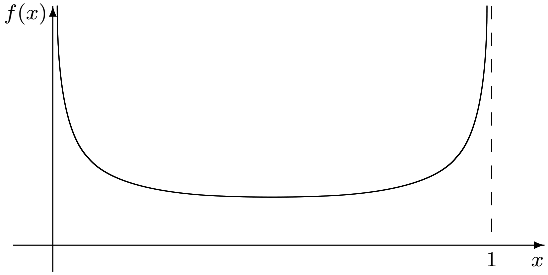


Рис. 3.7. **Крива арксинус-розподілу**

На жаль, допоки не існує простих стандартних статистичних розподілів, які б точніше описували таку форму і були достатньо загальними. Як правило, у кожному конкретному випадку потрібно підбирати процедуру, за допомогою якої можна згенерувати модель розподілу для даних з полігоном U-подібної форми.

Найчастіше такі процедури полягають у такому: припускається, що деяка частина сукупності розподілена за законом з лівосторонньою асиметрією, а інша — з правосторонньою. Далі ці два розподіли частин сукупності об'єднують в один для сукупності. Це роблять за допомогою так званої операції згортки[1]. У контексті зробленого

[1]Порівняйте, наприклад, з бета-розподілами [22, т. II, с. 70], частинним випадком яких є арксинус-розподіл.

припущення ця операція є зваженою пропорціями частин сукупності сумою двох розподілів.

Спробуємо проілюструвати це на даних з прикладу 2.2.11 про кількість куплених за рік номерів журналу 100 потенційними читачами. Для зручності наведемо їх ще раз.

Кількість куплених номерів	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кількість опитаних	40	15	3	2	1	1	1	1	2	2	3	10	19

Як бачимо, сукупність має два виразних "піки": один — для потенційних читачів, які рідко купують журнал, і другий — для тих, хто купує його регулярно. Тому природно припустити, що сукупність можна розбити на дві частини, а саме на тих, хто не схильний купувати журнал, і тих, хто має таку схильність.

Розглянемо першу частину, тобто тих, хто не схильний купувати журнал. Припустимо, що для таких осіб імовірність купити черговий номер журналу однакова і дорівнює p_1. Зрозуміло, що це значення p_1 має бути невелике. За таких припущень природно змоделювати розподіл кількості куплених номерів для цієї частини читачів за допомогою біноміального розподілу з параметрами $(p_1, 12)$. Як відомо, при малих значеннях p_1 біноміальний розподіл має виразну лівосторонню асиметрію.

Так само природно описати розподіл кількості куплених номерів для частини читачів, схильних купувати журнал, за допомогою біноміального розподілу з параметрами $(p_2, 12)$, де p_2 — ймовірність для них купити черговий номер журналу. Зрозуміло, що значення p_2 має бути достатньо велике, і в цьому разі біноміальний розподіл матиме сильну правосторонню асиметрію.

Припустимо, що в першій групі є f_1 відсотків людей усієї сукупності. Тоді відсоток людей у другій групі $f_2 = 100\,\% - f_1$.

Остаточно, підсумовуючи всі зроблені припущення, отримаємо, що розподіл кількості куплених номерів описується співвідношенням

$$w(k) = f_1 w_1(k) + f_2 w_2(k), \tag{3.2}$$

де $w(k)$ — відсоток людей, які куплять k номерів журналу на рік; $w_1(k)$, $w_2(k)$ — відносна частота варіанти k для біноміального розподілу з параметрами відповідно $(p_1, 12)$ та $(p_2, 12)$.

Отже, можна описати вихідний емпіричний розподіл за допомогою наведеної моделі. Ця модель залежить від трьох параметрів — p_1, p_2 і f_1, які потрібно підібрати так, щоб вона якнайкраще описувала вихідні дані [1].

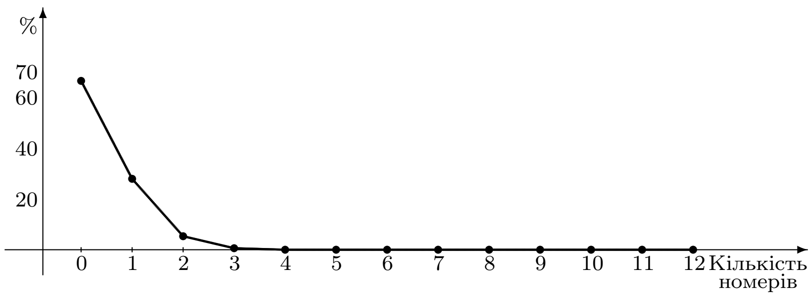
Виявляється, що в розглядуваному прикладі найкраще описуватимуть ситуацію такі значення параметрів:

$$f_1 = 62{,}6\,\%;$$
$$p_1 = 0{,}034;$$
$$p_2 = 0{,}950.$$

При цих значеннях модельний розподіл кількості куплених номерів для читачів, не схильних купувати журнал, буде біноміальний з параметрами (0,034;12). Наведемо його у вигляді таблиці відносних частот.

Кількість куплених номерів	0	1	2	3	4	...	12
Відсоток опитаних	66,2	27,8	5,3	0,6	0,0	...	0,0

Зобразимо полігон відносних частот цього розподілу.



Полігон відносних частот розподілу кількості куплених номерів журналу протягом року не схильними до нього читачами

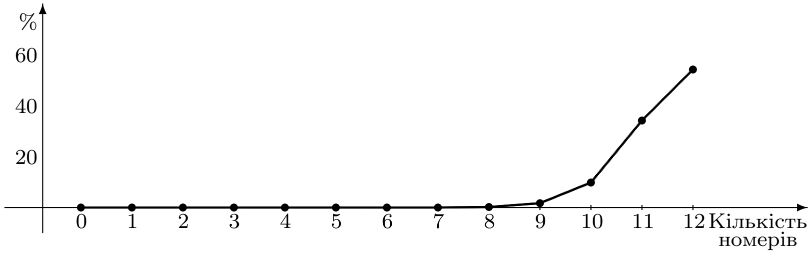
[1] Уточнимо, що розуміється під найкращим описом. Як правило, у статистиці найкращим вважають опис, за яким квадрати відхилень модельних значень від реальних у сумі дають якнайменше число. Такий підхід у науковій літературі називають методом найменших квадратів.

Аналогічно модельний розподіл кількості куплених номерів для читачів, схильних купувати журнал, буде біноміальний з параметрами (0,950;12).

Наведемо його у вигляді таблиці відносних частот.

Кількість куплених номерів	0	...	7	8	9	10	11	12
Відсоток опитаних	0,0	...	0,0	0,2	1,7	9,8	34,1	54,1

Зобразимо полігон відносних частот цього розподілу.



Полігон відносних частот розподілу кількості куплених номерів журналу протягом року схильними до нього читачами

Тепер для того щоб отримати модель розподілу всієї вихідної сукупності, додамо два отриманих розподіли з урахуванням їх ваги. Іншими словами, слід пам'ятати, що перший розподіл описував 62,6 % вихідної сукупності, другий — 37,4 %. У результаті за формулою (3.2) отримаємо такий розподіл (для порівняння в таблиці також наведено реальні відсотки опитаних).

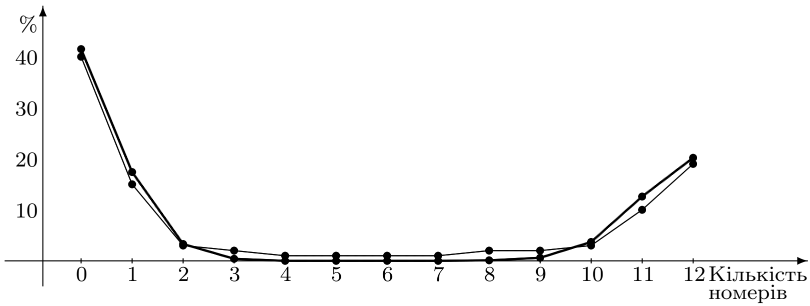
Кількість куплених номерів	0	1	2	3	4	...	7	8	9	10	11	12
Відсоток опитаних	41,5	17,4	3,3	0,4	0,0	...	0,0	0,1	0,6	3,7	12,7	20,2
Реальний відсоток опитаних	40,0	15,0	3,0	2,0	1,0	...	1,0	2,0	2,0	3,0	10,0	19,0

Перше модельне значення 41,5 % отримано, наприклад, так:

$$0{,}626 \cdot 66{,}2\,\% + 0{,}374 \cdot 0{,}0\,\% \approx 41{,}5\,\%.$$

Як бачимо, модельні дані добре узгоджуються з реальними. Абсолютні відхилення між ними не перевищують 2,7 %.

Для наочності наведемо також реальний (тонкою лінією) та модельний (жирною лінією) полігони відносних частот.



Порівняння реального та модельного полігонів відносних частот розподілу кількості куплених номерів журналу протягом року

Отже, у разі U-подібності вихідного емпіричного розподілу доцільно формувати модельний розподіл як зважену суму двох теоретичних розподілів, один з яких має лівосторонню асиметрію, інший — правосторонню.

Висновки

У процесі дослідження емпіричної сукупності даних намагаються не лише обчислити їх найважливіші числові характеристики, а й описати ці дані за допомогою деякої теоретичної моделі. Для цього найчастіше використовують такий підхід. Спочатку будують емпіричний розподіл відносних частот досліджуваної сукупності, а потім за його зовнішнім виглядом або за природою даних підбирають один з класичних добре вивчених теоретичних розподілів. Після цього перевіряють, чи узгоджуються емпіричний та теоретичний розподіли.

Якщо теоретична модель добре описує вихідні емпіричні дані, то кажуть, що теоретичний та емпіричний розподіли поводяться однаково. У цьому разі вважають, що досліджувана сукупність даних має такі самі властивості, що й модельний розподіл.

Ключові поняття

Біноміальний розподіл
Закон виняткових подій
Крива частот
Куполоподібний розподіл
Математичне сподівання
Неперервний розподіл
Нормальний розподіл
Процедура рівноміризації
Процентильна шкала
Рівномірний розподіл
Розподіл Пуассона
Стандартний нормальний розподіл
Функція Лапласа
Шкала стенів
U-подібний розподіл

Вправи

1. Визначити ймовірність потрапляння випадкового параметра, розподіленого за законом $\mathcal{N}(7;2)$, до інтервалу $(0;5)$.

2. Побудувати шкалу стенів IQ-тесту за даними дослідницького проекту розд. 2.

3. Розглянути біноміальний розподіл з параметрами $p = 0{,}6$ та $n = 6$. Визначити його математичне сподівання, стандартне відхилення та відносну частоту варіанти 4.

4. Зобразити криву пуассонового розподілу з параметром $\lambda = 4$. Обчислити його математичне сподівання та стандартне відхилення.

Дослідницький проект

Зібрати дані про зріст усіх студенток Вашого курсу. Обчислити середнє значення та стандартне відхилення зросту в сукупності. Побудувати її полігон частот. Перевірити властивості 1–5 нормального розподілу (див. п. 3.3.1).

Чи є подібний до нормального розподіл зросту в досліджуваній сукупності?

Розділ 4

Вибіркове дослідження

4.1. Генеральна сукупність і вибірка

Усе раніше викладене стосувалося найпростішого аналізу будь-якої сукупності даних. Тепер відомо, як визначаються найважливіші характеристики статистичних даних. При цьому природа сукупностей та їх реальний прикладний зміст не становили жодного інтересу з огляду на простоту і загальновживаність наведених характеристик.

При детальнішому вивченні й застосуванні точніших методів аналізу статистичних сукупностей даних бажано чітко розмежовувати класи прикладних задач, для яких постала потреба такого аналізу. Скажімо, при підрахунку кількості голосів, відданих за певного кандидата на виборах, загалом йдеться про дуже велику сукупність. Разом з тим при аналізі динаміки зростання валового продукту деякої економіки доступними будуть лише дані за кілька десятків років, тобто досліджувана сукупність буде невеликою.

Наприклад, при порівнянні середнього рівня прибутків у двох регіонах застосовують методи, призначені для числових даних. А для порівняння середнього рівня деякої психологічної ознаки у двох групах найімовірніше потрібно використовувати методи для роботи з порядковою шкалою.

Розглянемо кілька прикладних методів дослідження статистичних сукупностей, які застосовують для різних класів задач соціології та психології.

Але перед безпосереднім описом цих методів зробимо кілька загальних зауважень. Як правило, у статистичному дослідженні намагаються проаналізувати сукупності дуже великого обсягу. Якби дослідник мав повну інформацію про таку велику сукупність, то за допомогою наведених у розд. 2 методів міг би здійснити її ґрунтовний аналіз. За сучасного розвитку комп'ютерної техніки це було б нескладно. Власне, так роблять, скажімо, під час перепису населення, виборів, референдумів тощо.

Проблема полягає в тому, що зібрати повну інформацію про досліджувану сукупність складно, дорого і зазвичай довго. Навіть якщо сукупність теоретично невелика, як, наприклад, у разі загальної чисельності хворих на деяку специфічну психічну хворобу, то для того щоб визначити цю сукупність, все одно потрібно перевірити всіх громадян країни.

Тому у процесі прикладного статистичного дослідження при аналізі великої сукупності даних виконують таку процедуру. Вибирають із сукупності невелику групу даних, яка добре відображає властивості вихідної сукупності. Кажуть, що ця вибрана група — її називають *вибіркою* — повинна бути *репрезентативною*. Далі досліджують цю вибірку, використовуючи як уже наведені в розд. 2 методи, так і деякі спеціальніші. Остаточно отримані висновки за допомогою відповідних процедур поширюють на вихідну велику сукупність.

Отже, статистичні сукупності даних класифікують так:

• першого типу (як правило, великого обсягу), точну інформацію про які бажано дізнатись;

• другого типу (відносно невеликого обсягу), при дослідженні яких отримують доволі точну інформацію про сукупності першого типу.

Сукупності першого типу називають *генеральними*, другого — *вибірковими*, або *вибірками*.

Часто кажуть, що генеральна сукупність складається з **усіх** можливих об'єктів деякого класу, а вибірка — лише з **деяких** із них.

Приклад 4.1.1. При соціологічному опитуванні фактично мають справу з деякою вибіркою з генеральної сукупності. Наприклад, опитавши на вулицях міста 200 молодих людей про їх ставлення до влади, отримаємо вибіркову сукупність 200 даних з генеральної сукупності загальної чисельності молоді міста.

Тепер можна сформулювати суть *вибіркового дослідження*, що виконується у два етапи:

• на першому етапі з генеральної сукупності формують репрезентативну вибірку;

• на другому етапі аналізують вибірку і результати аналізу поширюють на генеральну сукупність[1].

Детально розглянемо перший етап і наведемо основні ідеї другого. Статистичні методи, які використовують на другому етапі, ґрунтовно проаналізуємо в розд. 5–7.

Наведена загальна схема вибіркового дослідження теоретично застосовна як у соціології, так і у психології. Проте слід враховувати певні нюанси.

Зазвичай генеральні сукупності, які вивчаються в соціології, суттєво простіші, ніж у психології. Обґрунтуємо цю тезу. Генеральна сукупність — це всі індивідууми з певними властивостями. У соціології визначальні властивості генеральних сукупностей пов'язані з рівнем суспільства і тому простіші. Можна вивчати, наприклад, сукупності всіх працездатних громадян, усіх виборців у країні тощо. У психологічному дослідженні визначальні властивості спеціальніші, оскільки пов'язані з індивідуальними характеристиками людини, і тому складніші. Скажімо, психолог може вивчати всіх хворих на певну хворобу, усіх людей специфічних професій, певного психоло-

[1] Формально йдеться про дослідження однієї генеральної сукупності. Проте часто у прикладних задачах потребується порівняльний аналіз кількох генеральних сукупностей. У такому разі слід сформувати та проаналізувати репрезентативні вибірки з усіх генеральних сукупностей.

гічного типу тощо. З огляду на це процес практичного формування репрезентативної вибірки у психологічному дослідженні проблематичніший, ніж у соціологічному. Тому психологи до формування вибірки ставляться не так суворо, як соціологи.

Приклад 4.1.2. Припустимо, психолог розробив нову методику виведення людини зі стану сильного психологічного стресу, спричиненого, скажімо, деякою трагедією, і потрібно перевірити її. У такому разі він формує деяку групу пацієнтів, застосовує до них розроблену методику, а потім перевіряє результати. Якщо загалом у групі виявляються покращення, може йтися про доцільність застосування розробленої методики [1].

У такому разі маємо генеральну сукупність людей, що перебувають у стані стресу, і вибіркову групу, на якій перевіряється методика.

Разом з тим зауважимо, що процес формування вибірки в цьому разі доволі суб'єктивний, істотно залежить від конкретної ситуації і не завжди репрезентативний.

Щодо другого етапу вибіркового дослідження — аналізу вибірки, — то соціолог так само має певні переваги над психологом.

По-перше, і у психологічному, і в соціологічному дослідженні досліджувані ознаки найчастіше вимірюються в порядкових шкалах. Але завдання, які при цьому постають перед психологом, спеціальніші й складніші, ніж при аналізі соціологічних даних.

По-друге, така сама картина виникає й у разі номінальних шкал. У соціології номінальну шкалу зазвичай використовують при оцінюванні частки громадян, які віддають перевагу певним політикам, партіям, військовим чи економічним союзам, законам тощо. Методи розв'язання такої задачі нескладні. Натомість у психології окрім оцінювання частки доводиться розв'язувати й інші задачі, наприклад, імперативного впорядкування сукупності за рівнями номінальної шкали.

[1] Часто разом із групою пацієнтів, на якій перевіряють методику, формують і контрольну групу, до якої цю методику не застосовують. Тоді покращення в основній групі мали б бути істотніші, ніж і контрольній.

І по-третє, числові шкали у психології застосовують дуже рідко, тоді як у соціологічному дослідженні значно частіше[1]. А методи аналізу в разі застосування числових шкал не надто складні, мало того, доволі узагальнені.

Отже, методи аналізу вибірки, які застосовують у психології, меншою мірою тривіальні, ніж у соціології.

4.2. Аналіз генеральної сукупності

Як зауважувалося, реальну генеральну сукупність великого обсягу важко описати достеменно точно. Точніше, з практичних міркувань неможливо повністю описати частотний розподіл великої генеральної сукупності. Тому застосовують методи математичної статистики, за допомогою яких можна оцінювати параметри генеральної сукупності, наприклад, середнє чи стандартне відхилення, або описувати форму її частотного розподілу. При цьому основним методом є вибіркове дослідження, тобто формування і аналіз вибірки з генеральної сукупності.

Як правило, параметри генеральної сукупності називають *генеральними*, а параметри вибіркової сукупності — *вибірковими*. Так, середнє значення генеральної сукупності називають генеральним середнім, а стандартне відхилення вибірки — вибірковим стандартним відхиленням.

Існує багато підходів до аналізу генеральної сукупності методом формування вибірки. Найчастіше використовують два класи — "оцінки параметрів" та "перевірки статистичних гіпотез".

Позначення генеральних і вибіркових параметрів

У процесі вибіркового дослідження генеральної сукупності зазвичай вивчають кілька її параметрів. При цьому кожний генеральний параметр має певну вибіркову версію.

Щоб уникнути двозначностей, слід домовитися, як розрізняти генеральну та вибіркову версії статистичного параметра.

[1]Хоча не так часто, як порядкові.

Насамперед сформулюємо найзагальнішу домовленість. Нижній індекс "г" біля будь-якого параметра означає, що цей параметр генеральний, а індекс "в" — що параметр вибірковий.

Крім того, за традицією використовуватимемо стандартні позначення для найуживаніших параметрів (табл. 4.1)[1].

Таблиця 4.1

Статистичний параметр	Генеральна версія	Вибіркова версія
Середнє значення	μ	$\overline{X}$
Стандартне відхилення	σ	$\sigma_{\text{в}}$

4.2.1. Точкові й інтервальні оцінки

Припустимо, необхідно визначити середній дохід на душу населення в Україні за місяць. Для цього потрібно суму всіх індивідуальних доходів поділити на чисельність населення країни. На жаль, такий підхід неможливо реалізувати навіть за припущення, що в державі здійснюється тотальний облік доходів і інформація про сумарні доходи загальнодоступна. Справді, у цьому разі все одно не буде отримано точного значення чисельності населення, тому що цей показник упродовж місяця коливається. Тому загалом навіть постановка задачі про точне визначення середнього доходу не повною мірою коректна.

Проте існує низка підходів, за допомогою яких можна оцінити середній дохід. Розглянемо найпростіший. Беруть випадкову вибірку якомога більшого обсягу і обчислюють середнє значення доходів у цій вибірці. У подальшому вважають вибіркове середнє оцінкою шуканого середнього доходу. Такі оцінки називають *точковими.*

Проблема такого підходу лише одна — вибіркове середнє від однієї вибірки до іншої може змінюватись і доволі істотно. Скажімо, якщо в одній випадковій вибірці зі 100 осіб не було жодного мільйонера, а у такій самій другій, але досліджуваній іншою соціологічною

[1] Загальноприйняте також позначення s^2 незміщеної точкової оцінки дисперсії (див. підрозд. 5.1).

службою, мільйонер є, то вибіркові середні можуть різнитися на два-три порядки.

Однак точкову оцінку покладено в основу всіх методів оцінювання генеральних параметрів.

Підсумовуючи сказане, отримуємо таке означення.

Означення 4.1. *Точковою* оцінкою генерального параметра називають функцію[1], яка кожній вибірці з генеральної сукупності ставить у відповідність деяке число. Це число вважають гіпотетичною оцінкою генерального параметра.

Формально точковою оцінкою може бути *довільна* функція на вибірках. Зрозуміло, що практичне значення мають лише точкові оцінки, які доволі точно оцінюють реальне значення генерального параметра. У підрозд. 5.1 розглянемо властивості точкових оцінок, які забезпечують практичність їх застосування.

Надійнішим методом оцінювання генеральних параметрів є так звані інтервальні оцінки.

Означення 4.2. Оцінку параметра генеральної сукупності вигляду "параметр належить до інтервалу (a, b)" називають *інтервальною*. Інтервальна оцінка вважається *правильною*, якщо реальне значення генерального параметра справді належить до інтервалу (a, b). *Коефіцієнтом довіри* (*рівнем надійності*, або *рівнем довіри*) інтервального оцінювання називають імовірність отримати правильну інтервальну оцінку. При цьому інтервал (a, b) називають *довірчим*[2].

Приклад 4.2.1. Якщо в ситуації, описаній на початку п. 4.2.1, вибіркове середнє дорівнює 620 грн, то точкова оцінка може виглядати так: "Середнє значення доходів на душу населення в Україні за попередній місяць становить 620 грн".

[1] Іншими словами, формулу.

[2] Рівень надійності, наприклад, 95 % означає, що в результаті 100 однакових експериментів у середньому 95 разів значення вимірюваного параметра потрапить до довірчого інтервалу. Зрозуміло, що в цьому разі довірчому інтервалу не можна "довіряти" повністю, оскільки приблизно у 5 % випадків значення вимірюваного параметра не потраплять до цього інтервалу.

Натомість інтервальна оцінка могла б виглядати так: “З 95 %-м рівнем довіри середнє значення доходів на душу населення в Україні за попередній місяць належить інтервалу (608 грн; 632 грн)”.

В інтервальних оцінках коефіцієнт довіри позначають k або γ. Як правило, він дорівнює 90, 95, 99 або 99,9 %. Коли йдеться про довірчий інтервал, вказують його рівень довіри. Наприклад, кажуть про 95 %-й довірчий інтервал.

Класичним методам визначення інтервальних оцінок генеральних параметрів присвячено підрозд. 5.2.

4.2.2. Перевірка гіпотез

Сутність будь-якого оцінювання (як точкового, так і інтервального) полягає в тому, що при аналізі вибірки роблять певні висновки про параметри генеральної сукупності. При цьому часто припускається, що відома форма частотного розподілу генеральної сукупності.

Перевірка — або тестування — гіпотез є загальнішим завданням, ніж оцінювання. Вона полягає в тому, що на основі аналізу вибірки перевіряють деяке припущення про генеральну сукупність. Припущення можуть бути різнопланові. Вони можуть стверджувати щось не тільки про генеральні параметри, а й про генеральний розподіл, про зміну генерального параметра, про співвідношення, взаємозв’язок[1] кількох генеральних сукупностей тощо. У термінах статистики припущення про генеральну сукупність називають статистичними гіпотезами, а методи перевірки — критеріями.

Означення 4.3. *Статистичною гіпотезою* називають твердження про вигляд частотного розподілу генеральної сукупності, його параметри або співвідношення кількох генеральних сукупностей.

Стандартна процедура перевірки статистичної гіпотези полягає в тому, що формулюють два твердження: так звані основну та альтернативну гіпотези. Потім, досліджуючи вибірку, намагаються за

[1] Зауважимо, що оцінювання певних коефіцієнтів так само дає змогу аналізувати взаємозв’язок сукупностей.

допомогою певного критерію підтвердити або спростувати основну гіпотезу, тим самим підтвердивши альтернативну.

Означення 4.4. *Основною*, або *нульовою*, називають *статистичну гіпотезу*, яку намагаються підтвердити за допомогою критерію. Якщо критерій не підтверджує основну гіпотезу, то кажуть, що він її відхиляє. Основну гіпотезу позначають символом H_0.

Термін "нульова гіпотеза" пов'язаний з тим, що найпростіше тестування гіпотез полягає в перевірці твердження про рівність генерального параметра деякому числу. Це твердження іноді записують у такому вигляді:

$$\{\text{генеральний параметр}\} - \{\text{його значення, що тестується}\} = 0.$$

Зауважимо, що нуль у цьому твердженні й дав назву гіпотезі.

Означення 4.5. *Альтернативною*, або *конкуруючою*, *гіпотезою* називають твердження, яке вважається правильним, якщо критерій відхилив основну гіпотезу. Альтернативну гіпотезу позначають символом H_1.

Як правило, альтернативна гіпотеза — це твердження, яке логічно протилежне основній гіпотезі. Проте іноді альтернативну гіпотезу формулюють інакше.

Означення 4.6. *Статистичним критерієм*, або просто *критерієм*, називають правило, за допомогою якого, дослідивши вибірку, приймають або відхиляють основну гіпотезу.

Зауважимо, що деякий статистичний критерій не обов'язково використовують з метою довести основну гіпотезу. З позицій будь-якого статистичного критерію обидві гіпотези цілком рівноправні [1].

Приклад 4.2.2. Припустимо, необхідно перевірити відоме твердження про акселерацію міського населення. Нехай відомі результати соціологічного дослідження 1970 р., згідно з яким середній зріст міського дорослого населення в деякій країні становить 176,2 см. Тоді можна сформулювати такі гіпотези.

[1] Якщо ще точніше, то статистичне дослідження найчастіше здійснюють з метою перевірки альтернативної гіпотези.

H_0: Середній зріст міського населення у країні на цей момент перевищує 176,2 см.

H_1: Середній зріст міського населення у країні на цей момент не перевищує 176,2 см [1].

Далі потрібно було б сформувати випадкову вибірку, дослідити її і за допомогою деякого критерію підтвердити гіпотезу H_0 про наявність акселерації або гіпотезу H_1 про її відсутність.

Використання процедури перевірки гіпотез не означає автоматично, що слід сформулювати правильну гіпотезу як основну, а потім намагатися її довести. Мало того, часто в задачах, особливо у психологічних дослідженнях, позитивним результатом вважається відхилення основної гіпотези.

Статистичні критерії поділяють на дві великі групи: *параметричні* та *непараметричні*. Перші з них — це критерії, за допомогою яких перевіряють гіпотези про параметри розподілів (наприклад, про середнє значення, стандартне відхилення тощо). Усі інші критерії непараметричні (наприклад, такі критерії можуть виявляти подібність двох розподілів, розпізнавати зсув рівня ознаки в генеральній сукупності тощо).

Як будь-яка статистична процедура, тестування гіпотез не дає можливості зробити абсолютні висновки. При перевірці гіпотези в дослідженні завжди може виявитися помилка. Наприклад, перевіряють гіпотезу про рівність середньорічного доходу населення значенню 1200 ум. од. Для цього беруть випадкову вибірку і застосовують до її аналізу конкретний статистичний критерій. На жаль, це не означає, що вибірка відповідатиме реальній ситуації у країні. Наприклад, якщо до неї потраплять кілька мільйонерів, то стверджувати про правильний результат тестування гіпотези немає сенсу.

Отже, перевіряючи статистичну гіпотезу, слід враховувати можливі помилки. Ці помилки можуть статися з різних причин. Розглянемо таку схему.

[1] Часто в таких задачах альтернативну гіпотезу формулюють так: середній зріст залишився на рівні 176,2 см. Це той випадок запису альтернативної гіпотези, коли вона не є логічно протилежною нульовій.

Для генеральної сукупності правильна гіпотеза	У результаті застосування критерію прийнята гіпотеза	
	основна	альтернативна
основна	Немає помилки	Помилка першого роду
альтернативна	Помилка другого роду	Немає помилки

Як бачимо, можливі чотири варіанти співвідношення реальної ситуації в генеральній сукупності і висновків процедури тестування. У двох з них висновки збігаються з реаліями і тому правильні. Але в інших двох випадках висновки будуть неправильні. Традиційно у висновках (згідно з наведеною щойно схемою) розрізняють помилки першого та другого роду.

Означення 4.7. *Помилкою першого роду* процедури тестування називають таку, яка полягає у відхиленні правильної основної гіпотези. Імовірність такої похибки називають *рівнем значущості* та позначають α.

Означення 4.8. *Помилкою другого роду* процедури тестування називають таку, яка полягає у прийнятті неправильної основної гіпотези. Імовірність такої похибки позначають β, а величину $1 - \beta$ називають *потужністю критерію*[1].

На жаль, при перевірці врахувати одночасно дві помилки неможливо. Як правило, чинять так: фіксують якомога менший рівень значущості і вважають його характеристикою надійності тестування. А помилку другого роду враховують, порівнюючи різні адекватні конкретній задачі статистичні критерії за їх потужністю.

Тепер відомі всі поняття, необхідні для формулювання основної схеми процедури перевірки гіпотез. Запишемо її у вигляді алгоритму.

1. Формулюємо основну гіпотезу.
2. Записуємо альтернативну гіпотезу.
3. Підбираємо адекватний конкретній задачі статистичний критерій.
4. Задаємо рівень значущості.

[1]Потужність критерію — це його здатність відхилити неправильну основну гіпотезу.

5. Формуємо випадкову вибірку [1].

6. Аналізуючи цю вибірку за допомогою критерію при заданому рівні значущості, приймаємо основну або альтернативну гіпотезу. Висновок, як правило, записують у такому вигляді: "На такому-то рівні значущості такий-то критерій підтверджує (або відхиляє) основну гіпотезу".

На цей момент розглянуто лише ідеї, покладені в основу процедури перевірки гіпотез. Повніший аналіз цієї методики, а також низку статистичних критеріїв вивчатимемо в розд. 6.

4.3. Процедура вибірки

Перед виборами 2002 р. до Верховної Ради України кілька відомих соціологічних служб сформували прогнози розподілу голосів виборців між партіями. При цьому кожне дослідження базувалося на опитуванні кількох тисяч осіб (близько 0,01 % загальної чисельності виборців). Результати прогнозів різнилися неістотно. Наступні вибори засвідчили, що прогнози незначно відрізнялись і від реального розподілу голосів (для більшості партій-лідерів абсолютні помилки не перевищували 2 % голосів). Проте помилки були.

Отже, при формуванні вибірки частина інформації про генеральну сукупність втрачається. Проте ці втрати, як правило, незначні й за даними вибірки генеральну сукупність можна описати доволі точно. Разом з тим матеріальні та часові затрати на формування й дослідження вибірки на кілька порядків менші, ніж на повне дослідження генеральної сукупності.

Врешті-решт, як зауважувалося, іноді дослідити всю генеральну сукупність принципово неможливо, наприклад, коли вона змінюється упродовж дослідження.

Розглянемо ще приклад. Так, потрібно дослідити нові ліки, про побічну дію яких інформації немає. Застосування цих ліків до всієї генеральної сукупності може виявитись небезпечним. Як прави-

[1] Іноді основну та альтернативну гіпотези формулюють після генерування та попереднього аналізу вибірки (див. розд. 6).

ло, ліки випробовують спочатку на невеликих групах пацієнтів-добровольців.

Для того щоб вибіркове дослідження мало сенс, необхідно, щоб вибірка була репрезентативною, тобто адекватно репрезентувала генеральну сукупність. У противному разі результати дослідження можуть істотно відрізнятися від реальних характеристик генеральної сукупності. Наприклад, якщо випробовувати нові ліки на групі пацієнтів молодого віку, то це не означає, що вони допоможуть людям похилого віку. Так само навряд чи можна коректно спрогнозувати результати виборів, якщо опитувати громадян лише в одному регіоні країни. А за даними Internet-опитування неможливо дійти правильних висновків про середній рівень доходів населення.

З позицій теорії ідеально репрезентує генеральну сукупність вибір навмання. Наприклад, складаємо повний список киян, випадково вибираємо з нього 1000 осіб, зустрічаємося з кожною з них, опитуємо і аналізуємо зібрану інформацію. На практиці це організувати важко. Справді, адже цей список мав би змінюватись щонайменше кожної години. Мало того, навіть якщо вдасться ідеально випадково відібрати 1000 осіб, на опитування потрібно витратити певний час (як правило, кілька днів чи тижнів залежно від потужностей соціологічної служби). А за цей час характеристики генеральної сукупності так само можуть змінитися. Нарешті, частина осіб завжди відмовляється давати інтерв'ю або повідомляє неправильну інформацію.

Отже, ідеальний з позицій теорії вибір зробити майже неможливо. Тому потрібно вміти здійснювати ідеальний вибір з практичних позицій. З подібними методами ознайомимося далі.

4.3.1. Види вибірок

Існує кілька видів здійснення вибірки. В основу кожної з них покладено певний принцип чи критерій. Розглянемо найпопулярніші види вибору.

1. Одним з критеріїв формування вибірки є зручність, а отже, і її низька вартість. Наприклад, як вибірку можна взяти перші 100 пунктів з повного списку, перші 50 телефонних номерів у довіднику

тощо. Такі методи можуть призвести до помилкових висновків. Але найгірше те, що неможливо оцінити розмір помилки.

2. Вибірку можна формувати за принципом правдоподібності. Наприклад, можна опитати лише студентів третього (тобто середнього) курсу із середнім балом “4”. Правдоподібно, що вибірка саме таких студентів усереднює думку всіх студентів закладу. Розглянемо і такий приклад. Для дослідження суспільства загалом можна було б сформувати вибірку з представників середнього класу, вважаючи, що цей прошарок усереднює характеристики суспільства. На жаль, і в таких вибірках неможливо встановити ані природу, ані розміри помилок.

3. Достатню репрезентативність генеральній сукупності іноді надають так звані *систематичні вибірки*. Наприклад, вибір кожного десятого елемента з повного списку дає систематичну вибірку. Систематичну вибірку можна сформувати, якщо опитувати, скажімо, кожного п’ятого перехожого на вулиці. Якщо при цьому додатково ввести низку обмежень, наприклад, на кількість опитаних на одній вулиці чи на кількість опитаних у певні години, то можна досягти якісної репрезентативності вибірки. Проте систематична вибірка може призвести до значних помилок. Наприклад, якщо опитувати господаря кожного другого будинку на вулиці, то в результаті буде отримано думку лише тих, хто мешкає з одного боку вулиці. А це може значно спотворити висновки. Вибрані люди можуть по-різному ставитись до існуючих транспортних ліній, з вікон їх будинків відкриваються різні панорами, врешті-решт не виключено, що ця вулиця відокремлює квартали багатих та бідних.

4. Чи не єдиним способом уникнути спотворень при формуванні вибірки є лише цілковито випадковий вибір. При випадковому виборі дослідження не залежать від характеру генеральної сукупності. Разом з тим зауважимо, що випадковість не означає довільного вибору елементів генеральної сукупності. Навпаки, при формуванні випадкової вибірки потрібно дотримуватись певних встановлених правил. Далі розглянемо підходи до формування випадкових вибірок.

4.3.2. Випадкові вибірки

Коли розглядають випадкову вибірку, зазвичай вважають, що виконуються три властивості:

- імовірність отримати нерепрезентативну вибірку низька;
- імовірність швидко зменшується при збільшенні обсягу вибірки;
- імовірність можна оцінити.

Наприклад, якщо серед студентства вищого навчального закладу 30 % студентів і 70 % студенток, то у випадковій вибірці співвідношення кількості студентів і студенток має залишатися приблизно таким самим. Проте можна отримати дуже нерепрезентативну вибірку, скажімо, таку, що складається лише зі студентів. Оцінимо ймовірність отримання такої вибірки. Ймовірність вибрати першого студента становить 0,3, другого — $0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$, третього — $0{,}09 \cdot 0{,}3 = 0{,}027$ і так до кінця. Ймовірність отримати вибірку обсягом 10 з одних студентів становить $0{,}3^{10} = 0{,}09^5 < 0{,}1^5 = 0{,}00001$ і є вже доволі малою. При цьому ця ймовірність швидко зменшується зі збільшенням обсягу вибірки.

Розглянемо, як можна організувати ідеальну процедуру випадкового вибору.

1. Насамперед потрібно скласти список усіх елементів генеральної сукупності.
2. Кожному елементу дати унікальний номер (порядковий номер у списку).
3. Усі номери записати на окремі картки.
4. Картки покласти в урну і перемішати.
5. З урни навмання витягти необхідну кількість карток і за їх номерами ідентифікувати елементи зі списку [1].

Наведена процедура має кілька “вузьких” місць. Насамперед складання повного списку може виявитись надто дорогим. Мало того, іноді повний список принципово неможливо скласти. Наприклад,

[1] Часом потрібно сформувати вибірку, елементи якої можуть повторюватись (див. підрозд. “Ймовірнісний вибір” на ст. 142). Для цього слід повторити вибір, тобто кожну картку, яку витягнуто з урни, після записування номера знову покласти в урну.

неможливо скласти список усіх хворих на рак, бо багато людей не діагностовано на поточний момент.

Окрім того, складно ідеально перемішувати картки в урні. Часто можуть зустрічатися доволі великі групи послідовних (чи майже послідовних) номерів. Іншими словами, картки, що до перемішування були сусідніми, мають тенденцію залишатися сусідніми і після перемішування.

Першу проблему вирішують за допомогою різних модифікацій ідеальної процедури, а другу — за допомогою математичних алгоритмів генерування так званих псевдовипадкових чисел[1]. На практиці ці алгоритми знати не потрібно. Можна користуватись таблицями випадкових чисел або комп'ютерними засобами.

4.3.3. Методи формування випадкових вибірок

Насамперед опишемо, як здійснити випадкову вибірку за допомогою таблиць. Таку таблицю наведено в дод. 7.3. Зауважимо, що для статистичних методів, які розглядаються в цьому посібнику, потрібно вміти генерувати лише цілі числа. Тому далі під випадковим числом розумітимемо випадкове ціле число.

Генерування послідовності випадкових чисел за допомогою таблиць

Нехай потрібно вибрати n випадкових елементів з генеральної сукупності обсягом N. Тоді для індексації елементів генеральної сукупності потрібно N номерів $1, 2, \ldots, N$. Припустимо, число N містить k цифр. Тоді для запису кожного з чисел $1, 2, \ldots, N$ достатньо k цифр. При цьому, якщо число має менше k цифр, домовимося дописувати на його початку необхідну кількість нулів.

Наприклад, якщо $N = 400$, то для його запису потрібно три цифри, тобто $k = 3$. Тоді номер 1 зображатимемо 001.

Тепер опишемо процедуру формування n випадкових номерів з $1, 2, \ldots, N$. Для цього потрібно спочатку довільно вибрати будь-яку

[1] Для спрощення називатимемо їх випадковими числами.

цифру з табл. Д.2.1 [1]. Далі, рухаючись вправо і вниз, слід послідовно виписувати наступні цифри з таблиці. Отриману послідовність цифр групують по k штук. Кожна група утворює випадкове k-цифрове число. Деякі з цих чисел можуть перевищувати N. Їх потрібно викреслити, позаяк відповідні номери не індексують елементів генеральної сукупності.

Числа, які залишаються після викреслювання (тобто ті, які не перевищують N), і утворюють випадкову послідовність індексів елементів генеральної сукупності. Взявши перші n з них, отримаємо шукану вибірку.

Зауважимо, що при генеруванні вибірки без повторень елементів потрібно викреслювати також елементи, які повторюються.

Приклад 4.3.1. Припустимо, на курсі навчається 76 студентів. Нехай для проведення контрольного зрізу знань потрібно випадково вибрати 10 з них. Опишемо, як можна сформувати таку випадкову вибірку.

Використовуючи позначення цього підпункту, маємо $N = 76$, $k = 2$ і $n = 10$. Виберемо довільно першу цифру з табл. Д.2.1. Нехай вибрано цифру 5, розташовану на перетині рядка 21 та стовпця 11. Випишемо послідовно кілька цифр, групуючи їх по дві:

$$\begin{array}{llllllll} \mathbf{55}, & \mathbf{06}, & 93, & \mathbf{43}, & 85, & \mathbf{14}, & 92, & \mathbf{05}, \\ 78, & \mathbf{68}, & 94, & \mathbf{01}, & \mathbf{45}, & \mathbf{46}, & \mathbf{56}, & \mathbf{14}, \ldots \end{array}$$

З цієї послідовності виключимо числа, які перевищують 76, оскільки вони не індексують елементів генеральної сукупності. Числа, що залишаться, виділимо **напівжирним** шрифтом. Перелічимо їх окремо.

Номер числа	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Число	55	06	43	14	05	68	01	45	46	56	14

Перші 10 з цих чисел і визначають номери студентів у загальному списку, які потрапляють до вибірки.

[1] При цьому про ідеальну випадковість вибору першої цифри не може йтися. Такий вибір суб'єктивний. Проте при генеруванні великої вибірки суб'єктивізм вибору першої цифри значного впливу не справляє.

Зауважимо, що якби потрібно було сформувати вибірку більшого обсягу, наприклад, з 15 осіб, то число 14, яке стоїть на позиції 11, так само потрібно було б викреслити. Справді, це число повторюється, воно вже зустрічалося на позиції 4. А один студент, зрозуміло, не може писати контрольну роботу двічі.

Приклад 4.3.2. Нехай генеральна сукупність містить 600 елементів. Тоді для індексації кожного елемента потрібні 3 цифри: 001, 002,..., 599, 600. Сформуємо вибірку з 12 елементів. У табл. Д.2.1 вибираємо навмання довільну цифру і починаючи з неї **послідовно** виписуємо з таблиці цифри, групуючи їх по три.

Припустимо, цей ряд почали з цифри 6, розташованої на перетині рядка 14 та стовпця 12. Отримаємо послідовність трійок:

601, 707, **390**, 739, **026**, **402**, **242**, **126**, **514**, **406**,
374, **050**, 914, 920, **478**, **366**, 912, **141**, **317**, 870, ...

З цієї послідовності виключимо числа, що перевищують 600, позаяк вони не зустрічаються в генеральній сукупності. Решта чисел (виділені **напівжирним** шрифтом) належать до генеральної сукупності. Перелічимо їх окремо.

Номер числа	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Число	390	26	402	242	126	514	406	374	50	478	366	141	317

Перші 12 з цих чисел і визначають випадкову вибірку.

Розглянемо тепер інші методи формування вибірки[1].

Багаторівнева вибірка

Багаторівневий вибір передбачає кілька кроків з попереднім розподілом генеральної сукупності на ієрархічно-групову структуру. На першому кроці випадково вибирають кілька груп найвищого рівня, на другому — у кожній з цих груп вибирають кілька підгруп і так до кінця. На останньому кроці вибирають безпосередньо елементи генеральної сукупності.

[1] Класифікацію запозичено з [25].

Скажімо, якщо потрібно здійснити опитування студентів деякого університету, то сукупність загальної чисельності студентів має природну ієрархію: факультети, відділення, курси, академічні групи, студенти. Спочатку випадково вибираємо кілька факультетів, на кожному з них — денне, заочне або вечірнє відділення, далі для кожного відділення випадково вибираємо курс, потім кілька груп, нарешті, у кожній групі випадково опитуємо кількох студентів.

Кластерна вибірка

Під *кластерною вибіркою* розуміють багаторівневий вибір з генеральної сукупності, ієрархічну структуру якої сформовано за географічною ознакою.

Наприклад, при аналізі генеральної сукупності, яка складається із загальної чисельності громадян країни, можна спочатку випадково вибрати кілька міст і сіл, у кожному з них — кілька районів, у кожному районі — кілька вулиць, на кожній вулиці — кілька будинків, у кожному будинку — мешканців кількох квартир. При цьому на кожному кроці використовують звичайну техніку випадкового вибору.

Стратифікаційна вибірка

Припустимо, за деякою ознакою можна поділити генеральну сукупність на кілька груп[1] одного ієрархічного рівня. Припустимо також, що відоме кількісне співвідношення обсягів цих груп. Тоді вибірку, яка враховує це співвідношення, називають *стратифікаційною*.

Наприклад, нехай відомо, що у вищому навчальному закладі є 200 професорів, 400 доцентів та 600 асистентів. Якщо потрібно здійснити їх опитування, можна сформувати випадкову вибірку, в якій співвідношення професори : доценти : асистенти становитиме $200 : 400 : 600 = 2 : 4 : 6 = 1 : 2 : 3$. Скажімо, можна випадково вибрати 3 професора, 6 доцентів і 9 асистентів. У результаті отримаємо випадкову вибірку з 18 осіб, яка враховує співвідношення чисельності категорій викладачів.

[1] У соціології їх називають *стратами*.

Як правило, стратифікаційні вибірки краще репрезентують генеральну сукупність, ніж звичайні випадкові. На жаль, інформація про обсяги страт часто невідома або недоступна.

Зважування

Якщо відомі пропорції розподілу генеральної сукупності на страти, їх можна врахувати, навіть здійснивши звичайний випадковий вибір. Для цього використовують так звану процедуру *зважування*. Найлегше її зрозуміти на прикладі.

Нехай відомо, що в генеральній сукупності співвідношення чоловіків до жінок становить $51 : 49$. Припустимо, сформовано випадкову вибірку зі 100 індивідуумів з метою встановлення рівня середньої заробітної плати в сукупності.

Якщо відомо, що чоловіки в середньому отримують більші заробітні плати, ніж жінки, а в розглядуваній вибірці 60 чоловіків і 40 жінок, то природно очікувати, що вибірка встановить завищений рівень середньої заробітної плати. У такому разі можна застосувати процедуру зважування.

Для цього розмір заробітної плати кожного чоловіка потрібно помножити на коригуючий множник

$$\frac{40 \cdot 51}{60 \cdot 49},$$

а для кожної жінки — на

$$\frac{60 \cdot 49}{40 \cdot 51},$$

достосовуючи їх до пропорції вихідного розподілу.

Як правило, зважування вибірки дає гірші результати, ніж безпосередньо стратифікаційний вибір. Зокрема, зважування може значно впливати на величину помилок. Скажімо, у наведеному прикладі для жінки у вибірці з нетипово великою заробітною платою вона збільшиться ще в 1,5 раза. А в результаті помилка аналізу може значно збільшитись.

Ймовірнісний вибір

Вибірку, ймовірність потрапляння до якої кожного елемента генеральної сукупності відома, називають *ймовірнісною.* У цьому разі теоретично можна визначити значення помилки. Найважливішою формою ймовірнісної вибірки є така, яка забезпечує однакову ймовірність вибору довільного елемента генеральної сукупності.

Означення 4.9. *Простою випадковою* називають *вибірку*, ймовірність вибору якої з генеральної сукупності дорівнює ймовірності вибору довільної вибірки такого самого обсягу.

Власне припущення, що використовується проста випадкова вибірка, покладено в основу більшості теоретичних результатів, які забезпечують можливість опису генеральної сукупності шляхом аналізу вибірки.

Зауваження 4.1. Зауважимо, що з позиції теорії просту випадкову вибірку можна згенерувати, використовуючи лише вибирання з поверненням. Іншими словами, навмання вибираємо елемент генеральної сукупності, записуємо інформацію про нього, а далі повертаємо цей елемент у генеральну сукупність. Після цього повторюємо процедуру. При цьому один і той самий елемент може потрапити до вибірки кілька разів.

Практично ж вибірки з поверненням, як правило, не застосовують. Проте можна показати, що для великих генеральних сукупностей і відносно невеликих вибірок вибирання з поверненням і без повернення різняться неістотно.

Якщо ж генеральна сукупність невелика, то ймовірність отримати вибірку без повторень при формальному вибиранні з поверненням може бути надто малою. Наприклад, якщо на факультеті 300 студентів і формується вибірка з поверненням обсягом 20, то ймовірність отримати вибірку без повторень становить лише 0,523. Отже, вибирання з поверненням і без повернення в такому разі різняться істотно.

Вибірка зі зміненими пропорціями

Часом з певних міркувань досліднику потрібно у вибірці якнайповніше врахувати характеристики певної підгрупи в генеральній сукупності. Тоді він може свідомо збільшити частку цієї підгрупи у вибірці порівняно з відсотком, який мав би припадати на підгрупу з огляду на її реальний обсяг. Таку вибірку називають *вибіркою із зміненими пропорціями.*

Наприклад, нехай статистичні дослідження засвідчують, що співвідношення хворих на певну хворобу і здорових людей становить 1:100. Теоретично, якщо потрібно дослідити цю хворобу, слід сформувати вибірку з такою самою пропорцією. Проте на практиці у вибірку включають набагато більший відсоток хворих.

Випадкові експерименти

Розглянемо тестування нового методу лікування певної хвороби. Для того щоб перевірити ефективність цього методу, виконують таку процедуру. Спочатку з генеральної сукупності всіх хворих-добровольців випадково вибирають групу пацієнтів. Далі цю групу випадково поділяють на дві рівновеликі підгрупи. В одній підгрупі — *експериментальній* — апробовують нову методику, а у другій — *контрольній* — імітують апробацію нової методики, використовуючи, наприклад, несправжні пігулки. Порівняння перебігу хвороби у двох підгрупах дає змогу оцінити ефективність методики. Такі процедури називають *випадковими експериментами.*

4.4. Вибіркові розподіли

Як зауважувалося, суть вибіркового дослідження полягає в тому, що для аналізу генеральної сукупності досліджують деяку репрезентативну — в ідеалі просту випадкову — вибірку.

Як зазначалося, одним із завдань вибіркового дослідження є оцінювання параметрів генеральної сукупності. Розглянемо кілька важливих понять, які використовуються при розв'язуванні таких завдань.

Припустимо, кілька фахівців незалежно досліджують значення певного параметра ϑ однієї й тієї самої генеральної сукупності. Наприклад, кілька організацій досліджують рівень популярності[1] провідних політичних партій перед парламентськими виборами. Зрозуміло, що в результаті різних незалежних досліджень оцінки генеральних параметрів різнитимуться. Отже, майже всі дослідники (на практиці всі!) припускаються помилки. Для потенційного читача їх звітів важливо знати рівень цих помилок.

Проте генеральна сукупність досліджується за її окремими невеликими частинами, тобто за умови неповної інформації. Тому принципово неможливо визначити абсолютно точне значення помилки кожного з дослідників. Єдиний спосіб певною мірою оцінити рівень достовірності результатів — спробувати знайти усереднені характеристики потенційних помилок дослідників. Для цього використовують таку теоретичну процедуру.

Припустимо, потрібно оцінити генеральний параметр ϑ за допомогою вибірки обсягом n. Тоді слід незалежно взяти n випадкових елементів з генеральної сукупності $X_1, X_2, \ldots, X_n$. При цьому ймовірності взяття будь-якого з елементів рівні. Далі можна за вибіркою $X_1, X_2, \ldots, X_n$ знайти точкову оцінку параметра ϑ.

Кожна проста випадкова вибірка дає певну точкову оцінку параметра ϑ. Якщо розглянемо всі можливі прості випадкові вибірки обсягом n, отримаємо нову сукупність даних, а саме сукупність точкових оцінок параметра ϑ. Ця сукупність має певне середнє значення і стандартне відхилення. Припустимо, середнє значення цієї сукупності дорівнює значенню параметра ϑ вихідної генеральної сукупності[2]. Тоді природною усередненою характеристикою потенційної помилки оцінювання генерального параметра ϑ є стандартне відхилення сукупності всіх його можливих вибіркових значень.

Означення 4.10. Нехай генеральний параметр ϑ досліджується за простими випадковими вибірками обсягом n. Тоді розподіл точкових оцінок параметра ϑ, знайдених для всіх простих випадкових вибірок, називають *n-вимірним вибірковим розподілом* точкової

[1] У цьому разі ϑ — пропорція.

[2] А так є завжди в разі так званих незміщених оцінок (див. п. 5.1.2).

оцінки параметра ϑ. Стандартне відхилення n-вимірного вибіркового розподілу точкової оцінки параметра ϑ називають *стандартною помилкою*.

Вибіркові розподіли параметрів мають лише теоретичне застосування. Іншими словами, на практиці ніколи вибіркові розподіли не шукають. А надто, як випливає з прикладу 4.4.1, це неможливо. Проте теоретичні результати, які характеризують поведінку деяких вибіркових розподілів, мають надзвичайно важливе значення для оцінювання надійності вибіркового дослідження.

Приклад 4.4.1. Припустимо, генеральна сукупність має обсяг N. Нехай для її дослідження формують просту випадкову вибірку обсягом n. Можна показати, що обсяг сукупності значень досліджуваного параметра для всіх можливих простих випадкових вибірок обсягом n становить

$$M = n^N.$$

Значення M надзвичайно швидко збільшується зі збільшенням значень N та n.

Наприклад, якщо формується вибірка обсягом 100 з генеральної сукупності обсягом 10000, то

$$M = 100^{10000} = 10^{20000},$$

а це надзвичайно велике число!

4.4.1. Розподіл вибіркового середнього

Найважливішими вибірковими розподілами є вибіркові розподіли середнього значення. Для них навіть є окремий термін.

Означення 4.11. n-вимірний вибірковий розподіл середнього значення називають *n-вимірним розподілом вибіркового середнього*.

Спробуємо зрозуміти поведінку розподілів вибіркового середнього на гіперболізованому прикладі дослідження надзвичайно малої генеральної сукупності.

Приклад 4.4.2. Нехай генеральна сукупність складається з чотирьох осіб різного зросту.

Номер особи у списку	1	2	3	4
Зріст особи, см	172	176	180	180

Припустимо, що для оцінки середнього значення зросту цієї сукупності формують випадкову вибірку обсягом 2 і визначають її середнє значення. Спробуємо оцінити рівень потенційної помилки такого дослідження.

Для цього побудуємо двовимірний розподіл вибіркового середнього. Спочатку сформуємо всі прості випадкові вибірки обсягом 2[1] і визначимо середнє значення зросту в кожній з них (див. таблицю).

Двовимірний розподіл вибіркового середнього значення зросту чотирьох осіб

Номери у списку	Значення зросту у вибірці, см	Вибіркове середнє, см
1	2	3
1; 1	172; 172	172
1; 2	172; 174	173
1; 3	172; 180	176
1; 4	172; 180	176
2; 1	174; 172	173
2; 2	174; 174	174
2; 3	174; 180	177
2; 4	174; 180	177
3; 1	180; 172	176
3; 2	180; 174	177

[1]Нагадаємо, що до простої випадкової вибірки можуть потрапляти одні й ті самі елементи. У розглядуваному прикладі така вибірка могла б бути реалізована так. Припустимо, що досліджувана генеральна сукупність складається з усіх жителів деякого острова. Експерт для формування вибірки виконує таку процедуру. Заглиблюється всередину острова в пошуках першого ліпшого. Зустрівшись з ним, він вимірює його зріст. Оскільки пошук тривав довго, експерт повертається на узбережжя і обідає. Після обіду він знову вирушає на пошуки і вимірює зріст першого ліпшого. Два отриманих значення і утворюють вибірку. Зрозуміло, що експерт цілком реально міг двічі зустріти одну й ту саму людину!

1	2	3
3; 3	180; 180	180
3; 4	180; 180	180
4; 1	180; 172	176
4; 2	180; 174	177
4; 3	180; 180	180
4; 4	180; 180	180

Знайшовши частоти отриманих вибіркових середніх, утворимо двовимірний розподіл вибіркового середнього.

Вибіркове середнє	172	173	174	176	177	180
Частота	1	2	1	4	4	4

Середнє значення цього розподілу

$$\mu_{\overline{X}} = \frac{172 \cdot 1 + 173 \cdot 2 + 174 \cdot 1 + 176 \cdot 4 + 177 \cdot 4 + 180 \cdot 4}{16} = 176{,}5.$$

Середнє значення вихідної генеральної сукупності

$$\mu = \frac{172 + 176 + 180 + 180}{4} = 176{,}5.$$

Отже, доходимо висновку, що середнє значення розподілу вибіркового середнього збігається із середнім значенням генеральної сукупності.

Разом з тим середнє значення жодної з вибірок не збігається з генеральним середнім. Отже, будь-який фахівець, який прагнув би оцінити середній зріст генеральної сукупності за вибіркою з двох осіб, не мав би жодних шансів отримати точне значення генерального середнього. Кожна вибірка продукує помилку. Для того щоб врахувати рівень цих помилок, природно визначити стандартне відхилення $\sigma_{\overline{X}}$ розподілу вибіркового середнього, іншими словами, стандартну помилку. Опускаючи обчислення, одразу наведемо її значення:

$$\sigma_{\overline{X}} \approx 2{,}52.$$

Водночас стандартне відхилення генеральної сукупності

$$\sigma \approx 3{,}57.$$

Чи можна знайти якийсь змістовний зв'язок між значеннями $\sigma_{\overline{X}}$ та σ? Виявляється, можна:

$$3{,}57 \approx 2{,}52 \cdot \sqrt{2},$$

де 2 — обсяг вибірки.

Виявляється, наведені закономірності невипадкові.

Теорема 4.1. *Нехай генеральна сукупність має середнє значення μ і стандартне відхилення σ; n — довільне натуральне число. Тоді середнє значення n-вимірного розподілу середнього вибіркового так само дорівнює μ, а його стандартна помилка становить $\sigma/\sqrt{n}$* [1].

Значення цього результату полягає в тому, що при оцінюванні середнього значення генеральної сукупності знаємо, що вибіркове дослідження в середньому (якби його виконувало багато незалежних дослідників) дає це середнє значення. Це, зокрема, вмотивовує використання вибіркового середнього як точкової оцінки генерального середнього.

[1] Доведення цієї теореми нескладне. Якщо пригадати основні поняття теорії ймовірності, легко зрозуміти такі міркування. Нехай генеральна сукупність X має середнє значення μ і стандартне відхилення σ. Розглянемо розподіл $\overline{X}_{\text{в}}$ вибіркового середнього для вибірок обсягом n. З огляду на незалежність елементів вибірки математичне сподівання цього розподілу становитиме

$$\mathbf{M}(\overline{X}_{\text{в}}) = \mathbf{M}\Big(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\Big) = \frac{\mathbf{M}(X_1) + \mathbf{M}(X_2) + \cdots + \mathbf{M}(X_n)}{n} = \\ = \frac{n\mathbf{M}(X)}{n} = \mathbf{M}(X) = \mu,$$

дисперсія

$$\mathbf{D}(\overline{X}_{\text{в}}) = \mathbf{D}\Big(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\Big) = \frac{\mathbf{D}(X_1) + \mathbf{D}(X_2) + \cdots + \mathbf{D}(X_n)}{n^2} = \\ = \frac{n\mathbf{D}(X)}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Пригадавши, що стандартне відхилення дорівнює квадратному кореню з дисперсії, остаточно отримаємо твердження теореми.

Крім того, можна наперед до формування вибірки оцінити середній рівень[1] помилки, тобто стандартну помилку вибіркового дослідження в термінах міри розсіювання елементів генеральної сукупності. Зокрема, якщо міра розсіювання генеральної сукупності відома, можна точно обчислити стандартну помилку.

Ця можливість використовується в інтервальному оцінюванні генерального середнього. На жаль, навіть знаючи точне значення стандартної помилки вибіркового дослідження, неможливо безпосередньо оцінити його надійність (див. означення 4.2). Річ у тім, що для цього необхідно вміти визначати ймовірність правильності отриманого за вибіркою довірчого інтервалу. А це можна зробити, лише знаючи форму[2] розподілу вибіркового середнього. Безпосередньо за теоремою 4.1 відомі тільки його середнє значення і стандартне відхилення.

На щастя, у математичній статистиці є результати — так звані центральні граничні теореми, які описують поведінку при збільшенні обсягу вибірки низки вибіркових розподілів, зокрема і розподілу вибіркового середнього. Ці результати та їх застосування наведемо в підрозд. 5.2.

4.4.2. Спеціальні вибіркові розподіли

Поняття вибіркового розподілу вводиться для обґрунтування коректності точкових оцінок і визначення надійності інтервальних оцінок. При цьому інтервальні оцінки достовірніші й тому становлять більший інтерес.

Розглянемо кілька типів задач інтервального оцінювання. Для кожного з них існують спеціальні вибіркові розподіли. Вибірковий розподіл для найважливішого з цих типів — інтервального оцінювання генерального середнього — вже розглянуто раніше. Це розподіл вибіркового середнього.

Коротко зупинимося ще на кількох типах вибіркових розподілів.

[1] Точніше, середньоквадратичний рівень.

[2] Як зауважувалось, найважливішим завданням аналізу статистичних розподілів є обчислення ймовірності потрапляння значень досліджуваної ознаки до заданого інтервалу.

Вибірковий розподіл різниці середніх

Нехай досліджуємо дві незалежні генеральні сукупності і генеральні середні цих сукупностей дорівнюють μ_X та μ_Y, а стандартні відхилення відповідно σ_X та σ_Y.

На практиці часто потрібно оцінити не кожне значення μ_X та μ_Y, а їх різницю $\mu_X - \mu_Y$. Для такого оцінювання попередньо потрібно сформувати вибірки з генеральних сукупностей, а потім проаналізувати їх. При цьому для врахування надійності дослідження потребується теоретичний вибірковий розподіл різниці середніх, який через наявність не однієї, а двох генеральних сукупностей структурно дещо складніший, ніж розподіл вибіркового середнього.

Означення 4.12. Розглянемо довільну пару простих випадкових вибірок обсягом відповідно n_X та n_Y, сформованих з досліджуваних генеральних сукупностей. Визначимо різницю вибіркових середніх значень. Частотний розподіл таких різниць, знайдених для всіх можливих пар простих випадкових вибірок обсягами n_X та n_Y, називають (n_X, n_Y)-*вимірним вибірковим розподілом різниці середніх.*

Для вибіркового розподілу різниці середніх маємо подібне до теореми 4.1 твердження.

Теорема 4.2. *Нехай дві незалежні генеральні сукупності мають середні значення μ_X та μ_Y і стандартні відхилення відповідно σ_X та σ_Y. Нехай n_X та n_Y — довільні натуральні числа. Тоді середнє значення (n_X, n_Y)-вимірного вибіркового розподілу різниці середніх дорівнює $\mu_X - \mu_Y$, а його стандартна помилка становить*

$$\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}.$$

Розподіл вибіркової пропорції

У соціологічних та психологічних дослідженнях часто необхідно оцінити пропорції індивідуумів з певною властивістю, наприклад, пропорції громадян, які дають деяку конкретну відповідь на запитання про їх ставлення до певного суспільного феномена. Якщо в таких дослідженнях використовувати вибірковий метод, постане проблема оцінювання надійності дослідження. При її розв'язанні застосовують властивості теоретичного вибіркового розподілу пропорції.

Означення 4.13. Нехай для дослідження пропорції елементів генеральної сукупності з певною властивістю формують прості випадкові вибірки обсягом n. Тоді частотний розподіл пропорцій усіх таких вибірок називають *n-вимірним розподілом вибіркової пропорції.*

Як і для розглянутих раніше вибіркових розподілів, для розподілу вибіркової пропорції можна довести таку теорему.

Теорема 4.3. *Нехай пропорція елементів генеральної сукупності із заданою властивістю дорівнює P; n — довільне натуральне число. Тоді середнє значення n-вимірного розподілу вибіркової пропорції дорівнює P, а його стандартна помилка становить*

$$\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}.$$

Справді, усіх індивідуумів генеральної сукупності можна поділити на дві групи — ті, хто має досліджувану властивість, і ті, хто її не має. Іншими словами, генеральна сукупність складається з даних, що можуть приймати лише два значення: "має властивість" та "не має властивості". При цьому, очевидно, теоретична ймовірність зустріти значення "має властивість" у генеральній сукупності дорівнює генеральній пропорції P.

Формуючи n-вимірний розподіл вибіркової пропорції, фактично підраховуємо відносні кількості значень "має властивість" у групах обсягом n. З означення біноміального розподілу (див. підрозд. 3.4) випливає, що варіанти n-вимірного розподілу вибіркової пропорції можна отримати з варіант біноміального розподілу з параметрами $(P; n)$, розділивши їх на n.

Тому за властивостями 2 та 3 біноміального розподілу і формулами (2.3) і (2.4) середнє значення n-вимірного розподілу вибіркової пропорції

$$\frac{1}{n}nP = P,$$

а його стандартна помилка

$$\frac{1}{n}\sqrt{nP(1-P)} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}.$$

Вибірковий розподіл різниці пропорцій

Для порівняння пропорцій елементів з конкретною властивістю у двох незалежних генеральних сукупностях використовують такі означення і теорему.

Означення 4.14. Нехай становить інтерес різниця пропорцій елементів з конкретною властивістю у двох незалежних генеральних сукупностях. Розглянемо довільну пару простих випадкових вибірок обсягом відповідно n_X та n_Y, сформованих з досліджуваних генеральних сукупностей. Тоді можна визначити різницю вибіркових пропорцій. Частотний розподіл таких різниць, знайдених для всіх можливих пар простих випадкових вибірок обсягами n_X та n_Y, називають (n_X, n_Y)-*вимірним вибірковим розподілом різниці пропорцій.*

Теорема 4.4. *Нехай дві незалежні генеральні сукупності мають пропорції P_X та P_Y; n_X та n_Y — довільні натуральні числа. Тоді середнє значення (n_X, n_Y)-вимірного вибіркового розподілу різниці пропорцій дорівнює $P_X - P_Y$, а його стандартна помилка становить*

$$\sqrt{\frac{P_X(1-P_X)}{n_X} + \frac{P_Y(1-P_Y)}{n_Y}}.$$

Зауважимо, що з теорем 4.2–4.4 одразу ж випливає, що цілком правомірно можна використовувати різницю вибіркових середніх, вибіркову пропорцію та різницю вибіркових пропорцій як точкові оцінки відповідних генеральних параметрів.

4.4.3. Вибірковий розподіл дисперсії

Як зазначалося, найважливішими параметрами сукупностей у статистиці вважаються середнє значення і стандартне відхилення.

Тому природно розглянути ще не проаналізований випадок вибіркового розподілу стандартного відхилення. На жаль, з технічних міркувань простіше дослідити вибірковий розподіл дисперсії, а не стандартного відхилення.

Припустимо, група експертів намагається незалежно оцінити значення дисперсії деякої генеральної сукупності. Для цього кожний з них формує просту випадкову вибірку однакового обсягу n і розраховує дисперсію вибірки. Чи можна сподіватися, що в середньому експерти правильно оцінюватимуть генеральну дисперсію?

Спробуємо відповісти на це запитання. Для цього розглянемо генеральну сукупність X з дисперсією σ^2, n-вимірний розподіл вибіркової дисперсії $\mathbf{D}_\text{в}$ і знайдемо його середнє значення.

Позначимо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ довільну просту випадкову вибірку обсягом n. Вважаючи $X_1, X_2, \ldots, X_n$ незалежними копіями вихідної генеральної сукупності й використовуючи формулу (2.1), отримуємо

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{D}}_\text{в} &= \overline{\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{n} - \Big(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\Big)^2} = \\
&= \frac{1}{n^2}\overline{nX_1^2+\cdots+nX_n^2-(X_1+\cdots+X_n)^2} = \\
&= \frac{1}{n^2}\overline{nX_1^2+\cdots+nX_n^2-(X_1^2+\cdots+X_n^2)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}X_iX_j} = \\
&= \frac{n-1}{n^2}\overline{X_1^2+\cdots+X_n^2} - \frac{1}{n^2}\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}X_iX_j} = \\
&= \frac{n-1}{n^2}\big(\overline{X_1^2}+\cdots+\overline{X_n^2}\big) - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\overline{X_iX_j}.
\end{aligned}$$

Оскільки в останньому виразі під знаком подвійної суми є $n(n-1)$ доданків, остаточно отримаємо

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{D}}_\text{в} &= \frac{n-1}{n^2}n\overline{X^2} - \frac{1}{n^2}(n-1)n\overline{X}\,\overline{X} = \\
&= \frac{n-1}{n}\big(\overline{X^2}-\overline{X}^2\big) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.
\end{aligned}$$

Отже, середнє значення n-вимірного вибіркового розподілу дисперсії

$$\overline{\mathbf{D}}_{\text{в}} = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \tag{4.1}$$

і завжди менше від генеральної дисперсії σ^2.

Отже, оцінюючи генеральну дисперсію за допомогою її вибіркової версії, експерти загалом занижуватимуть її у $\frac{n}{n-1}$ разів.

Тому для коректної оцінки генеральної дисперсії використовують не вибіркову дисперсію, а таку характеристику:

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\sigma^2.$$

Величину s^2 називають *виправленою дисперсією*, а s — *виправленим стандартним відхиленням.*

Отже, якщо експерти замість вибіркової дисперсії використовуватимуть її виправлену версію, то в середньому їх відповіді даватимуть значення генеральної дисперсії. Нагадаємо, що стандартне відхилення розраховують як квадратний корінь з дисперсії. Тому природно припустити, що виправлене стандартне відхилення в середньому дає генеральне стандартне відхилення. На жаль, це не так!

Справді, нехай з генеральної сукупності можна вибрати M вибірок заданого обсягу. Нехай $s_1, \dots, s_M$ — їх виправлені стандартні відхилення. Доведено, що

$$\sigma^2 = \frac{s_1^2 + \cdots + s_M^2}{M}. \tag{4.2}$$

Якби виправлені стандартні відхилення в середньому давали генеральне стандартне відхилення, було б отримано рівність

$$\sigma = \frac{s_1 + \cdots + s_M}{M}. \tag{4.3}$$

Але з рівності (4.2) рівність (4.3) не випливає!

Проте у статистиці для оцінювання генерального стандартного відхилення використовують саме виправлене стандартне відхилення s. Це зумовлено лише тим, що виправлена дисперсія s^2 у середньому дає генеральну дисперсію[1].

4.5. Спеціальні статистичні розподіли

У розд. 3 було розглянуто низку статистичних розподілів, які найчастіше використовують при моделюванні генеральних сукупностей у соціології та психології. Проте крім розглянутих, умовно кажучи, "природних" існують розподіли "технічні", які використовують не для моделювання реальних даних, а для оцінювання параметрів і тестування гіпотез. Розглянемо три таких розподіли: Стьюдента, Пірсона та Фішера—Снедекора[2].

4.5.1. t-розподіл Стьюдента

Розподіл Стьюдента[3] найчастіше використовують при статистичному оцінюванні та перевірці гіпотез за малих вибірок.

Означення 4.15. Припустимо X — сукупність, розподілена за нормальним законом $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$. Розглянемо довільну просту випадкову вибірку обсягом n. Нехай s — її виправлене стандартне відхилення. Тоді розподіл

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}},$$

який формується за всіма простими випадковими вибірками обсягом n, називають *розподілом Стьюдента* з $(n-1)$ ступенями вільності і позначають $t(n-1)$.

Наведемо властивості розподілу Стьюдента.

1. Він симетричний відносно нуля.
2. При великих n поводиться як нормальний.

---

[1] Стосовно виправленого стандартного відхилення можна сказати, що воно дає генеральне стандартне відхилення в середньому квадратичному.

[2] Використаємо підхід з [26].

[3] Цей розподіл винайшов у 1908 р. ірландський математик В. Госет. Уклавши контракт з пивоварнею Гіннеса, він не міг опублікувати це відкриття. Щоб уникнути суперечностей з роботодавцями, він використав псевдонім Student.

3. Математичне сподівання розподілу з $(n-1)$ ступенями вільності дорівнює нулю, а дисперсія $n/(n-2)$.

Криві t-розподілу для деяких n зображено на рис. 4.1.

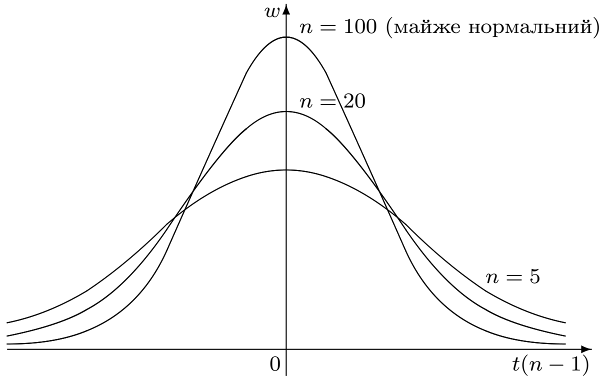


Рис. 4.1. **Криві t-розподілу Стьюдента при різних значеннях n**

Як зазначалося, чи не найважливішим при роботі з розподілами є обчислення ймовірності потрапляння випадково взятого значення сукупності до заданого інтервалу. Насправді при оцінюванні параметрів та перевірці гіпотез потрібно вміти розв'язувати обернену задачу. А саме потрібно вміти визначати такий інтервал, що ймовірність потрапляння випадково взятого значення сукупності до нього дорівнює заданій. При цьому, як правило, інтервал має одну з таких форм: $(-a; a)$ або $(\infty; a)$, а задана ймовірність приймає одне з кількох стандартних значень. Покажемо на прикладі як розв'язувати цю задачу в разі розподілів Стьюдента.

Приклад 4.5.1. Припустимо, потрібно визначити інтервал вигляду $(-a; a)$, ймовірність потрапляння до якого розподіленого за законом $t(9)$ випадкового значення дорівнює 95 %.

Для цього скористаємося таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (табл. Д.2.21). У ній заданій ймовірності 95 % відповідають рівень значущості

$$\alpha = 1 - 0,95 = 0{,}05$$

і двобічна критична область. Отже, розподілене за законом $t(9)$ випадкове значення потрапляє до інтервалу $(-2{,}26; 2{,}26)$ з ймовірністю 95 %.

Нехай тепер потрібно визначити інтервал вигляду $(-\infty; a)$, ймовірність потрапляння до якого розподіленого за законом $t(150)$ випадкового значення дорівнює 99 %.

У цьому разі потрібно взяти рівень значущості

$$\alpha = 1 - 0,99 = 0{,}01$$

і однобічну критичну область. Оскільки $150 > 120$, використаємо останній рядок таблиці. Отже, розподілене за законом $t(150)$ випадкове значення потрапляє до інтервалу $(-\infty; 2{,}33)$ з ймовірністю 99 %.

4.5.2. χ^2-розподіл Пірсона

При визначенні інтервальних оцінок для середнього значення та пропорції у статистиці використовують, як правило, нормальний розподіл і розподіл Стьюдента. Розподіл же Пірсона застосовують при інтервальному оцінюванні дисперсії.

Формально розподіл Пірсона означають так.

Означення 4.16. Позначимо Z генеральну сукупність, розподілену за стандартним нормальним законом $\mathcal{N}(0; 1)$ (див. пункт 3.3.3). Розглянемо довільну просту випадкову вибірку $Z_1, \ldots, Z_n$ обсягом n із сукупності Z. Тоді розподіл

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$$

суми квадратів значень вибірки, який формується за всіма простими випадковими вибірками з Z обсягом n, називають *розподілом Пірсона* з n ступенями вільності. Цей розподіл позначають $\chi^2(n)$.

Наведемо властивості розподілу Пірсона.

1. Його значення перебуває в інтервалі $[0; \infty)$.

2. Для малих значень n розподіл має лівобічну асиметрію. Зі збільшенням n він стає дедалі симетричнішим і поводиться як нормальний. При цьому для $n > 100$ маємо співвідношення

$$\sqrt{2\chi^2(n)} - \sqrt{2n-1} \approx \mathcal{N}(0; 1). \tag{4.4}$$

3. Математичне сподівання розподілу з n ступенями вільності дорівнює n, а дисперсія становить $2n$.

Криві розподілу Пірсона для різних значень n зображено на рис. 4.2.

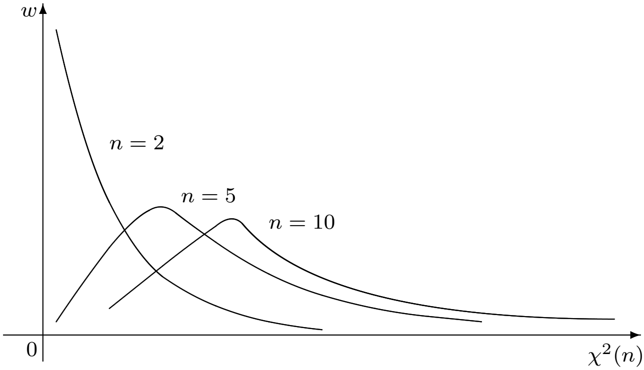


Рис. 4.2. **Криві розподілу Пірсона при різних значеннях** n

Розглянемо, як визначити інтервали спеціального вигляду, ймовірність потрапляння до яких дорівнює заданій, для випадку розподілів Пірсона.

Приклад 4.5.2. Нехай потрібно знайти інтервал вигляду $(a; \infty)$, ймовірність потрапляння до якого розподіленого за законом $\chi^2(15)$ випадкового значення дорівнює 99 %.

Для цього скористаємося таблицею критичних точок розподілу Пірсона (табл. Д.2.17), де вказано відповідні розглядуваній задачі значення a. Отримаємо, що розподілене за законом $\chi^2(15)$ випадкове значення потрапляє до інтервалу $(5{,}23; \infty)$ з ймовірністю 99 %.

Нехай тепер потрібно знайти інтервал вигляду $(0; a)$, ймовірність потрапляння до якого розподіленого за законом $\chi^2(12)$ випадкового значення дорівнює 95 %.

Тоді ймовірність потрапляння до інтервалу $(a; \infty)$ розподіленого за законом $\chi^2(12)$ випадкового значення дорівнює 5 %. Використовуючи таблицю критичних точок розподілу Пірсона, отримуємо значення $a = 21{,}03$.

Насамкінець розглянемо такий приклад. Нехай потрібно знайти інтервал вигляду $(0; a)$, ймовірність потрапляння до якого розподіленого за законом $\chi^2(220)$ випадкового значення дорівнює 90 %.

На жаль, даних про критичні точки розподілу Пірсона для $n = 220$ ступенів вільності в табл. Д.2.17 немає. Проте можна скористатися формулою (4.4). Насамперед обчислимо

$$\sqrt{2 \cdot 220 - 1} = \sqrt{439} \approx 20{,}95.$$

Далі визначимо таке число b, що ймовірність потрапляння до інтервалу $(-20{,}95; b)$ випадкового значення, розподіленого за стандартним нормальним законом, дорівнює 90 %. Для цього за таблицею значень функції Лапласа (табл. Д.2.1) спочатку обчислимо

$$\Phi(20{,}95) \approx 0{,}5.$$

Для визначення b скористаємося рівністю

$$\Phi(b) = 0{,}90 - 0{,}5 = 0{,}4.$$

За таблицею значень функції Лапласа маємо

$$b = 1{,}28.$$

Тепер за формулою (4.4) бачимо, що випадкова величина $\sqrt{2\chi^2(220)}$ потрапляє до інтервалу

$$(0; 1{,}28 + 20{,}95) = (0; 22{,}23)$$

з ймовірністю 90 %.

Остаточно шукане значення

$$a = \frac{22{,}23^2}{2} \approx \frac{494{,}17}{2} \approx 247{,}08.$$

Отже, розподілене за законом $\chi^2(220)$ випадкове значення потрапляє до інтервалу $(0; 247{,}08)$ з ймовірністю 90 %.

4.5.3. F-розподіл Фішера—Снедекора

Розглянемо ще один статистичний розподіл, який використовують при порівнянні стандартних відхилень двох незалежних генеральних сукупностей.

Означення 4.17. Нехай X, Y — дві незалежні нормально розподілені генеральні сукупності. Припустимо, їх стандартні відхилення дорівнюють σ_X та σ_Y. Розглянемо всеможливі прості випадкові вибірки обсягом m з X та обсягом n з Y. Нехай s_X і s_Y — їх виправлені стандартні відхилення. Тоді величина

$$\frac{s_X^2/\sigma_X^2}{s_Y^2/\sigma_Y^2}$$

має *F-розподіл Фішера—Снедекора з $m-1$ ступенями вільності в чисельнику та з $n-1$ ступенями вільності у знаменнику.* Цей розподіл позначатимемо $F_{m-1,n-1}$.

Наведемо властивості розподілу Фішера—Снедекора.

1. Значення розподілу перебуває в межах від нуля до $+\infty$.

2. Подібно до розподілу Пірсона F-розподіл має правобічну асиметрію.

3. Розподіл наближається до нормального зі збільшенням кількостей ступенів вільності в чисельнику та знаменнику.

Криві низки розподілів Фішера—Снедекора зображено на рис. 4.3.

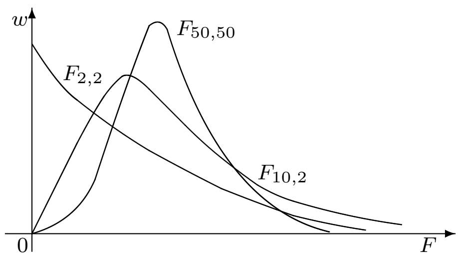


Рис. 4.3. **Криві розподілу Фішера—Снедекора при різних кількостях ступенів вільності**

Використовуватимемо F-розподіл для аналізу лише однієї задачі (див. п. 6.1.3). Тому не описуватимемо тут, як обчислювати ймовірність потрапляння до заданого інтервалу F-розподіленої величини.

Висновки

У статистиці розрізняють два види сукупностей — генеральні та вибіркові. Генеральна сукупність складається зі *всіх* об'єктів певного виду. Як правило, генеральна сукупність є великою або дуже великою. Тому здійснити її повний достеменно точний статистичний аналіз за реальний час та з обмеженим бюджетом практично неможливо. Тому генеральну сукупність досліджують, сформувавши з неї відносно невелику вибірку, повний аналіз якої реальний і нескладний.

Дослідивши вибірку, аналітик повинен зробити висновки про генеральну сукупність. Для цього існують два підходи — оцінювання параметрів і тестування гіпотез. Мало того, існують два типи оцінок генеральних параметрів: точкові та інтервальні.

Якість точкових оцінок визначається низкою властивостей. На жаль, про достовірність точкових оцінок не може йтися. На відміну від точкових в інтервальних оцінках зазначається рівень довіри до них. При перевірці якості точкових та надійності інтервальних оцінок важливу роль відіграють вибіркові розподіли.

Перевірка гіпотез є загальнішою процедурою, ніж оцінювання. Процедура перевірки гіпотези полягає у формулюванні двох гіпотез — основної та альтернативної — і їх аналізу за допомогою деякого статистичного критерію. При цьому використання статистичного критерію може призводити до помилок двох типів — I та II роду. Врахувати ці дві помилки одночасно неможливо. Як правило, ймовірність помилки I роду — її називають *значущістю* — фіксують наперед. А залежно від того, як часто статистичний критерій припускається помилки II роду, його вважають більшою чи меншою мірою потужним.

Отже, вибіркове дослідження складається з двох фаз. На першій формують вибірку з генеральної сукупності, використовуючи одну зі стандартних процедур. А друга фаза полягає в дослідженні вибірки і формулюванні висновків про генеральну сукупність. При цьому використовують або процедури оцінювання параметрів, або методи тестування гіпотез.

Ключові поняття

Вибірка:
- багаторівнева
- із змінними пропорціями
- випадкова
- кластерна
- проста випадкова
- репрезентативна
- систематична
- стратифікаційна

Вибіркове дослідження
Вибірковий параметр
Вибірковий розподіл:
- дисперсії
- пропорції
- різниці пропорцій
- різниці середніх
- середнього

Генеральна сукупність
Генеральний параметр
Гіпотеза:
- альтернативна
- нульова

Довірчий інтервал
Оцінка:
- інтервальна
- правильна
- точкова

Потужність критерію
Рівень довіри
Рівень значущості
Розподіл:
- Пірсона
- Стьюдента
- Фішера—Снедекора

Стандартна помилка
Статистична гіпотеза
Статистичний критерій

Вправи

1. Нехай проводимо соціологічне опитування серед киян, звертаючись до випадкових перехожих на Хрещатику в обідній час. Чи можна таку вибірку вважати простою випадковою? А репрезентативною? Відповідь обґрунтуйте.

2. Нехай для перевірки нової методики лікування з генеральної сукупності добровільних пацієнтів, яка є репрезентативною щодо

всіх потенційних хворих, випадково вибираємо 25 пацієнтів. Ця вибірка проста випадкова? Чи можна її вважати репрезентативною? Відповідь обґрунтуйте.

3. Припустимо, відсоток жінок у генеральній сукупності вчителів середньої школи міста дорівнює 80 %. Як би Ви за такою інформацією сформували репрезентативну вибірку обсягом 50 з цієї генеральної сукупності?

4. Розглянемо дві генеральні сукупності: одну — з чотирьох осіб, іншу — з трьох. Припустимо, IQ-індекси осіб у цих сукупностях такі: 113, 120, 121, 124 у першій та 100, 104, 129 у другій. Розгляньте $(2, 1)$-вимірний вибірковий розподіл різниці середніх і перевірте для нього твердження теореми 4.2.

5. Розглянемо генеральну сукупність з 5 осіб. Нехай генеральна пропорція безробітних дорівнює 40 % (тобто з п'яти двоє безробітні). Дослідіть двовимірний розподіл вибіркової пропорції і перевірте для нього твердження теореми 4.3.

6. Припустимо, парламент деякої країни складається з двох палат — нижньої (5 осіб) та верхньої (4 особи). Розглядатимемо ці палати як дві генеральні сукупності. Нехай під час обговорення деякого законопроекту відсоток депутатів, які його підтримали, у нижній палаті становив 60 % (3 з 5), а у верхній — 25 % (1 з 4). Побудуйте $(2, 1)$-вимірний вибірковий розподіл різниці пропорцій та перевірте для нього твердження теореми 4.4.

7. Для першої генеральної сукупності із вправи 4 побудуйте двовимірний вибірковий розподіл дисперсії. Обчисліть його середнє значення і порівняйте результат з генеральною дисперсією. Перевірте правильність формули (4.1).

8. Знайдіть такий інтервал $(-\infty; a)$, ймовірність потрапляння до якого розподіленого за законом $t(18)$ випадкового значення дорівнює 99 %.

9. Знайдіть інтервал $(0; a)$, ймовірність потрапляння до якого розподіленого за законом $\chi^2(25)$ випадкового значення дорівнює 95 %.

Дослідницький проект

1. Розгляньте генеральну сукупність студентів денного відділення Вашого інституту. З цієї сукупності сформуйте репрезентативну вибірку обсягом 1 % обсягу генеральної сукупності (наприклад, якщо на денному відділенні Президентського університету МАУП навчається близько 5000 студентів, то обсяг вибірки має становити 50 осіб).

2. Опитайте всіх студентів у вибірці про середній час, який вони витрачають щодня на те, щоб дістатися місця навчання.

3. Дослідіть отриману сукупність значень. Зокрема, обчисліть вибіркові середнє значення та стандартне відхилення, побудуйте частотний розподіл сукупності та його полігон частот.

4. Спробуйте оцінити генеральне середнє. При цьому сформулюйте власну думку про надійність оцінки, враховуючи, зокрема, стандартну помилку дослідження. Зробіть висновок про якість розташування інституту щодо середнього часу добирання до нього.

Розділ 5

Теорія оцінювання

Як зауважувалось у розд. 4, суть вибіркового дослідження полягає у формуванні певними методами репрезентативної вибірки з генеральної сукупності, її статистичного аналізу та поширення результатів аналізу на випадок генеральної сукупності. Далі розглянемо найпоширеніші методи аналізу вибірки. Як зазначалося, ці методи поділяються на два класи, процедури оцінювання генеральних параметрів та перевірки гіпотез про генеральні сукупності. Цей розділ присвячений першому класу.

Як згадувалось у п. 4.2.1, існують два методи оцінювання генеральних параметрів: точкові та інтервальні оцінки. Як переконаємося далі, інтервальна оцінка генеральних параметрів базується на їх точкових оцінках. Просто в окремих випадках вдається врахувати надійність точкової оцінки. Це, власне, і дає інтервальну оцінку відповідного генерального параметра.

Отже, у підрозд. 5.1 розглянемо точкові оцінки та їх властивості й наведемо сфери їх застосування.

У підрозд. 5.2 розглянемо інтервальні оцінки, а також проблему формування вибірки мінімального обсягу, достатньої для отримання інтервальної оцінки генерального параметра із заданою точністю.

5.1. Точкові оцінки та їх властивості

У п. 4.2.1 вже наводилося поняття точкової оцінки параметра розподілу генеральної сукупності. Нагадаємо, що точкова оцінка — це деяка формула, аргументами якої є дані вибірки. Ця формула за вибіркою дає деяку числову оцінку досліджуваного генерального параметра.

Розглянемо основні властивості точкових оцінок, а також найуживаніші оцінки основних генеральних параметрів.

5.1.1. Лінійність

В основу першої властивості, яку розглядатимемо, покладено вимогу простоти обчислення оцінки.

Означення 5.1. Точкову оцінку називають *лінійною*, якщо вона є лінійною функцією спостережень у вибірці[1].

Лінійні оцінки потребують набагато менше обчислень, ніж оцінки нелінійної природи. Крім того, такі оцінки дуже зручні з позиції теоретичних досліджень.

Приклад 5.1.1. Вибіркове середнє є лінійною оцінкою генерального середнього. Справді,

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \cdots + \frac{1}{n}X_n,$$

де X_i — вибіркові спостереження, тобто формула для обчислення $\overline{X}$ лінійна.

[1] Нагадаємо, що функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають лінійною, якщо її можна зобразити у вигляді

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякі числові константи.

Приклад 5.1.2. Покажемо, що вибіркова медіана не є лінійною оцінкою генеральної медіани. Для цього розглянемо вибірку з трьох спостережень X_1, X_2 та X_3. Тоді вибіркова медіана є функцією вибіркових спостережень $\mathbf{Me} = \mathbf{Me}(X_1, X_2, X_3)$. Припустимо, ця функція лінійна. Тоді для деяких коефіцієнтів a, b, c

$$\mathbf{Me}(X_1, X_2, X_3) = aX_1 + bX_2 + cX_3.$$

Припустимо, спостереження у вибірці дали значення $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 3$. Тоді

$$\mathbf{Me}(1, 2, 3) = 2 = a + 2b + 3c.$$

Нехай в іншій вибірці маємо спостереження $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 4$. Тоді

$$\mathbf{Me}(1, 2, 4) = 2 = a + 2b + 4c.$$

З отриманих ланцюжків рівностей бачимо, що $c = 0$. Тому

$$\mathbf{Me}(X_1, X_2, X_3) = aX_1 + bX_2$$

не залежить від спостереження X_3. Але тоді

$$2 = \mathbf{Me}(1, 2, 3) = \mathbf{Me}(1, 2, 1) = 1,$$

що неможливо.

Отже, припущення про лінійність медіани призводить до суперечності.

5.1.2. Незміщеність

Параметр генеральної сукупності можна оцінювати по-різному. Природно постає питання, які з цих оцінок кращі. Якість оцінки можна перевірити за низкою критеріїв. Скажімо, лінійність є доброю властивістю щодо складності обчислень.

Нагадаємо, що в підрозд. 4.4 розглядався й інший критерій якості точкової оцінки, що базувався на понятті вибіркового розподілу точкової оцінки генерального параметра. Вибірковий розподіл було інтерпретовано в такий спосіб. Нехай багато незалежних експертів формують прості випадкові вибірки однакового обсягу з генеральної сукупності. Далі кожний експерт за власною вибіркою наводить точкову оцінку генерального параметра. При цьому, як правило, експертні оцінки дещо відрізняються від реального значення. Мало того, трапляються ситуації, коли жодний експерт принципово не може отримати реальне значення генерального параметра у процесі точкового оцінювання. Тому критерієм якості точкової оцінки вважався факт, що експерти **в середньому** правильно оцінюють генеральний параметр.

Означення 5.2. Розглянемо n-вимірний вибірковий розподіл точкової оцінки генерального параметра, тобто розподіл значень оцінки, обчислених для всіх простих випадкових вибірок обсягом n. Якщо середнє значення цього розподілу дорівнює реальному значенню оцінюваного параметра генеральної сукупності, то оцінку називають *незміщеною* (для цього обсягу вибірок n). У противному разі кажуть про зміщену оцінку.

Зміщеність оцінки свідчить про наявність систематичних помилок при оцінюванні генерального параметра. У разі зміщених оцінок часто кажуть про систематичне завищення або заниження значення генерального параметра, якщо це значення менше або відповідно перевищує середнє значення вибіркового розподілу оцінки.

Приклад 5.1.3. Вибіркове середнє є незміщеною оцінкою генерального середнього. Фактично це вже відомо з обговорення теореми 4.1.

Приклад 5.1.4. Вибіркова пропорція є незміщеною оцінкою генеральної пропорції, що випливає з теореми 4.3.

Приклад 5.1.5. Покажемо, що вибіркова медіана є зміщеною оцінкою генеральної медіани. Для цього розглянемо генеральну сукупність, яка складається з трьох елементів $\{0; 1; 1\}$. Очевидно, генеральна медіана $\mathbf{Me} = 1$. Утворимо всі прості випадкові вибірки обсягом 2 і обчислимо їх медіани (див. таблицю).

Двовимірний розподіл медіани генеральної сукупності $\{0;1;1\}$

Номер вибраного елемента генеральної сукупності		Проста випадкова вибірка	Вибіркова медіана
першого	другого		
1	1	$\{0;0\}$	0
1	2	$\{0;1\}$	1/2
1	3	$\{0;1\}$	1/2
2	1	$\{1;0\}$	1/2
2	2	$\{1;1\}$	1
2	3	$\{1;1\}$	1
3	1	$\{1;0\}$	1/2
3	2	$\{1;1\}$	1
3	3	$\{1;1\}$	1

Тоді середнє значення розподілу вибіркових медіан дорівнює

$$\frac{1}{9}\Big(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+1+\frac{1}{2}+1+1\Big)=\frac{2}{3}.$$

Оскільки це значення не збігається з генеральною медіаною, це свідчить про зміщеність вибіркової медіани як оцінки генеральної.

Приклад 5.1.6. Зауважимо, що знайдене у прикладі 5.1.5 середнє значення вибіркового розподілу медіани збігається з генеральним середнім

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}(0+1+1)=\frac{2}{3}.$$

Природно виникає гіпотеза про незміщеність медіани як оцінки генерального середнього. На жаль, у загальному випадку ця гіпотеза неправильна. Щоб показати це, розглянемо генеральну сукупність з чотирьох елементів $\{0,0,0,4\}$. Очевидно, генеральне середнє дорівнює одиниці.

Обчислимо середнє значення тривимірного вибіркового розподілу медіани. Зауважимо, що кількість простих випадкових вибірок обсягом 3 дорівнює $4^3=64$. Значення медіани буде ненульовим лише для вибірок, які містять елемент 4 принаймні двічі. Легко побачити, що для всіх таких вибірок медіана дорівнює 4. Неважко також обчислити, що всього таких вибірок 10. Тому шукане середнє значення вибіркового розподілу дорівнює

$$\frac{10 \cdot 4}{64} = \frac{5}{8}$$

і не збігається з генеральним середнім.

Проте гіпотезу про незміщеність медіани як оцінки генерального середнього можна підтвердити для нормально розподілених генеральних сукупностей. Виявляється, якщо розподіл генеральної сукупності поводиться як нормальний з параметрами (μ, σ), то для великих n n-вимірний вибірковий розподіл медіани поводиться так само, як нормальний з параметрами $\left(\mu, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Отже, у цьому разі вибіркову медіану можна вважати незміщеною оцінкою генерального середнього.

Приклад 5.1.7. Повертаючись до п. 4.4.3, бачимо, що вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою генеральної дисперсії. Проте вираз

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\sigma^2$$

є незміщеною оцінкою генеральної дисперсії. Як вже відомо, оцінку s^2 називають *виправленою дисперсією*, а s — *виправленим стандартним відхиленням*. Нагадаємо також (див. п. 4.4.3), що s є зміщеною оцінкою генерального стандартного відхилення. Тому коли як оцінка σ береться s, то йдеться про незміщеність s^2 для σ^2, а не s для σ. Зауважимо також, що множник $\frac{n}{n-1}$ називають *поправкою Бесселя*.

5.1.3. Ефективність

Безсумнівно, незміщеність є найважливішою властивістю точкових оцінок. Проте якщо відомі кілька незміщених оцінок деякого параметра генеральної сукупності, постає питання, яку з них вибрати. Одним з критеріїв вибору може бути лінійність оцінки. Але, на жаль, лінійність не є поширеною властивістю. Крім того, лінійність характеризує не якість оцінки, а лише простоту її обчислення.

У такому разі — за наявності кількох незміщених оцінок — намагаються визначити незміщену оцінку з найменшою стандартною помилкою.

Означення 5.3. Розглянемо n-вимірний вибірковий розподіл незміщеної оцінки параметра генеральної сукупності. Якщо стандартна помилка цього розподілу є найменш можливою у класі незміщених оцінок, то цю оцінку називають *ефективною*. У противному разі кажуть про неефективну оцінку.

Ефективність оцінки засвідчує, що помилки оцінювання загалом менші порівняно з іншими незміщеними оцінками генерального параметра.

Приклад 5.1.8. Припустимо, розподіл деякої генеральної сукупності близький до нормального з параметрами (μ, σ). У прикладі 5.1.6 вже згадувалося, що в разі нормального розподілу генеральної сукупності і великих значень n n-вимірний розподіл вибіркової медіани поводиться як нормальний розподіл з параметрами $\left(\mu, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Разом з тим, як відомо з теореми 4.1, для великих значень n n-вимірний розподіл вибіркового середнього поводиться як нормальний розподіл з параметрами $(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Отже, і вибіркова медіана, і вибіркове середнє при великих значеннях n і нормальності розподілу генеральної сукупності є незміщеними оцінками генерального середнього. Природно постає питання, яка з двох оцінок є кращою. Щоб відповісти на це питання, розглянемо відношення стандартних помилок розподілів вибіркових середнього та медіани:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} : \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{2}{3,14}} < 1,$$

тобто стандартна помилка розподілу вибіркового середнього менша, а отже, вибіркове середнє є кращою оцінкою генерального середнього, ніж вибіркова медіана.

Мало того, отриманий результат не випадковий. Справді, можна довести ефективність вибіркового середнього як оцінки генерального середнього.

Приклад 5.1.9. Можна показати, що виправлена дисперсія є ефективною оцінкою генеральної дисперсії.

5.1.4. BLUE-оцінки

Властивості незміщеності та ефективності такі важливі, що разом з вимогою простоти визначення оцінки утворюють окрему властивість.

Означення 5.4. Якщо точкова оцінка лінійна, незміщена та ефективна, її називають *BLUE*[1]*-оцінкою.*

Класичним прикладом BLUE-оцінки є вибіркове середнє як оцінка генерального середнього.

5.1.5. Спроможність

Розглянемо генеральну сукупність із середнім значенням μ. Візьмемо з неї просту випадкову вибірку $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ доволі великого обсягу n і розглянемо такі дві оцінки генерального середнього:

$$E_1 = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n};$$
$$E_2 = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n+1}.$$

Зауважимо, що перша оцінка E_1 є звичайним вибірковим середнім і тому незміщена. Неважко перевірити, що середнє значення вибіркового розподілу оцінки E_2 дорівнює $\frac{n}{n+1}\mu$, а отже, відмінне від μ. Тому E_2 є зміщеною оцінкою генерального середнього.

Тепер припустимо, що обсяг n вибірки збільшується. У цьому разі середнє значення вибіркового розподілу оцінки E_2 наближатиметься до середнього значення вибіркового розподілу оцінки E_1 і, отже, до генерального середнього. Тому з позицій практики для великих вибірок оцінка E_2 не гірша від оцінки E_1.

Підсумовуючи міркування, отримуємо таке означення.

Означення 5.5. Точкову оцінку параметра генеральної сукупності, середнє значення вибіркового розподілу якої наближається до реального значення параметра при збільшенні обсягу вибірки, називають *спроможною.*

[1]Від абревіатури англійського словосполучення *the best linear unbiased estimator* — найкраща лінійна незміщена оцінка.

Іншими словами, спроможність оцінки свідчить про потенційну можливість з необхідною точністю знайти незміщену оцінку шуканого параметра генеральної сукупності, збільшуючи обсяг вибірки.

Приклад 5.1.10. Як згадувалось у прикладі 5.1.7, вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою генеральної дисперсії. Проте відомо, що середнє значення n-вимірного вибіркового розподілу дисперсії дорівнює

$$\frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Оскільки $\frac{n-1}{n}$ прямує до одиниці при збільшенні n, то вибіркова дисперсія є спроможною оцінкою генеральної дисперсії. Отже, з позицій практики вона не гірша від оцінки s^2 для великих вибірок.

5.1.6. Найуживаніші точкові оцінки

У статистичних дослідженнях часто становлять інтерес середнє значення μ генеральної сукупності та її стандартне відхиленням σ. Підсумовуючи інформацію попередніх пунктів, наведемо найуживаніші точкові оцінки цих параметрів.

1. Вибіркове середнє $\overline{X}_{\text{в}}$ є BLUE-оцінкою (тобто лінійною, незміщеною та ефективною) генерального середнього μ.

2. Вибіркова медіана $\mathbf{Me}_{\text{в}}$ є незміщеною оцінкою генерального середнього μ у разі нормально розподіленої генеральної сукупності й доволі великих вибірок. За наявності великої вибірки, записаної у вигляді впорядкованого списку, для визначення вибіркової медіани достатньо розглянути середню позицію у списку. Водночас процес визначення вибіркового середнього може бути тривалим. Отже, для швидкої оцінки генерального середнього часом краще скористатись вибірковою медіаною.

3. Виправлена дисперсія

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\sigma^2$$

є незміщеною та ефективною оцінкою дисперсії σ^2 генеральної сукупності.

Виправлена дисперсія вибірки $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$s^2 = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2}{n-1}.$$

4. Вибіркова дисперсія $\sigma_{\text{в}}^2$ є спроможною оцінкою генеральної дисперсії σ^2. На жаль, $\sigma_{\text{в}}^2$ — зміщена оцінка, і її використання призводить до систематично занижених оцінок. Разом з тим $\sigma_{\text{в}}^2$ є найприроднішою оцінкою генеральної дисперсії. Спробуємо оцінити помилки, що з'являються при використанні $\sigma_{\text{в}}^2$.

Оскільки $\sigma_{\text{в}}^2$ та незміщена оцінка s^2 пов'язані співвідношенням

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_{\text{в}}^2,$$

то

$$\frac{s^2}{\sigma_{\text{в}}^2} = \frac{n}{n-1}.$$

Легко перевірити, що при $n = 30$ значення останнього виразу становить 1,034, при $n = 50$ — 1,020, при $n = 100$ — 1,010, тобто відмінності між значеннями $\sigma_{\text{в}}^2$ та s^2 при $n = 30$ становлять приблизно 3,4 %, при $n = 50$ — 2 %, при $n = 100$ — 1 %.

Отже, навіть при невеликих значеннях n використання $\sigma_{\text{в}}^2$ не призводить до значних помилок. У статистичних дослідженнях вважають, що $\sigma_{\text{в}}^2$ можна використовувати замість s^2, якщо обсяг вибірки не менший від 30.

5. Оскільки для запису висновків про генеральну сукупність зручніше використовувати стандартне відхилення, а не дисперсію, то висновки з мови дисперсій перекладають мовою стандартних відхилень. При цьому вважають, що s ($\sigma_{\text{в}}$ у разі $n \geqslant 30$) є оцінкою для σ. Проте потрібно пам'ятати: коли кажуть, що s є найкращою оцінкою для σ, мають на увазі незміщеність та ефективність s^2 як оцінки σ^2.

5.1.7. Метод моментів точкового оцінювання параметрів генерального розподілу

Отже, точкові оцінки найважливіших параметрів розподілу генеральної сукупності вже розглянуто. Проте навіть оцінивши генеральне середнє, пропорцію чи стандартне відхилення, безпосередньо неможливо отримати вигляд генерального розподілу. Водночас припущення про форму генерального розподілу часто вдається висунути, визначивши емпіричний частотний розподіл за даними вибіркової сукупності.

У розд. 3 було наведено кілька модельних теоретичних розподілів, за допомогою яких найчастіше намагаються описати генеральний розподіл. Кожний з цих модельних теоретичних розподілів визначається деякими параметрами. Так, нормальний розподіл повністю визначається середнім значенням та стандартним відхиленням, розподіл Пуассона — параметром λ, біноміальний розподіл — параметрами $(p; n)$ тощо.

Якщо маємо деяке припущення про форму генерального розподілу, можна спробувати знайти точкові оцінки його визначальних параметрів. При цьому найчастіше використовують *метод моментів* знаходження точкових оцінок. Назву цьому методу дало поняття моменту, яке розглядається в курсі теорії ймовірності. Не нагадуватимемо його, тому що опишемо цей метод не в загальному випадку, а лише для теоретичних розподілів, які визначаються одним або двома параметрами.

Якщо модельний теоретичний розподіл генеральної сукупності визначається одним параметром, то для знаходження його точкової оцінки математичне сподівання розподілу прирівнюють до вибіркового середнього:

$$\mathbf{M}(X) = \overline{X},$$

а потім з цього рівняння знаходять шукану точкову оцінку невідомого визначального параметра.

Якщо теоретичний розподіл генеральної сукупності визначається двома параметрами, то їх точкові оцінки визначають із системи рівнянь

$$\begin{cases} \mathbf{M}(X) = \overline{X}, \\ \sigma(X) = s. \end{cases}$$

Лівими частинами цих рівнянь є теоретичні математичне сподівання та стандартне відхилення, виражені через визначальні параметри, а правими — відповідно вибіркове середнє та виправлене вибіркове стандартне відхилення.

Далі розглянемо приклади застосування методу моментів для точкового оцінювання параметрів нормального розподілу, біноміального розподілу та розподілу Пуассона.

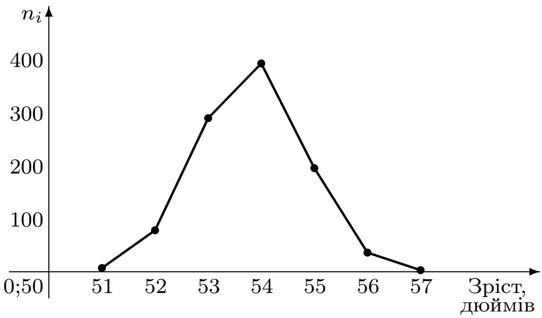
Випадок нормального теоретичного розподілу

Припустимо, емпіричний розподіл даних у вибірці поводиться як нормальний розподіл. Нагадаємо, що нормальний розподіл повністю визначається середнім значенням та стандартним відхиленням. Отже, знайшовши точкові оцінки генерального середнього та генерального стандартного відхилення, за методом моментів фактично одразу отримаємо точкові оцінки визначальних параметрів генерального розподілу.

Приклад 5.1.11. Відомі дані дослідження зросту 1000 восьмирічних американських хлопчиків[1].

Зріст хлопчиків X, дюймів	51	52	53	54	55	56	57
Кількість хлопчиків	7	78	289	392	195	36	3

Полігон частот вибіркового розподілу має куполоподібну форму. Тому природно припустити нормальність розподілу зросту у вибірці та генеральній сукупності.



Полігон частот розподілу зросту 1000 восьмирічних американських хлопчиків

[1]Числові дані цього прикладу взято з [15].

Нагадаємо, що для попередньої перевірки нормальності емпіричного розподілу бажано ще перевірити властивості 4 та 5 нормального розподілу (див. п. 3.3.1). А для цього спочатку потрібно обчислити середнє значення та стандартне відхилення у вибірці.

Для спрощення обчислень перейдемо до умовних варіант (див. с. 78) за формулою

$$U_i = X_i - 54,$$

де X_i — зріст людини.

Маємо

$$\begin{aligned} U_1 &= 51 - 54 = -3; & U_5 &= 55 - 54 = 1;\\ U_2 &= 52 - 54 = -2; & U_6 &= 56 - 54 = 2;\\ U_3 &= 53 - 54 = -1; & U_7 &= 57 - 54 = 3.\\ U_4 &= 54 - 54 = 0; \end{aligned}$$

Середнє значення умовного розподілу

$$\overline{U}_\text{в} = \frac{-3\cdot 7 - 2\cdot 78 - 1\cdot 289 + 0\cdot 392 + 1\cdot 195 + 2\cdot 36 + 3\cdot 3}{1000} = \\ = -0{,}19.$$

Тепер обчислимо середнє значення та стандартне відхилення вихідного вибіркового розподілу:

$$\begin{aligned} &\overline{X}_\text{в} = \overline{U}_\text{в} + 54 = -0{,}19 + 54 = 53{,}81;\\ &\sigma_\text{в}^2 = [(-3)^2\cdot 7 + (-2)^2\cdot 78 + (-1)^2\cdot 289 + 0^2\cdot 392 +\\ &\qquad + 1^2\cdot 195 + 2^2\cdot 36 + 3^2\cdot 3]/1000 - [-0{,}19]^2 = 0{,}9939,\\ &\sigma_\text{в} = \sqrt{0{,}9939} \approx 0{,}997. \end{aligned}$$

Перевіримо властивості 4 та 5 нормального розподілу.

Інтервал	Відсоток потрапляння до інтервалу	Теоретичний відсоток потрапляння до інтервалу
$(\overline{X} - \sigma; \overline{X} + \sigma) \approx (52{,}8; 54{,}8)$	68,1	68,3
$(\overline{X} - 2\sigma; \overline{X} + 2\sigma) \approx (51{,}8; 55{,}8)$	95,4	95,4
$(\overline{X} - 3\sigma; \overline{X} + 3\sigma) \approx (50{,}8; 56{,}8)$	99,7	99,7

Як бачимо, емпіричні значення відсотків потрапляння до контрольних інтервалів майже не відрізняються від теоретичних. Тому доходимо висновку, що емпіричний розподіл сукупності подібний до нормального з параметрами $(53{,}81; 0{,}997)$.

Остаточно маємо підстави висунути гіпотезу про нормальність розподілу зросту в генеральній сукупності. За методом моментів для точкової оцінки параметрів нормального розподілу генеральної сукупності потрібно мати значення вибіркового середнього та виправленого стандартного відхилення. Перше з них вже обчислено: $\overline{X} = 53{,}81$. Виправлене стандартне відхилення майже не відрізняється від знайденого вибіркового стандартного відхилення $\sigma_{\text{в}} = 0{,}997$, позаяк обсяг вибірки великий.

Отже, можна висунути гіпотезу про те, що генеральний розподіл нормальний з параметрами $(53{,}81; 0{,}997)$. Далі потрібно було б перевірити цю гіпотезу, використовуючи, наприклад, методи, описані в підрозд. 6.4.

Випадок теоретичного розподілу Пуассона

Припустимо, емпіричний розподіл даних у вибірці поводиться як розподіл Пуассона. Нагадаємо, що розподіл Пуассона визначається параметром λ. При цьому значення параметра λ збігається із середнім значенням та дисперсією розподілу. Тому, знайшовши точкову оцінку генерального середнього, одразу отримаємо точкову оцінку параметра λ генерального розподілу Пуассона.

Приклад 5.1.12. Припустимо, деяка соціологічна служба здійснила дослідження безпеки дорожнього руху в Україні. Однією з проаналізованих характеристик була кількість важких ДТП за день на 100 тис. осіб. Ця величина вивчалась за допомогою випадкової вибірки з архівних даних за поточний рік. Випадково вибиралися дати і міста України, для кожної вибраної дати і міста визначалась кількість важких ДТП цього дня в місті з розрахунку на 100 тис. осіб. Округлені до цілих значень відповідні дані наведені в таблиці. Зауважимо, що обсяг вибірки дорівнює 1000.

Кількість важких ДТП за день на 100 тис. осіб	0	1	2	3	4	5	6
Кількість елементів вибірки	421	359	156	49	11	3	1

Як бачимо, у вибірці переважають малі значення ознаки. Іншими словами, маємо підстави вважати, що дані у вибірці підпорядковані закону виняткових подій, тобто закону Пуассона. Для того щоб навести додаткові аргументи для такого висновку, перевіримо третю властивість розподілу Пуассона (див. підрозд. 3.5).

Для цього обчислимо вибіркове середнє та вибіркову дисперсію:

$$\overline{X}_{\text{в}} = \frac{0 \cdot 421 + 1 \cdot 359 + 2 \cdot 156 + 3 \cdot 49 + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1}{1000} = 0{,}883;$$

$$\mathbf{D}_{\text{в}} = \frac{1}{1000}\big(0^2 \cdot 421 + 1^2 \cdot 359 + 2^2 \cdot 156 + 3^2 \cdot 49 + 4^2 \cdot 11 + \\ + 5^2 \cdot 3 + 6^2 \cdot 1\big) - 0{,}883^2 \approx 1{,}71 - 0{,}78 = 0{,}93.$$

Як бачимо, вибіркове середнє та вибіркова дисперсія мало різняться (приблизно на 5 %). Тому можна вважати, що властивість 3 розподілу Пуассона справджується.

Оскільки параметр λ розподілу Пуассона дорівнює його математичному сподіванню, за методом моментів як точкову оцінку для λ можна взяти вибіркове середнє 0,883.

Далі за допомогою методів підрозд. 6.4 потрібно було б перевірити узгодженість генерального розподілу з пуассоновим з параметром $\lambda = 0{,}883$.

Приклад 5.1.13. Деяка незалежна соціологічна служба досліджувала безпеку робити шахтарів в Україні за час незалежності. Аналізувався показник X кількості випадків травматизму на шахтах з розрахунку на 10000 год роботи. Випадкову вибірку обсягом 1000 було сформовано так: усі місяці починаючи з серпня 1991 р. пронумерували, склали список усіх шахт, для генерування елемента вибірки випадково вибирали шахту, потім так само випадково місяць і обчислювали кількість випадків травматизму на шахті за місяць з розрахунку на 10000 год роботи.

Дані цього дослідження наведені в таблиці.

Кількість випадків травматизму з розрахунку на 10000 год роботи	0	1	2	3	4	5	6
Кількість елементів вибірки	554	324	98	19	3	1	1

Як бачимо, у вибірці переважають малі значення ознаки, тобто, як і в попередньому прикладі, маємо підстави вважати, що дані у вибірці розподілені за законом Пуассона.

Перевіримо додатково властивість 3 розподілу Пуассона. Для цього обчислимо вибіркові середнє значення та дисперсію:

$$\overline{X}_{\text{в}} = \frac{0 \cdot 554 + 1 \cdot 324 + 2 \cdot 98 + 3 \cdot 19 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1}{1000} = 0{,}6;$$

$$\mathbf{D}_{\text{в}} = \frac{1}{1000}\big(0^2 \cdot 554 + 1^2 \cdot 324 + 2^2 \cdot 98 + 3^2 \cdot 19 + 4^2 \cdot 3 + {} + 5^2 \cdot 1 + 6^2 \cdot 1\big) - 0{,}6^2 = 0{,}996 - 0{,}36 = 0{,}63.$$

Оскільки вибіркові середнє та дисперсія майже не різняться (лише на 0,03), можна вважати, що третя властивість розподілу Пуассона справджується.

Оскільки параметр λ розподілу Пуассона дорівнює його математичному сподіванню, за методом моментів як точкову оцінку для λ можна взяти вибіркове середнє 0,6.

Випадок біноміального теоретичного розподілу

Як правило, підозра про біноміальний розподіл генеральної сукупності виникає при аналізі природи конкретної властивості. Структура біноміального розподілу розглядалася в підрозд. 3.4. Тому тут зупинимося на особливостях застосування методу моментів при оцінці параметрів біноміального розподілу.

Нагадаємо, що біноміальний розподіл визначається двома параметрами $(p; n)$. На перший погляд здається, що для точкової оцінки цих параметрів за методом моментів потрібно розв'язати систему з двох рівнянь. Насправді ситуація простіша. Річ у тім, що параметр n — обсяг груп, в яких розраховується кількість елементів з характеристичною властивістю — одразу відомий з природи даних. Тому потрібно оцінити лише один параметр p — теоретичну ймовірність зустрічі елемента з характеристичною властивістю в генеральній сукупності. За методом моментів рівняння для знаходження точкової оцінки параметра p має вигляд

$$np = \overline{X},$$

де $\overline{X}$ — це вибіркове середнє.

Приклад 5.1.14. Нагадаємо, що у прикладі 3.1.3 аналізувалась ознака "кількість хлопчиків у сім'ях з п'ятьма дітьми". Було розглянуто вибірку з 1000 п'ятидітних сімей. Для повноти викладу нагадаємо дані вибірки.

Кількість хлопчиків	0	1	2	3	4	5
Кількість сімей з п'ятьма дітьми	29	140	305	322	167	37

Середнє значення у вибірці

$$\overline{X}_{\text{в}} = \frac{0 \cdot 29 + 1 \cdot 140 + 2 \cdot 305 + 3 \cdot 322 + 4 \cdot 167 + 5 \cdot 37}{1000} = 2{,}569.$$

Розв'язуючи рівняння

$$5p = 2{,}569,$$

отримуємо точкову оцінку параметра p:

$$p = 0{,}5138.$$

Зауважимо, що це значення інтерпретується як точкова оцінка ймовірності народження хлопчика.

Остаточно маємо підстави вважати, що розподіл вибірки поводиться як біноміальний з параметрами $(0{,}5138; 5)$. Зауважимо, що за допомогою методів підрозд. 6.4 слід перевірити ще узгодженість генерального розподілу і біноміального розподілу з параметрами $(0{,}5138; 5)$.

5.2. Інтервальні оцінки

Нагадаємо, що поняття інтервальної оцінки розглядалося в п. 4.2.1. Порівняно з точковими інтервальні оцінки дають змогу робити коректніші висновки. При інтервальному оцінюванні визначають не лише межі для реального значення параметра генеральної сукупності, а й надійність наведеної оцінки.

Розглянемо методологію інтервального оцінювання. Оскільки в соціологічному дослідженні, як правило, розглядаються великі вибірки, а у психології інтервальне оцінювання застосовують рідко, то основну увагу приділимо саме аналізу великих вибірок.

5.2.1. Загальні підходи до інтервального оцінювання для великих вибірок

Припустимо, для оцінки генерального параметра досліджено випадкову вибірку великого розміру. Тоді головним теоретико-ймовірнісним інструментом, що використовується при знаходженні інтервальних оцінок, є центральні граничні теореми. Центральні граничні теореми — це твердження про поведінку вибіркових розподілів.

У підрозд. 4.4 було наведено кілька найуживаніших вибіркових розподілів. Теореми 4.1–4.4 вмотивовували використання низки вибіркових параметрів для точкової оцінки їх генеральних відповідників, а також наводили стандартні помилки вибіркового дослідження.

Проте навіть знаючи стандартну помилку вибіркового дослідження, неможливо безпосередньо вказати надійність інтервальної оцінки. Для цього потрібна додаткова інформація про поведінку вибіркових розподілів.

Саме таку інформацію й дають центральні граничні теореми. Розглянемо найчастіше застосовувані у практичних дослідженнях.

Центральні граничні теореми

Теорема 5.1. *Припустимо, середнє значення генеральної сукупності дорівнює μ, а її стандартне відхилення — σ. Тоді n-вимірний розподіл вибіркового середнього наближається до нормального розподілу з параметрами $(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, якщо обсяг вибірок n необмежено збільшується.*

Зауваження 5.1. У реальних прикладних дослідженнях вважають, що при $n \geqslant 30$ розподіл вибіркового середнього вже не відрізняється від нормального з параметрами $(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Теорема 5.2. *Нехай маємо дві незалежні генеральні сукупності із середніми значеннями μ_X і μ_Y та стандартними відхиленнями відповідно σ_X і σ_Y. Тоді побудований за цими сукупностями (n_X, n_Y)-вимірний вибірковий розподіл різниці середніх наближається до нормального розподілу з параметрами*

$$\left(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right),$$

якщо обсяги вибірок n_X і n_Y необмежено збільшуються.

Зауваження 5.2. У реальних прикладних дослідженнях вважають, що вибірковий розподіл різниці середніх не відрізняється від нормального вже при $n_X, n_Y \geqslant 30$.

Теорема 5.3. *Нехай у деякій генеральній сукупності пропорція елементів, які мають задану властивість, дорівнює P. Тоді n-вимірний вибірковий розподіл пропорції наближається до нормального розподілу з параметрами*

$$\left(P, \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}\right),$$

якщо обсяг вибірок n необмежено збільшується.

Зауваження 5.3. У реальних прикладних дослідженнях вважають, що вибірковий розподіл пропорції не відрізняється від нормального, якщо $n \geqslant 50$ і добутки Pn та $(1-P)n$ не менші від 5.

Теорема 5.4. *Припустимо, пропорції елементів із заданою властивістю у двох незалежних генеральних сукупностях дорівнюють відповідно P_X та P_Y. Тоді (n_X, n_Y)-вибірковий розподіл різниці пропорцій наближається до нормального розподілу з параметрами*

$$\left(P_X - P_Y, \sqrt{\frac{P_X(1-P_X)}{n_X} + \frac{P_Y(1-P_Y)}{n_Y}}\right),$$

якщо обсяги вибірок n_X та n_Y необмежено збільшуються.

Зауваження 5.4. У реальних прикладних дослідженнях вважають, що вибірковий розподіл різниці пропорцій не відрізняється від нормального, якщо $n_X, n_Y \geqslant 50$ і добутки $P_X n_X$, $(1 - P_X)n_X$, $P_Y n_Y$ та $(1 - P_Y)n_Y$ не менші від 5.

Значення теорем 5.1–5.4 полягає в тому, що замість дослідження *довільного* розподілу генеральної сукупності можна аналізувати вибірковий розподіл *відомого* вигляду. Це дає змогу для розв'язання розмаїття прикладних задач застосовувати кілька нескладних методів.

Основна формула інтервального оцінювання

Покажемо, як, скориставшись твердженнями теорем 5.1–5.4, отримати прості формули для інтервальних оцінок генеральних середнього значення, пропорції, різниці середніх та пропорцій.

Отже, нехай розглядаємо задачу інтервального оцінювання *генерального середнього значення, генеральної пропорції, різниці генеральних середніх або пропорцій.* Позначимо ϑ оцінюваний генеральний параметр, а $\vartheta_{\text{в}}$ — його вибіркову версію. З теорем 5.1–5.4 випливає, що ця вибіркова версія є незміщеною точковою оцінкою.

Крім того, кожна з теорем 5.1–5.4 стверджує, що вибірковий розподіл генерального параметра для великих вибірок поводиться як нормальний з параметрами $(\vartheta, \text{s.e.})$, де s.e. — стандартна помилка вибіркового розподілу.

Розглянемо таке число x, що ймовірність потрапляння розподіленої за законом $\mathcal{N}(\vartheta, \text{s.e.})$ випадкової величини до інтервалу $(\vartheta - x; \vartheta + x)$ дорівнює k. Тоді з імовірністю k значення $\vartheta_{\text{в}}$ потрапляє до інтервалу $(\vartheta - x; \vartheta + x)$. Тому невідоме значення ϑ з імовірністю k лежить в інтервалі $(\vartheta_{\text{в}} - x; \vartheta_{\text{в}} + x)$.

Отже, для знаходження інтервальної оцінки для ϑ залишилось знайти значення x. Для цього нагадаємо, що для розподіленої за законом $\mathcal{N}(\vartheta, \text{s.e.})$ випадкової величини ξ випадкова величина

$$\frac{\xi - \vartheta}{\text{s.e.}}$$

має стандартний нормальний закон розподілу $\mathcal{N}(0, 1)$.

Позначимо z таке число, що ймовірність потрапляння розподіленої за стандартним нормальним законом випадкової величини до інтервалу $(-z, z)$ дорівнює k. Тоді

$$x = z\,\mathrm{s.e.}$$

Остаточно з імовірністю k значення генерального параметра ϑ лежить в інтервалі

$$\vartheta \in (\vartheta_{\text{в}} - z\,\mathrm{s.e.}; \vartheta_{\text{в}} + z\,\mathrm{s.e.}). \tag{5.1}$$

При цьому зауважимо, що значення z легко знайти за формулою

$$\Phi(z) = k/2, \tag{5.2}$$

де $\Phi(\cdot)$ — функція Лапласа (див. табл. Д.2.1), або за допомогою спеціальних комп'ютерних пакетів.

Зауваження 5.5. Відомо, що для рівнів довіри 90, 95, 99 та 99,9 % значення z приблизно дорівнюють відповідно 1,64, 1,96, 2,58 та 3,29.

Зауваження 5.6. Формула (5.1) дає інтервальну оцінку для невідомого генерального параметра ϑ. При цьому в ній використовуються три величини: відома точкова оцінка $\vartheta_{\text{в}}$ параметра ϑ, значення z, яке визначається за таблицями заданою надійністю оцінки, та стандартна помилка s.e. відповідного вибіркового розподілу. Стандартна помилка, як правило, наперед невідома. Тому в більшості випадків стандартну помилку замінюють її точковою оцінкою [1]. Тоді формула (5.1) набирає вигляду

$$\vartheta \in (\vartheta_{\text{в}} - z\,\mathrm{s.e.est.}; \vartheta_{\text{в}} + z\,\mathrm{s.e.est.}), \tag{5.3}$$

[1] Іншими словами, коли йдеться про надійність інтервальної оцінки, як правило, не враховуються неточності при знаходженні стандартних помилок. Певною мірою це виправдовується двома причинами: стандартна помилка для досліджуваних вибіркових розподілів швидко зменшується зі збільшенням обсягу вибірки і для більшості прикладних задач стандартна помилка значна менша від оцінюваного значення генерального параметра.

де s.e.est. — точкова оцінка стандартної помилки відповідного розподілу, яка дорівнює s для розподілу вибіркового середнього,

$$\frac{P_\text{в}(1-P_\text{в})}{n}$$

для розподілу вибіркової пропорції і

$$\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X}+\frac{s_Y^2}{n_Y}}$$

для вибіркового розподілу різниці середніх.

Для вибіркового розподілу різниці пропорцій оцінка стандартної помилки буде дещо складнішою. Наведемо її в п. 5.2.5.

Зауваження 5.7. Аналізуючи формулу (5.1), бачимо, що ширина результуючого інтервалу для ϑ зменшується зі збільшенням обсягу вибірки та зниженням рівня довіри.

5.2.2. Інтервальні оцінки генерального середнього

Розглянемо приклади використання формули (5.1) для інтервальної оцінки генерального середнього.

Нехай у результаті аналізу випадкової вибірки обсягом n ($n \geqslant 30$) знайдено середнє значення вибірки $\overline{X}$. Необхідно оцінити значення генерального середнього μ з рівнем довіри k. Цей рівень довіри визначає значення z за формулою (5.2). Окрім параметрів $\overline{X}$ та z в інтервальній оцінці (5.1) міститься значення стандартної помилки вибіркового розподілу. Нагадаємо, що за теоремою 4.1 воно дорівнює $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, де σ — генеральне стандартне відхилення.

Як правило, у соціологічних та психологічних задачах генеральне стандартне відхилення невідоме[1]. Тому природно було б, враховуючи

[1] На відміну від певних технічних чи економічних задач. Наприклад, якщо потрібно перевірити, чи правильно працює лінія з розливання мінеральної води, тобто чи в середньому в кожну пляшку наливається заданий об'єм води, то беруть випадкову вибірку вироблених пляшок, перевіряють об'єм рідини в них і знаходять вибіркове середнє. У такому разі генеральне стандартне відхилення, а отже, і стандартна помилка розподілу вибіркового середнього можуть бути наперед відомі з технологічних характеристик лінії, і формулу (5.1) можна використовувати безпосередньо.

зауваження 5.6, використовувати для інтервальної оцінки генерального середнього формулу (5.3). Проте за традицією викладу математичної статистики розглянемо обидва випадки — при відомому та невідомому стандартних відхиленнях генеральної сукупності.

Отже, якщо наперед відоме генеральне стандартне відхилення σ, то інтервальну оцінку генерального середнього при рівні довіри k можна знайти за формулою

$$\mu \in \left(\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right), \tag{5.4}$$

де n — обсяг вибірки, $n \geqslant 30$; $\overline{X}$ — вибіркове середнє.

Якщо ж значення σ невідоме, то, як правило, як його точкову оцінку використовують виправлене вибіркове стандартне відхилення s (див. п. 5.1.6).

У цьому разі інтервальну оцінку генерального середнього при довірчому рівні k обчислюють за формулою

$$\mu \in \left(\overline{X} - z\frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right), \tag{5.5}$$

Насправді як оцінку σ замість s часто використовують вибіркове стандартне відхилення $\sigma_{\text{в}}$, адже для великих вибірок $s \approx \sigma_{\text{в}}$ (див. п. 5.1.6).

Розглянемо приклади застосування формул (5.4) і (5.5).

Приклад 5.2.1. Нехай з попередніх досліджень відомо, що стандартне відхилення в розподілі зросту дорослого міського населення в певній країні дорівнює 11,2 см [1]. Нехай у випадковій вибірці обсягом 625 осіб середній зріст дорівнює 172,4 см. Припустимо, що за цими даними потрібно оцінити генеральне середнє μ зросту дорослого

[1] Відомо, що внаслідок акселерації середній зріст міського населення постійно збільшується. При цьому дисперсія розподілу зросту коливається в невеликих межах. Тому якщо з архівних матеріалів відома дисперсія розподілу зросту в один з попередніх років, можна вважати, що теперішнє значення дисперсії таке саме.

міського населення з надійністю 99 %. Тоді з урахуванням формули (5.4) та зауваження 5.5 дістанемо

$$\mu \in \left(172{,}4 - 2{,}58 \cdot \frac{11{,}2}{\sqrt{625}}; 172{,}4 + 2{,}58 \cdot \frac{11{,}2}{\sqrt{625}}\right) =$$
$$= \left(172{,}4 - \frac{28{,}896}{25}; 172{,}4 + \frac{28{,}896}{25}\right) \approx$$
$$\approx (172{,}4 - 1{,}2; 172{,}4 + 1{,}2) = (171{,}2; 173{,}6).$$

Отже, з імовірністю 99 % середній зріст дорослого міського населення перебуває в межах 171,2–173,6 см.

Приклад 5.2.2. Нехай минулого літа стандартне відхилення в розподілі місячних прибутків дрібних селянських господарств становило 32 ум. од.[1]. Припустимо, досліджено випадкову вибірку з 150 дрібних селянських господарств останньої зими і встановлено, що середньомісячний прибуток у вибірці дорівнює 345,6 ум. од.

Припускаючи, що стандартне відхилення залишилось незмінним, оцінимо за цими даними реальне значення середнього щомісячного прибутку з надійністю 95 %. За формулою (5.4) маємо

$$\mu \in \left(345{,}6 - 1{,}96 \cdot \frac{32}{\sqrt{150}}; 345{,}6 + 1{,}96 \cdot \frac{32}{\sqrt{150}}\right) \approx$$
$$\approx \left(345{,}6 - \frac{62{,}72}{12{,}25}; 345{,}6 + \frac{62{,}72}{12{,}25}\right) \approx$$
$$\approx (345{,}6 - 5{,}1; 345{,}6 + 5{,}1) = (340{,}5; 350{,}7).$$

Отже, з надійністю 95 % середньомісячні прибутки дрібних господарств у селі останньої зими перебувають у межах 340,5–350,7 ум. од.

Приклад 5.2.3. Припустимо, з рівнем довіри 95 % необхідно оцінити середню тривалість життя чоловіків у незалежній Україні.

[1] Припустимо, відомі середній рівень та стандартне відхилення прибутків сільського населення минулого літа з інших досліджень. Вважаючи, що прибутки селян залежно від сезону збільшуються чи зменшуються приблизно однорідно, можна припустити, що стандартне відхилення прибутків влітку і взимку однакове.

Оскільки за нестабільного розвитку суспільства стандартне відхилення тривалості життя навряд чи залишається сталим — наприклад, при значних суспільних катаклізмах (як от війни або екологічні катастрофи) або економічних потрясіннях і пов'язаних з ними міграціях працездатного населення стандартне відхилення може різко змінитися, — слід використовувати формулу (5.5).

Нехай згенеровано випадкову вибірку обсягом 100 свідоцтв про смерть чоловіків з архівних матеріалів ЗАГС за останні 12 років.

У результаті обчислення за даними вибірки встановлено, що середня тривалість життя $\overline{X}$ та виправлене стандартне відхилення s у вибірці дорівнюють відповідно 62,6 та 9,4 року. Тоді з надійністю $k = 95\,\%$ дістаємо

$$\mu \in \left(\overline{X} - \frac{z(k)s}{\sqrt{n}}; \overline{X} + \frac{z(k)s}{\sqrt{n}}\right) \approx \left(62{,}6 - \frac{1{,}96 \cdot 9{,}4}{\sqrt{100}}; 62{,}6 + \frac{1{,}96 \cdot 9{,}4}{\sqrt{100}}\right) =$$
$$= (62{,}6 - 1{,}96 \cdot 0{,}94; 62{,}6 + 1{,}96 \cdot 0{,}94) =$$
$$= (62{,}6 - 1{,}84; 62{,}6 + 1{,}84) = (60{,}76; 64{,}44) \approx (60{,}7; 64{,}5).$$

В останній наближеній рівності межі довірчого інтервалу округлено в бік збільшення. Рекомендуємо діяти так завжди з метою підвищення надійності оцінки. Нагадаємо також, що $z(95\,\%) \approx 1{,}96$ (див. зауваження 5.5).

Остаточно з надійністю 95 % середня тривалість життя (у роках) чоловіків в Україні за роки незалежності перебуває в інтервалі $(60{,}7; 64{,}5)$[1].

Приклад 5.2.4. У прикладі 2.2.6 наводились дані соціологічного дослідження, метою якого було встановити середню кількість дітей у сім'ї. Припустимо, що ці дані було отримано при опитуванні 84 випадково вибраних сімей у Києві. Нагадаємо підсумки опитування ще раз (у таблиці нижче наведено детальніші дані).

Кількість дітей у сім'ї	0	1	2	3	4	5
Кількість сімей	16	23	23	14	7	1

[1]Не варто сприймати цей інтервал як реальний. Усі числа у цьому прикладі підібрані.

Оцінимо за цими даними з 90 %-ю надійністю середню кількість дітей у сім'ї для міста Києва.

Обчислимо середнє значення та виправлене стандартне відхилення вибірки (див. таблицю).

Обчислення середнього значення та виправленого стандартного відхилення кількості дітей у сім'ї для міста Києва

Кількість дітей x	Частота n	Добуток xn	Відхилення $x-\overline{X}$	Квадрат $(x-\overline{X})^2$	Добуток $(x-\overline{X})^2 n$
0	16	0	$-1{,}7$	2,89	46,24
1	23	23	$-0{,}7$	0,49	11,27
2	23	46	0,3	0,09	2,07
3	14	42	1,3	1,69	23,66
4	7	28	2,3	5,29	37,03
5	1	5	3,3	10,89	10,89
Разом	84	144			131,16
Середнє значення $\overline{X}$		$\frac{144}{84}\approx 1{,}7$	Виправлена дисперсія s^2		$\frac{131{,}16}{84-1}\approx 1{,}6$
Виправлене стандартне відхилення s					$\sqrt{1{,}6}\approx 1{,}3$

Зауважимо, що значення s^2 і s округлено в бік збільшення. Знайдемо тепер 90 %-й довірчий інтервал для генеральної середньої кількості μ дітей у сім'ї, скориставшись зауваженням 5.5 та формулою (5.5):

$$\mu \in \left(1{,}7 - 1{,}64\cdot\frac{1{,}6}{\sqrt{84}}; 1{,}7 + 1{,}64\cdot\frac{1{,}6}{\sqrt{84}}\right)\approx$$
$$\approx (1{,}7-0{,}23; 1{,}7+0{,}23)\approx(1{,}7-0{,}3; 1{,}7+0{,}3) = (1{,}4; 2{,}0).$$

Отже, з надійністю 90 % доходимо висновку, що середня кількість дітей у сім'ї в Києві перебуває в межах 1,4–2,0[1].

[1]Зрозуміло, що в жодній сім'ї не може бути 1,7 чи 1,4 дітей. Інтервал (1,4; 2,0) для середньої кількості дітей у сім'ї потрібно розуміти так. Якщо розглянемо велику кількість сімей киян, наприклад 10000, то з 90 %-ю надійністю можемо оцінити загальну кількість дітей у цих сім'ях. Вона перебуває в межах 14000–20000 дітей.

5.2.3. Інтервальні оцінки різниці генеральних середніх

Необхідність оцінювання різниці генеральних середніх постає при порівнянні двох генеральних сукупностей за деякою ознакою. Наприклад, природно порівняти середній рівень життя міщан та селян у країні, середній рівень життя мешканців двох міст, середній рівень інтелекту[1] випускників двох вищих навчальних закладів.

Середній рівень за деякою ознакою у двох сукупностях можна порівнювати як в абсолютному, так і відносному вираженні. Оцінити абсолютну різницю середніх рівнів дещо простіше.

Розглянемо дві незалежні генеральні сукупності, різницю середніх значень μ_x та μ_Y яких потрібно оцінити з надійністю k.

Сформуємо з цих сукупностей випадкові вибірки обсягами n_X і n_Y. У цих вибірках можна обчислити середні значення $\overline{X}$, $\overline{Y}$ і виправлені стандартні відхилення s_X, s_Y. Тоді за допомогою теореми 4.2 та формули (5.3) можна обчислити інтервальну оцінку різниці $\mu_X - \mu_Y$ генеральних середніх:

$$\mu_X - \mu_Y \in \left(\overline{X} - \overline{Y} - z s_{X-Y}; \overline{X} - \overline{Y} + z s_{X-Y}\right), \tag{5.6}$$

де

$$s_{X-Y} = \sqrt{\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}}, \tag{5.7}$$

а z шукається за формулою (5.2).

Зауважимо, що коли значення стандартних відхилень σ_X та σ_Y генеральної сукупності відомі, то їх використовують у формулі (5.7) замість значень відповідно s_X та s_Y.

Приклад 5.2.5. Нехай потрібно порівняти рівень життя в Києві та Львові. Однією з характеристик рівня життя є середній сукупний місячний прибуток на душу населення. Припустимо, випадково опитано 120 громадян з Києва та 88 зі Львова. Нехай обчислено середні

[1] Проте зауважимо, що стандартною процедурою визначення рівня інтелекту людини є IQ-тест. При цьому IQ-індекс інтелекту визначається в балах. Формально він вимірюється в числовій шкалі, реально — у порядковій. Тому казати про числову різницю IQ-індексів двох індивідуумів насправді некоректно.

значення та виправлені стандартні відхилення сукупних місячних прибутків у вибірках киян і львів'ян в умовних одиницях:

$$\overline{X}_{\text{Київ}} = 172{,}6, \qquad s_{\text{Київ}} = 14{,}2;$$
$$\overline{X}_{\text{Львів}} = 158{,}5, \qquad s_{\text{Львів}} = 11{,}6.$$

З 95 %-ю надійністю оцінимо за цими даними різницю генеральних сукупних місячних прибутків на душу населення в Києві та Львові. Використовуючи формули (5.6), (5.7) та зауваження 5.5, дістаємо

$$\begin{aligned} s_{\text{Київ}-\text{Львів}} &= \sqrt{\frac{14{,}2^2}{120} + \frac{11{,}6^2}{88}} \approx 1{,}79, \\ \overline{X}_{\text{Київ}} - \overline{X}_{\text{Львів}} &= 172{,}6 - 158{,}5 = 14{,}1, \\ \mu_{\text{Київ}} - \mu_{\text{Львів}} &\in (14{,}1 - 1{,}96 \cdot 1{,}79; 14{,}1 + 1{,}96 \cdot 1{,}79) \approx \\ &\approx (14{,}1 - 3{,}5; 14{,}1 + 3{,}5) = (10{,}6; 17{,}6). \end{aligned}$$

Отже, з 95 %-ю надійністю можна стверджувати, що сукупні місячні прибутки на душу населення в Києві більші, ніж у Львові на величину, яка перебуває в межах 10,6–17,6 ум. од.

Приклад 5.2.6. Нехай слід проаналізувати, як деяке рішення уряду вплине на підвищення середнього рівня доходів громадян у країні. Тоді можна було б сформувати дві випадкові вибірки громадян — одну одразу після прийняття рішення, а другу через деякий період, наприклад, рік. Можна обчислити середні значення та виправлені стандартні відхилення доходів у цих вибірках і формально застосувати описану щойно процедуру. Проте такий підхід буде некоректний у цьому разі, тому що генеральні сукупності, з яких беруться вибірки, не незалежні.

Розглянута задача належить до проблем дослідження так званих зсувів генеральної сукупності. Як правило, їх розв'язують за допомогою тестування гіпотез (див. підрозд. 6.3).

5.2.4. Інтервальні оцінки генеральної пропорції

Нехай потрібно оцінити пропорцію $P_{\text{г}}$ індивідуумів генеральної сукупності із заданою властивістю. Прикладами таких задач є, скажімо, оцінка відсотка безробітних серед загальної чисельності працездатного населення, оцінка відсотка виборців, які проголосували за конкретного кандидата, оцінка відсотка громадян з вищою освітою.

Для розв'язання такої задачі формують випадкову вибірку з генеральної сукупності великого обсягу. Нехай обсяг цієї вибірки дорівнює n.

Далі у вибірці проводять опитування щодо досліджуваної властивості. Припустимо, кількість індивідуумів у вибірці з такою властивістю m. Тоді для обчислення пропорції таких індивідуумів у вибірці маємо формулу

$$P_{\text{в}} = \frac{m}{n}.$$

За теоремою 4.3 значення $P_{\text{в}}$ є незміщеною точковою оцінкою генеральної пропорції $P_{\text{г}}$.

Для обчислення інтервальної оцінки використовують формулу (5.3). Згадуючи вираз для точкової оцінки стандартної помилки розподілу вибіркової пропорції, запишемо версію формули (5.3) для випадку оцінки генеральної пропорції. За надійності k для $P_{\text{г}}$ отримаємо довірчий інтервал

$$P_{\text{г}} \in \left(P_{\text{в}} - z\sqrt{\frac{P_{\text{в}}(1-P_{\text{в}})}{n}}; P_{\text{в}} + z\sqrt{\frac{P_{\text{в}}(1-P_{\text{в}})}{n}} \right), \tag{5.8}$$

де z обчислюється за формулою (5.2).

Зауважимо, що застосовувати формулу (5.8) можна лише за виконання таких умов:

$$\begin{aligned} n &\geqslant 50; \\ m &\geqslant 5; \\ n-m &\geqslant 5, \end{aligned} \tag{5.9}$$

що випливає із зауваження 5.3.

Приклад 5.2.7. Нехай необхідно з 99 %-ю надійністю оцінити відсоток виборців, які проголосували за конкретного кандидата[1]. З

[1] Зрозуміло, що Центральна виборча комісія оголосить офіційні дані за кілька днів після виборів. Тому така задача постає за потреби незалежного громадського контролю за результатами виборів або з метою швидкого (за кілька годин) прогнозування результату виборів.

цією метою опитано 1000 випадково вибраних виборців, які щойно проголосували. Серед них за цього кандидата проголосувало 264 особи. За цими даними визначимо інтервал, якому належить генеральна пропорція виборців, що віддали голоси за нього.

Вибіркова пропорція

$$P_{\text{в}} = \frac{264}{1000} = 0{,}264.$$

Перевіримо умови (5.9):

$$\begin{aligned} n = 1000 &\geqslant 50; \\ m = 264 &\geqslant 5; \\ n - m = 1000 - 264 = 736 &\geqslant 5. \end{aligned}$$

За зауваженням 5.5 $z(99\,\%) = 2{,}58$. Тоді

$$\sqrt{\frac{P_{\text{в}}(1 - P_{\text{в}})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}264 \cdot 0{,}736}{1000}} \approx 0{,}014.$$

Тому

$$\begin{aligned} P_{\text{г}} &\in (0{,}264 - 2{,}58 \cdot 0{,}014; 0{,}264 + 2{,}58 \cdot 0{,}014) \approx \\ &\approx (0{,}264 - 0{,}036; 0{,}264 + 0{,}036) = \\ &= (26{,}4\,\% - 3{,}6\,\%; 26{,}4\,\% + 3{,}6\,\%) = (22{,}8\,\%; 30{,}0\,\%). \end{aligned}$$

Отже, з надійністю 99 % можна стверджувати, що за розглядуваного кандидата проголосувало 22,8–30,0 % виборців, які з'явились на дільницях.

5.2.5. Інтервальні оцінки різниці генеральних пропорцій

У п. 5.2.3 розглядалася задача порівняння середніх значень у двох генеральних сукупностях. Подібною є задача порівняння пропорцій елементів з деякою властивістю у двох генеральних сукупностях. Як правило, її розв'язують, оцінюючи різницю пропорцій.

Нехай потрібно порівняти невідомі пропорції P_1 і P_2 індивідуумів із заданою властивістю у двох *незалежних* генеральних сукупностях. Припустимо, сформовано випадкові вибірки з цих сукупностей обсягами відповідно n_1 та n_2. Нехай кількості індивідуумів з цією властивістю у вибірках становлять відповідно m_1 та m_2. Тоді для пропорцій індивідуумів з цими властивостями у вибірках

$$p_1 = \frac{m_1}{n_1},$$
$$p_2 = \frac{m_2}{n_2}.$$

Використовуючи теорему 4.4 і формулу (5.3), з надійністю k можна обчислити інтервал для генеральної різниці пропорцій:

$$P_1 - P_2 \in \Big(p_1 - p_2 - z(k)\delta_{P_1-P_2}; p_1 - p_2 + z(k)\delta_{P_1-P_2}\Big), \tag{5.10}$$

де $z(k)$ розраховується за формулою (5.2); $\delta_{P_1-P_2}$ — точкова оцінка вибіркового розподілу різниці пропорцій,

$$\delta_{P_1-P_2} = \sqrt{P(1-P)\Big(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\Big)}; \tag{5.11}$$

$$P = \frac{p_1 n_1 + p_2 n_2}{n_1 + n_2}.$$

При цьому перед застосуванням формули (5.10) потрібно перевірити умови (див. зауваження 5.4)

$$\begin{aligned} n_1 &\geqslant 50, & n_2 &\geqslant 50; \\ m_1 &\geqslant 5, & n_1 - m_1 &\geqslant 5, \\ m_2 &\geqslant 5, & n_2 - m_2 &\geqslant 5. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Приклад 5.2.8. Нехай слід порівняти рівень безробіття у двох регіонах країни — західному та центральному. Припустимо, для цього здійснено опитування у двох випадкових вибірках, сформованих з працездатних громадян цих регіонів. Обсяги вибірок

$$n_{з} = 1200,$$
$$n_{ц} = 1350,$$

кількість безробітних у них

$$m_з = 240,$$
$$m_ц = 235.$$

Обчислимо пропорції безробітних у вибірках та їх різницю:

$$p_з = \frac{240}{1200} = 0{,}200,$$
$$p_ц = \frac{235}{1350} \approx 0{,}174,$$
$$p_з - p_ц \approx 0{,}200 - 0{,}174 = 0{,}026.$$

Очевидно, що умови (5.12) виконуються.

За формулою (5.11)

$$P = \frac{0{,}200 \cdot 1200 + 0{,}174 \cdot 1350}{1200 + 1350} = \frac{474{,}9}{2550} \approx 0{,}186235,$$
$$\delta_{P_з - P_ц} = \sqrt{0{,}186235 \cdot (1 - 0{,}186235)\left(\frac{1}{1200} + \frac{1}{1350}\right)} \approx$$
$$\approx \sqrt{0{,}000239} \approx 0{,}015.$$

Нехай необхідно оцінити генеральну різницю пропорцій безробітних у західному та центральному регіонах з надійністю 95 %. За зауваженням 5.5

$$z(95\,\%) = 1{,}96.$$

За формулою (5.10)

$$P_з - P_ц \in (0{,}026 - 1{,}96 \cdot 0{,}015; 0{,}026 + 1{,}96 \cdot 0{,}015) \approx$$
$$\approx (0{,}026 - 0{,}029; 0{,}026 + 0{,}029) = (-0{,}003; 0{,}055) =$$
$$= (-0{,}3\,\%; 5{,}5\,\%).$$

Отже, з надійністю 95 % генеральна різниця пропорцій безробітних у західному та центральному регіонах належить інтервалу

$$(-0{,}3\,\%; 5{,}5\,\%).$$

Це означає, що за результатами аналізу неможливо навіть сказати, в якому регіоні рівень безробіття вищий [1].

Приклад 5.2.9. Припустимо, на початку минулого року уряд країни оголосив план заходів щодо зниження рівня безробіття. Звітуючи перед Верховною Радою наприкінці року, прем'єр-міністр заявив, що в результаті виконання цих заходів рівень безробіття знизився на 2 %.

Нехай незалежна соціологічна служба вирішила перевірити заяву прем'єра. Для цього вона здійснила опитування у випадковій вибірці з 1000 осіб і встановила, що $p_1 = 25\,\%$ опитаних були безробітними рік тому, а $p = 22\,\%$ — нині. Чи можна для перевірки твердження прем'єра застосувати формулу (5.10)? На жаль, ні. Адже фактично маємо дві *залежні* генеральні сукупності [2].

5.2.6. Мінімальний обсяг вибірки

Часто у прикладних дослідженнях параметр генеральної сукупності потрібно оцінити з деякою наперед фіксованою точністю. Наприклад, політик може замовити соціологічній службі оцінку пропорції громадян, які прихильно ставляться до нього, з точністю до одного відсотка.

При цьому точність і надійність оцінки — дві різні характеристики. Надійність оцінки — це ймовірність того, що вона правильна. А точність визначається шириною інтервалу оцінки.

Як випливає з формули (5.3), інтервальна оцінка генерального параметра ϑ з надійністю k — принаймні в разі оцінювання генерального середнього, різниці генеральних середніх, генеральної пропорції та різниці генеральних пропорцій — має вигляд

$$\vartheta = (\vartheta_{\text{в}} - \varepsilon; \vartheta_{\text{в}} + \varepsilon),$$

[1] Якщо надійність висновків зменшити до 90 %, то для різниці відсотків безробітних отримаємо інтервал

$$(0{,}026 - 1{,}64 \cdot 0{,}015; 0{,}026 + 1{,}64 \cdot 0{,}015) \approx (0{,}001; 0{,}051) = (0{,}1\,\%; 5{,}1\,\%)$$

і можемо твердити, що рівень безробіття на Заході вищий, ніж у Центрі, але щонайбільше на 5 %.

[2] Спосіб розв'язання таких задач розглянемо в підрозд. 6.3.

де $\vartheta_\text{в}$ — незміщена точкова оцінка для ϑ;

$$\varepsilon = z(k)\,\text{s.e.est.} \tag{5.13}$$

Останні формули засвідчують, що реальне значення генерального параметра ϑ відрізняється від його точкової оцінки за вибіркою $\vartheta_\text{в}$ щонайбільше на ε[1]. Тому природно саме це число ε вважати точністю оцінки генерального параметра ϑ значенням $\vartheta_\text{в}$.

Узагальнимо тепер ці міркування до означення точності інтервальної оцінки.

Означення 5.6. Нехай інтервал $(a; b)$ є оцінкою з деяким рівнем надійності k генерального параметра ϑ. Іншими словами, нехай $\vartheta \in (a; b)$ з надійністю k. Тоді

$$\varepsilon = \frac{b - a}{2}$$

називається *точністю* оцінки при надійності k[2].

Приклад 5.2.10. Припустимо, з 95 %-м рівнем довіри визначено інтервальну оцінку середнього значення μ щомісячних прибутків на душу населення у країні (ум. од.):

$$\mu \in (189{,}3; 204{,}7).$$

Тоді точність цієї оцінки для μ

$$\varepsilon = \frac{204{,}7 - 189{,}3}{2} = \frac{15{,}4}{2} = 7{,}7 \text{ (ум. од.)}.$$

[1] При цьому рівень довіри до цього твердження дорівнює k і не є стовідсотковим.

[2] Справді, якщо інтервальна оцінка дорівнює $(\vartheta_\text{в} - \varepsilon; \vartheta_\text{в} + \varepsilon)$, то

$$\frac{(\vartheta_\text{в} + \varepsilon) - (\vartheta_\text{в} - \varepsilon)}{2} = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

тобто це означення узагальнює наведені міркування.

Оскільки точність оцінки — це максимальне відхилення реального значення генерального параметра від його точкової оцінки, то що менша точність, то краща оцінка[1].

Зауважимо, що за формулою (5.13) точність $\varepsilon = z(k)\,\mathrm{s.e.est.}$ зменшується зі зменшенням значення $z(k)$ і оцінки стандартної помилки s.e.est. Нагадаємо, що $z(k)$ зменшується при зменшенні рівня довіри, а s.e.est. — при збільшенні обсягу вибірки.

Тому точність ε розглянутих інтервальних оцінок зменшується (тобто покращується) зі збільшенням обсягу вибірок і збільшується (тобто погіршується) з підвищенням рівня довіри.

Рівень довіри — це суб'єктивна характеристика, яка фіксується до дослідження. Як правило, цей рівень залежить від типу конкретної задачі та того, якою мірою важлива надійність оцінювання. Скажімо, помилка прогнозної оцінки рівня продажів деякого товару у кілька відсотків для великої компанії може означати багатомільйонні втрати. Водночас помилка моментальної оцінки результатів виборів[2] вже не вплине на результати. Отже, у першому випадку потрібно вимагати надійності 99 чи навіть 99,9 %, у другому ж можна задовольнитись рівнем довіри 90 чи 95 %.

Отже, виходячи з конкретної задачі дослідник фіксує потрібний рівень довіри. Тому він не може використовувати рівень довіри для поліпшення точності оцінки. Як правило, для поліпшення точності оцінки, тобто зменшення її значення, збільшують обсяг вибірки.

Мало того, якщо замовник дослідження потребує певної точності оцінки, постає задача визначення мінімального обсягу вибірки, який би її забезпечував.

Наведемо підходи до розв'язання таких задач.

[1] Це видається неприродним, адже це твердження можна перефразувати: "що менша точність, то точніша оцінка". Причина цієї двозначності полягає в тому, що в українській мові слово "точність" є якісною характеристикою, наведений же термін "точність" — це характеристика кількісна. Іншими словами, точність інтервальної оцінки і мовне поняття точності різні за природою.

[2] Див. приклад 5.2.7.

Мінімальний розмір вибірки при оцінюванні генеральної пропорції

З формули (5.8) випливає, що точність оцінки генеральної пропорції

$$\varepsilon = z(k)\sqrt{\frac{P_{\text{в}}(1-P_{\text{в}})}{n}},$$

де $z(k)$ визначається рівнем довіри; $P_{\text{в}}$ — вибіркова пропорція; n — обсяг вибірки.

Зауважимо, що максимальне значення виразу $P_{\text{в}}(1-P_{\text{в}})$ дорівнює $1/4$ [1]. Тому для забезпечення точності інтервальної оцінки ε потрібно так підібрати n, щоб

$$\varepsilon > z(k)\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}}.$$

Для цього значення n достатньо вибрати таке, щоб воно задовольняло нерівність

$$n > z(k)^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{z(k)^2}{4\varepsilon^2}. \tag{5.14}$$

Приклад 5.2.11. Нехай потрібно оцінити пропорцію симпатиків деякої політичної партії з надійністю 95 % та точністю 1 % = 0,01. Обчислимо необхідний для цього мінімальний обсяг випадкової вибірки за формулою (5.14):

$$n > \frac{1{,}96^2}{4\cdot 0{,}01^2} = \frac{38416}{4} = 9604.$$

[1] Це легко довести, побудувавши графік параболи $y = p - p^2$. Її вершина — це точка

$$\frac{-1}{2\cdot(-1)} = \frac{1}{2};$$

при цьому

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Отже, для забезпечення такої точності необхідно, взагалі кажучи, опитати близько 10 тис. громадян. Зрозуміло, що таке дослідження дорого коштуватиме.

Тепер оцінимо мінімальний обсяг вибірки, необхідний для забезпечення точності 5 % (при такому самому рівні довіри 95 %):

$$n > \frac{1{,}96^2}{4 \cdot 0{,}05^2} = \frac{1536{,}64}{4} = 384{,}16.$$

Отже, достатньо опитати близько 400 громадян. Таке опитування здійснити набагато реальніше.

А що буде, коли точність дорівнюватиме 2 %? У цьому разі потрібно опитати $n > 2401$ громадян, а це так само потребує великих витрат[1].

Наведений приклад засвідчує, що для забезпечення точності інтервальної оцінки генеральної пропорції, скажімо, 1–2 %, потрібно досліджувати великі вибірки. Проте зауважимо, що формулу (5.14) отримано для випадку найгірших обставин. Коефіцієнт $\frac{1}{4}$, який фігурує в ній, виникає тоді, коли значення вибіркової пропорції дорівнює 50 %. Якщо ж пропорція суттєво менша або більша, то цей коефіцієнт зменшуватиметься[2]. А це призведе до зменшення мінімального обсягу вибірки. Проблема в тому, що вибіркова пропорція наперед невідома.

Розглянемо випадок, коли наявна додаткова інформація про генеральну пропорцію, яка дає змогу зменшити коефіцієнт $\frac{1}{4}$.

Нехай відомо, що генеральна пропорція не перевищує $P_{\text{макс}}$. Припустимо, це значення виявилось меншим від 50 %:

$$P_{\text{макс}} < 50\,\%.$$

Тоді можна покращити формулу (5.14) виходячи з таких міркувань. Насамперед можна допустити, що в досліджуваній у май-

[1] Зауважимо, що для оцінки популярності політичних партій соціологічні організації зазвичай опитують близько 2 тис. громадян. Під час екзит-полу на президентських виборах 2004 р. кожний з учасників опитував близько 10 тис. осіб.

[2] На практиці через відмову частини опитуваних відповідати та явище так званого дизайн-ефекту обсяг вибірки має бути більший, ніж дає формула (5.14).

бутньому випадковій вибірці вибіркова пропорція не перевищуватиме $P_{\text{макс}}$. За такого припущення[1] отримаємо, що для забезпечення заданої точності інтервальної оцінки ε мінімальний обсяг n вибірки слід визначити з нерівності

$$\varepsilon > z(k)\sqrt{\frac{P_{\text{макс}}(1 - P_{\text{макс}})}{n}}.$$

Іншими словами, необхідно сформувати вибірку обсягом не менше

$$n > \frac{z(k)^2 P_{\text{макс}}(1 - P_{\text{макс}})}{\varepsilon^2}. \qquad (5.15)$$

Приклад 5.2.12. Припустимо, у прикладі 5.2.11 відомо, що на останніх виборах партія набрала близько 7 % голосів. Якщо припустити, що ставлення до неї не надто змінилося, то можна пропорцію її симпатиків гіпотетично оцінити згори, наприклад, так:

$$P_{\text{макс}} = 10\,\%.$$

Тоді з формули (5.15) випливає, що для забезпечення точності 2 % при надійності 95 % обсяг вибірки має бути такий:

$$n > \frac{z(k)^2 P_{\text{макс}}(1 - P_{\text{макс}})}{\varepsilon^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}10(1 - 0{,}10)}{0{,}02^2} =$$
$$= \frac{3{,}8416 \cdot 0{,}09}{0{,}02^2} = \frac{384{,}16 \cdot 9}{4} = \frac{3457{,}44}{4} = 864{,}36.$$

Отже, з урахуванням додаткової інформації потрібно опитати близько 900 осіб замість 2400 (див. приклад 5.2.11).

Якщо ж відомо, що генеральна пропорція не менша від $P_{\text{мін}}$ і це значення задовольняє нерівність

$$P_{\text{мін}} > 50\,\%,$$

то формула для обчислення мінімального обсягу вибірки, необхідного для забезпечення точності оцінки ε, набере вигляду

$$n > \frac{z(k)^2 P_{\text{мін}}(1 - P_{\text{мін}})}{\varepsilon^2}. \qquad (5.16)$$

[1]Це припущення не є стовідсотково правильним твердженням. Проте воно правомірне, позаяк зазвичай значення $P_{\text{макс}}$ беруть з певним запасом.

Мінімальний розмір вибірки при оцінюванні генерального середнього

Як випливає з формули (5.4), точність інтервальної оцінки генерального середнього

$$\varepsilon = \frac{z(k)\sigma}{\sqrt{n}},$$

де σ — стандартне відхилення генеральної сукупності.

Тому для забезпечення точності ε обсяг вибірки n має задовольняти нерівність

$$n > \frac{z(k)^2\sigma^2}{\varepsilon^2}. \tag{5.17}$$

На жаль, скористатися формулою (5.17) можна лише тоді, коли відоме значення σ. Проте, як правило, генеральне стандартне відхилення невідоме.

Нагадаємо, що за невідомого значення σ в інтервальній оцінці середнього значення використовують точкову оцінку генерального стандартного відхилення, власне виправлене вибіркове стандартне відхилення s. Здавалося б, у такому разі для визначення мінімального розміру вибірки у формулу (5.17) потрібно підставити s замість σ. На жаль, s є вибірковим параметром, що залежить від конкретної вибірки, і наперед до формування вибірки він невідомий.

Тому за невідомого значення σ чинять так. Точність оцінки вимірюють у масштабі σ. Іншими словами, кажуть про забезпечення точності в x стандартних відхилень σ:

$$\varepsilon = x\sigma.$$

Ще раз зауважимо, що в цій формулі σ невідоме.

У цьому разі формула (5.17) набере вигляду

$$n > \frac{z(k)^2\sigma^2}{(x\sigma)^2} = \frac{z(k)^2}{x^2}. \tag{5.18}$$

Приклад 5.2.13. Повернімося до прикладу 5.2.2. Яку кількість селянських господарств необхідно було б дослідити для забезпечення точності оцінки середнього щомісячного прибутку $\varepsilon = 5$ ум. од.

при надійності 99 %? Нагадаємо, що значення σ відоме і дорівнює 32 ум. од. Тому за формулою (5.17) маємо

$$n > \frac{2{,}58^2 \cdot 32^2}{5^2} \approx 273,$$

тобто мінімальний обсяг вибірки має дорівнювати близько 300 селянських господарств.

Припустимо, значення σ невідоме. У цьому разі слід було б вимірювати точність у генеральних стандартних відхиленнях. Скажімо, можна було б поставити таке запитання: “Яким має бути обсяг вибірки, щоб при надійності 99 % забезпечити точність $0{,}1\sigma$?” Для відповіді на це запитання скористаємося формулою (5.18):

$$n > \frac{2{,}58^2}{0{,}1^2} = 665{,}64,$$

тобто в такому разі потрібно було б дослідити щонайменше 670 господарств.

Оцінювання різниці пропорцій

За формулами (5.10) та (5.11) точність оцінки різниці пропорцій

$$\varepsilon = z(k)\sqrt{P(1-P)\Big(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\Big)},$$

де

$$P = \frac{p_1 n_1 + p_2 n_2}{n_1 + n_2};$$

p_1, p_2 — вибіркові пропорції.

Оскільки максимальне значення функції $y = p(1-p)$ дорівнює $\frac{1}{4}$, то для забезпечення точності ε обсяги вибірок n_1 і n_2 повинні задовольняти нерівність

$$\varepsilon > z(k)\sqrt{\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\Big)}.$$

Для приведення цієї нерівності до зручнішого вигляду введемо позначення

$$N = \min\{n_1, n_2\}.$$

Тоді

$$\varepsilon > z(k)\sqrt{\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\Big)}.$$

Тому

$$N > \frac{z(k)^2}{2\varepsilon^2}. \tag{5.19}$$

Отже, для забезпечення точності ε інтервальної оцінки різниці пропорцій двох незалежних генеральних сукупностей за надійності k достатньо сформувати з них випадкові вибірки обсягами щонайменше N, що задовольняє нерівність (5.19).

Приклад 5.2.14. Повернімося до прикладу 5.2.8, де з надійністю 95 % оцінювалась різниця у пропорціях безробітних у західному та центральному регіонах. Нагадаємо, що точність отриманої оцінки $(-0{,}3\,\%; 5{,}5\,\%)$ становила

$$\frac{5{,}5\,\% - (-0{,}3\,\%)}{2} = \frac{5{,}8\,\%}{2} = 2{,}9\,\%.$$

Отримана інтервальна оцінка не допомагає відповісти на питання, в якому регіоні рівень безробіття вищий. Для того щоб відповісти на це питання, довелося б здійснити масштабніше дослідження.

Нехай необхідно оцінити різницю генеральних пропорцій з точністю 2 % за такого самого рівня надійності 95 %. Тоді за формулою (5.19)

$$N > \frac{1{,}96^2}{2 \cdot 0{,}02^2} \approx 4802,$$

тобто для забезпечення бажаної точності потрібно було опитати хоча б 4800 осіб у кожному регіоні.

Зрозуміло, що таке дослідження нерентабельне. У цьому разі краще було б застосувати таку саму методику, як у прикладі 5.2.12. Припустимо, минулого року рівень безробіття в цих регіонах становив 21 та 19 % (за даними прикладу 5.2.8 точкові оцінки рівня безробіття в регіонах цього року відповідно 20,0 і 17,4 %). Тому можна було б припустити, що рівень безробіття в регіонах не перевищує, скажімо, 25 %. Оскільки параметр P, який фігурує у формулі для ε — це фактично пропорція досліджуваної ознаки в об'єднаній з двох вибірок сукупності, то його максимальне значення так само

$$P_{\text{макс}} = 25\,\%.$$

Тоді оцінку для N можна записати так:

$$N > \frac{z(k)^2 \cdot 2P_{\text{макс}}(1 - P_{\text{макс}})}{\varepsilon^2}.$$

Підставляючи числові значення, отримуємо

$$N > \frac{1{,}96^2 \cdot 2 \cdot 0{,}25(1 - 0{,}25)}{0{,}02^2} = 3601{,}5.$$

Незважаючи на те що отриманий мінімальний обсяг вибірок все ще дуже великий, новий результат кращий від попереднього приблизно на

$$\frac{4800 - 3600}{3600} \cdot 100\,\% \approx 33\,\%,$$

тобто значно ефективніший.

Випадок різниці генеральних середніх

З формул (5.6) і (5.7) випливає, що точність оцінки різниці генеральних середніх

$$\varepsilon = z(k)\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}}.$$

Для визначення мінімального обсягу вибірок у цьому разі використовують таке ж позначення, як і для різниці генеральних пропорцій:

$$N = \min\{n_X; n_Y\}.$$

Тоді маємо оцінку

$$N > \frac{z(k)^2}{\varepsilon^2}(s_X^2 + s_Y^2).$$

Зрозуміло, що для обчислення N цю формулу використовувати не можна, позаяк значення s_X і s_Y невідомі до взяття вибірки. Проте зауважимо, що формула (5.7) записана в разі невідомих генеральних стандартних відхилень (вважаючи задачу з невідомими генеральними стандартними відхиленнями загальнішою). Насправді ж нерівність для N можна записати, використовуючи генеральні стандартні відхилення σ_X та σ_Y:

$$N > \frac{z(k)^2}{\varepsilon^2}(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2).$$

Якщо σ_X і σ_Y відомі, проблем немає. Можна використати цю формулу для знаходження N. Проте, як правило, їх значення невідомі. У цьому разі використовують такий підхід. Позначають σ максимальне з двох генеральних стандартних відхилень:

$$\sigma = \max\{\sigma_X; \sigma_Y\}.$$

Тоді точність ε задають у масштабі σ:

$$\varepsilon = x\sigma.$$

Остаточно

$$N > \frac{z(k)^2}{(x\sigma)^2} \cdot 2\sigma^2 = \frac{2z(k)^2}{x^2}. \tag{5.20}$$

Приклад 5.2.15. Припустимо, необхідно оцінити різницю середніх прибутків двох категорій населення (наприклад, працівників силових органів та викладачів вищих навчальних закладів). Нехай слід забезпечити надійність оцінки 95 % і точність 0,1 максимального генерального стандартного відхилення. Тоді за формулою (5.20)

$$N > \frac{2 \cdot 1{,}96^2}{0{,}1^2} \approx 768.$$

Отже, для забезпечення бажаних значень точності й надійності оцінки потрібно згенерувати випадкові вибірки не менше як 770 громадян у кожній.

Дизайн-ефект

Описані методи оцінки мінімального обсягу вибірки, необхідного для забезпечення заданої точності інтервальної оцінки, безпосередньо працюють лише в разі простих випадкових вибірок. Проте на практиці, як правило, прості випадкові вибірки застосовувати не вдається. Використовують інші типи вибірок, про які йшлося в підрозд. 4.3. На жаль, у цьому разі не завжди вдається вивести формули для оцінки мінімального обсягу вибірки. Для розв'язання цієї проблеми великі соціологічні служби чинять так. Припустимо, деяка дослідницька організація найчастіше використовує певну фіксовану процедуру формування вибірки. Нехай її експерти проаналізували деяку вибірку обсягом $n_{\text{реал}}$. Знайдена за вибіркою інтервальна оцінка має деяку точність. Припустимо, для забезпечення цієї точності в разі простої випадкової вибірки було б достатньо сформувати вибірку обсягом $n_{\text{теор}}$. Як правило,

$$n_{\text{реал}} > n_{\text{теор}}.$$

Тепер припустимо, що відношення

$$\frac{n_{\text{реал}}}{n_{\text{теор}}},$$

обчислене за всіма попередніми дослідженнями цієї організації, обмежене згори деяким числом A. Тоді це значення називають *дизайн-ефектом* фіксованої процедури формування вибірки. Знаючи значення дизайн-ефекту A і оцінивши теоретичний мінімальний обсяг вибірки $n_{\text{теор}}$ для нового дослідження, реальний обсяг вибірки обчислюють за формулою

$$n_{\text{реал}} = An_{\text{теор}}.$$

5.2.7. Інтервальні оцінки для малих вибірок

Розглянемо випадок, коли з певних причин неможливо сформувати велику вибірку. Як зазначалося, у контексті соціологічного чи психологічного дослідження задачі інтервальної оцінки за даними малої вибірки виникають рідко[1]. Це пов'язано з тим, що соціологічне дослідження починається з опитування вибірки. Оскільки процес опитування не надто дорогий, то сформувати велику вибірку (обсягом $n \geqslant 30$) неважко. У психології ж через певну специфіку її задач інтервальні оцінки взагалі майже не застосовуються. Складність досліджень у психології потребує потужніших методів. Розглянемо їх у розд. 6.

Проте коротко опишемо, як можна здійснити інтервальне оцінювання за даними невеликої вибірки. Розглянемо найтиповішу задачу, а саме оцінку генерального середнього за вибіркою обсягом $n < 30$.

На жаль, для розв'язання такої задачі потрібно ввести жорстке обмеження. Вважатимемо, що генеральна сукупність розподілена нормально. Нехай μ — невідоме значення генерального середнього. Тоді можна довести, що поведінка n-вимірного розподілу $\overline{X}$ вибіркового середнього описується співвідношенням

$$\frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = t(n-1), \tag{5.21}$$

де $t(n)$ — t-розподіл Стьюдента з n ступенями вільності.

Використовуючи співвідношення (5.21), подібно як у п. 5.2.2 можна знайти k-довірчу інтервальну оцінку для μ:

$$\mu \in \left(\overline{X} - t(n-1;k)\frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t(n-1;k)\frac{s}{\sqrt{n}}\right), \tag{5.22}$$

де $t(n-1;k)$ — значення t-розподілу з $n-1$ ступенями вільності для рівня довіри k (значення t-розподілу для найуживаніших рівнів довіри наведено в табл. Д.2.4).

Приклад 5.2.16. Нехай необхідно оцінити середній вік керівників великих комерційних фірм. Оскільки доступ до людей такого рівня обмежений і ускладнений, то навряд чи можна сформувати вибірку великого обсягу.

Припустимо, сформовано випадкову вибірку керівників, серед яких лише 18 погодилися бути опитаними і назвали свій вік. Середній вік опитаних виявився $\overline{X} = 38{,}2$, а виправлене стандартне відхилення $s = 5{,}4$ року.

[1]Набагато частіше такі задачі виникають, наприклад, в економіці.

Чи можна за цими даними з 95 %-ю надійністю оцінити генеральний середній вік керівників?

Для відповіді на це запитання зауважимо, що, як відомо з попередніх досліджень, розподіл віку людей близький до нормального. Природним виглядає припущення, що розподіл віку деяких категорій людей так само нормальний.

За таких умов маємо всі підстави застосувати формулу (5.22):

$$t(n-1;k) = t(18-1; 95\,\%) = 2{,}12;$$
$$t(n-1;k)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}12 \cdot \frac{5{,}4}{\sqrt{18}} \approx 2{,}7;$$
$$\mu \in (38{,}2 - 2{,}7; 38{,}2 + 2{,}7) = (35{,}5; 40{,}9).$$

Остаточно, зважаючи на всі зроблені припущення, з 95 %-ю надійністю можна стверджувати, що середній вік керівників великих комерційних фірм перебуває в межах 35,5–40,9 року.

5.2.8. Інтервальні оцінки генерального стандартного відхилення

Насамкінець коротко опишемо, як можна отримати інтервальну оцінку для генерального стандартного відхилення. На жаль, наведені результати можна застосовувати лише для нормально розподіленої генеральної сукупності.

Теорема 5.5. *Нехай з нормально розподіленої генеральної сукупності з дисперсією σ^2 беруть всеможливі прості випадкові вибірки обсягом n. Тоді випадкова величина*

$$(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2},$$

де s^2 — виправлена вибіркова дисперсія, поводиться як $\chi^2(n-1)$-розподіл Пірсона з $n-1$ ступенями вільності.

За допомогою цієї теореми можна знайти інтервальну оцінку для σ через s. З методичних міркувань опустимо проміжні алгебраїчні перетворення і наведемо лише остаточні формули.

Отже, нехай у вибірці обсягом n знайдено виправлене стандартне відхилення s. Припустимо, k — фіксований рівень надійності інтервального оцінювання. За значеннями k та n у табл. Д.2.5 потрібно знайти допоміжне значення q. Тоді інтервальна оцінка генерального стандартного відхилення з рівнем довіри k має вигляд

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q),$$

якщо $q < 1$, і

$$0 < \sigma < s(1+q),$$

якщо $q \geqslant 1$.

Приклад 5.2.17. У прикладі 5.1.11 вивчалися дані зросту у вибірці восьмирічних американських хлопчиків обсягом $n = 1000$. Було встановлено, що вибіркове середнє дорівнює 53,81, а дисперсія $\sigma_{\text{в}}^2 = 0{,}9939$. Тоді виправлене стандартне відхилення

$$s = \sqrt{\sigma_{\text{в}}^2 \frac{n}{n-1}} = \sqrt{0{,}9939 \cdot \frac{1000}{999}} \approx 0{,}9974.$$

З результатів багатьох досліджень відомо, що зріст, як правило, підпорядкований нормальному закону. Тому маємо всі підстави використати описаний підхід для інтервального оцінювання генерального стандартного відхилення.

Оскільки в табл. Д.2.5 максимальне значення $n = 250$, візьмемо $q = 0{,}089$ для $n = 250$ та рівня надійності $k = 95\,\%$[1]. Обчислимо

$$sq = 0{,}9974 \cdot 0{,}089 \approx 0{,}0888.$$

Остаточно з надійністю 95 % можна стверджувати, що генеральне стандартне відхилення належить до інтервалу $(s - sq; s + sq)$, тобто

$$\sigma_{\text{г}} \in (0{,}9974 - 0{,}0888; 0{,}9974 + 0{,}0888) \approx (0{,}91; 1{,}09).$$

[1]Реальне значення q дещо менше.

Висновки

Найпростішим методом дослідження генеральної сукупності через аналіз вибірки з неї є оцінювання її параметрів. Існують два підходи до оцінювання генеральних параметрів — за допомогою точкових та інтервальних оцінок.

Якість точкових оцінок ґрунтується лише на їх теоретичних властивостях. Серед цих властивостей найважливішими є незміщеність та ефективність. З позицій практичності та зручності використання добрими є також властивості спроможності та лінійності.

На жаль, якою б теоретично доброю не була точкова оцінка, нічого неможливо сказати про її достовірність. Реальне значення параметра може значно відрізнятися від оцінки. Цей недолік точкових оцінок враховують інтервальні оцінки.

Кожне інтервальне оцінювання здійснюється з певним рівнем довіри до результатів. Як правило, статистичні дослідження виконують з рівнями довіри 90, 95, 99 або 99,9 %. Крім того, інтервальне оцінювання генерального параметра здійснюється з деякою точністю. Що більша вибірка і нижчий заданий рівень довіри, то точність оцінки краща. Як правило, потрібної точності при заданому рівні довіри досягають регулюванням обсягу вибірки.

На жаль, інтервальне оцінювання можна здійснити не для всіх генеральних параметрів. Класичними задачами інтервального оцінювання є знаходження оцінки генерального середнього, генеральної пропорції, різниці генеральних середніх, генеральних пропорцій, стандартного відхилення.

Ключові поняття

Виправлена вибіркова дисперсія
Виправлене стандартне відхилення
Дизайн-ефект
Ефективна оцінка
Лінійна оцінка
Мінімальний обсяг вибірки
Метод моментів
Незміщена оцінка
Спроможна оцінка
Точність інтервальної оцінки
BLUE-оцінка

Вправи

1. Чи є мода лінійною оцінкою генерального середнього?

2. Покажіть, що вибіркові дисперсія та середньоквадратичне відхилення не є лінійними оцінками.

3. Перевірте, чи є вибіркове середнє абсолютне відхилення лінійною оцінкою.

4. Для оцінки середнього віку дорослих громадян держави було випадково опитано 350 осіб. Середній вік у вибірці дорівнював 44,2 року, а виправлене стандартне відхилення 9,7 року. Знайдіть 99 %-й довірчий інтервал для середнього віку дорослих громадян.

Який мав би бути обсяг вибірки для забезпечення точності оцінки один рік при тому ж рівні надійності?

5. Для порівняння рівня життя киян та львів'ян було виконано таке дослідження. Серед львівських сімей вибрано 215, серед київських — 325. Виявилось, що середньомісячний дохід сім'ї з розрахунку на одного її члена у львівській вибірці становив 68 ум. од., у київській — 92 ум. од. Відповідно виправлені стандартні відхилення у вибірках дорівнювали 6 та 8,1 ум. од.

Знайдіть 95 %-й довірчий інтервал для різниці середньомісячного доходу сім'ї з розрахунку на одного її члена в Києві та Львові.

6. У результаті аналізу випадкової вибірки обсягом 1225 з генеральної сукупності всіх дорослих киян виявилось, що 86 з них вільно володіють, а 318 можуть читати та порозумітися на побутовому рівні принаймні однією іноземною мовою. З надійністю 95 % знайдіть довірчі інтервали для пропорції дорослих киян, які вільно володіють принаймні однією іноземною мовою; пропорції дорослих киян, які можуть читати та порозумітися на побутовому рівні принаймні однією іноземною мовою.

Який мав би бути обсяг вибірки для забезпечення точності 2 % оцінки пропорції дорослих киян, які вільно володіють принаймні однією іноземною мовою, при тому ж рівні надійності, якщо вважати, що ця пропорція не перевищує 10 %?

7. Для порівняння рівня трудової міграції із західних та східних регіонів країни було здійснено таке дослідження. З генеральних сукупностей зареєстрованих у населених пунктах західного та східного

регіонів громадян дорослого віку було випадково вибрано відповідно 1350 та 1550 осіб. Виявилось, що у “західній” вибірці 312 осіб тимчасово працюють за кордоном, а у “східній” — 280 осіб.

З рівнем надійності 95 % оцініть різницю пропорцій працюючих за кордоном на заході та сході країни.

Дослідницький проект

З метою порівняння рівня безробіття серед чоловіків та жінок виконайте таке дослідження.

1. Враховуючи офіційний рівень безробіття в державі, оцініть мінімальні обсяги вибірок чоловіків та жінок, необхідні для забезпечення точності інтервальної оцінки пропорції 3 % при надійності оцінки 90 %.
2. Здійсніть випадкове опитування на вулицях Вашого міста серед дорослих чоловіків і жінок. Спитайте у них, чи мають вони постійне місце роботи.
3. Знайдіть вибіркові пропорції безробітних чоловіків та жінок.
4. Знайдіть 90 %-ві інтервальні оцінки пропорцій безробітних чоловіків та жінок у Вашому місті. Чи вдалося Вам забезпечити точність оцінки 3 %?
5. Знайдіть 95 %-ву інтервальну оцінку різниці пропорцій безробітних жінок та чоловіків. Чи можете Ви на основі цієї оцінки порівняти рівні безробіття серед чоловіків та жінок у Вашому місті?

Розділ 6

Перевірка гіпотез

У розд. 4 вже згадувалось про існування двох основних методів аналізу вибірки — інтервального оцінювання та перевірки гіпотез. Процедура інтервального оцінювання розглядалася в розд. 5. Тепер детально розглянемо методи тестування гіпотез [1].

Нагадаємо, що статистичні критерії перевірки гіпотез поділяють на два великих класи — параметричні та непараметричні. Перші стосуються перевірки тверджень про числові характеристики розподілу генеральної сукупності. Як правило, вони застосовні лише для числових ознак[2]. Зауважимо також, що параметричні тести часто є просто переформулюванням методів інтервального оцінювання.

Непараметричні критерії дають змогу перевірити загальніші твердження про генеральні сукупності. Як правило, їх застосовують у випадку порядкових та номінальних шкал.

[1] Необхідно ще раз переглянути матеріал п. 4.2.2.

[2] Технічно їх можна застосовувати, наприклад, у випадку порядкових шкал, рівні яких позначені числами.

Параметричним тестам присвячено підрозд. 6.1[1]. Решта матеріалу цього розділу стосується непараметричних критеріїв. Зауважимо, що підхід до вивчення непараметричних тестів запозичений з [17] і доповнений порівняльним аналізом різних непараметричних тестів.

6.1. Тестування гіпотез про значення параметрів

Розглянемо задачі перевірки гіпотез про деякі параметри генеральної сукупності. Ці задачі умовно можна поділити на дві групи — одно- та двобічні тести.

Означення 6.1. Нехай ϑ — деякий генеральний параметр. Тоді *двобічним тестом* називають перевірку основної гіпотези виду $\vartheta = a$, де a — деяке фіксоване число. У цьому разі альтернативна гіпотеза така: $\vartheta \neq a$.

Розглянемо такі двобічні тести: $\mu = a$, $P = a$, $\mu_1 - \mu_2 = a$, $P_1 - P_2 = a$.

Означення 6.2. Нехай ϑ — деякий генеральний параметр. Тоді *однобічним тестом* називають перевірку основної гіпотези $\vartheta \leqslant a$ (або $\vartheta \geqslant a$), де a — деяке фіксоване число. У цьому разі альтернативна гіпотеза формулюється так: $\vartheta > a$ (відповідно $\vartheta < a$).

Розглянемо такі однобічні тести: $\mu \leqslant a$, $P \leqslant a$, $\mu_1 - \mu_2 \leqslant a$, $P_1 - P_2 \leqslant a$.

Проаналізуємо загальні підходи до дво- та однобічного тестування.

6.1.1. Двобічне тестування

Виявляється, що задача двобічного тестування є дуальною до задачі інтервального оцінювання генерального параметра. Вона виникає тоді, коли потрібно перевірити гіпотезу про рівність генерального параметра деякому фіксованому значенню, отриманому з прикладних міркувань.

[1] Див. також підрозд. 7.3.

Приклад 6.1.1. Нехай маємо лінію з розливання мінеральної води. Зрозуміло, що за умов правильної роботи в середньому в кожну пляшку має наливатися певна кількість води, наприклад, 1,5 л. Якщо постає питання про перевірку роботи лінії, то потрібно провести експеримент. Випадково взяти деяку кількість наповнених пляшок, виміряти об'єм води в них і обчислити середнє. Це середнє найімовірніше дещо відрізнятиметься від значення 1,5 л. Постає питання, наскільки середнє може відрізнятись від 1,5, щоб можна було вважати, що лінія працює коректно. Іншими словами, потрібно навчитись перевіряти гіпотезу виду $\mu = a$.

Приклад 6.1.2. Припустимо, деяка політична сила задекларувала, що рівень її підтримки населенням становить 25 %. Деяка незалежна соціологічна служба хоче перевірити це твердження. Тоді вона повинна здійснити опитування у випадковій вибірці щодо підтримки цієї партії. Як правило, отримане за вибіркою значення відрізнятиметься від задекларованого рівня 25 %. Постає питання, наскільки значною може бути відмінність, щоб усе ще можна було вважати, що рівень 25 % правильний. Іншими словами, соціологічна служба повинна вміти перевіряти гіпотезу виду $P = a$.

Спробуємо відповісти на поставлені питання.

Отже, нехай маємо гіпотези двобічного тесту:
основну

$$H_0 : \ \vartheta = a$$

та альтернативну

$$H_1 : \ \vartheta \neq a.$$

Припустимо, зафіксовано рівень значущості α, тобто максимально допустимий рівень помилки I роду, яка полягає у відхиленні правильної основної гіпотези H_0. Нехай взято просту випадкову вибірку достатнього обсягу [1] і знайдено за нею значення точкових оцінок генерального параметра $\vartheta_{\text{в}}$ та стандартної помилки s.e.est.

[1] Див. зауваження 5.1, 5.2 та формули (5.9), (5.12).

Якби генеральний параметр ϑ дорівнював a, то в розглядуваних задачах значення
$$z_{\text{в}} = \frac{\vartheta_{\text{в}} - a}{\text{s.e.est.}}$$
мало б стандартний нормальний розподіл $\mathcal{N}(0;1)$ [1].

Нехай $z_{\text{кр}}(\alpha)$ — це таке число, що за межами інтервалу
$$\bigl(-z_{\text{кр}}(\alpha); z_{\text{кр}}(\alpha)\bigr)$$
лежить α одиниць площі під кривою стандартного нормального розподілу (рис. 6.1).

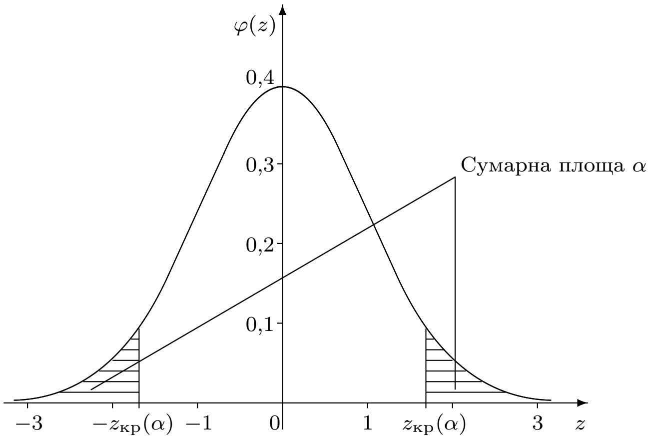


Рис. 6.1. **Двобічний z-тест**

Іншими словами, ймовірність отримати розподілене за стандартним нормальним законом значення за межами інтервалу

[1]Нагадаємо, що при інтервальній оцінці генеральних параметрів важливе значення мають вибіркові розподіли. Розглядувані методи інтервального оцінювання зводились до знаходження інтервалу для генерального параметра ϑ виду
$$(\vartheta_{\text{в}} - z(k)\,\text{s.e.est.}; \vartheta_{\text{в}} + z(k)\,\text{s.e.est.}),$$
де $\vartheta_{\text{в}}$, s.e.est. — точкові оцінки для помилки відповідно ϑ і стандартної; $z(k)$ визначається за допомогою функції Лапласа (див. формулу (5.2)).

$\bigl(-z_{\text{кр}}(\alpha); z_{\text{кр}}(\alpha)\bigr)$ дорівнює α. Це означає, що ймовірність отримати значення $z_{\text{в}}$ за межами $\bigl(-z_{\text{кр}}(\alpha); z_{\text{кр}}(\alpha)\bigr)$ так само дорівнює α. Значення $z_{\text{кр}}(\alpha)$ називають *критичним значенням* тесту, яке відповідає рівню значущості α.

Отже, якщо

$$z_{\text{в}} \in \bigl(-z_{\text{кр}}(\alpha); z_{\text{кр}}(\alpha)\bigr),$$

то потрібно приймати гіпотезу H_0: $\vartheta = a$. Якщо ж

$$z_{\text{в}} \notin \bigl(-z_{\text{кр}}(\alpha); z_{\text{кр}}(\alpha)\bigr),$$

слід приймати H_1: $\vartheta \neq a$. При цьому ймовірність припуститися помилки за умови $\vartheta = a$ дорівнює α, тобто заданому рівню значущості.

Залишилось обчислити $z_{\text{кр}}(\alpha)$. А це нескладно, бо $1 - \alpha$ — площа під кривою стандартного нормального розподілу в межах інтервалу $\bigl(-z_{\text{кр}}(\alpha); z_{\text{кр}}(\alpha)\bigr)$, яку легко знайти за допомогою функції Лапласа. Мало того, зауважимо, що $1 - \alpha$ — це фактично коефіцієнт довіри k при інтервальній оцінці ϑ. Тому за зауваженням 5.5 отримаємо такий результат.

Зауваження 6.1. Для рівнів значущості 10, 5, 1 та 0,1 % значення $z_{\text{кр}}(\alpha)$ приблизно дорівнюють відповідно 1,64, 1,96, 2,58 та 3,29.

Запишемо все викладене у вигляді алгоритму, застосовного для задач перевірки гіпотези рівності заданому числу генерального середнього, генеральної пропорції, різниці генеральних середніх або пропорцій.

Алгоритм двобічного z-тесту

1. Формулюємо основну та альтернативну гіпотези у вигляді відповідно $\vartheta = a$ та $\vartheta \neq a$, де a — фіксоване значення.
2. Фіксуємо рівень значущості α.
3. Формуємо просту випадкову вибірку з генеральної сукупності.
4. Обчислюємо $\vartheta_{\text{в}}$, s.e.est. та

$$z_{\text{в}} = \frac{\vartheta_{\text{в}} - a}{\text{s.e.est.}}.$$

5. За табл. Д.2.1 значень функції Лапласа або зауваженням 6.1 обчислюємо $z_{\text{кр}}(\alpha)$.

6. Якщо
$$z_{\text{в}} \in \big(-z_{\text{кр}}(\alpha); z_{\text{кр}}(\alpha)\big),$$
приймаємо основну гіпотезу, в інших випадках — альтернативну.

Приклади двобічного тестування

Приклад 6.1.3. Припустимо, Державний комітет статистики опублікував інформацію, що середня заробітна плата у країні нині становить 160,5 ум. од. Деяка соціологічна компанія вирішила перевірити це твердження. Вона сформулювала основну гіпотезу $\mu = 160{,}5$ та альтернативну $\mu \neq 160{,}5$ і зафіксувала рівень значущості 1 %.

Нехай для перевірки інформації Держкомстату соціологічна служба опитує випадкову вибірку обсягом 340 осіб. Оскільки $340 > 30$, то можна використовувати алгоритм двобічного тесту. Припустимо, середня заробітна плата у вибірці становить 158,2 ум. од., а виправлене стандартне відхилення — 11,24 ум. од. Обчислимо за цими даними $z_{\text{в}}$:

$$\text{s.e.est.} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{11{,}24}{\sqrt{340}} \approx 0{,}61;$$
$$z_{\text{в}} = \frac{158{,}2 - 160{,}5}{0{,}61} = \frac{-2{,}3}{0{,}61} \approx -3{,}77.$$

Оскільки за зауваженням 6.1 рівню значущості 1 % відповідає критичне значення $z_{\text{кр}}(\alpha) = 2{,}58$, то $z_{\text{в}} \notin \big(-z_{\text{кр}}(\alpha); z_{\text{кр}}(\alpha)\big)$ і маємо всі підстави спростувати інформацію Держкомстату на рівні значущості 1 % [1].

Приклад 6.1.4. Нехай відомо, що в минулому році рівень безробіття у країні становив 9 %. Припустимо, соціологічна служба бажає перевірити, чи не змінився цей рівень. Вона розглядає дві гіпотези: основну $P = 9\,\%$ та альтернативну $P \neq 9\,\%$ і фіксує рівень значущості, наприклад, 5 %.

[1] Насправді навіть на рівні значущості 0,1 %.

Нехай служба здійснила опитування у випадковій вибірці обсягом 2200 осіб і отримала, що пропорція p безробітних у вибірці дорівнює 10,45 %. Оскільки обмеження (5.9) виконується, то можна застосувати алгоритм двобічного тесту:

$$\text{s.e.est.} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}1045 \cdot (1-0{,}1045)}{2200}} \approx 0{,}0065;$$
$$z_{\text{в}} = \frac{10{,}45\,\% - 9\,\%}{0{,}65\,\%} = \frac{1{,}45\,\%}{0{,}65\,\%} \approx 2{,}23.$$

Оскільки за зауваженням 6.1 рівню значущості 5 % відповідає критичне значення $z_{\text{кр}}(\alpha) = 1{,}96$, то $z_{\text{в}} \notin \big(-z_{\text{кр}}(\alpha); z_{\text{кр}}(\alpha)\big)$ і на рівні значущості 5 % доходимо висновку, що рівень безробіття змінився [1].

Приклад 6.1.5. Припустимо, деякий дослідник вирішив перевірити, чи відрізняється середній зріст дорослих жителів у двох регіонах. Якщо μ_1 та μ_2 — відповідні генеральні параметри, то основною є гіпотеза $\mu_1 - \mu_2 = 0$, а альтернативною — $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$. Нехай він хоче перевірити основну гіпотезу на рівні значущості 5 %.

Припустимо, що в результаті формування випадкових вибірок в обох регіонах він отримав такі результати. Вибірка обсягом $n_1 = 150$ у першому регіоні дала середнє $\overline{X}_1 = 175$ см та виправлене стандартне відхилення $s_1 = 7{,}1$ см, а вибірка обсягом $n_2 = 200$ у другому регіоні дала $\overline{X}_2 = 176{,}2$ см та $s_2 = 9{,}4$ см. Оскільки обсяг обох вибірок перевищує 30 осіб, можна використати процедуру двобічного тестування:

$$\text{s.e.est.} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{7{,}1^2}{150} + \frac{9{,}4^2}{200}} \approx 0{,}88;$$
$$z_{\text{в}} = \frac{(175 - 176{,}2) - 0}{0{,}88} = \frac{-1{,}2}{0{,}88} \approx -1{,}36.$$

Оскільки за зауваженням 6.1 рівню значущості 5 % відповідає критичне значення $z_{\text{кр}}(\alpha) = 1{,}96$, то $z_{\text{в}} \in \big(-z_{\text{кр}}(\alpha); z_{\text{кр}}(\alpha)\big)$ і на рівні значущості 5 % немає жодних підстав вважати, що середній зріст у

[1] А от зробити такий висновок на рівні значущості 1 % немає жодних підстав.

регіонах різниться. Насправді немає підстав казати про це навіть на рівні значущості 10 %.

Приклад 6.1.6. Нехай деякого політика цікавить, як співвідноситься відсоток його прихильників серед жінок і чоловіків. Точніше, його цікавить, чи дорівнює пропорція його прихильників пропорції його прихильниць. Припустимо, він замовив відповідне дослідження соціологічній компанії. Тоді дослідник з компанії має сформулювати дві гіпотези: основну $P_1 - P_2 = 0$ і альтернативну $P_1 - P_2 \neq 0$, де P_1, P_2 — генеральна пропорція прихильників політика серед відповідно чоловіків та жінок. Нехай досліднику замовлено перевірити ці твердження на рівні значущості 2 %.

Припустимо, компанія здійснила відповідне опитування і отримала у вибірці чоловіків обсягом $n_1 = 1800$ пропорцію прихильників політика $p_1 = 16\,\%$ і у вибірці жінок обсягом $n_2 = 1900$ пропорцію $p_2 = 13{,}6\,\%$. Тоді обмеження (5.12) виконуються і тому можна застосувати алгоритм двобічного тесту:

$$P = \frac{p_1 n_1 + p_2 n_2}{n_1 + n_2} = \frac{0{,}16 \cdot 1800 + 0{,}136 \cdot 1900}{1800 + 1900} \approx 0{,}1477,$$

$$\text{s.e.est.} = \sqrt{P(1-P)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} =$$

$$= \sqrt{0{,}1477 \cdot (1 - 0{,}1477)\left(\frac{1}{1800} + \frac{1}{1900}\right)} \approx 0{,}0117,$$

$$z_{\text{в}} = \frac{(16\,\% - 13{,}6\,\%) - 0\,\%}{1{,}17\,\%} = \frac{2{,}4}{1{,}17} \approx 2{,}05.$$

Оскільки за зауваженням 6.1 рівню значущості 5 % відповідає критичне значення $z_{\text{кр}}(\alpha) = 1{,}96$, а рівню значущості 1 % — $z_{\text{кр}}(\alpha) = 2{,}58$, то слід було б відхилити основну гіпотезу на рівні 5 % і прийняти її на рівні 1 %.

Проте нагадаємо, що дослідження потрібно було виконати на рівні значущості 2 %. Для цього слід знайти відповідне критичне значення $z_{\text{кр}}(\alpha)$. Покажемо, як це зробити. Два відсотки, які припадають на помилку I роду, розподіляються порівну між правою та лівою частинами кривої стандартного нормального розподілу (див.

рис. 6.1). Іншими словами, площа під кривою стандартного нормального розподілу в межах інтервалу $\big(0; z_{\text{кр}}(\alpha)\big)$ дорівнює

$$0{,}5 - \frac{2\,\%}{2} = 0{,}49.$$

Разом з тим ця площа дорівнює значенню $\Phi\big(z_{\text{кр}}(\alpha)\big)$ функції Лапласа від критичної точки. Звертаючись до табл. Д.2.1, отримаємо $0{,}49 = \Phi(2{,}33)$ і тому $z_{\text{кр}}(\alpha) = 2{,}33$.

Остаточно, оскільки $2{,}05 \in (-2{,}33; 2{,}33)$, то на рівні значущості $2\,\%$ потрібно прийняти основну гіпотезу про рівність генеральних пропорцій.

6.1.2. Однобічне тестування

Процедура однобічного тестування подібна до двобічного. Тому розглянемо її скорочено.

Вважатимемо, що основна гіпотеза має вигляд $\vartheta \leqslant a$ (випадок основної гіпотези $\vartheta \geqslant a$ подібний). Тоді альтернативна гіпотеза формулюється так: $\vartheta > a$.

У розглядуваних задачах тестування за умов великих вибірок (тобто за таких же умов, як у двобічному тестуванні) і рівності $\vartheta = a$ значення

$$z_{\text{в}} = \frac{\vartheta_{\text{в}} - a}{\text{s.e.est.}}$$

має стандартний нормальний розподіл $\mathcal{N}(0; 1)$.

Проте на відміну від двобічного оцінювання на рівні значущості α перевіряємо гіпотезу $\vartheta \leqslant a$, а не $\vartheta = a$. Тому інтервал під кривою стандартного нормального розподілу, який відповідає цій гіпотезі, має дещо інший вигляд (рис. 6.2). Власне основній гіпотезі відповідає інтервал $\big(-\infty; z_{\text{кр}}(\alpha)\big)$, а альтернативній $\big(z_{\text{кр}}(\alpha); \infty\big)$.

Отже, критичне значення $z_{\text{кр}}(\alpha)$ потрібно визначати з умови, що праворуч нього під кривою стандартного нормального розподілу лежить α од. площі. Для цього, використовуючи табл. Д.2.1, $z_{\text{кр}}(\alpha)$ потрібно підібрати так, щоб

$$\Phi\big(z_{\text{кр}}(\alpha)\big) = 0{,}5 - \alpha. \tag{6.1}$$

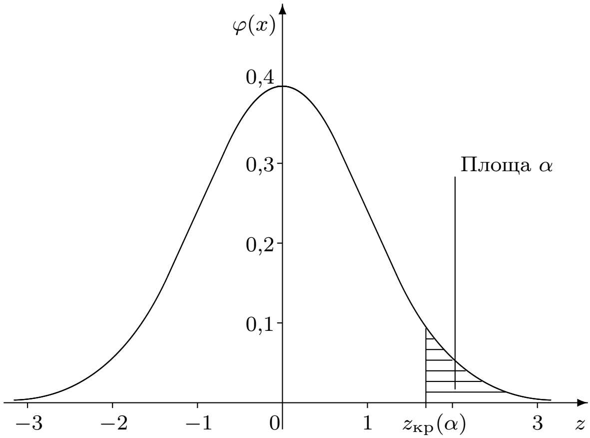


Рис. 6.2. **Однобічний z-тест**

Зауваження 6.2. Неважко перевірити, що у випадку однобічного тестування для рівнів значущості 10, 5, 1 та 0,1 % значення $z_{\text{кр}}(\alpha)$ приблизно дорівнюють відповідно 1,28, 1,64, 2,33 та 3,10.

Сформулюємо, нарешті, алгоритм процедури однобічного тестування, застосовний для випадку таких генеральних параметрів: генеральне середнє, генеральна пропорція, різниці генеральних середніх та пропорцій.

Алгоритм однобічного z-тесту

1. Формулюємо основну та альтернативну гіпотези у вигляді відповідно $\vartheta \leqslant a$ та $\vartheta > a$, де a — фіксоване значення [1].
2. Фіксуємо рівень значущості α.
3. Формуємо просту випадкову вибірку з генеральної сукупності.
4. Обчислюємо $\vartheta_{\text{в}}$, s.e.est. та

$$z_{\text{в}} = \frac{\vartheta_{\text{в}} - a}{\text{s.e.est.}}.$$

5. За формулою (6.1) або зауваженням 6.2 обчислюємо $z_{\text{кр}}(\alpha)$.

[1] Випадок гіпотез $\vartheta \geqslant a$ та $\vartheta < a$ розглядається подібно.

6. Якщо

$$z_{\text{в}} \leqslant z_{\text{кр}}(\alpha),$$

приймаємо основну гіпотезу, в інших випадках — альтернативну.

Приклад 6.1.7. Припустимо, минулого року рівень безробіття у країні становив 14 %. Виступаючи в парламенті зі звітом про діяльність уряду, прем'єр-міністр заявив, що нині ситуація покращилась, тобто рівень безробіття знизився.

Нехай деяка незалежна соціологічна організація вирішила перевірити це твердження. Вона розглянула основну гіпотезу $P \leqslant 14\,\%$ і зафіксувала рівень значущості 5 %. Здійснивши опитування у випадковій вибірці обсягом 2000 осіб, вона отримала рівень безробіття у вибірці $p = 15{,}2\,\% > 14\,\%$. Перевіримо, чи достатньо цих даних, щоб спростувати твердження прем'єра.

Насамперед зауважимо, що обмеження (5.9) виконуються і тому можна застосувати алгоритм однобічного тесту:

$$\text{s.e.est.} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}152 \cdot (1 - 0{,}152)}{2000}} \approx 0{,}0080;$$

$$z_{\text{в}} = \frac{15{,}2\,\% - 14\,\%}{0{,}80\,\%} = \frac{1{,}2\,\%}{0{,}80\,\%} = 1{,}5.$$

Оскільки за зауваженням 6.2 рівню значущості 5 % відповідає критичне значення $z_{\text{кр}}(\alpha) = 1{,}64$, то $z_{\text{в}} \leqslant z_{\text{кр}}(\alpha)$ і на рівні значущості 5 % немає жодних підстав спростувати інформацію прем'єра[1].

Приклад 6.1.8. За тиждень до виборів у Верховну Раду України 2006 р. Київський міжнародний інститут соціології здійснив опитування вибірки обсягом 2044 виборців. В анкеті, зокрема, були питання: "Чи плануєте Ви взяти участь у виборах?" та "За кого Ви б проголосували, якби вибори відбувались сьогодні?" На перше запитання позитивно відповіли 73 % (близько 1500) опитаних. Тому

[1] На рівні значущості 10 % це можна зробити, але такий результат має надто велику помилку I роду. Тому якщо підозрювати необґрунтованість заяви прем'єра, потрібно виконувати масштабніше за обсягом вибірки дослідження.

припустимо, що обсяг вибірки $n = 1500$, усі опитані проголосують за деяку партію і вибірка є простою випадковою[1].

Нагадаємо, що для проходження до Верховної Ради України партія повинна була подолати $3\,\%$-й рівень. Оцінимо ймовірність α помилки I роду при однобічному тестуванні гіпотези виду $P \leqslant 3\,\%$. Фактично α — це ймовірність помилитися, кажучи, що партія пройде до парламенту. Якщо p — вибіркова пропорція прихильників партії, то

$$\text{s.e.est.} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},$$

$$z_{\text{в}} = \frac{p - 3\,\%}{\text{s.e.est.}},$$

$$\alpha = \begin{cases} 0{,}5 - \Phi(z_{\text{в}}) & \text{при } z_{\text{в}} \geqslant 0, \\ 0{,}5 + \Phi(-z_{\text{в}}) & \text{при } z_{\text{в}} < 0, \end{cases}$$

де Φ — функція Лапласа.

Наведемо відсотки популярності партій-лідерів серед виборців, які планували проголосувати, і обчислимо ймовірність α.

Партія	p, %	s.e.est., %	$z_{\text{в}}$	α
Партія регіонів	36,6	1,24	27,01	0,000
Блок Юлії Тимошенко	19,1	1,01	15,86	0,000
Блок “Наша Україна”	18,5	1,00	15,46	0,000
Соціалістична партія України	5,3	0,58	3,98	0,000
Комуністична партія України	3,7	0,49	1,44	0,075
Блок Литвина	3,0	0,44	0,00	0,500
Блок ПОРА–ПРП	2,4	0,40	−1,52	0,936
Блок Наталії Вітренко	1,4	0,30	−5,27	1,000

Отже, дослідник, кажучи, що КПУ, блок Литвина, блок ПОРА–ПРП, блок Наталії Вітренко пройдуть до парламенту, помиляється з імовірністю відповідно 7,5, 50,0, 93,6, 100,0 %. Зауважимо, що отримані значення не можна інтерпретувати як імовірність непроходження до парламенту. Можна лише казати про статистичну значущість

[1]Насправді вибірка була багаторівнева кластерна, тому в аналізі слід було б врахувати дизайн-ефект.

проходження до парламенту Партії регіонів, "Нашої України", БЮТ та СПУ. Щодо інших партій вибірка не дає підстав казати про подолання ними тривідсоткового бар'єру.

26 березня, в день виборів, Фонд "Демократичні ініціативи", Київський міжнародний інститут соціології, Український центр економічних і політичних досліджень ім. О. Разумкова провели екзит-пол'2006 — опитування виборців на виході з виборчих дільниць. 16444 опитаних повідомили результати власного голосування.

Оцінимо за даними екзит-полу ймовірність α помилки I роду при однобічному тестуванні гіпотези $P \leqslant 3\,\%$[1].

Партія	p, %	s.e.est., %	$z_{\text{в}}$	α
Партія регіонів	31,0	0,36	77,63	0,000
Блок Юлії Тимошенко	23,9	0,33	62,84	0,000
Блок "Наша Україна"	15,5	0,28	44,29	0,000
Соціалістична партія України	5,4	0,18	13,62	0,000
Комуністична партія України	3,3	0,14	2,15	0,016
Блок Наталії Вітренко	2,9	0,13	−0,76	0,778
Блок Литвина	2,7	0,13	−2,37	0,991
Партія "Віче"	2,1	0,11	−8,05	1,000
Блок Костенка і Плюща	1,8	0,10	−11,57	1,000
Блок ПОРА–ПРП	1,5	0,09	−15,82	1,000
Опозиційний блок "НЕ ТАК"	1,2	0,08	−21,20	1,000

Результати цього дослідження стверджують, що статистично значущим є проходження до парламенту п'яти партій: Партії регіонів, БЮТ, "Нашої України", СПУ та КПУ. Що ж до наступного за рейтингом блоку Наталії Вітренко, то, кажучи про подолання ним тривідсоткового рівня, помиляємося з імовірністю майже 78 %[2].

Насамкінець нагадаємо, що за офіційними даними Центральної виборчої комісії лише Партія регіонів, БЮТ, "Наша Україна", СПУ і КПУ пройшли до парламенту.

[1] Дані опитувань взято із офіційного сайту КМІС www.kiis.com.ua.

[2] У цьому дослідженні не враховано дизайн-ефект, але навіть у такому разі висновки не змінилися б.

6.1.3. Перевірка гіпотез про генеральну дисперсію

На завершення розглянемо ще дві задачі тестування генеральних параметрів. Перша задача стосується порівняння генеральної дисперсії з фіксованим значенням, друга — порівняння дисперсій двох незалежних генеральних сукупностей. Класичні методи розв'язування цих задач застосовні лише у випадку нормально розподілених сукупностей.

Отже, нехай маємо нормально розподілену генеральну сукупність і необхідно порівняти генеральну дисперсію σ^2 із заданим числом a.

Припустимо, з генеральної сукупності формуються всі прості випадкові вибірки обсягом n. Виявляється, що величина

$$(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2}$$

поводиться як χ^2 розподіл з $(n-1)$ ступенями вільності [1]. Тому, аналізуючи значення виразу

$$(n-1)\frac{s^2}{a^2},$$

можна протестувати генеральну дисперсію стосовно значення a. Як і в розглянутих вже задачах, такий тест може бути двобічний і однобічний. Наведемо процедури відповідних статистичних критеріїв.

Алгоритм двобічного χ^2-тесту генеральної дисперсії

1. Формулюємо основну та альтернативну гіпотези у вигляді відповідно $\sigma^2 = a$ та $\sigma^2 \neq a$, де a — фіксоване значення.

2. Фіксуємо рівень значущості α. (У табл. Д.2.17 критичні значення розподілу Пірсона наведені лише для рівнів значущості 0,5, 1, 2,5, 5 та 10 %.)

3. Формуємо просту випадкову вибірку обсягом n з генеральної сукупності.

[1] χ^2-розподіл Пірсона розглядався в п. 4.5.2.

4. Обчислюємо s^2 та

$$\chi^2_{\text{в}} = (n-1)\frac{s^2}{a^2}.$$

5. За табл. Д.2.17 (при $n > 100$ можна скористатись формулою (4.4)) обчислюємо ліве та праве критичні значення

$$\chi^2_{\text{л.кр}} = \chi^2(1-\alpha/2, n-1);$$
$$\chi^2_{\text{п.кр}} = \chi^2(\alpha/2, n-1).$$

6. Якщо

$$\chi^2_{\text{в}} \in \left(\chi^2_{\text{л.кр}}; \chi^2_{\text{п.кр}}\right),$$

приймаємо основну гіпотезу, у противному разі — альтернативну.

Приклад 6.1.9. Припустимо, 20 років тому у процесі детального дослідження в деякому регіоні зросту призовників у віці 18–28 років було отримано генеральне стандартне відхилення, що становило 12,3 см. Нехай дослідник хоче проаналізувати, як змінились основні параметри зросту за цей час. При цьому він не має фінансових можливостей виконати повне дослідження.

Як правило, зріст конкретної категорії населення розподілений за близьким до нормального закону розподілом. Відомо також, що внаслідок акселерації середній зріст збільшується. При цьому природно припустити, що стандартне відхилення суттєво не зміниться.

Нехай дослідник припустив, що зріст призовників розподілений за нормальним законом і хоче перевірити, чи не змінилось генеральне стандартне відхилення. Іншими словами, він хоче протестувати нульову гіпотезу $\sigma^2 = 12{,}3^2 = 151{,}29$.

Нехай дослідник зафіксував рівень значущості $\alpha = 5\,\%$ і сформував просту випадкову вибірку обсягом $n = 81$ призовників поточного року. Припустимо, виправлена дисперсія у вибірці $s^2 = 179{,}56$. Тоді

$$\chi^2_{\text{в}} = (n-1)\frac{s^2}{a^2} = (81-1)\cdot\frac{179{,}56}{151{,}29} \approx 94{,}95.$$

З табл. Д.2.17 визначаємо

$$\chi^2_{\text{л.кр}} = \chi^2(0{,}975, 80) \approx 57{,}15;$$
$$\chi^2_{\text{п.кр}} = \chi^2(0{,}025, 80) \approx 106{,}63.$$

Отже, $\chi^2_{\text{в}}$ потрапляє до інтервалу між лівим і правим критичними значеннями і тому дослідник має прийняти основну гіпотезу.

Алгоритм однобічного χ^2-тесту генеральної дисперсії

1. Формулюємо основну гіпотезу $\sigma^2 \leqslant a$ (або $\sigma^2 \geqslant a$) та альтернативну $\sigma^2 > a$ (відповідно $\sigma^2 < a$), де a — фіксоване значення.

2. Фіксуємо рівень значущості α. (У табл. Д.2.17 критичні значення розподілу Пірсона наведені лише для рівнів значущості 0,5, 1, 2,5, 5 та 10 %.)

3. Формуємо просту випадкову вибірку обсягом n з генеральної сукупності.

4. Обчислюємо s^2 та

$$\chi^2_{\text{в}} = (n-1)\frac{s^2}{a^2}$$

5. За табл. Д.2.17 (при $n > 100$ можна використати формулу (4.4)) знаходимо критичне значення критерію $\chi^2_{\text{кр}} = \chi^2(\alpha, n-1)$ (відповідно $\chi^2_{\text{кр}} = \chi^2(1-\alpha, n-1)$).

6. Якщо $\chi^2_{\text{в}} \leqslant \chi^2_{\text{кр}}$ (відповідно $\chi^2_{\text{в}} \geqslant \chi^2_{\text{кр}}$), приймаємо основну гіпотезу, у противному разі — альтернативну.

Приклад 6.1.10. Повернімося знову до прикладу 6.1.9. Припустимо, що інший дослідник, ознайомившись з результатами цього дослідження, не задовольнився висновком. Він міркував, що оскільки виправлене стандартне відхилення у вибірці $\sqrt{179{,}56} = 13{,}4$ значно перевищує значення 12,3, то спростувати основну гіпотезу не вдалося лише тому, що вибірка була надто малою.

Мало того, дослідник вирішив перевірити основну гіпотезу

$$\sigma^2 \leqslant 12{,}3^2 = 151{,}29.$$

Він зафіксував той же рівень значущості $\alpha = 5\,\%$ і сформував вибірку обсягом $n = 330$ призовників. Виправлене стандартне відхилення у вибірці дорівнювало $s = 13{,}2$ і було навіть менше, ніж у дослідженні його колеги.

Проте перевіримо, чи достатньо цих даних, щоб спростувати основну гіпотезу. Обчислюємо

$$\chi^2_{\text{в}} = (n-1)\frac{s^2}{a^2} = (330-1)\cdot\frac{13{,}2^2}{151{,}29} \approx 378{,}91.$$

На жаль, не можна скористатися таблицею критичних значень розподілу Пірсона через відсутність даних для $n = 330$. Тому звернімось до формули (4.4). Згідно з нею

$$\sqrt{2\chi^2(329)} - \sqrt{2\cdot 329 - 1}$$

поводиться як стандартний нормальний розподіл.

Використовуючи останню формулу, потрібно знайти критичне значення $\chi^2_{\text{кр}}$ однобічного тесту. Якщо $\chi^2_{\text{в}}$ виявиться меншим від нього, потрібно приймати основну гіпотезу, у противному разі — альтернативну. Тому значення $\chi^2_{\text{кр}}$ потрібно вибрати так, щоб ймовірність потрапляння $\chi^2(329)$ до інтервалу $(0, \chi^2_{\text{кр}})$ дорівнювала 0,95 %.

Для цього обчислимо насамперед

$$\sqrt{2\cdot 329 - 1} = \sqrt{657} \approx 25{,}63.$$

Далі знайдемо таке число b, що ймовірність потрапляння до інтервалу $(-25{,}63; b)$ випадкового значення, розподіленого за стандартним нормальним законом, дорівнює 95 %. Для цього за табл. Д.2.1 значень функції Лапласа обчислимо спочатку

$$\Phi(25{,}63) \approx 0{,}5.$$

Тому для знаходження b можна використати рівність

$$\Phi(b) = 0{,}95 - 0{,}5 = 0{,}45.$$

За таблицею значень функції Лапласа маємо

$$b = 1{,}64.$$

Тепер за формулою (4.4) випливає, що випадкова величина $\sqrt{2\chi^2(329)}$ потрапляє до інтервалу

$$(0; 1{,}64 + 25{,}63) = (0; 27{,}27)$$

з ймовірністю 95 %.

Остаточно шукане значення

$$\chi^2_{\text{кр}} = \frac{27{,}27^2}{2} \approx \frac{743{,}65}{2} \approx 371{,}83.$$

Отже,

$$\chi^2_{\text{в}} \approx 378{,}91 > 371{,}83 \approx \chi^2_{\text{кр}}.$$

Тому слід відхилити основну гіпотезу на рівні значущості 5 %, тобто на цьому рівні значущості можна стверджувати, що генеральне стандартне відхилення збільшилось.

Розглянемо тепер задачу порівняння стандартних відхилень двох незалежних нормально розподілених генеральних сукупностей.

Отже, нехай вивчаються дві незалежні нормально розподілені генеральні сукупності зі стандартними відхиленнями відповідно σ_X та σ_Y. Припустимо, з цих сукупностей взято прості випадкові вибірки обсягами відповідно n та m. Нехай s_X і s_Y — відповідні вибіркові виправлені стандартні відхилення. Як відомо з п. 4.5.3, величина

$$\frac{s^2_X/\sigma^2_X}{s^2_Y/\sigma^2_Y}$$

слідує розподілу $F_{m-1,n-1}$ Фішера—Снедекора з $m-1$ ступенями вільності в чисельнику та з $n-1$ ступенями вільності у знаменнику. Припустимо, що генеральні дисперсії σ^2_X та σ^2_Y рівні. Тоді, очевидно, величина

$$\frac{s^2_X}{s^2_Y}$$

так само слідує розподілу $F_{m-1,n-1}$. Тому при вивченні цієї величини можна перевіряти гіпотезу рівності генеральних дисперсій (а отже, генеральних стандартних відхилень). Відповідні процедури наведемо у вигляді алгоритмів.

Алгоритм двобічного F-тесту перевірки рівності генеральних дисперсій

1. Формулюємо основну та альтернативну гіпотези у вигляді відповідно $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ та $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$.

2. Фіксуємо рівень значущості α. (У табл. Д.2.22 критичні значення розподілу Фішера—Снедекора наведені лише для рівнів значущості 2 та 10 %.)

3. Формуємо прості випадкові вибірки з генеральних сукупностей обсягами відповідно m та n.

4. Обчислюємо s_X^2, s_Y^2 та

$$F_{\text{в}} = \frac{s_X^2}{s_Y^2}$$

5. За табл. Д.2.22 обчислюємо критичне значення:

$$F_{\text{кр}} = F_{\alpha/2,m-1,n-1}.$$

6. Якщо

$$F_{\text{в}} < F_{\text{кр}}, \quad F_{\text{в}} > \frac{1}{F_{\text{кр}}},$$

приймаємо основну гіпотезу, у противному разі — альтернативну.

Приклад 6.1.11. Характеристикою поляризації суспільства за матеріальним рівнем може бути стандартне відхилення рівня доходів. Припустимо, потрібно перевірити, чи різняться за цим показником два регіони країни. Тоді слід перевірити основну гіпотезу $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ при альтернативній $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$. Зафіксуємо рівень значущості $\alpha = 10\,\%$.

Нехай взято дві репрезентативні вибірки в цих регіонах обсягом відповідно 101 і 96 осіб. Припустимо, виправлені стандартні відхилення у вибірках дорівнювали $s_X = 41$ і $s_Y = 35$ ум. од. Тоді

$$F_{\text{в}} = \frac{s_X^2}{s_Y^2} = \frac{41^2}{35^2} \approx 1{,}37.$$

Скориставшись табл. Д.2.22, знайдемо критичне значення двобічного тесту:

$$F_{\text{кр}} = F_{\alpha/2,m-1,n-1} = F_{5\,\%,100,95} = 1{,}40.$$

Оскільки емпіричне значення тесту менше від критичного, слід прийняти основну гіпотезу. Отже, незважаючи на різницю у вибіркових виправлених стандартних відхиленнях, навіть на рівні значущості 10 % не можна стверджувати, що генеральні сукупності різняться за стандартним відхиленням. Для отримання такого результату потрібно було б здійснити масштабніше дослідження.

Алгоритм однобічного F-тесту перевірки рівності генеральних дисперсій

1. Формулюємо основну та альтернативну гіпотези у вигляді відповідно $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ та $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$.

2. Фіксуємо рівень значущості α. (У табл. Д.2.22 критичні значення розподілу Фішера—Снедекора наведені лише для рівнів значущості 1 та 5 %.)

3. Формуємо прості випадкові вибірки з генеральних сукупностей обсягами відповідно m та n.

4. Обчислюємо s_X^2, s_Y^2 та

$$F_{\text{в}} = \frac{s_X^2}{s_Y^2}.$$

5. За табл. Д.2.22 обчислюємо критичне значення:

$$F_{\text{кр}} = F_{\alpha,m-1,n-1}.$$

6. Якщо

$$F_{\text{в}} < F_{\text{кр}},$$

приймаємо основну гіпотезу, у противному разі — альтернативну.

Приклад 6.1.12. Припустимо, у прикладі 6.1.11, отримано такі самі значення виправлених стандартних відхилень $\sigma_x = 41$ та $\sigma_Y = 35$, але за вибірками більших обсягів $m = 201$ і $n = 301$. Нехай потрібно перевірити, чи більше стандартне відхилення в першому регіоні, ніж у другому, на рівні значущості $\alpha = 1\,\%$.

Тоді вибіркове значення тесту буде таке саме:

$$F_{\text{в}} \approx 1{,}37,$$

а критичне значення за табл. Д.2.22

$$F_{\text{кр}} = F_{\alpha,m-1,n-1} = F_{1\,\%,200,300} = 1{,}35.$$

Отже,

$$F_{\text{в}} > F_{\text{кр}},$$

і тому слід прийняти альтернативну гіпотезу.

Іншими словами, такі самі емпіричні дані, як і в попередньому прикладі, але отримані за вибірками значно більшого обсягу, дають змогу отримати змістовніший результат.

6.2. Порівняння ознак

Часто перед дослідником постає завдання виявити відмінності між двома, трьома і більшою кількістю вибірок. Наприклад, визначити психологічні особливості хронічно хворих дітей порівняно зі здоровими, відмінності між працівниками державних підприємств і приватних фірм, між людьми різних національностей або різних культур.

Останнім часом необхідно виявляти психологічний портрет спеціаліста нових професій: “успішного менеджера”, “успішного політика”, “успішного торговельного представника”, “успішного комерційного директора” та ін. У таких дослідженнях не завжди беруть участь дві й більше вибірок. Іноді досліджується одна, але доволі репрезентативна вибірка щонайменше з 60 осіб, а потім всередині цієї вибірки виокремлюються групи більш-менш успішних спеціалістів і порівнюються їх досліджувані ознаки.

6.2.1. Алгоритм прийняття рішення про вибір критерію для порівняння ознак

Перш ніж перейти до викладу конкретних статистичних критеріїв порівняння ознак, розглянемо алгоритм (рис. 6.3), за допомогою якого можна буде вибирати критерій.

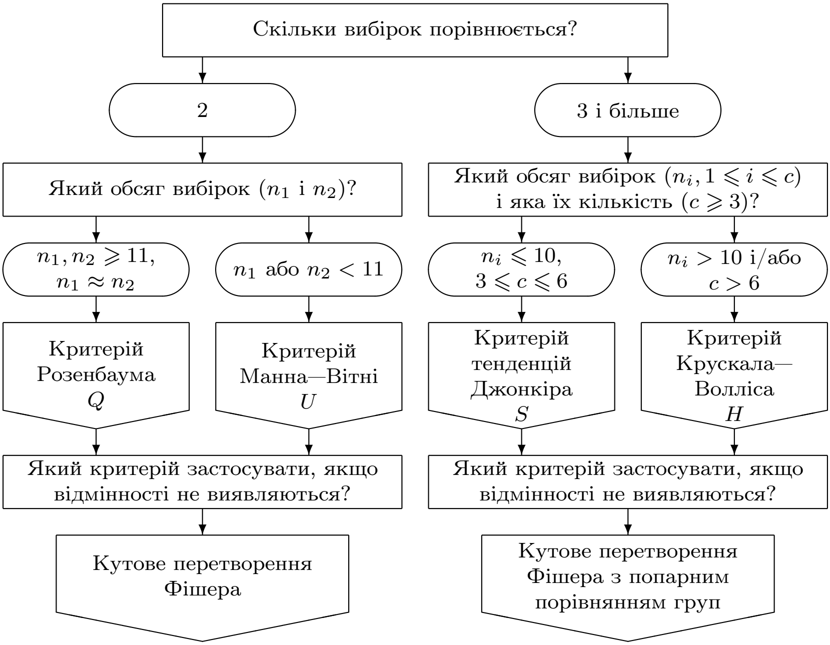


Рис. 6.3. **Алгоритм прийняття рішення про вибір критерію для порівняння ознак**

6.2.2. Q-критерій Розенбаума

Непараметричний критерій Q використовують для оцінки відмінностей між двома вибірками за рівнем якоїсь ознаки.

Обмеження критерію Q

Перед застосуванням критерію Розенбаума потрібно перевірити такі умови-обмеження.

1. У кожній вибірці повинно бути щонайменше 11 спостережень. При цьому обсяги вибірок повинні приблизно збігатися. Є. В. Гублер зазначає такі правила:

- якщо в обох вибірках менше 50 спостережень, абсолютна різниця між ними не повинна перевищувати 10 спостережень;
- якщо в кожній вибірці понад 51 спостереження, але менше 100, абсолютна різниця між ними не повинна перевищувати 20 спостережень;
- якщо в кожній вибірці понад 100 спостережень, допускається перевищення обсягу однієї з них щонайбільше у 1,5–2 рази.

2. Найбільше і найменше значення сукупності двох вибірок повинні належати різним вибіркам.

3. Дані повинні бути подані принаймні в порядковій шкалі.

Якщо цей критерій не виявляє достовірних відмінностей, то це ще не означає, що їх насправді немає. У цьому разі слід застосувати критерій $\varphi^\star$ Фішера (див. п. 6.4.3). Якщо Q-критерій виявляє достовірні відмінності між вибірками на рівні значущості $\alpha \leqslant 0{,}01$, то можна обмежитися лише ним і уникнути утруднень застосування інших критеріїв.

Алгоритм розрахунку критерію Q

Розрахунок критерію Q Розенбаума подамо у вигляді алгоритму.

1. Перевірити, чи виконуються умови застосування критерію Q.

2. Упорядкувати значення за зростанням окремо в кожній вибірці. Вибіркою 1 слід вважати таку, значення в якій припускаються вищими, іншу вибірку — вибіркою 2.

3. Сформулювати основну і альтернативну гіпотези:

H_0: рівень ознаки у вибірці 1 не перевищує рівень ознаки у вибірці 2;

H_1: рівень ознаки у вибірці 1 перевищує рівень ознаки у вибірці 2.

4. Визначити найбільше значення у вибірці 2.

5. Розрахувати кількість значень у вибірці 1, що перевищують максимальне значення у вибірці 2. Позначити отриману величину S_1.

6. Визначити найменше значення у вибірці 1.

7. Розрахувати кількість значень у вибірці 2, які менші від мінімального значення у вибірці 2. Позначити отриману величину S_2.

8. Обчислити емпіричне значення Q за формулою

$$Q_{\text{емп}} = S_1 + S_2.$$

9. За табл. Д.2.6 визначити критичні значення $Q_{0,01}$ і $Q_{0,05}$ для заданих n_1 і n_2. При $n_1, n_2 > 26$ вважати

$$Q_{0,01} = 10; \qquad Q_{0,05} = 8.$$

10. Якщо $Q_{\text{емп}} \geqslant Q_{0,01}$, гіпотезу H_0 потрібно відхилити, якщо $Q_{\text{емп}} < Q_{0,05}$ — прийняти. Якщо $Q_{0,05} \leqslant Q_{\text{емп}} < Q_{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,05 (або 5 %), і в цьому разі бажано перевірити основну гіпотезу за допомогою іншого критерію (наприклад, $\varphi^\star$ — кутове перетворення Фішера, див. п. 6.4.3).

Приклад 6.2.1. У ймовірних учасників психологічного експерименту, який моделює діяльність повітряного диспетчера, було виміряно рівень вербального та невербального інтелекту за методикою Д. Векслера. Було досліджено 26 юнаків віком 18–24 років (середній вік — 20,5 року). З них 14 — студенти фізичного факультету, а 12 — психологічного факультету Ленінградського університету [1]. Показники вербального інтелекту подані в табл. 1.

Таблиця 1

Індивідуальні значення вербального інтелекту у вибірках студентів фізичного та психологічного факультетів

Студенти-фізики			Студенти-психологи		
№ пор.	Код імені спостережуваного	Показник вербального інтелекту	№ пор.	Код імені спостережуваного	Показник вербального інтелекту
1	2	3	4	5	6
1	І. А.	132	1	Н. Т.	126
2	К. А.	134	2	О. В.	127
3	К. Є.	124	3	Є. В.	132
4	П. А.	132	4	Ф. О.	120
5	С. А.	135	5	І. Н.	119
6	Ст. А.	132	6	І. Ч.	126
7	Т. А.	131	7	І. В.	120
8	Ф. А.	132	8	К. О.	123
9	Ч. І.	121	9	Р. Р.	120

[1] Цей приклад запозичено з [17].

Закінчення табл. 1

1	2	3	4	5	6
10	Ц. А.	127	10	Р. І.	116
11	См. А.	136	11	О. К.	123
12	К. Ан.	129	12	Н. К.	115
13	Б. Л.	136			
14	Ф. В.	136			

Чи можна стверджувати, що одна з груп переважає іншу за рівнем вербального інтелекту?

Насамперед бачимо, що умови застосування критерію Q виконуються: у кожній вибірці щонайменше 11 спостережень (14 і 12); їх обсяги приблизно рівні; найбільше значення 136 належить першій вибірці, найменше 115 — другій; дані подані в порядковій шкалі.

Упорядкуємо значення за зростанням окремо в кожній вибірці (табл. 2). Вибіркою 1 вважатимемо ряд фізиків (їх значення припускаються вищі), вибіркою 2 — ряд психологів.

Таблиця 2

Упорядковані ряди індивідуальних значень у двох студентських вибірках

Вибірка 1 — студенти-фізики			Вибірка 2 — студенти-психологи		
№ пор.	Код імені спостережуваного	Показник вербального інтелекту	№ пор.	Код імені спостережуваного	Показник вербального інтелекту
1	2	3	4	5	6
			1	Н. К.	115
			2	Р. І.	116
			3	І. Н.	119
			4	Р. Р.	120
			5	І. В.	120
			6	Ф. О.	120
1	Ч. І.	121			
			7	О. К.	123
			8	К. О.	123
2	К. Є.	124			
			9	І. Ч.	126

Закінчення табл. 2

1	2	3	4	5	6
			10	Н. Т.	126
3	Ц. А.	127	11	О. В.	127
4	К. Ан.	129			
5	Т. А.	131			
6	Ф. А.	132			
7	Ст. А.	132			
8	П. А.	132			
9	І. А.	132	12	Є. В.	132
10	К. А.	134			
11	С. А.	135			
12	Ф. В.	136			
13	Б. Л.	136			
14	См. А.	136			

Сформулюємо гіпотези.

H_0: студенти-фізики не переважають студентів-психологів за рівнем вербального інтелекту;

H_1: студенти-фізики переважають студентів-психологів за рівнем вербального інтелекту.

За даними табл. 2 визначаємо найбільше значення у вибірці 2 — воно дорівнює 132 — і розраховуємо кількість студентів-фізиків з рівнем вербального інтелекту понад 132:

$$S_1 = 5.$$

Аналогічно визначаємо кількість студентів-психологів з рівнем вербального інтелекту, нижчим від найменшого значення 121 вибірки 1:

$$S_2 = 6.$$

Обчислюємо емпіричне значення критерію Розенбаума:

$$Q_{\text{емп}} = S_1 + S_2 = 5 + 6 = 11.$$

За табл. Д.2.6 визначаємо критичні значення Q для $n_1 = 14$; $n_2 = 12$:

$$Q_{0,01} = 9, \qquad Q_{0,05} = 7.$$

Оскільки $Q_{\text{емп}} \geqslant Q_{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється, тобто студенти-фізики переважають студентів-психологів за рівнем вербального інтелекту.

6.2.3. *U*-критерій Манна—Вітні

Непараметричний критерій U використовують для оцінки відмінностей між двома *малими* вибірками за рівнем якоїсь ознаки.

Обмеження критерію *U*

Перед застосуванням критерію Манна—Вітні потрібно перевірити такі умови-обмеження.

1. У кожній вибірці повинно бути щонайменше три спостереження; якщо в одній вибірці було два спостереження, то у другій їх повинно бути щонайменше п'ять.

2. У кожній вибірці має бути не більше 60 спостережень[1], однак уже при 20 і більше спостереженнях ранжування доволі трудомістке.

3. Дані повинні бути подані принаймні в порядковій шкалі.

Алгоритм розрахунку критерію *U*

Розрахунок критерію U Манна—Вітні зручно подати у вигляді алгоритму.

1. Перевірити, чи виконуються умови застосування критерію U.

2. Перенести дані першої вибірки на картки одного кольору (наприклад, червоного), другої — на картки другого кольору (наприклад, синього).

3. Розкласти всі картки в один ряд у порядку зростання незважаючи на колір картки.

4. Проранжувати[2] значення на картках. Ранги занести на відповідні картки.

5. Розкласти картки на дві групи, орієнтуючись за їх кольором (червоні в один ряд, сині — у другий).

---

[1] Це обмеження спричинене обсягами наявної таблиці критичних значень. У спеціальних пакетах статистичного аналізу його немає.

[2] Нагадаємо, що алгоритм ранжування описано в п. 1.3.5.

6. Розрахувати суму рангів окремо на картках двох груп.

7. Визначити більшу з двох рангових сум. Вибірку з більшою ранговою сумою вважати вибіркою 1, з меншою — вибіркою 2.

8. Сформулювати основну і альтернативну гіпотези.

H_0: рівень ознаки у вибірці 2 не нижчий від рівня ознаки у вибірці 1;

H_1: рівень ознаки у вибірці 2 нижчий від рівня ознаки у вибірці 1.

9. Обчислити емпіричне значення U за формулою

$$U_{\text{емп}} = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - S_1,$$

де n_1, n_2 — обсяг вибірки відповідно 1 і 2; S_1 — сума рангів вибірки 1.

10. За табл. Д.2.7 визначити критичні значення $U_{0,01}$ і $U_{0,05}$ для заданих n_1 і n_2.

11. Якщо $U_{\text{емп}} \leqslant U_{0,01}$, гіпотезу H_0 потрібно відхилити, якщо $U_{\text{емп}} > U_{0,05}$ — прийняти. Якщо $U_{0,01} < U_{\text{емп}} \leqslant U_{0,05}$, гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,05 (або 5 %)[1].

Приклад 6.2.2. Повернімося до результатів дослідження студентів фізичного та психологічного факультетів Ленінградського університету за методикою Д. Векслера для вимірювання вербального та невербального інтелекту (див. приклад 6.2.1). За допомогою критерію Q Розенбаума було визначено, що рівень вербального інтелекту студентів-фізиків вищий. Спробуємо дослідити, чи буде такий же результат при порівнянні вибірок за рівнем невербального інтелекту. Показники невербального інтелекту подані в табл. 1.

Таблиця 1

Індивідуальні значення невербального інтелекту у вибірках студентів фізичного та психологічного факультетів

Студенти-фізики			Студенти-психологи		
№ пор.	Код імені спостережуваного	Показник невербального інтелекту	№ пор.	Код імені спостережуваного	Показник невербального інтелекту
1	2	3	4	5	6
1	І. А.	111	1	Н. Т.	113

[1] На практиці в більшості випадків такий рівень значущості для U-критерію Манна—Вітні вважається неприйнятним.

Закінчення табл. 1

1	2	3	4	5	6
2	К. А.	104	2	О. В.	107
3	К. Є.	107	3	Є. В.	123
4	П. А.	90	4	Ф. О.	122
5	С. А.	115	5	І. Н.	117
6	Ст. А.	107	6	І. Ч.	112
7	Т. А.	106	7	І. В.	105
8	Ф. А.	107	8	К. О.	108
9	Ч. І.	95	9	Р. Р.	111
10	Ц. А.	116	10	Р. І.	114
11	См. А.	127	11	О. К.	102
12	К. Ан.	115	12	Н. К.	104
13	Б. Л.	102			
14	Ф. В.	99			

Чи можна стверджувати, що одна з груп переважає іншу за рівнем невербального інтелекту?

Насамперед бачимо, що умови застосування критерію U виконуються. Справді, у кожній вибірці не менше трьох і не більше 60 спостережень (14 і 12); дані подані в порядковій шкалі.

Упорядкуємо значення двох вибірок за зростанням і проранжуємо їх. Результати ранжування подано в табл. 2.

Таблиця 2

Розрахунок рангових сум у двох студентських вибірках

Студенти-фізики		Студенти-психологи	
Показник невербального інтелекту	Ранг	Показник невербального інтелекту	Ранг
1	2	3	4
90	1		
95	2		
99	3		
102	4,5	102	4,5
104	6,5	104	6,5
		105	8
106	9		

Закінчення табл. 2

1	2	3	4
107	11,5		
107	11,5		
107	11,5	107	11,5
		108	14
111	15,5	111	15,5
		112	17
		113	18
		114	19
115	20,5		
115	20,5		
116	22		
		117	23
		122	24
		123	25
127	26		
Сума рангів	165,0	Сума рангів	186,0

Загальна сума рангів $165 + 186 = 351$. Розрахункова сума

$$S_{\text{розр}} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{26 \cdot (26+1)}{2} = 351.$$

Отже, рівність реальної та розрахункової сум рангів справджується.

Вибіркою 1 вважатимемо ряд психологів (значення рангової суми студентів-психологів 186 більше), вибіркою 2 — ряд фізиків.

Сформулюємо гіпотези.

H_0: студенти-фізики не поступаються студентам-психологам за рівнем невербального інтелекту;

H_1: студенти-фізики поступаються студентам-психологам за рівнем невербального інтелекту.

Згідно з наступним кроком алгоритму визначаємо емпіричне значення критерію U:

$$U_{\text{емп}} = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - S_1 = 12 \cdot 14 + \frac{12 \cdot (12+1)}{2} - 186 = 60.$$

За табл. Д.2.7 визначаємо критичні значення U для $n_1 = 12$, $n_2 = 14$:

$$U_{0,01} = 38; \qquad U_{0,05} = 51.$$

Оскільки $U_{\text{емп}} > U_{0,05}$, гіпотеза H_0 приймається, тобто студенти-психологи не переважають студентів-фізиків за рівнем невербального інтелекту.

Зауважимо, що в цьому разі критерій Q Розенбаума незастосовний, оскільки не виконується умова-обмеження 2 — і найбільше, і найменше значення невербального інтелекту припадає на студентів-фізиків.

6.2.4. Порівняння рівня ознаки у двох сукупностях за різними критеріями

Було розглянуто три методи порівняння рівня ознаки у двох незалежних генеральних сукупностях, а саме критерії Розенбаума, Манна—Вітні та односторонній z-тест для різниці середніх. При цьому остання процедура доступна лише у випадку числових шкал.

Наведемо низку прикладів, які засвідчують, що користуватися цими методами потрібно обережно.

Приклад 6.2.3. Припустимо, деяка ознака вимірюється за дихотомічною порядковою шкалою, значеннями якої є “високий рівень” та “низький рівень” ознаки. Позначимо для зручності ці значення абревіатурами відповідно ВР та НР.

Нехай досліджуємо за рівнем цієї ознаки дві незалежні генеральні сукупності та маємо дві репрезентативні вибірки з них. Наведемо дані вимірювання ознаки в цих вибірках.

Значення ознаки	Кількість осіб у групі	
	1	2
ВР	10	1
НР	1	10

Як бачимо, критерій Розенбаума в цьому разі застосовний[1]. Спробуємо проаналізувати ситуацію за допомогою критерію Манна—Вітні. В об'єднаній сукупності значення НР зустрічається 11 разів і таку саму кількість значення ВР. Тому ранжуючи її, маємо

$$\text{Ранг НР} = \frac{1+11}{2} = 6,$$
$$\text{Ранг ВР} = \frac{12+22}{2} = 17.$$

Підсумовуючи ранги у групах, отримуємо

$$S_1 = 17 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 176,$$
$$S_2 = 17 \cdot 1 + 6 \cdot 10 = 77.$$

Перевіряємо контрольну рівність:

$$S_1 + S_2 = 176 + 77 = 253,$$
$$\frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}{2} = \frac{22 \cdot 23}{2} = 253.$$

Оскільки $S_1 > S_2$, то природно нульову гіпотезу сформулювати так: "рівень ознаки в першій генеральній сукупності не більший, ніж у другій". Альтернативна ж гіпотеза стверджуватиме, що рівень ознаки в першій генеральній сукупності більший, ніж у другій.

Обчислимо емпіричне значення критерію Манна—Вітні:

$$U_{\text{емп}} = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - S_1 =$$
$$= 11 \cdot 11 + \frac{11 \cdot 12}{2} - 176 = 11.$$

За табл. Д.2.7 критичних значень критерію Манна—Вітні критичне значення, яке відповідає рівню значущості 1 %, дорівнює 43 і

[1] Для дихотомічної шкали його практично неможливо застосувати. Для коректного використання критерію Розенбаума бажано мати якомога більше рівнів у шкалі.

перевищує емпіричне значення 11. А це означає, що потрібно прийняти альтернативну гіпотезу. Іншими словами, на рівні значущості 1 % можна стверджувати, що рівень ознаки в першій генеральній сукупності вищий.

Зауважимо ще раз, що критерій Розенбаума тут незастосовний.

Приклад 6.2.4. Підправимо дещо приклад 6.2.3. А саме припустимо, що шкала має три рівні: "низький" (НР), "високий" (ВР) та "дуже високий" (ДВР).

Нехай досліджуємо за рівнем цієї ознаки дві незалежні генеральні сукупності і знову маємо дві репрезентативні вибірки з них. Наведемо дані вимірювання ознаки в цих вибірках.

Значення ознаки	Кількість осіб у групі	
	1	2
ДВР	1	–
ВР	10	1
НР	1	10

Ці дані відрізняються від наведених у прикладі 6.2.3 лише одним значенням. Але тепер критерій Розенбаума застосовний. При цьому гіпотези будуть такі самі, як у прикладі 6.2.3.

Як бачимо, емпіричне значення критерію дорівнює одиниці. Звертаючись до табл. Д.2.6 критичних значень критерію Розенбаума, знаходимо, що рівень значущості, який відповідає цьому значенню, суттєво гірший за 5 % (тому що $1 < 6$). Отже, потрібно відхилити альтернативну гіпотезу про те, що рівень ознаки в першій групі вищий.

Водночас очевидно, що внесена в цьому прикладі зміна лише підсилить дію критерію Манна—Вітні. Він розрізнить групи і дасть змогу прийняти альтернативну гіпотезу на значно нижчому рівні значущості, ніж 1 %, тобто з високою надійністю висновку.

Отже, за цим прикладом доходимо висновку, що критерій Манна—Вітні краще визначає відмінності між групами, ніж критерій Розенбаума.

Приклад 6.2.5. Розглянемо випадок, протилежний наведеному у прикладі 6.2.4.

Припустимо, що тепер шкала має чотири рівні: “низький” (НР), “середній” (СР), “високий” (ВР) та “дуже високий” (ДВР).

Нехай за рівнем цієї ознаки досліджуємо дві незалежні генеральні сукупності й маємо дві репрезентативні вибірки з них. Наведемо дані вимірювання ознаки в цих вибірках.

Значення ознаки	Кількість осіб у групі	
	1	2
ДВР	4	–
ВР	–	7
СР	8	–
НР	–	5

За критерієм Розенбаума потрібно розглянути основну гіпотезу “рівень ознаки в першій генеральній сукупності не більший, ніж у другій” та альтернативну “рівень ознаки в першій генеральній сукупності більший, ніж у другій”. При цьому емпіричне значення критерію Розенбаума дорівнює $4 + 5 = 9$. За табл. Д.2.6 бачимо, що 9 відповідає рівню значущості $1\,\%$. Отже, потрібно прийняти альтернативну гіпотезу, тобто критерій Розенбаума в цьому разі виявляє відмінності між групами.

Проаналізуємо тепер цей приклад за допомогою критерію Манна—Вітні. Ранжуючи об’єднану з двох груп сукупність, отримуємо такі ранги для рівнів ознаки: НР — 3; СР — 9,5; ВР — 17; ДВР — 22,5.

Підсумовуючи ранги у групах, отримуємо

$$S_1 = 22{,}5 \cdot 4 + 9{,}5 \cdot 8 = 166,$$
$$S_2 = 17 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 134.$$

Перевіряємо контрольну рівність:

$$S_1 + S_2 = 166 + 134 = 300;$$
$$\frac{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1)}{2} = \frac{24 \cdot 25}{2} = 300.$$

Оскільки $S_1 > S_2$, то основна і альтернативна гіпотези будуть такими самими, як і в разі застосування критерію Розенбаума.

Обчислимо емпіричне значення критерію Манна—Вітні:

$$U_{\text{емп}} = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - S_1 = \\ = 12 \cdot 12 + \frac{12 \cdot 13}{2} - 166 = 56.$$

Звертаючись до табл. Д.2.7 критичних значень критерію Манна—Вітні, бачимо, що емпіричне значення 56 перевищує критичне значення 42, яке відповідає рівню значущості 5 %. А це означає, що слід відхилити альтернативну гіпотезу.

Отже, у цьому разі критерій Розенбаума виявився сильнішим від критерію Манна—Вітні й виявив відмінності між групами.

Приклад 6.2.6. Як випливає з прикладів 6.2.4 і 6.2.5, в одних ситуаціях краще працює критерій Манна—Вітні, в інших — критерій Розенбаума. Розглянемо ситуацію, коли отримані за допомогою цих критеріїв висновки прямо протилежні.

Нехай шкала має три рівні: “низький” (НР), “середній” (СР) та “високий” (ВР).

Нехай за рівнем цієї ознаки досліджуємо дві незалежні генеральні сукупності й маємо дві репрезентативні вибірки з них. Наведемо дані вимірювання ознаки в цих вибірках.

Значення ознаки	Кількість осіб у групі	
	1	2
ВР	1	40
СР	49	–
НР	–	11

Очевидно, що критерій Розенбаума застосовний до цих даних. Згідно з ним основна гіпотеза засвідчує, що рівень ознаки в першій генеральній сукупності не більший, ніж у другій, а альтернативна стверджує, що рівень ознаки в першій генеральній сукупності більший, ніж у другій.

Легко перевірити, що емпіричне значення критерію дорівнює 11. Звертаючись до таблиці критичних значень критерію Розенбаума, знаходимо, що рівень значущості, який відповідає цьому числу, менший від 1 %. Тому приймаємо (з високою надійністю) альтернативну гіпотезу про вищий рівень ознаки в першій групі.

Проаналізуємо тепер ці дані за допомогою критерію Манна—Вітні. Ранжування рівнів ознаки дасть такі результати: НР — 6; СР — 36; ВР — 81.

Підсумовуючи ранги у групах, отримуємо

$$S_1 = 81 \cdot 1 + 36 \cdot 49 = 1845,$$
$$S_2 = 81 \cdot 40 + 6 \cdot 11 = 3306.$$

Перевіряємо контрольну рівність:

$$S_1 + S_2 = 1845 + 3306 = 5151,$$
$$\frac{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1)}{2} = \frac{101 \cdot 102}{2} = 5151.$$

Оскільки $S_2 > S_1$, то основна і альтернативна гіпотези будуть іншими, ніж при застосуванні критерію Розенбаума. А власне альтернативна гіпотеза стверджуватиме, що рівень ознаки у другій групі вищий, ніж у першій.

Обчислимо емпіричне значення критерію Манна—Вітні:

$$U_{\text{емп}} = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - S_2 =$$
$$= 50 \cdot 51 + \frac{51 \cdot 52}{2} - 3306 = 570.$$

Звертаючись до табл. Д.2.7 критичних значень критерію Манна—Вітні, бачимо, що емпіричне значення 570 набагато менше від критичного значення 932, яке відповідає рівню значущості 1 %. Отже, необхідно прийняти альтернативну гіпотезу з дуже низьким рівнем значущості. Іншими словами, рівень ознаки вищий у другій групі. А це цілковито протилежний висновок до отриманого за допомогою критерію Розенбаума!

Зауваження 6.3. Якщо при одночасному використанні критеріїв Розенбаума і Манна—Вітні виявиться, що висновки суперечать один одному, як правило, краще використати висновок, отриманий за критерієм Манна—Вітні.

На завершення наведемо ще один приклад, який стосується числових шкал.

Приклад 6.2.7. Нехай досліджуємо ознаку: "Час розв'язування анаграми". Вона, безсумнівно, числова.

За рівнем цієї ознаки досліджуємо дві незалежні генеральні сукупності й маємо дві репрезентативні вибірки з них. Наведемо дані вимірювання ознаки в цих вибірках.

Час розв'язування, с	Кількість осіб у групі	
	1	2
100	1	40
95	49	–
10	–	11

Якщо ці дані аналізувати за критерієм Манна—Вітні, то виявляється, що рівень ознаки вищий у другій групі (справді, ці дані аналогічні прикладу 6.2.6).

Проте критерій Манна—Вітні не враховує, що $100 - 95 = 5$ с, а $95 - 10 = 85$ с. Тому природніше в цьому разі виглядає порівняння середніх значень у групах.

Обчислюючи вибіркові середні та виправлені стандартні відхилення, отримуємо такі дані.

Показник	Значення показника (с) у групі	
	1	2
Вибіркове середнє	95,10	80,59
Виправлене стандартне відхилення	0,71	37,39

Отже, вибіркове середнє вище в першій групі. Тому за одностороннім z-тестом маємо основну гіпотезу про генеральні середні

$$\mu_1 - \mu_2 \leqslant 0$$

та альтернативну

$$\mu_1 - \mu_2 > 0.$$

Оскільки обсяг обох вибірок перевищує 30 осіб, можна використати процедуру однобічного тестування:

$$\text{s.e.est.} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0{,}71^2}{50} + \frac{37{,}39^2}{51}} \approx 5{,}24,$$

$$z_{\text{в}} = \frac{(95{,}10 - 80{,}59) - 0}{5{,}24} = \frac{14{,}51}{5{,}24} \approx 2{,}77.$$

Позаяк висновок про прийняття альтернативної гіпотези у психології вважається достовірним, якщо його зроблено на рівні значущості 1 %, зафіксуємо саме такий рівень значущості. Із зауваження 6.2 випливає, що критичне значення $z_{\text{кр}}(\alpha) = 2{,}33$.

Остаточно потрібно прийняти альтернативну гіпотезу, тому що $z_{\text{в}} > z_{\text{кр}}(\alpha)$. Іншими словами, на відміну від критерію Манна—Вітні z-тест стверджує, що рівень ознаки вищий саме в першій групі.

Зауваження 6.4. Висновок, який потрібно було б зробити (насамперед психологу), проаналізувавши приклад 6.2.7, такий: якщо досліджувана ознака вимірюється за числовою шкалою[1], для порівняння рівня ознаки у двох групах доцільніше використовувати однобічний z-тест.

6.2.5. *H*-критерій Крускала—Волліса

Непараметричний критерій U використовують для оцінювання відмінностей між трьома і більше вибірками за рівнем якоїсь ознаки. Він дає змогу встановити, чи змінюється рівень ознаки при переході від однієї групи до іншої, але не вказує напрям цих змін. Критерій H іноді розглядається як непараметричний аналог методу однофакторного дисперсійного аналізу для незв'язних вибірок.

Обмеження критерію *H*

Перед застосуванням критерію Крускала—Волліса потрібно перевірити такі умови-обмеження.

[1] Саме за числовою, а не за порядковою псевдочисловою шкалою!

1. При порівнянні трьох вибірок допускається наявність в одній з них трьох спостережень, а в інших — по два. Але за таких чисельних складів вибірок діагностуються відмінності лише на найнижчому рівні значущості $\alpha = 0{,}05$.

Для того щоб можна було виявити відмінності на вищому рівні значущості $\alpha = 0{,}01$, необхідно, щоб у кожній вибірці було не менше трьох спостережень або принаймні в одній вибірці чотири спостереження, а в двох інших — по два.

2. Критичні значення критерію H і відповідні їм рівні значущості наведено в табл. Д.2.8, де передбачається, що у трьох вибірках щонайменше п'ять спостережень.

При більшій кількості вибірок і спостережень необхідно користуватися таблицею критичних значень критерію χ^2 (табл. Д.2.17). При цьому кількість ступенів вільності

$$v = c - 1,$$

де c — кількість порівнюваних вибірок.

3. Дані повинні бути подані принаймні в порядковій шкалі.

4. При множинному порівнянні вибірок достовірні відмінності між деякою парою (чи парами) можуть виявитися стертими. Цього можна уникнути, якщо здійснити всі можливі попарні порівняння, кількість яких дорівнює $1/2\big[c(c-1)\big]$, де c — кількість вибірок. Для таких попарних порівнянь потрібно використати критерій для двох вибірок (наприклад, U або $\varphi^\star$).

Алгоритм розрахунку критерію *H*

Розрахунок критерію H Крускала—Волліса зручно подати у вигляді алгоритму.

1. Перевірити, чи виконуються умови застосування критерію H.
2. Сформулювати основну та альтернативну гіпотези.

H_0: між досліджуваними вибірками існують лише випадкові відмінності за рівнем певної ознаки;

H_1: між досліджуваними вибірками існують невипадкові відмінності за рівнем певної ознаки.

3. Перенести дані першої вибірки на картки одного кольору (наприклад, червоного), другої — на картки іншого кольору (наприклад, синього) і так до кінця.

4. Розкласти всі картки в один ряд у порядку зростання незважаючи на колір картки.

5. Проранжувати значення на картках. Ранги занести на відповідні картки.

6. Розкласти картки на відповідні групи, орієнтуючись за їх кольором (червоні в один ряд, сині — у другий і так до кінця).

7. Підрахувати суму рангів окремо за групами.

8. Обчислити емпіричне значення H за формулою

$$H_{\text{емп}} = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{c} \frac{S_i^2}{n_i} - 3(n+1),$$

де n — загальна кількість спостережень в усіх вибірках; c — кількість досліджуваних вибірок; n_i — обсяг вибірки i; S_i — сума рангів вибірки i.

9. Якщо $c = 3$ і в кожній вибірці не більше п'яти спостережень, то критичні значення $H_{0,01}$ і $H_{0,05}$ визначити за табл. Д.2.8, в іншому випадку — за табл. Д.2.17 за умови, що кількість ступенів вільності $v = c - 1$.

10. Якщо $H_{\text{емп}} \geqslant H_{0,01}$, гіпотезу H_0 потрібно відхилити, якщо $H_{\text{емп}} < H_{0,05}$ — прийняти. Якщо $H_{0,05} \leqslant H_{\text{емп}} < H_{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,05 (або 5 %)[1].

Приклад 6.2.8. В експерименті з дослідження інтелектуальної спрямованості[2] 22 суб'єктам дослідження пред'являлися спочатку розв'язні чотири-, п'яти- та шестилітерні анаграми, а потім нерозв'язні, час роботи над якими не обмежувався. Експеримент проводився окремо з кожним суб'єктом дослідження. Використовувалися чотири комплекти анаграм. У дослідника склалося враження, що над деякими нерозв'язними анаграмами досліджувані працювали довше, ніж

[1] На практиці в більшості випадків цей рівень значущості вважається недостатнім для прийняття чи відхилення основної гіпотези при використанні критерію Крускала—Волліса.

[2] Цей приклад запозичено з [17].

над іншими, і, можливо, необхідно робити поправку на те, яка саме нерозв'язна анаграма пред'являлася тому чи іншому досліджуваному. Показники тривалості спроб розв'язання нерозв'язних анаграм наведено в табл. 1. Усі досліджувані були юнаками — студентами технічного вищого навчального закладу віком 20–21 рік.

Таблиця 1

Тривалість спроб розв'язання чотирьох нерозв'язних анаграм

№ пор.	Тривалість спроб розв'язання анаграм за групами, с			
	1: ФОЛИТОН	2: КАМУСТО	3: СНЕРАКО	4: ГРУТОСИЛ
1	145	145	128	60
2	194	210	283	2361
3	731	236	469	2416
4	1200	385	482	3600
5		720	1678	
6		848	2081	
7		905		
8		1080		
Сума	2270	4549	5121	8437
Середнє	568	566	854	2109

Чи можна стверджувати, що тривалість спроб розв'язання кожної з чотирьох анаграм приблизно однакова?

Насамперед бачимо, що умови застосування критерію U виконуються: у кожній вибірці щонайменше три спостереження (4, 8, 6 і 4); дані подано в порядковій шкалі.

Сформулюємо основну і альтернативну гіпотези.

H_0: чотири вибірки, які отримали різні нерозв'язні анаграми, не різняться за тривалістю спроб їх розв'язання;

H_1: чотири вибірки, які отримали різні нерозв'язні анаграми, різняться за тривалістю спроб їх розв'язання.

Упорядкуємо значення чотирьох вибірок за зростанням і проранжуємо їх. Результати ранжування подано в табл. 2.

Таблиця 2

Тривалість спроб розв'язання чотирьох нерозв'язних анаграм

Група 1: анаграма ФОЛИТОН		Група 2: анаграма КАМУСТО		Група 3: анаграма СНЕРАКО		Група 4: анаграма ГРУТОСИЛ	
Тривалість спроб, с	Ранг	Тривалість спроб, с	Ранг	Тривалість спроб, с	Ранг	Тривалість спроб, с	Ранг
						60	1
				128	2		
145	3,5	145	3,5				
194	5						
		210	6				
		236	7				
				283	8		
		385	9				
				469	10		
				482	11		
		720	12				
731	13						
		848	14				
		905	15				
		1080	16				
1200	17						
				1678	18		
				2081	19		
						2361	20
						2416	21
						3600	22
Сума	38,5		82,5		68		64

Загальна сума рангів $38{,}5 + 82{,}5 + 68 + 64 = 253$. Розрахункова сума

$$S_{\text{розр}} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{22 \cdot (22+1)}{2} = 253.$$

Отже, рівність реальної та розрахункової сум рангів справджується.

Згідно з наступним кроком алгоритму визначаємо емпіричне значення критерію H:

$$H_{\text{емп}} = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{c} \frac{S_i^2}{n_i} - 3(n+1) =$$
$$= \frac{12}{22 \cdot (22+1)} \left(\frac{38{,}5^2}{4} + \frac{82{,}5^2}{8} + \frac{68^2}{6} + \frac{64^2}{4} \right) - 3 \cdot (22+1) \approx$$
$$\approx 2{,}48.$$

Оскільки таблиці критичних значень критерію H передбачені лише для трьох груп, а в розглядуваному випадку їх чотири, доведеться знаходити критичні значення H за табл. Д.2.17. Для цього визначимо спочатку кількість ступенів вільності:

$$v = c - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Отже, критичні значення

$$H_{0,01} = 11{,}345; \qquad H_{0,05} = 7{,}815.$$

Оскільки $H_{\text{емп}} < H_{0,05}$, гіпотеза H_0 приймається, тобто чотири групи досліджуваних не різняться за тривалістю спроб розв'язання нерозв'язних анаграм.

6.2.6. *S*-критерій тенденцій Джонкіра

Непараметричний критерій S використовують для виявлення тенденцій зміни ознаки при переході від однієї вибірки до іншої при порівнянні трьох і більше вибірок.

Обмеження критерію *S*

Перед застосуванням критерію тенденцій Джонкіра потрібно перевірити такі умови-обмеження.

1. У кожній досліджуваній вибірці має бути однакова кількість спостережень. У разі неоднакової кількості спостережень вибірки штучно вирівнюються за допомогою випадкового викидання

"зайвих" спостережень (при цьому втрачається частина інформації). Якщо дослідник не бажає втрачати частину спостережень, то можна скористатися критерієм H, але при цьому неможливо вказати напрям відмінностей.

2. У кожній вибірці повинно бути щонайменше два спостереження. Існуючі таблиці дають змогу використовувати критерій S щонайбільше для шести вибірок і десяти спостережень у кожній з них. Якщо ці умови не виконуються, доведеться використовувати критерій H Крускала—Волліса.

3. Дані повинні бути подані принаймні в порядковій шкалі.

Алгоритм розрахунку критерію *S*

Розрахунок критерію S тенденцій Джонкіра зручно подати у вигляді алгоритму.

1. Перевірити, чи виконуються умови застосування критерію S.

2. Розташувати вибірки в порядку зростання їх середнього значення або суми значень.

3. Сформулювати основну і альтернативну гіпотези.

H_0: тенденція збільшення значень ознаки при переході від однієї вибірки до іншої випадкова;

H_1: тенденція збільшення значень ознаки при переході від однієї вибірки до іншої невипадкова.

4. У кожній вибірці (зрозуміло, крім останньої з найбільшим середнім значенням) для кожного індивідуального значення розрахувати S_{ij} (i — номер вибірки; j — номер спостереження у вибірці) — кількість переважаючих його значень з вибірок, які мають більше середнє значення.

5. Для кожної вибірки розрахувати суму S_i показників її елементів за формулою

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, c,$$

де n — обсяг кожної вибірки; c — кількість порівнюваних вибірок.

6. Обчислити загальну суму за всіма вибірками:

$$A = \sum_{i=1}^{c} S_i.$$

7. Визначити максимально можливу загальну суму:

$$B = \frac{c(c-1)}{n^2}.$$

8. Розрахувати емпіричне значення S:

$$S_{\text{емп}} = 2A - B.$$

9. За табл. Д.2.9 визначити критичні значення $S_{0,01}$ і $S_{0,05}$ для заданих c і n.

10. Якщо $S_{\text{емп}} \geqslant S_{0,01}$, гіпотезу H_0 потрібно відхилити, якщо $S_{\text{емп}} < S_{0,05}$ — прийняти. Якщо $S_{0,05} \leqslant S_{\text{емп}} < S_{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,05 (або 5 %)[1].

Приклад 6.2.9. Вибірку претендентів на посаду комерційного директора в Санкт-Петербурзькому філіалі зарубіжної фірми було досліджено за Оксфордською методикою експрес-відеодіагностики, що використовує діагностичні рольові ігри[2]. Було досліджено двадцять чоловіків віком 25–40 років, середній вік — 31,5 року. Оцінювались 15 значних для зарубіжної фірми психологічних якостей, що забезпечують ефективну діяльність на посту комерційного директора. Одна з цих якостей — авторитетність. Наприкінці восьмигодинного сеансу діагностичних рольових ігор і вправ проводилося соціометричне опитування учасників групи. Респонденти повинні були відповісти на запитання: "Якщо б я був представником фірми, то обрав би на посаду комерційного директора: 1) ...; 2) ...; 3) ...". Учасники знали, що кожний їх крок є матеріалом для діагностики і що перевіряється, зокрема, серед іншого їх здатність об'єктивно думати про

[1] На практиці в більшості випадків цей рівень значущості вважається недостатнім для прийняття чи відхилення основної гіпотези при використанні критерію тенденцій Джонкіра.

[2] Цей приклад запозичено з [17].

людей. У результаті цієї процедури кожний учасник отримав певну кількість виборів від інших учасників, яка відображає його соціометричний статус у групі претендентів.

Результати дослідження наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Показники авторитетності у групах з різним соціометричним статусом

№ пор.	Група 1: 0 виборів	Група 2: 1 вибір	Група 3: 2, 3 вибори	Група 4: 4 і більше виборів
1	5	5	5	9
2	5	6	6	9
3	2	7	7	8
4	5	6	7	8
5	4	4	5	7
Сума	21	28	30	41
Середнє	4,2	5,6	6,0	8,2

Чи можна стверджувати, що групи з різним статусом різняться і за рівнем авторитетності, який визначався незалежно від соціометрії експрес-відеодіагностикою?

Насамперед бачимо, що умови застосування критерію S виконуються: у кожній вибірці однакова кількість спостережень; у кожній вибірці щонайменше два спостереження (5) і щонайбільше 10; кількість вибірок не перевищує 6 (3); дані подані в порядковій шкалі.

Оскільки вибірки вже впорядковані за збільшенням середніх значень, то цей пункт алгоритму обчислення критерію S опускаємо.

Сформулюємо основну і альтернативну гіпотези.

H_0: тенденція збільшення авторитетності при переході від однієї групи до іншої (зліва направо) випадкова;

H_1: тенденція збільшення авторитетності при переході від однієї групи до іншої (зліва направо) невипадкова.

Для зручності впорядкуємо значення всередині всіх чотирьох вибірок за зростанням і розрахуємо для кожного значення кількість значень, які перевищують це значення, з вибірок, що розміщуються праворуч. Результати цієї операції подано в табл. 2.

Таблиця 2

Розрахунок критерію S при порівнянні груп з різним соціометричним статусом за показником авторитетності

№ пор.	Група 1: 0 виборів		Група 2: 1 вибір		Група 3: 2, 3 вибори		Група 4: 4 і більше виборів
	Індиві-дуальне значення	S_{1j}	Індиві-дуальне значення	S_{2j}	Індиві-дуальне значення	S_{3j}	Індиві-дуальне значення
1	2	15	4	10	5	5	7
2	4	14	5	8	5	5	8
3	5	11	6	7	6	5	8
4	5	11	6	7	7	4	9
5	5	11	7	6	7	4	9
Сума		62		36		23	

Наприклад, значення "4" з першої групи перевищують чотири значення (5, 6, 6 і 7) з другої групи, усі п'ять значень з третьої і всі п'ять значень з четвертої, тобто таких значень загалом 14.

Загальна сума

$$A = 62 + 36 + 23 + 0 = 121.$$

Максимально можлива загальна сума

$$B = \frac{4 \cdot (4 - 1)}{2} \cdot 5^2 = 150.$$

Згідно з наступним кроком алгоритму визначаємо емпіричне значення критерію S:

$$S_{\text{емп}} = 2A - B = 2 \cdot 121 - 150 = 92.$$

За табл. Д.2.9 знайдемо критичні значення S для $c = 4$, $n = 5$:

$$S_{0,01} = 72; \qquad S_{0,05} = 51.$$

Оскільки $S_{\text{емп}} > S_{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється. Отже, тенденція підвищення авторитетності при переході від однієї групи до іншої невипадкова.

6.3. Розпізнавання зсувів

У психологічних дослідженнях часто важливо довести, що внаслідок дії якихось факторів відбулися достовірні зміни ("зсуви") у вимірюваних показниках. Насамперед це стосується фактору часу. Порівняння показників, отриманих на одній і тій же вибірці одними і тими ж методиками, але в різний час, дає часовий зсув.

Багаторазові дослідження однієї і тієї самої вибірки тривалий відтинок часу (який іноді становить десятки років) називають лонгітюдинальними. За допомогою цього методу визначають генетичні зв'язки між фазами психічного розвитку і дають науково обґрунтований прогноз подальшого психічного розвитку.

Порівняння показників, отриманих за одними методиками, але в різних умовах вимірювання (наприклад, "спокою" і "стресу"), дає ситуаційний зсув. Умови вимірювання можуть змінюватися не лише реально, а й уявно. Наприклад, можна попросити досліджуваного уявити, що він опинився в інших умовах вимірювання: у майбутньому, на позиції інших людей, які оцінюють його ніби-то з боку, у стані розгніваного батька тощо. Порівнявши показники, виміряні у звичайних та уявних умовах, отримаємо уявний зсув.

Можна створити спеціальні експериментальні умови, які, можливо, впливають на певні показники, і порівняти заміри, виконані до і після експериментального впливу. У таких випадках кажуть про зсув внаслідок контрольованих або неконтрольованих впливів.

6.3.1. Алгоритм прийняття рішення про вибір критерію для розпізнавання зсувів

Перш ніж перейти до викладу конкретних статистичних критеріїв порівняння ознак, наведемо алгоритм (рис. 6.4), за допомогою якого можна визначитися з вибором критерію.

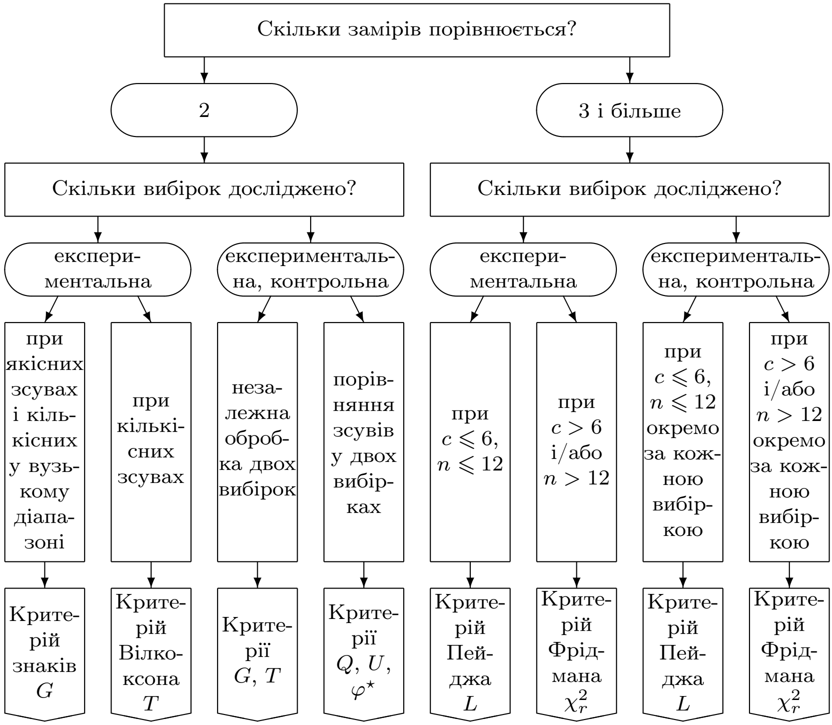


Рис. 6.4. **Алгоритм прийняття рішення про вибір критерію для розпізнавання зсувів**

6.3.2. G-критерій знаків

Непараметричний критерій G використовують для встановлення загального напряму зсуву досліджуваної ознаки. Він дає змогу встановити, в який бік у вибірці загалом змінюються значення ознаки при переході від першого виміру до другого: показники змінюються в бік поліпшення, підвищення чи посилення або, навпаки, погіршення, зниження або послаблення.

Обмеження критерію G

Перед застосуванням критерію знаків потрібно перевірити такі умови-обмеження.

1. Кількість спостережень в обох замірах не повинна бути меншою від 5 і перевищувати 300.

2. Дані можуть бути подані принаймні в порядковій шкалі. У разі кількісних шкал, якщо зсуви варіюють у широкому діапазоні, краще застосовувати потужніший критерій T Вілкоксона (див. п. 6.3.3).

Алгоритм розрахунку критерію G

Розрахунок критерію G знаків зручно подати у вигляді алгоритму.

1. Перевірити, чи виконуються умови застосування критерію G.

2. Розрахувати кількість нульових реакцій і виключити їх з розгляду. При цьому обсяг вибірки зменшиться на кількість нульових реакцій.

3. Визначити переважаючий напрям змін. Вважати зсуви в цьому напрямі "типовими".

4. Сформулювати основну і альтернативну гіпотези.

H_0: переважання типового напряму зсуву випадкове;

H_1: переважання типового напряму зсуву невипадкове.

5. Визначити кількість "нетипових" зсувів. Вважати це число емпіричним значенням G.

6. За табл. Д.2.10 визначити критичні значення $G_{0,01}$ і $G_{0,05}$ для заданого n.

7. Якщо $G_{\text{емп}} \leqslant G_{0,01}$, гіпотезу H_0 потрібно відхилити, якщо $G_{\text{емп}} > G_{0,05}$ — прийняти. Якщо $G_{0,01} < G_{\text{емп}} \leqslant G_{0,05}$, гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,05 (або 5 %)[1].

Приклад 6.3.1. Г. А. Бадасова (1994 р.) досліджувала особистісні фактори сугестора, які сприяють його навіюючій дії на аудиторію[2]. В експерименті взяли участь 39 слухачів коледжу і спецфакультету практичної психології Санкт-Петербурзького університету,

[1] На практиці в більшості випадків такий рівень значущості для G-критерію знаків вважається неприйнятним.

[2] Цей приклад запозичено з [17].

9 чоловіків і 30 жінок віком 18–39 років, середній вік — 23,5 року. Досліджувані були сугерендами, тобто особами, щодо яких здійснювалось навіювання.

В експериментальній групі ($n_1 = 16$) досліджувані переглядали відеозапис промови сугестора про доцільність застосування фізичних покарань у вихованні дітей, а в контрольній групі ($n_2 = 23$) досліджувані читали подумки письмовий текст. Зміст промови сугестора та тексту цілковито збігалися.

До і після подання відеозапису (в експериментальній групі) і тексту (у контрольній групі) досліджувані відповідали на чотири питання, оцінюючи ступінь згоди з їх змістом за семибальною шкалою.

1. Я вважаю можливим іноді вдарити свою дитину, якщо вона на це заслужила:

Не згоден 1 2 3 4 5 6 7 Згоден

2. Якщо, прийшовши додому, я дізнаюсь, що хтось з моїх близьких, бабуся чи дідусь, вдарив мою дитину за провину, я вважатиму це за нормальне:

Не згоден 1 2 3 4 5 6 7 Згоден

3. Якщо мені стане відомо, що вихователька дитячого садка або вчителька у школі вдарила мою дитину за провину, то я сприйму це як належне:

Не згоден 1 2 3 4 5 6 7 Згоден

4. Я б погодився віддати свою дитину до школи, де застосовується система фізичних покарань за підсумками тижня:

Не згоден 1 2 3 4 5 6 7 Згоден

Сугестор був підібраний за ознаками, виявленими в пілотажному дослідженні. Результати двох замірів за обома групами наведені в табл. 1 і 2.

Таблиця 1

Оцінки ступеня згоди з твердженнями про допустимість тілесних покарань до і після показу відеозапису в експериментальній групі

№ пор.	"Я сам"			"Бабуся"			"Вихователь"			"Школа"		
	до	після	зсув	до	після	зсув	до	після	зсув	до	після	зсув
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	4	4	0	2	4	+2	1	1	0	1	1	0
2	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
3	5	5	0	4	4	0	4	4	0	1	1	0
4	4	5	+1	3	3	0	2	3	+1	1	2	+1
5	3	3	0	3	4	+1	2	3	+1	1	1	0
6	4	5	+1	5	5	0	1	1	0	1	1	0
7	3	3	0	3	3	0	1	1	0	1	1	0
8	5	6	+1	5	6	+1	3	3	0	2	1	−1
9	6	7	+1	5	7	+2	3	3	0	1	2	+1
10	2	3	+1	2	3	+1	2	1	−1	1	1	0
11	6	6	0	3	3	0	2	1	−1	1	1	0
12	5	5	0	3	5	+2	4	4	0	1	1	0
13	7	7	0	5	5	0	4	4	0	1	1	0
14	5	6	+1	5	6	+1	2	2	0	1	2	+1
15	5	6	+1	5	6	+1	4	3	−1	2	2	0
16	6	7	+1	6	7	+1	4	4	0	2	2	0

Таблиця 2

Оцінки ступеня згоди з твердженнями про допустимість тілесних покарань до і після подання письмового тексту в контрольній групі

№ пор	"Я сам"			"Бабуся"			"Вихователь"			"Школа"		
	до	після	зсув	до	після	зсув	до	після	зсув	до	після	зсув
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	4	4	0	5	5	0	1	1	0	1	1	0
2	7	7	0	7	7	0	7	7	0	4	4	0
3	2	2	0	1	1	0	3	1	−2	1	1	0
4	4	3	−1	3	2	−1	1	1	0	1	1	0

Закінчення табл. 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	3	5	+2	5	5	0	3	3	0	1	1	0
6	2	1	−1	2	1	−1	1	1	0	1	1	0
7	5	5	0	3	3	0	1	1	0	1	1	0
8	2	2	0	2	3	+1	1	3	+2	1	3	+2
9	3	4	+1	3	4	+1	1	1	0	1	6	+5
10	5	5	0	5	5	0	1	1	0	1	1	0
11	5	5	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
12	2	2	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
13	1	1	0	1	1	0	1	2	+1	6	7	+1
14	4	3	−1	7	5	−2	2	4	+2	1	1	0
15	3	4	+1	2	3	+1	1	2	+1	1	1	0
16	4	4	0	3	3	0	1	1	0	1	1	0
17	3	3	0	2	2	0	1	1	0	1	1	0
18	6	6	0	6	6	0	6	6	0	1	3	+2
19	2	2	0	2	1	−1	1	1	0	1	1	0
20	1	2	+1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
21	2	2	0	2	2	0	2	1	−1	1	1	0
22	6	6	0	6	6	0	3	3	0	1	1	0
23	3	2	−1	1	2	+1	1	1	0	1	1	0

Запитання:

1. Чи можна стверджувати, що після перегляду відеозапису про корисність тілесних покарань спостерігається достовірний зсув у бік більшого прийняття їх в експериментальній групі?
2. Чи достовірні відмінності у виразності додатного зсуву між експериментальною та контрольною групами?
3. Чи достовірний зсув оцінок у контрольній групі?

Спочатку розрахуємо кількість додатних, від'ємних і нульових зсувів за кожною шкалою в кожній вибірці. Це необхідно для виявлення "типових" знаків зміни оцінок і полегшення подальших розрахунків та міркувань.

З даних табл. 3 випливає, що найтиповіші "нульові" зсуви, тобто відсутність зсуву в оцінках після показу відеозапису або подання письмового тексту. Однак в експериментальній групі за шкалою "Я сам” і “Бабуся” додатні зсуви спостерігаються приблизно в половині випадків.

Таблиця 3

Оцінки ступеня згоди з твердженнями про допустимість тілесних покарань до і після пред'явлення письмового тексту в контрольній групі

Кількість зсувів у групах	Шкала				
	“Я сам”	“Бабуся”	“Вихователь”	“Школа”	Сума
1. Експериментальна група					
а) додатних	8	9	2	3	22
б) від'ємних	0	0	3	1	4
в) нульових	8	7	11	12	38
Сума	16	16	16	16	64
2. Контрольна група					
а) додатних	4	4	4	4	16
б) від'ємних	4	4	2	0	10
в) нульових	15	15	17	19	66
Сума	23	23	23	23	92

Необхідно враховувати лише додатні та від'ємні зсуви, а нульові відкидати. Кількість пар порівнюваних значень при цьому зменшується на кількість нульових зсувів. Тепер для шкали “Я сам” $n = 8$, для шкали “Бабуся” $n = 9$, для шкали “Вихователь” $n = 5$ і для шкали “Школа” $n = 4$. Як бачимо, для останньої шкали критерій G застосовуватися не може через малу кількість пар порівнюваних значень $(n < 5)$.

Крім того, можна одразу перевірити також гіпотезу про переважання додатних зсувів у відповідях за сумою чотирьох шкал. Сума додатних і від'ємних зсувів за чотирма шкалами

$$n = 8 + 9 + 5 + 4.$$

Сформулюємо гіпотези для експериментальної групи.

H_0: зсув у бік поблажливішого ставлення до тілесних покарань після навіювання випадковий;

H_1: зсув у бік поблажливішого ставлення до тілесних покарань після навіювання невипадковий.

За табл. Д.2.10 визначаємо критичні значення критерію знаків G. Це максимальна кількість "нетипових" знаків, при яких зсув у "типовий" бік ще можна вважати істотним.

1. Шкала "Я сам":

$$n = 8.$$

Типовий зсув додатний. Від'ємних зсувів немає.

$$G_{\text{емп}} = 0; \qquad G_{0,05} = 1, \qquad G_{0,01} = 0.$$

Оскільки $G_{\text{емп}} \leqslant G_{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється. Приймається H_1.

2. Шкала "Бабуся":

$$n = 9.$$

Типовий зсув додатний. Від'ємних зсувів немає.

$$G_{\text{емп}} = 0; \qquad G_{0,05} = 1, \qquad G_{0,01} = 0.$$

Оскільки $G_{\text{емп}} \leqslant G_{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється. Приймається H_1.

3. Шкала "Вихователь":

$$n = 5.$$

Типовий зсув від'ємний. Додатних зсувів два.

$$G_{\text{емп}} = 2; \qquad G_{0,05} = 0, \qquad G_{0,01} \text{ визначити неможливо.}$$

Оскільки $G_{\text{емп}} > G_{0,05}$, гіпотеза H_0 приймається.

4. Шкала "Школа":

$$n = 4.$$

Оскільки $n < 5$, критерій знаків застосовувати не можна.

5. Сума за чотирма шкалами:

$$n = 26.$$

Типовий зсув додатний. Від'ємних зсувів чотири.

$$G_{\text{емп}} = 4; \qquad G_{0,05} = 8, \qquad G_{0,01} = 6.$$

Оскільки $G_{\text{емп}} < G_{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється. Приймається H_1.

Відповідь: зсув у бік поблажливішого ставлення до тілесних покарань в експериментальній групі після перегляду відеозапису невипадковий для шкал "Я сам", "Бабуся" і за сумою чотирьох шкал.

Сформулюємо гіпотези для контрольної групи.

H_0: зсув у бік поблажливішого ставлення до тілесних покарань після читання тексту випадковий;

H_1: зсув у бік поблажливішого ставлення до тілесних покарань після читання тексту невипадковий.

Далі діємо за таким самим принципом: спочатку визначаємо кількість зсувів у той чи інший бік (n), а потім типовий зсув; кількість нетипових зсувів ($G_{\text{емп}}$) порівнюємо з критичними значеннями G, які визначаємо за табл. Д.2.10.

1. Шкала "Я сам":

$$n = 8.$$

Додатних і від'ємних зсувів по чотири.

Типовий зсув визначити неможливо, оскільки додатних і від'ємних зсувів порівну.

Гіпотеза H_0 приймається.

2. Шкала "Бабуся":

$$n = 8.$$

Додатних і від'ємних зсувів по чотири.

Гіпотеза H_0 приймається з тих же причин, що і для попередньої шкали.

3. Шкала "Вихователь":

$$n = 6.$$

Типовий зсув додатний. Від'ємних зсувів два.

$$G_{\text{емп}} = 2; \qquad G_{0,05} = 0, \qquad G_{0,01} \text{ визначити неможливо.}$$

Оскільки $G_{\text{емп}} > G_{0,05}$, гіпотеза H_0 приймається.

4. Шкала "Школа":

$$n = 4.$$

Оскільки $n < 5$, критерій знаків застосовувати не можна.

5. Сума за чотирма шкалами:

$$n = 26.$$

Типовий зсув додатний. Від'ємних зсувів 10.

$$G_{\text{емп}} = 10; \qquad G_{0,05} = 8, \qquad G_{0,01} = 6.$$

Оскільки $G_{\text{емп}} > G_{0,05}$, гіпотеза H_0 приймається.

Відповідь: зсув у бік поблажливішого ставлення до тілесних покарань у контрольній групі випадковий — і за кожною шкалою окремо, і за сумою шкал.

Щодо першого питання задачі можна стверджувати, що після перегляду відеозапису про користь тілесних покарань спостерігається достовірний зсув на користь більшого їх сприйняття в експериментальній групі. На третє питання задачі можна відповісти, що зсув оцінок у контрольній групі недостовірний. Однак поки що неможливо відповісти на друге питання: чи достовірні відмінності за вираженістю додатного зсуву між експериментальною і контрольною групами.

Річ у тім, що вибрано варіант порівнянь, який припускає порівняння значень "після" і "до" експериментального впливу окремо в експериментальній і контрольній вибірках. Для того щоб відповісти на друге питання, необхідно вибрати другий варіант порівнянь, який передбачає порівняння зсувів у двох групах за допомогою критеріїв порівняння незалежних вибірок — Q-критерію Розенбаума, U-критерію Манна—Вітні та критерію $\varphi^{\star}$ Фішера (див. рис. 6.3). Однак подібні порівняння, як правило, здійснюються лише тоді, коли і в експериментальній, і в контрольній групі виявлено достовірний односпрямований ефект і потрібно довести, що в експериментальній вибірці він достовірно більший, вираженіший. У цьому разі доведено, що в контрольній вибірці не відбулося значущих змін, і можна цим задовольнитися.

6.3.3. *T*-критерій Вілкоксона

Непараметричний критерій T використовують для порівняння показників, виміряних у двох різних умовах на одній і тій же вибірці досліджуваних. За його допомогою встановлюють не лише напрям змін, а й їх виразність.

Обмеження критерію *T*

Перед застосуванням критерію Вілкоксона потрібно перевірити такі умови-обмеження.

1. Мінімальна кількість досліджуваних, ознаки яких вимірювалися у двох умовах, п'ять, максимальна — 50.
2. Нульові зсуви з розгляду вилучаються. При цьому обсяг вибірки зменшується на кількість нульових зсувів[1].
3. Дані повинні бути подані принаймні в порядковій шкалі.

Алгоритм розрахунку критерію *T*

Розрахунок критерію T Вілкоксона зручно подати у вигляді алгоритму.

1. Перевірити, чи виконуються умови застосування критерію T.
2. Обчислити різниці між індивідуальними значеннями у другому і першому замірах ("після" – "до").
3. Визначити переважаючий напрям змін, вважаючи зсуви в цьому напрямі "типовими".

[1]Це обмеження суперечливе, адже при переважній більшості нульових зсувів казати про достовірність зсуву в той чи інший бік некоректно. У цьому разі доречніше не змінювати обсяг вибірки, виключаючи з розгляду нульові зсуви, а сформулювати гіпотези так, щоб вони включали відсутність змін, наприклад: "Кількість зсувів у бік збільшення значень переважає кількість зсувів у бік зменшення значень і тенденцію збереження їх на попередньому рівні".

4. Сформулювати основну і альтернативну гіпотези.

H_0: інтенсивність зсувів у типовому напрямі не переважає інтенсивність зсувів у нетиповому напрямі;

H_1: інтенсивність зсувів у типовому напрямі переважає інтенсивність зсувів у нетиповому напрямі.

5. Перевести різниці в абсолютні величини і записати їх окремим стовпчиком.

6. Проранжувати абсолютні величини різниць.

7. Відмітити ранги (наприклад, обвести), які відповідають зсувам у “нетиповому” напрямі.

8. Розрахувати емпіричне значення T за формулою

$$T_{\text{емп}} = \sum_{i=1}^{k} r_i,$$

де k — кількість нетипових зсувів; r_i — рангові значення нетипових зсувів.

9. За табл. Д.2.11 визначити критичні значення $T_{0,01}$ і $T_{0,05}$ для заданого n.

10. Якщо $T_{\text{емп}} \leqslant T_{0,01}$, гіпотезу H_0 потрібно відхилити, якщо $T_{\text{емп}} > T_{0,05}$ — прийняти. Якщо $T_{0,01} < T_{\text{емп}} \leqslant T_{0,05}$, гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,05 (або 5 %)[1].

Приклад 6.3.2. У вибірці курсантів військового училища (юнаки віком 18–20 років) вимірювали здатність до утримання фізичного вольового зусилля на динамометрі[2]. Спочатку у досліджуваних вимірювали максимальну м’язову силу кожної руки, а наступного дня їм пропонували витримати на динамометрі з рухомою стрілкою м’язове зусилля, що дорівнює половині максимальної м’язової сили руки. Втомившись, досліджуваний повинен був повідомити про це експериментатора, але не припиняти дослід, переборюючи втому та неприємні відчуття — “боротися, поки не вичерпається воля”. Дослід проводився двічі; спочатку зі звичайною інструкцією, а потім, після

[1] На практиці в більшості випадків такий рівень значущості для T-критерію Вілкоксона вважається неприйнятним.

[2] Цей приклад запозичено з [17].

того як досліджуваний заповнив анкету опитування для визначення самооцінки вольових якостей за методикою А. І. Пуні, йому пропонували уявити, що він вже досяг ідеалу розвитку вольових якостей, і продемонструвати відповідне ідеалу вольове зусилля. Дані досліду наведені в таблиці.

Розрахунок критерію T при порівнянні замірів фізичного вольового зусилля

Номер досліджуваного	Тривалість утримання зусилля на динамометрі		Різниця	Абсолютне значення різниці	Ранг різниці
	до вимірювання вольових якостей і звернення до ідеалу	після вимірювання вольових якостей і звернення до ідеалу			
1	2	3	4	5	6
1	64	25	−39	39	11
2	77	50	−27	27	8
3	74	77	+3	3	1
4	95	76	−19	19	6
5	105	67	−38	38	9,5
6	83	75	−8	8	4
7	73	77	+4	4	2,5
8	75	71	−4	4	2,5
9	101	63	−38	38	9,5
10	97	122	+25	25	7
11	78	60	−18	18	5
				Сума	66

Чи можна стверджувати, що звертання до ідеалу сприяє зростанню вольового зусилля?

Насамперед бачимо, що умови застосування критерію T виконуються: у вибірці не менше п'яти і не більше 50 осіб (11); дані подані в порядковій шкалі.

З графи 4 останньої таблиці бачимо, що від'ємних різниць між індивідуальними значеннями до і після звернення до ідеалу 8, додатних — 3, нульових — жодної. Отже, "типовим" у цьому разі є зсув у бік зменшення тривалості м'язового зусилля.

Сформулюємо основну і альтернативну гіпотези.

H_0: інтенсивність зсувів у бік зменшення тривалості м'язового зусилля не перевищує інтенсивність зсувів у бік її збільшення;

H_1: інтенсивність зсувів у бік зменшення тривалості м'язового зусилля перевищує інтенсивність зсувів у бік її збільшення.

Після переведення всіх різниць в абсолютні величини (графа 5 останньої таблиці) проранжуємо їх. Результати ранжування наведено у графі 6. Загальна сума рангів дорівнює 66. Розрахункова сума

$$S_{\text{розр}} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{22 \cdot (22+1)}{2} = 253.$$

Отже, рівність реальної та розрахункової сум рангів справджується.

Наступним кроком потрібно відмітити певним способом ранги, які відповідають зсувам у "нетиповому" напрямі. У таблиці вони обведені. Сума цих рангів становить емпіричне значення критерію T:

$$T_{\text{емп}} = 1 + 2{,}5 + 7 = 10{,}5.$$

За табл. Д.2.11 визначаємо критичні значення T для $n = 11$:

$$T_{0,01} = 7; \qquad T_{0,05} = 13.$$

Оскільки $T_{0,01} < T_{\text{емп}} < T_{0,05}$, гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,05, тобто інтенсивність від'ємного зсуву показника фізичного вольового зусилля перевищує інтенсивність додатного зсуву (на рівні значущості 0,05).

6.3.4. χ_r^2-критерій Фрідмана

Непараметричний критерій χ_r^2 (читається "хі-ар-квадрат") використовують для порівняння показників, виміряних у трьох і більше різних умовах на одній і тій же вибірці досліджуваних. Він дає змогу встановити, що показники від однієї умови до іншої змінюються, але при цьому не вказує напрям цих змін.

Обмеження критерію χ_r^2

Перед застосуванням критерію Фрідмана потрібно перевірити такі умови-обмеження.

1. Мінімальна кількість досліджуваних, ознаки яких вимірювалися щонайменше у трьох умовах ($c \geqslant 3$), — два ($n \geqslant 2$).

2. Дані повинні бути подані принаймні в порядковій шкалі.

Алгоритм розрахунку критерію χ_r^2

Розрахунок критерію χ_r^2 Фрідмана зручно подати у вигляді алгоритму.

1. Перевірити, чи виконуються умови застосування критерію χ_r^2.

2. Сформулювати основну і альтернативну гіпотези.

H_0: між показниками, отриманими в різних умовах, існують лише випадкові відмінності;

H_1: між показниками, отриманими в різних умовах, існують невипадкові відмінності.

3. Проранжувати індивідуальні значення першого досліджуваного, отримані ним у першому, другому, третьому і подальших замірах. У такий же спосіб проранжувати індивідуальні значення інших досліджуваних.

4. Розрахувати суми рангів за умовами, в яких здійснювалися заміри. Перевірити збіг загальної суми S_r рангів з розрахунковою $S_{\text{розр}}$ сумою за формулою

$$S_{\text{розр}} = \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} = n\frac{c(c+1)}{2},$$

де c — кількість замірів; n — обсяг вибірки; r_{ij} — ранг індивідуального значення i-го досліджуваного в j-му замірі.

5. Розрахувати емпіричне значення χ_r^2 за формулою

$$\chi^2_{r\,\text{емп}} = \frac{12}{nc(c+1)} \sum_{i=1}^{c} S_i^2 - 3n(c+1),$$

де $S_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}$ — сума рангів i-ї умови.

6. Визначити рівні статистичної значущості для $\chi^2_{r\,\text{емп}}$:
   а) при $c = 3$, $n \leqslant 9$ або при $c = 4$, $n \leqslant 4$ — за табл. Д.2.14;
   б) в інших випадках — за табл. Д.2.17 за умови, що кількість ступенів вільності

$$v = c - 1.$$

7. Якщо $\chi^2_{r\,\text{емп}} \geqslant \chi^2_{r\,0,01}$, гіпотезу H_0 потрібно відхилити, якщо $\chi^2_{r\,\text{емп}} < \chi^2_{r\,0,05}$ — прийняти. Якщо $\chi^2_{r\,0,05} \leqslant \chi^2_{r\,\text{емп}} < \chi^2_{r\,0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,05 (або 5 %)[1].

Приклад 6.3.3. В експерименті з дослідження інтелектуальної наполегливості досліджуваним пропонувались анаграми так, щоб поступово підготувати їх до найважчої задачі [2]. Іншими словами, досліджуваний повинен був поступово звикнути до того, що задачі стають дедалі важчими, і що на кожну наступну анаграму доводиться витрачати більше часу. Дані дослідження подані в табл. 1.

Таблиця 1

Тривалість розв'язання анаграм

Код імені досліджуваного	Тривалість розв'язання анаграми, с		
	1: КРУА (РУКА)	2: АЛСТЬ (СТАЛЬ)	3: ИНААМШ (МАШИНА)
1. Л-в	5	235	7
2. П-о	7	604	20
3. К-в	2	93	5
4. Ю-ч	2	171	8
5. Р-о	35	141	7
Сума	51	1244	47
Середнє	10,2	248,8	9,4

Чи можна стверджувати, що відмінності тривалості розв'язання анаграм досліджуваними достовірні?

[1] На практиці в більшості випадків цей рівень значущості вважається недостатнім для прийняття чи відхилення основної гіпотези при використанні χ^2_r-критерію Фрідмана.

[2] Цей приклад запозичено з [17].

Насамперед бачимо, що умови застосування критерію χ_r^2 виконуються: у вибірці не менше двох осіб (5), ознаки яких вимірювались не менше як у трьох умовах (3); дані подані в порядковій шкалі.

Сформулюємо основну і альтернативну гіпотези.

H_0: відмінності тривалості розв'язання трьох різних анаграм випадкові;

H_1: відмінності тривалості розв'язання трьох різних анаграм невипадкові.

Проранжуємо індивідуальні значення, отримані у трьох різних умовах, для кожного досліджуваного окремо. Розрахуємо суми рангів за умовами, в яких здійснювалися заміри. Результати ранжування і підсумовування наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Ранги тривалості розв'язання анаграм

Код імені досліджуваного	Анаграма 1		Анаграма 2		Анаграма 3	
	Тривалість розв'язання, с	Ранг	Тривалість розв'язання, с	Ранг	Тривалість розв'язання, с	Ранг
1. Л-в	5	1	235	3	7	2
2. П-о	7	1	604	3	20	2
3. К-в	2	1	93	3	5	2
4. Ю-ч	2	1	171	3	8	2
5. Р-о	35	2	141	3	7	1
Сума	51	6	1244	15	47	9

Перевіримо рівність загальної суми S_r рангів з розрахунковою $S_{\text{розр}}$:

$$S_{\text{розр}} = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} = n\frac{c(c+1)}{2} = 5 \cdot \frac{3 \cdot (3+1)}{2} = 30,$$

$$S_r = 6 + 15 + 9 = 30.$$

Розрахуємо емпіричне значення χ_r^2 за формулою

$$\chi^2_{r\,\text{емп}} = \frac{12}{nc(c+1)}\sum_{i=1}^{c} S_i^2 - 3n(c+1) =$$
$$= \frac{12}{5\cdot 3\cdot (3+1)}\cdot \left(6^2+15^2+9^2\right) - 3\cdot 5\cdot (3+1) =$$
$$= 8{,}4.$$

Оскільки $c = 3$, $n = 5 \leqslant 9$, рівні статистичної значущості для $\chi^2_{r\,\text{емп}}$ потрібно визначати за табл. Д.2.14.

Оскільки $\chi^2_{r\,\text{емп}} \geqslant \chi^2_{r\,0{,}01}$, гіпотеза H_0 відхиляється. Отже, відмінності тривалості розв'язання трьох різних анаграм невипадкові.

6.3.5. *L*-критерій тенденцій Пейджа

Непараметричний критерій L використовують для порівняння показників, виміряних у трьох і більше різних умовах на одній і тій же вибірці досліджуваних. Він дає змогу виявити тенденції зміни величин ознаки при переході від однієї умови до іншої. Його можна розглядати як продовження тесту Фрідмана, оскільки він не лише констатує відмінності, а й зазначає напрям змін.

Обмеження критерію *L*

Перед застосуванням критерію тенденцій Пейджа потрібно перевірити такі умови-обмеження.

1. Нижній поріг — два досліджуваних, кожний з яких пройшов не менше трьох замірів у різних умовах. Верхній поріг — 12 досліджуваних і 6 умов.
2. Дані повинні бути подані принаймні в порядковій шкалі.

Алгоритм розрахунку критерію *L*

Розрахунок критерію L тенденцій Пейджа зручно подати у вигляді алгоритму.

1. Перевірити, чи виконуються умови застосування критерію L.

2. Проранжувати індивідуальні значення першого досліджуваного, отримані ним у першому, другому, третьому та інших замірах. Так само проранжувати індивідуальні значення інших досліджуваних.

3. Розрахувати суми рангів за умовами, в яких здійснювалися заміри. Перевірити рівність загальної суми S_r рангів та розрахункової

$$S_{\text{розр}} = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} = n\frac{c(c+1)}{2},$$

де c — кількість замірів; n — обсяг вибірки; r_{ij} — ранг індивідуального значення i-го досліджуваного в j-му замірі.

4. Розташувати всі умови в порядку зростання їх рангових сум.

5. Сформулювати основну і альтернативну гіпотези.

H_0: збільшення індивідуальних показників при переході від першої умови до другої, а потім до третьої і далі випадкове;

H_1: збільшення індивідуальних показників при переході від першої умови до другої, а потім до третьої і далі невипадкове.

6. Обчислити емпіричне значення L за формулою

$$L_{\text{емп}} = \sum_{j=1}^{c} jS_j,$$

де j — порядковий номер умови в упорядкованій послідовності умов; $S_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}$ — сума рангів j-ї умови.

7. За табл. Д.2.16 визначити критичні значення $L_{0,01}$ і $L_{0,05}$ для заданих n і c.

8. Якщо $L_{\text{емп}} \geqslant L_{0,01}$, гіпотезу H_0 потрібно відхилити, якщо $L_{\text{емп}} < L_{0,05}$ — прийняти. Якщо $L_{0,05} \leqslant L_{\text{емп}} < L_{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,05 (або 5 %)[1].

Приклад 6.3.4. Продовжимо розгляд прикладу 6.3.3 з анаграмами. У табл. 1 тривалість розв'язання анаграм і їх ранги подані вже в порядку зростання: анаграма 1, анаграма 3, анаграма 2.

[1] На практиці в більшості випадків цей рівень значущості вважається недостатнім для прийняття чи відхилення основної гіпотези при використанні L-критерію тенденцій Пейджа.

Таблиця 1

Тривалість розв'язання анаграм 1, 3, 2 і їх ранги

Код імені досліджуваного	Умова 1: анаграма 1		Умова 2: анаграма 3		Умова 3: анаграма 2	
	Тривалість розв'язання, с	Ранг	Тривалість розв'язання, с	Ранг	Тривалість розв'язання, с	Ранг
1. Л-в	5	1	7	2	235	3
2. П-о	7	1	20	2	604	3
3. К-в	2	1	5	2	93	3
4. Ю-ч	2	1	8	2	171	3
5. Р-о	35	2	7	1	141	3
Сума	51	6	47	9	1244	15
Середнє	10,2		9,4		248,8	

Чи справді тривалість розв'язання збільшується при такій послідовності подання анаграм?

Насамперед бачимо, що умови застосування критерію L виконуються: у вибірці п'ять досліджуваних, кожний з яких пройшов три заміри; дані подані в порядковій шкалі.

Перевіримо рівність загальної суми S_r рангів та розрахункової $S_{\text{розр}}$:

$$S_{\text{розр}} = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} = n\frac{c(c+1)}{2} = 5 \cdot \frac{3 \cdot (3+1)}{2} = 30,$$

$$S_r = 6 + 9 + 15 = 30.$$

Як бачимо, середня тривалість розв'язання анаграми 3 навіть менша, ніж анаграми 1. Однак досліджуються не середньогрупові тенденції, а ступінь збігу індивідуальних тенденцій. У цьому разі важливий власне порядок, а не абсолютні показники часу. Тому й сформульовані гіпотези — це гіпотези про тенденції зміни індивідуальних показників.

Сформулюємо основну і альтернативну гіпотези.

H_0: тенденція збільшення індивідуальних показників від першої умови до третьої, а потім від третьої до другої випадкова;

H_1: тенденція збільшення індивідуальних показників від першої умови до третьої, а потім від третьої до другої невипадкова.

Розрахуємо емпіричне значення критерію L:

$$L_{\text{емп}} = \sum_{j=1}^{c} jS_j = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 15 = 6 + 18 + 45 = 69.$$

За табл. Д.2.16 визначаємо критичні значення L для $n = 5$, $c = 3$:

$$L_{0,01} = 68; \qquad L_{0,05} = 66.$$

Оскільки $L_{0,01} < L_{\text{емп}}$, гіпотеза H_0 відхиляється. Приймається гіпотеза H_1. Отже, тенденція збільшення індивідуальних показників від першої умови до третьої невипадкова. Послідовність анаграм — 1 (КРУА), 3 (ИНААМШ), 2 (АЛСТЬ) — більшою мірою відповідатиме задуму експериментатора про поступове зростання складності задач, ніж початкова послідовність.

6.4. Порівняння розподілів

За даними аналізу реально отриманих у дослідженнях розподілів можна підтвердити чи відхилити теоретичні припущення. Наприклад, при розв'язанні простої і складної задач розподіл часу може бути суттєво різний. Якщо довести, що розподіли статистично достовірно різні, це може стати основою для побудови класифікацій задач і типологій досліджуваних. Наприклад, можна виявити досліджуваних зі стандартним співвідношенням ознак (просту задачу вони розв'язують швидко, важку — повільно) і нестандартним співвідношенням (просту задачу вони розв'язують повільно, важку — швидко) тощо. Крім того, можна порівняти виявлені групи досліджуваних за показниками мотивації досягнення, оскільки відомо, що особи з переважанням прагнення до успіху віддають перевагу задачам середньої важкості, де ймовірність успіху становить приблизно 0,5, а особи з переважанням прагнення уникати невдачі віддають перевагу або дуже легким, або дуже важким задачам.

Часто доцільно також порівняти отриманий емпіричний розподіл з теоретичним. Наприклад, для того щоб довести, що він підпорядковується чи, навпаки, не підпорядковується нормальному закону розподілу.

У практичних цілях емпіричні розподіли повинні перевірятися на "нормальність" тоді, коли необхідно використати параметричні методи і критерії.

6.4.1. Алгоритм прийняття рішення про вибір критерію для порівняння розподілів

Перш ніж перейти до викладу конкретних статистичних критеріїв порівняння розподілів, розглянемо алгоритм (рис. 6.5), за допомогою якого можна буде визначитися з вибором критерію.

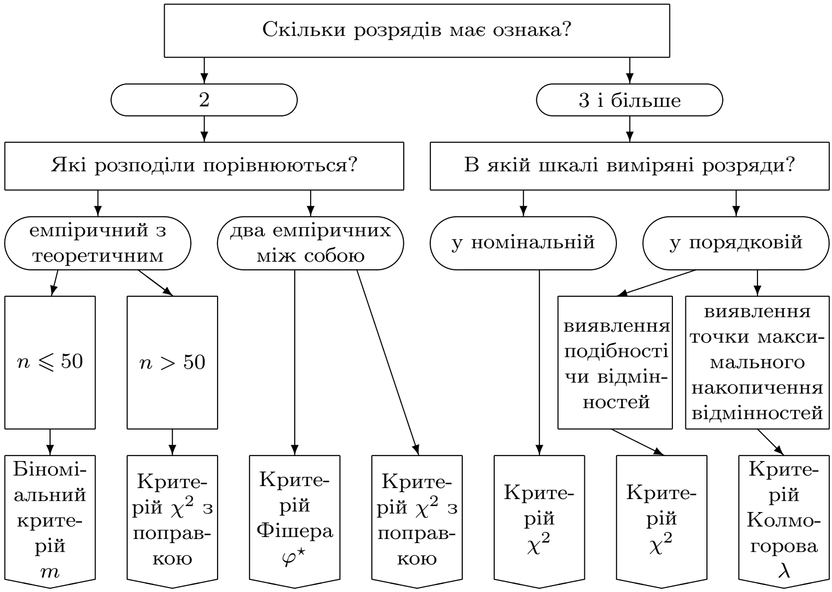


Рис. 6.5. **Алгоритм прийняття рішення про вибір критерію для розпізнавання зсувів**

6.4.2. λ-критерій Колмогорова—Смірнова

Критерій λ використовують для порівняння двох розподілів: емпіричного з теоретичним або двох емпіричних. За його допомогою можна знайти точку, в якій сума накопичених розбіжностей між двома розподілами найбільша і, крім того, оцінити достовірність цієї розбіжності.

Обмеження критерію λ

Перед застосуванням критерію Колмогорова—Смірнова потрібно перевірити такі умови-обмеження.

1. У випадку порівняння двох емпіричних розподілів кількість спостережень в обох вибірках не повинна бути менше 50, а при порівнянні емпіричного розподілу з теоретичним іноді допускається п'ять і більше спостережень.

2. Дані повинні подаватися принаймні в порядковій шкалі, оскільки розряди повинні бути впорядковані за зростанням або спаданням деякої ознаки, відображати якусь односпрямовану її зміну.

Алгоритм розрахунку критерію λ

Розрахунок критерію λ Колмогорова—Смірнова зручно подати у вигляді алгоритму.

1. Перевірити, чи виконуються умови застосування критерію λ.

2. Сформулювати основну і альтернативну гіпотези.

H_0: відмінності між двома розподілами недостовірні;

H_1: відмінності між двома розподілами достовірні.

3. Занести в таблицю розряди і відповідні частоти порівнюваних розподілів.

4. Обчислити відносні частоти порівнюваних розподілів.

5. Розрахувати накопичені відносні частоти порівнюваних розподілів.

6. Обчислити абсолютні значення різниць відповідних накопичених відносних частот порівнюваних розподілів. Найбільшу різницю позначити $d_{\max}$.

7. При порівнянні двох емпіричних розподілів розрахувати емпіричне значення критерію λ за формулою

$$\lambda_{\text{емп}} = d_{\max}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}},$$

де n_1, n_2 — обсяг вибірки відповідно першої та другої.

8. При порівнянні двох емпіричних розподілів за табл. Д.2.19 визначити рівень статистичної значущості, який відповідає отриманому значенню $\lambda_{\text{емп}}$ і на цій основі дійти висновку про прийняття чи відхилення основної гіпотези. Якщо рівень статистичної значущості не перевищує 0,01, гіпотеза H_0 відхиляється, а якщо перевищує 0,05, ця гіпотеза приймається. В інших випадках гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості, що відповідає отриманому значенню $\lambda_{\text{емп}}$.

У разі порівняння емпіричного розподілу з теоретичним за табл. Д.2.18 для заданого обсягу вибірки n визначити критичне значення $d_{\max}$. Якщо $d_{\max}^{\text{емп}} \geqslant d_{\max}^{0{,}01}$, гіпотеза H_0 відхиляється, якщо $d_{\max}^{\text{емп}} < d_{\max}^{0{,}05}$ — приймається. Якщо $d_{\max}^{0{,}05} \leqslant d_{\max}^{\text{емп}} < d_{\max}^{0{,}01}$, гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,05 (або 5 %)[1].

Приклад 6.4.1. У вибірці здорових осіб чоловічої статі, студентів технічних і військово-технічних вищих навчальних закладів віком 19–22 років (середній вік — 20 років), проводився тест Люшера у восьмикольоровому варіанті[2]. Встановлено, що жовтому кольору досліджувані віддають перевагу частіше, ніж відхиляють (табл. 1).

Таблиця 1

Емпіричні частоти потрапляння жовтого кольору на кожну з восьми позицій

Позиція жовтого кольору	1	2	3	4	5	6	7	8	Сума
Емпірична частота	24	25	13	8	15	10	9	8	102

[1] На практиці в більшості випадків цей рівень значущості вважається недостатнім для прийняття чи відхилення основної гіпотези при використанні λ-критерію Колмогорова—Смірнова.

[2] Цей приклад запозичено з [17].

Чи можна стверджувати, що розподіл жовтого кольору за восьмома позиціями у здорових досліджуваних відрізняється від рівномірного[1] розподілу?

Насамперед бачимо, що умови застосування критерію λ Колмогорова—Смірнова виконуються: маємо $N = 102$ спостереження; дані подані в порядковій шкалі.

Сформулюємо гіпотези.

H_0: емпіричний розподіл жовтого кольору за восьмома позиціями не відрізняється від рівномірного розподілу;

H_1: емпіричний розподіл жовтого кольору за восьмома позиціями відрізняється від рівномірного розподілу.

Результати подальших розрахунків занесемо в табл. 2.

Таблиця 2

Розрахунок критерію λ при порівнянні розподілу виборів жовтого кольору з рівномірним розподілом

Позиція жовтого кольору	Емпірична частота	Накопичена емпірична частота	Накопичена емпірична частість	Накопичена теоретична частість	Різниця
1	2	3	4	5	6
1	24	24	0,235	0,125	0,110
2	15	39	0,382	0,250	0,132
3	13	52	0,510	0,375	0,135
4	8	60	0,588	0,500	0,088
5	15	75	0,735	0,625	0,110
6	10	85	0,833	0,750	0,083
7	9	94	0,922	0,875	0,047
8	8	102	1,000	1,000	0,000

У перших двох стовпцях табл. 2 записано вихідні дані: позиції жовтого кольору та відповідні частоти, у стовпці 3 наведено накопичені емпіричні частоти, які згідно з означенням 2.18 отримані додаванням поточної частоти до суми попередніх, наприклад,

$$cn_5 = cn_4 + n_5 = 60 + 15 = 75.$$

[1]Нагадаємо, що означення і вигляд рівномірних розподілів розглянуті в підрозд. 3.2.

Накопичені емпіричні частості отримано діленням відповідних накопичених частот на обсяг вибірки, наприклад,

$$cw_5 = \frac{cn_5}{N} = \frac{75}{102} \approx 0{,}735.$$

Накопичені теоретичні частості визначено згідно з означенням дискретного рівномірного розподілу (див. п. 3.2.1) у такий спосіб: оскільки маємо 8 варіант, то їх відносні частоти дорівнюють $1/8 = 0{,}125$, а накопичені відносні частоти знаходимо з таких самих міркувань, як і у випадку з емпіричними частостями, тобто перша теоретична накопичена частість дорівнює 0,125, друга — $0{,}125 + 0{,}125 = 0{,}250$ і так до кінця.

Нарешті, у графі 6 табл. 2 розраховано різницю між емпіричними та теоретичними накопиченими частостями, наприклад,

$$d_5 = \left| cw_5^{\text{емп}} - cw_5^{\text{теор}} \right| = 0{,}735 - 0{,}625 = 0{,}110.$$

Як бачимо, найбільшою є різниця 0,135 між накопиченими частостями третьої позиції, отже,

$$d_{\max}^{\text{емп}} = 0{,}135.$$

За табл. Д.2.18 визначимо критичне значення $d_{\max}$ для обсягу вибірки $N = 102$:

$$d_{\max}^{0,05} = \frac{1{,}36}{\sqrt{N}} = \frac{1{,}36}{\sqrt{102}} \approx 0{,}1347;$$
$$d_{\max}^{0,01} = \frac{1{,}63}{\sqrt{N}} = \frac{1{,}63}{\sqrt{102}} \approx 0{,}1614.$$

Оскільки $d_{\max}^{\text{емп}} > d_{\max}^{0,05}$, гіпотеза H_0 відхиляється (на рівні значущості 0,05). Приймається гіпотеза H_1. Отже, розподіл жовтого кольору за восьмома позиціями відрізняється від рівномірного розподілу (на рівні значущості 0,05).

Приклад 6.4.2. Порівняємо дані прикладу 6.4.1 з даними дослідження Г. Клара[1]. Останній зауважив, що жовтий колір єдиний

[1] Цей приклад запозичено з [17].

серед восьми кольорів рівномірно розподілений за вісьмома позиціями. Для порівняння він використав критерій χ^2. Отримані ним емпіричні частоти наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Емпіричні частоти потрапляння жовтого кольору на кожну з восьми позицій у дослідженні Г. Клара

Позиції жовтого кольору	1	2	3	4	5	6	7	8	Сума
Емпіричні частоти	98	113	116	87	91	112	97	86	800

Насамперед бачимо, що умови застосування критерію λ Колмогорова—Смірнова виконуються: маємо відповідно $n_1 = 102$ і $n_2 = 800$ спостережень; дані подані в порядковій шкалі.

Сформулюємо гіпотези.

H_0: емпіричні розподіли жовтого кольору за вісьмома позиціями не відрізняються;

H_1: емпіричні розподіли жовтого кольору за вісьмома позиціями відрізняються.

Результати подальших розрахунків занесемо в табл. 2. Техніка цих розрахунків така сама, як і у прикладі 6.4.1, вибірку з якого назвемо "Вибірка 1", а вибірку Клара — "Вибірка 2" (скорочено В1 і В2).

Таблиця 2

Розрахунок критерію λ при порівнянні емпіричних розподілів виборів жовтого кольору

Позиція жовтого кольору	Емпіричні частоти		Накопичені емпіричні частоти		Накопичені емпіричні частості		Різниця
	В1	В2	В1	В2	В1	В2	
1	24	98	24	98	0,235	0,123	0,112
2	15	113	39	211	0,382	0,264	0,118
3	13	116	52	327	0,510	0,409	0,101
4	8	87	60	414	0,588	0,518	0,070
5	15	91	75	505	0,735	0,631	0,104
6	10	112	85	617	0,833	0,771	0,062
7	9	97	94	714	0,922	0,893	0,029
8	8	86	102	800	1,000	1,000	0,000

Як бачимо, найбільша різниця 0,118 між накопиченими частостями другої позиції, отже,

$$d_{\max} = 0{,}118.$$

Розрахуємо емпіричне значення критерію λ:

$$\lambda_{\text{емп}} = d_{\max}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} = 0{,}118 \cdot \sqrt{\frac{102 \cdot 800}{102 + 800}} \approx 1{,}12.$$

За табл. Д.2.19 визначимо рівень статистичної значущості емпіричного значення критерію λ. Значенню 1,12 відповідає рядок із заголовком 1,1 і стовпець із заголовком 2 (другий знак після коми):

$$\alpha = 0{,}16264.$$

Оскільки $\alpha > 0{,}05$, гіпотеза H_0 приймається, тобто емпіричні розподіли жовтого кольору за восьмома позиціями в обох вибірках збігаються. Отже, розподіли обох вибірок збігаються, але водночас по-різному співвідносяться з рівномірним розподілом: перша вибірка розподілена нерівномірно, друга — рівномірно. Це спричинено тим, що розподіл першої вибірки більшою мірою відрізняється від рівномірного, ніж розподіл другої, тому подібність розподілу другої вибірки до рівномірного ще можна встановити, а першого неможливо. У таких випадках для формулювання остаточних підсумків пропонують поєднати використання критерію λ з критерієм $\varphi^\star$ (кутове перетворення Фішера).

6.4.3. Критерій $\varphi^\star$ — кутове перетворення Фішера

Непараметричний критерій $\varphi^\star$ використовують для порівняння двох вибірок за частотою виявлення певного ефекту. Цим ефектом може бути:

- певне значення якісно визначеної ознаки, наприклад, вираження згоди з деяким реченням, належність до певної статі тощо;
- певний рівень кількісно виміряної ознаки, наприклад, розв'язання задачі швидше ніж 20 с, вибір дистанції зі співрозмовником понад 50 см тощо;

• певне співвідношення значень чи рівнів досліджуваної ознаки, наприклад, переважне виявлення крайніх значень ознаки (як найвищих, так і найнижчих), переважання позитивних зрушень над негативними тощо.

Критерій $\varphi^\star$ оцінює достовірність відмінностей між відсотковими частками (іншими словами, пропорціями) двох вибірок, в яких зареєстровано ефект, що становить інтерес.

Обмеження критерію $\varphi^\star$

Перед застосуванням кутового перетворення Фішера потрібно перевірити такі умови-обмеження.

1. Жодна з порівнюваних часток не може дорівнювати нулю.

2. Верхньої межі для обсягу вибірок при застосуванні критерію $\varphi^\star$ немає. Нижня межа — п'ять спостережень. Якщо в одній з вибірок не менше п'яти спостережень, то в іншій має бути не менше 30, 7 і 5 при відповідно 2, 3 і 4 спостереженнях у першій вибірці.

Алгоритм розрахунку критерію $\varphi^\star$

Розрахунок критерію $\varphi^\star$ зручно подати у вигляді алгоритму.

1. Визначити значення ознаки, які будуть критерієм розподілу досліджуваних на тих, що мають "ефект", і тих, хто немає "ефекту". У випадку кількісного вимірювання ознаки для пошуку оптимальної точки розподілу використати критерій λ Колмогорова—Смірнова.

2. Перевірити, чи виконуються умови застосування критерію $\varphi^\star$.

3. Визначити відсоткові частки досліджуваних, у яких "ефект є", як це показано в означенні 2.1. Записати ці відсотки поруч з відповідними їм значеннями в лівому стовпці чотирикоміркової таблиці розміром 2×2. Перший стовпець — "ефект є", другий — "ефекту немає"; перший рядок — вибірка 1 (вибірка з більшою відсотковою часткою), другий — вибірка 2 (вибірка з меншою відсотковою часткою). У відповідний спосіб заповнити таблицю.

4. Сформулювати основну і альтернативну гіпотези.

H_0: частка тих, хто має досліджуваний ефект, у вибірці 1 не більша, ніж у вибірці 2;

H_1: частка тих, хто має досліджуваний ефект, у вибірці 1 більша, ніж у вибірці 2.

5. За табл. Д.2.13 визначити кути φ_1 та φ_2 для порівнюваних відсоткових часток.

6. Обчислити емпіричне значення $\varphi^\star$ за формулою

$$\varphi^\star_{\text{емп}} = (\varphi_1 - \varphi_2)\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}},$$

де n_1, n_2 — обсяг вибірки відповідно першої та другої.

7. За табл. Д.2.12 визначити рівень значущості отриманого $\varphi^\star_{\text{емп}}$ і на цій підставі дійти висновку про прийняття чи відхилення основної гіпотези. Якщо рівень значущості отриманого $\varphi^\star_{\text{емп}}$ менший від 0,01 (тобто 1 %), гіпотеза H_0 відхиляється, якщо щонайменше 0,05 — приймається. В інших випадках гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості, що відповідає отриманому $\varphi^\star_{\text{емп}}$ (тобто на рівні значущості 1–5 %)[1].

Приклад 6.4.3. Припустимо, вивчаються студенти двох академічних груп щодо розв'язання завдання атестаційної контрольної роботи з навчальної дисципліни "Математико-статистичні методи у психології". У першій групі з 25 студентів завдання розв'язали 20, у другій з 20 студентів — 12.

Визначити, чи різняться академічні групи за рівнем успішності з навчальної дисципліни "Математико-статистичні методи у психології" з огляду на результати розв'язання завдання.

Оскільки в обох групах понад 5 спостережень і в жодній з них кількість студентів, що розв'язали завдання, не дорівнює нулю, умови застосування критерію $\varphi^\star$ виконуються.

Визначимо пропорції "успішних" студентів в обох групах:

$$P_1 = \frac{m_1}{n_1} \cdot 100\,\% = \frac{20}{25} \cdot 100\,\% = 80\,\%;$$
$$P_2 = \frac{m_2}{n_2} \cdot 100\,\% = \frac{12}{20} \cdot 100\,\% = 60\,\%.$$

[1] На практиці в більшості випадків цей рівень значущості вважається недостатнім для прийняття чи відхилення основної гіпотези при використанні кутового перетворення Фішера.

Побудуємо чотирикоміркову таблицю і відповідним способом заповнимо її.

Чотирикоміркова таблиця для розрахунку критерію $\varphi^\star$ при порівнянні двох груп за відсотковою часткою "успішності"

Група	Кількість студентів		Разом
	"успішних"	"неуспішних"	
1	20 (80 %)	5	25
2	12 (60 %)	8	20
Разом	32	13	45

Сформулюємо гіпотези.

H_0: частка "успішних" студентів у першій групі не більша, ніж у другій;

H_1: частка "успішних" студентів у першій групі більша, ніж у другій.

За табл. Д.2.13 визначаємо

$$\varphi_1(80\,\%) = 2{,}2143;$$
$$\varphi_2(60\,\%) = 1{,}7722.$$

Емпіричне значення $\varphi^\star$

$$\varphi^\star_{\text{емп}} = (\varphi_1 - \varphi_2)\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} = (2{,}2143 - 1{,}7722) \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot 20}{25 + 20}} \approx 1{,}47.$$

За табл. Д.2.12 визначимо рівень значущості отриманого значення $\varphi^\star_{\text{емп}}$:

$$\alpha = 0{,}071.$$

Оскільки $\alpha > 0{,}05$, гіпотеза H_0 приймається, тобто частка "успішних" студентів у першій групі не більша, ніж у другій. Хоча на перший погляд може здатися, що правильна альтернативна гіпотеза H_1, оскільки відсоток тих, хто не розв'язав завдання у другій групі (40 %) вдвічі більший, ніж у першій (20 %). Це переконливо свідчить про те, що перед формулюванням висновку навіть в "очевидних" випадках слід перевірити його з позицій статистики.

6.4.4. Біноміальний критерій m

Непараметричний критерій m призначений для порівняння частоти виявлення деякого ефекту з його теоретичною чи заданою частотою. За допомогою цього критерію оцінюють те, якою мірою емпірична частота ефекту, що становить інтерес, перевищує теоретичну, середньостатистичну чи будь-яку іншу задану частоту, яка відповідає ймовірності випадкового вгадування, середньому відсотку успішності при виконанні деякого завдання тощо.

Біноміальний критерій m застосовують у разі дослідження тільки однієї вибірки.

Обмеження критерію m

Перед застосуванням біноміального критерію m потрібно перевірити певні умови-обмеження.

1. Обсяг вибірки не повинен бути менший від 5. Якщо обсяг вибірки менший від 5, але перевищує 2, то критерій m застосовують у випадках, передбачених табл. Д.2.20.

2. Верхня межа обсягу вибірки для застосування біноміального критерію залежить також від наявних таблиць критичних значень і варіюється від 50 до 300 спостережень.

3. За допомогою біноміального критерію можна перевірити тільки гіпотезу про те, що ефект, який становить інтерес, у дослідженій вибірці перевищує задану ймовірність P. При цьому ймовірність не повинна перевищувати 0,5:

$$P \leqslant 0{,}5.$$

4. Якщо потрібно перевірити гіпотезу про те, що емпірична частота менша від заданої ймовірності, то при $P > 0{,}5$ можна замінити гіпотези на протилежні (тобто інтерес становитимуть не "успіхи", а "невдачі"); при $P = 0{,}5$ це можна зробити за допомогою критерію знаків G або замінити гіпотези на протилежні, а при $P < 0{,}5$ доведеться використати критерій χ^2.

Алгоритм розрахунку критерію m

Розрахунок критерію m зручно подати у вигляді алгоритму.

1. Перевірити, чи виконуються умови застосування критерію m. У разі потреби (див. п. 4 обмежень критерію m) внести необхідні зміни.

2. Визначити теоретичну частоту виявлення ефекту за формулою

$$n_{\text{теор}} = nP,$$

де n — обсяг вибірки; P — задана ймовірність досліджуваного ефекту.

3. Сформулювати основну і альтернативну гіпотези.

H_0: частота виявлення ефекту в досліджуваній вибірці не перевищує теоретичну (задану, очікувану);

H_1: частота виявлення ефекту в досліджуваній вибірці перевищує теоретичну (задану, очікувану).

4. За табл. Д.2.20 визначити критичні значення критерію $m_{0,05}$ і $m_{0,01}$ для заданих n і P.

5. Емпіричною частотою виявлення ефекту $m_{\text{емп}}$ вважати частоту виявлення цього ефекту в досліджуваній вибірці.

6. Якщо $m_{\text{емп}} \geqslant m_{0,01}$, гіпотезу H_0 потрібно відхилити, якщо $m_{\text{емп}} \leqslant m_{0,05}$ — прийняти. Якщо $m_{0,01} < m_{\text{емп}} < m_{0,05}$, гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,05 (або 5 %)[1].

Приклад 6.4.4. У процесі тренінгу сенситивності у групі з 14 осіб виконувалася вправа “Психологічний прогноз”[2]. Усі учасники повинні були уважно слідкувати за однією і тією самою людиною, яка виявила бажання виконувати роль піддослідного в цій вправі. Кожний з учасників ставив досліджуваному запитання, які передбачають два варіанти відповіді. Наприклад: “Що в тобі переважає: відсторонена спостережуваність чи включена емпатія?”, “Чи продовжував би ти працювати, якби з’явилася матеріальна можливість не працювати?”, “Хто тебе більшою мірою втомлює — люди нахабні чи занудні?” Досліджуваний не повинен був відповідати, а учасники в цей час намагалися визначити, як він відповість на запитання, і

[1]На практиці в більшості випадків такий рівень значущості для біноміального критерію m вважається неприйнятним.

[2]Цей приклад запозичено з [17].

записували власні прогнози. Потім ведучий пропонував досліджуваному відповісти на задане запитання. У результаті кожний учасник міг визначити, чи збігався його прогноз з відповіддю досліджуваного. Після того, як було поставлено 14 запитань (13 учасників плюс ведучий), кожен повідомив про кількість власних точних прогнозів. У середньому виявилось по 7–8 збігів, а в одного — аж 12, і група йому спонтанно зааплодувала, в іншого — лише 4, і він засмутився.

Визначимо, чи мала група статистичні підстави для аплодисментів і чи мав засмучений учасник статистичні підстави для смутку.

Почнемо з першого питання.

Перевіримо умови застосування біноміального критерію m: обсяг вибірки перевищує 5 і менший від 50; заданою ймовірністю можна вважати $P = 0{,}5$ (оскільки ймовірність правильного прогнозу при випадковому вгадуванні дорівнюватиме ймовірності неправильного прогнозу $Q = 1 - P = 0{,}5$). Потрібно перевірити гіпотезу про те, що точність прогнозів перевищує задану ймовірність.

Визначимо теоретичну частоту правильних випадкових вгадувань:

$$n_{\text{теор}} = nP = 14 \cdot 0{,}5 = 7.$$

Сформулюємо основну і альтернативну гіпотези.

H_0: кількість точних прогнозів не перевищує частоту, що відповідає ймовірності випадкового вгадування;

H_1: кількість точних прогнозів перевищує частоту, що відповідає ймовірності випадкового вгадування.

За табл. Д.2.20 визначимо критичні значення критерію $m_{0,05}$ і $m_{0,01}$ для заданих $n = 14$ і $P = 0{,}5$:

$$m_{0,05} = 11, \qquad m_{0,01} = 12.$$

Емпіричною частотою виявлення ефекту $m_{\text{емп}}$ вважатимемо частоту виявлення ефекту в досліджуваній вибірці, тобто

$$m_{\text{емп}} = 12.$$

Оскільки $m_{\text{емп}} \geqslant m_{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється. Приймається гіпотеза H_1. Отже, група мала всі підстави для аплодисментів.

Тепер розглянемо друге питання.

Для цього потрібно перевірити гіпотезу про те, що точність прогнозів нижча від заданої ймовірності. Згідно з обмеженнями біноміального критерію m можливі два шляхи:

- застосувати критерій знаків G;
- замінити гіпотези на протилежні.

Розглянемо обидва випадки.

1. Сформулюємо основну і альтернативну гіпотези у разі критерію знаків.

H_0: переважання неправильних прогнозів випадкове;

H_1: переважання неправильних прогнозів невипадкове.

За табл. Д.2.10 визначимо критичні значення критерію $G_{0,05}$ і $G_{0,01}$ для заданого $n = 14$:

$$G_{0,05} = 3; \qquad G_{0,01} = 2.$$

Емпіричним значенням $G_{\text{емп}}$ вважатимемо частоту правильних відповідей, тобто

$$G_{\text{емп}} = 4.$$

Оскільки $G_{\text{емп}} > G_{0,05}$, гіпотеза H_0 приймається, отже, засмучений учасник не мав статистичних підстав для смутку.

2. Для застосування біноміального критерію m потрібно замінити гіпотези на протилежні. Іншими словами, інтерес становитимуть неправильні прогнози.

Теоретична ймовірність неправильного випадкового прогнозу в цьому разі така сама, як і правильного:

$$P = 0{,}5.$$

Сформулюємо основну і альтернативну гіпотези.

H_0: кількість неточних прогнозів не перевищує частоту, що відповідає ймовірності неправильного випадкового прогнозу;

H_1: кількість неточних прогнозів перевищує частоту, що відповідає ймовірності неправильного випадкового прогнозу.

За табл. Д.2.20 визначимо критичні значення критерію $m_{0,05}$ і $m_{0,01}$ для заданих $n = 14$ і $P = 0{,}5$:

$$m_{0,05} = 11, \qquad m_{0,01} = 12.$$

Емпіричною частотою виявлення цього ефекту $m_{\text{емп}}$ вважатимемо частоту неправильних прогнозів, тобто

$$m_{\text{емп}} = 14 - 4 = 10.$$

Оскільки $m_{\text{емп}} < m_{0,01}$, гіпотеза H_0 приймається. Отже, засмучений учасник не мав статистичних підстав для смутку.

Як бачимо, результати застосування критеріїв G і m збіглись. Однак у цьому разі психологічна "вагомість" відхилення оцінки засмученого учасника значно переважає статистичну. Кожний психолог-практик погодиться, що привід для засмучення цей учасник мав.

Важлива особливість критеріїв G і m полягає в тому, що вони перетворюють унікальність, єдиність і життєву рідкість події, що відбулася, на дещо таке, що не відрізняється від всепоглинаючої випадковості, позаяк доцільніше використовувати біноміальний критерій для розв'язання відстороненіших, формалізованіших задач, наприклад, для врівноваження вибірок за статевою ознакою, віком, професійною приналежністю тощо. При оцінюванні ж особистісно значущих подій виявляється, що статистичний аспект не збігається з психологічним більшою мірою, ніж при використанні будь-якого іншого критерію.

6.4.5. Критерій χ^2 Пірсона

Критерій χ^2 Пірсона широко застосовують для найрізноманітніших цілей. Розглянемо його застосування для двох цілей[1]:

1) порівняння емпіричного розподілу ознаки з теоретичним;

2) порівняння двох, трьох або більше емпіричних розподілів однієї й тієї самої ознаки.

[1]У підрозд. 7.1.2 розглянемо застосування критерію Пірсона для аналізу кореляції номінальних ознак.

Критерій χ^2 Пірсона відповідає на питання, чи з однаковою частотою зустрічаються різні значення ознаки в порівнюваних розподілах.

Обмеження критерію χ^2

Перед застосуванням критерію χ^2 Пірсона потрібно перевірити певні умови-обмеження.

1. Обсяг вибірки повинен бути великий:

$$n \geqslant 30.$$

У противному разі критерій χ^2 дає доволі приблизні значення. Точність цього критерію підвищується зі збільшенням n.

2. Теоретична частота для кожної комірки таблиці не повинна бути меншою від 5. Іншими словами, якщо кількість розрядів задана наперед і не може бути змінена, застосувати критерій χ^2 неможливо, не накопичивши певної мінімальної кількості спостережень. У противному разі нечисленні частоти вибірки (< 5) слід попередньо об'єднати із сусідніми так, щоб позбутися "нечисленності", і тільки після цього до виправленого розподілу застосувати критерій χ^2.

3. Вибрані розряди повинні "вичерпувати" розподіл, тобто охоплювати весь діапазон варіативності ознак. При цьому групування на розряди має бути однакове для всіх порівнюваних розподілів.

Алгоритм розрахунку критерію χ^2

Розрахунок критерію χ^2 зручно подати у вигляді алгоритму.

1. Перевірити, чи виконуються умови застосування критерію χ^2. У разі потреби (див. п. 2 обмежень критерію χ^2) внести необхідні зміни.

2. Сформулювати основну і альтернативну гіпотези.

H_0: порівнювані розподіли не різняться;

H_1: порівнювані розподіли різняться.

3. Занести в розрахункову таблицю критерію χ^2 назви розрядів і відповідні емпіричні частоти.

4. Занести в розрахункову таблицю критерію χ^2 відповідні теоретичні частоти. При порівнянні емпіричних розподілів теоретичні частоти

$$n_{ij}^{\text{теор}} = \frac{n_i n_j}{n},$$

де $n_i = \sum_{j=1}^{c} n_{ij}$ — сума частот i-го розряду; n_j — обсяг j-го емпіричного розподілу; $n = \sum_{j=1}^{c} n_j$ — загальна кількість спостережень емпіричних розподілів (вибірок); c — кількість порівнюваних розподілів.

5. Визначити кількість ступенів вільності v критерію χ^2 за формулою

$$v = (k-1)(c-1),$$

де k — кількість розрядів.

6. Якщо $v \geqslant 2$, то емпіричне значення критерію χ^2 обчислюється за такими формулами:

- при порівнянні емпіричного розподілу з теоретичним

$$\chi^2_{\text{емп}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i^{\text{теор}} - n_i\right)^2}{n_i^{\text{теор}}},$$

де $n_i^{\text{теор}}$, n_i — частота i-го розряду відповідно теоретична та емпірична;

- при порівнянні емпіричних розподілів

$$\chi^2_{\text{емп}} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{c} \frac{\left(n_{ij}^{\text{теор}} - n_{ij}\right)^2}{n_{ij}^{\text{теор}}},$$

де n_{ij} — емпірична частота i-го розряду j-го емпіричного розподілу.

Якщо $v = 1$, то при обчисленні емпіричного значення критерію χ^2 вноситься поправка на неперервність[1], яка полягає в тому, що від

[1] Поправка на неперервність у цьому разі призначена для коригування невідповідності між дискретним біноміальним розподілом і неперервним розподілом.

абсолютного значення кожної різниці, що входить у суму при обчисленні емпіричного значення критерію χ^2, віднімається 0,5, тобто формули для $\chi^2_{\text{емп}}$ відповідно для випадку порівняння емпіричного розподілу з теоретичним і емпіричних між собою наберуть такого вигляду:

$$\chi^2_{\text{емп}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\left|n_i^{\text{теор}} - n_i\right| - 0{,}5\right)^2}{n_i^{\text{теор}}},$$

$$\chi^2_{\text{емп}} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{c} \frac{\left(\left|n_{ij}^{\text{теор}} - n_{ij}\right| - 0{,}5\right)^2}{n_{ij}^{\text{теор}}}.$$

7. За табл. Д.2.17 визначити критичні значення критерію $\chi^2_{0,05}$ і $\chi^2_{0,01}$ для заданої кількості ступенів вільності v.

8. Якщо $\chi^2_{\text{емп}} \geqslant \chi^2_{0,01}$, гіпотезу H_0 потрібно відхилити, якщо $\chi^2_{\text{емп}} \leqslant \chi^2_{0,05}$ — прийняти. Якщо $\chi^2_{0,05} < \chi^2_{\text{емп}} < \chi^2_{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,05 (або 5 %)[1].

Приклад 6.4.5. При дослідженні порогів соціального атому[2] професійні психологи повинні були визначити, з якою частотою зустрічаються в їх записнику чоловічі та жіночі імена колег-психологів[3].

Чи відрізняється розподіл, отриманий за записником жінки-психолога А, від рівномірного розподілу?

Емпіричні частоти подано в табл. 1.

Таблиця 1

Емпіричні частоти чоловічих і жіночих імен у записнику жінки-психолога А

Стать	Чоловік	Жінка	Сумарна кількість
Емпірична частота	22	45	67

[1]На практиці в більшості випадків цей рівень значущості вважається недостатнім для прийняття чи відхилення основної гіпотези при використанні критерію χ^2 Пірсона.

[2]Соціальний атом — це сукупність усіх відносин між людиною та оточенням, з яким вона на цей момент певним способом пов'язана.

[3]Цей приклад запозичено з [17].

Перш ніж перевірити умови застосування критерію χ^2, розрахуємо теоретичні частоти. Оскільки емпіричний розподіл порівнюватиметься з рівномірним розподілом [1], то

$$n_1^{\text{теор}} = n_2^{\text{теор}} = \frac{n}{k} = \frac{67}{2} = 33{,}5.$$

Перевіримо умови застосування критерію χ^2: обсяг вибірки перевищує 30; теоретична частота для кожної комірки таблиці щонайменше дорівнює 5; вибрані розряди "вичерпують" розподіл.

Сформулюємо основну і альтернативну гіпотези.

H_0: розподіл жіночих і чоловічих імен у записнику жінки-психолога А не відрізняється від рівномірного розподілу;

H_1: розподіл жіночих і чоловічих імен у записнику жінки-психолога А відрізняється від рівномірного розподілу.

Побудуємо таблицю для розрахунку емпіричного значення критерію χ^2, враховуючи, що кількість ступенів вільності

$$v = (k - 1)(v - 1) = (2 - 1)(2 - 1) = 1,$$

тобто в розрахунках потрібно зробити поправку на неперервність.

Пояснимо порядок розрахунків:

- перші три рядки табл. 2 — вихідні дані;
- четвертий рядок — різниця відповідних значень другого і першого рядків (якщо сума цих різниць не дорівнює нулю, то це свідчить про помилку в розрахунках);
- п'ятий рядок (поправка на неперервність) отримується відкиданням знаку від значень четвертого рядка і відніманням від цих результатів 0,5 (цей рядок при $v \geqslant 2$ пропускається);
- шостий рядок — квадрати відповідних значень п'ятого рядка;
- сьомий рядок отримується діленням значень шостого рядка на відповідні значення третього рядка;
- сума значень сьомого рядка — шукане емпіричне значення критерію χ^2. Отже,

$$\chi^2_{\text{емп}} \approx 7{,}224.$$

[1] Див. означення 3.2.1 дискретного рівномірного розподілу.

Таблиця 2

Розрахунок критерію χ^2 при порівнянні емпіричного розподілу імен з теоретичним рівномірним розподілом

Розряд (стать)	Чоловік	Жінка	Разом
Емпірична частота n_i	22	45	67
Теоретична частота $n_i^{\text{теор}}$	33,5	33,5	67
$n_i^{\text{теор}} - n_i$	+11,5	−11,5	0
$\left\lvert n_i^{\text{теор}} - n_i \right\rvert - 0{,}5$	11	11	
$\left(\left\lvert n_i^{\text{теор}} - n_i \right\rvert - 0{,}5\right)^2$	121	121	
$\dfrac{\left(\left\lvert n_i^{\text{теор}} - n_i \right\rvert - 0{,}5\right)^2}{n_i^{\text{теор}}}$	3,612	3,612	7,224

За табл. Д.2.17 визначимо критичні значення критерію $\chi^2_{0,05}$ і $\chi^2_{0,01}$ для кількості ступенів вільності $v = 1$:

$$\chi^2_{0,05} = 3{,}841, \qquad \chi^2_{0,01} = 6{,}635.$$

Оскільки $\chi^2_{\text{емп}} \geqslant \chi^2_{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється. Приймається гіпотеза H_1. Отже, розподіл жіночих і чоловічих імен колег у записнику жінки-психолога А відрізняється від рівномірного розподілу.

Приклад 6.4.6. Тест Мюнстберга для вимірювання вибірковості перцептивної уваги в адаптованому варіанті М. Д. Дворяшиної (1976) пропонувався 156 студентам факультету психології Ленінградського університету та 85 артистам балету Маріїнського театру [1]. Матеріал цієї методики складається з бланку з набором перемішаних деяким способом літер російського алфавіту. Серед цього фону приховано 24 слова різного ступеня складності: “факт”, “хоккей”, “любовь”, “конкурс”, “психиатрия” та ін. Досліджуваний повинен якнайшвидше віднайти їх і підкреслити.

Емпіричні частоти цих розподілів даних подано в табл. 1.

[1] Цей приклад запозичено з [17].

Таблиця 1

Емпіричні частоти пропускання слів у тесті Мюнстерберга у двох вибірках

Розряди (кількість пропускань слів)	Емпірична частота у групі		
	студентів	артистів балету	разом
0	93	22	115
1	27	20	47
2	11	16	27
3	15	4	19
4	5	3	8
5	3	11	14
6	2	3	5
7	0	3	3
8	0	2	2
9	0	1	1
Разом	156	85	241

Чи збігаються розподіли кількості пропускань слів у вибірках?

Як бачимо, умови 1 і 3 застосування критерію χ^2 виконуються: обсяг вибірки перевищує 30; вибрані розряди "вичерпують" розподіл. Для того щоб перевірити умову 2 застосування критерію χ^2, потрібно обчислити теоретичні частоти. Згідно з п. 4 алгоритму розрахунку критерію χ^2 при порівнянні емпіричних розподілів теоретичні частоти

$$n_{ij}^{\text{теор}} = \frac{n_i n_j}{n},$$

де $n_i = \sum_{j=1}^{c} n_{ij}$ — сума частот i-го розряду; n_j — обсяг j-го емпіричного розподілу; $n = \sum_{j=1}^{c} n_j$ — загальна кількість спостережень усіх емпіричних розподілів (вибірок); c — кількість порівнюваних розподілів.

У розглядуваному випадку суми частот розрядів записані в останній графі табл. 1; обсяги емпіричних розподілів

$$n_1 = 156, \qquad n_2 = 85.$$

Загальна кількість спостережень

$$n = n_1 + n_2 = 156 + 85 = 241.$$

Для того щоб теоретична частота для кожної комірки не була меншою від 5, потрібно, щоб виконувалася нерівність

$$\frac{n_i n_j}{241} \geqslant 5.$$

Оскільки мінімальний обсяг вибірки дорівнює 85 (група артистів балету), ця нерівність еквівалентна нерівності

$$n_i \geqslant \frac{5 \cdot 241}{17} \approx 14{,}18,$$

тобто мінімальна сума частот розряду дорівнює 15.

Як бачимо, для кількості пропускань 4, 5, 6,... ця умова не виконується.

Почнемо з останнього рядка об'єднувати сусідні розряди. При об'єднанні двох останніх рядків загальна сума частот цих рядків дорівнює $1+2 = 3 < 15$. Для того щоб загальна сума частот об'єднаних рядків перевищувала 15, необхідно об'єднати 5 останніх рядків. Загальна сума їх частот $1 + 2 + 3 + 5 + 14 = 25 > 15$. Слід об'єднати також п'ятий рядок з четвертим, оскільки сума частот п'ятого рядка $8 < 15$. Загальна сума частот четвертого і п'ятого рядків $8 + 19 = 27 > 15$.

Отже, перетворивши вихідні емпіричні розподіли на емпіричні розподіли з п'ятьма розрядами — "0 пропускань", "1 пропускання", "2 пропускання" "3–4 пропускання" і "5–9 пропускань", можна застосувати критерій χ^2.

Сформулюємо основну і альтернативну гіпотези.

H_0: розподіли помилок (пропускань слів) у вибірках студентів і артистів балету не різняться;

H_1: розподіли помилок (пропускань слів) у вибірках студентів і артистів балету різняться між собою.

Побудуємо табл. 2 для розрахунку емпіричного значення критерію χ^2, враховуючи, що кількість ступенів вільності

$$v = (k-1)(v-1) = (5-1)(2-1) = 4,$$

тобто в розрахунках не потрібно робити поправку на неперервність.

Таблиця 2

Розрахунок критерію χ^2 при порівнянні двох емпіричних розподілів пропускань слів у тесті Мюнстерберга

Частота	Група	Розряд (кількість пропускань)					Сума
		0	1	2	3–4	5–9	
емпірична n_{ij}	студентів	93	27	11	20	5	156
	артистів	22	20	16	7	20	85
Сума емпіричних частот розрядів n_i		115	47	27	27	25	241
теоретична $n_{ij}^{\text{теор}} = \dfrac{n_i n_j}{n}$	студентів	74,44	30,42	17,48	17,48	16,18	156
	артистів	40,56	16,58	9,52	9,52	8,82	85
$n_{ij}^{\text{теор}} - n_{ij}$	студентів	−18,56	+3,42	+6,48	−2,52	+11,18	0
	артистів	+18, 56	−3,42	−6,48	+2,52	−11,18	0
$\left(n_{ij}^{\text{теор}} - n_{ij}\right)^2$	студентів	344,47	11,70	41,99	6,35	124,99	
	артистів	344,47	11,70	41,99	6,35	124,99	
$\dfrac{\left(n_{ij}^{\text{теор}} - n_{ij}\right)^2}{n_{ij}^{\text{теор}}}$	студентів	4,63	0,38	2,40	0,36	7,72	43,94
	артистів	8,49	0,71	4,41	0,67	14,17	

Пояснимо порядок розрахунків:

- перші чотири рядки табл. 2 — вихідні дані;
- п'ятий і шостий рядки — теоретичні частоти, що отримуються діленням добутку суми емпіричних частот відповідного розряду й обсягу відповідної вибірки на загальну кількість спостережень, наприклад,

$$n_{11}^{\text{теор}} = \frac{115 \cdot 156}{241} \approx 74{,}44;$$

- сьомий рядок отримується відніманням значень другого рядка від відповідних значень п'ятого рядка;
- восьмий рядок отримується відніманням значень третього рядка від відповідних значень шостого рядка;

• дев'ятий рядок — квадрати відповідних значень сьомого рядка;

• десятий рядок — квадрати відповідних значень восьмого рядка;

• одинадцятий рядок отримується діленням значень дев'ятого рядка на відповідні значення п'ятого рядка;

• дванадцятий рядок отримується діленням значень десятого рядка на відповідні значення шостого рядка;

• сума значень одинадцятого та дванадцятого рядків — шукане емпіричне значення критерію χ^2. Отже,

$$\chi^2_{\text{емп}} \approx 43{,}94.$$

За табл. Д.2.17 визначимо критичні значення критерію $\chi^2_{0,05}$ і $\chi^2_{0,01}$ для кількості ступенів вільності $v = 4$:

$$\chi^2_{0,05} = 9{,}488; \qquad \chi^2_{0,01} = 13{,}277.$$

Оскільки $\chi^2_{\text{емп}} \geqslant \chi^2_{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється. Приймається гіпотеза H_1. Отже, розподіли пропускань слів у вибірках студентів і артистів балету різняться.

Висновки

Порівняно з оцінюванням параметрів генеральних сукупностей загальнішим методом є перевірка гіпотез. Розглядають два великих класи методів перевірки: параметричні та непараметричні критерії.

Найчастіше параметричні критерії становлять перефразування інтервального оцінювання. Проте якщо інтервальні оцінки найчастіше двобічні, то параметричні критерії бувають як дво-, так і однобічними. Тут розглянуто кілька параметричних критеріїв: z-тест, F-тест Фішера—Снедекора, χ^2-тест дисперсії.

Непараметричні критерії дають змогу розв'язувати принципово інші задачі, ніж методи інтервального оцінювання. Тут вивчено три найважливіших класи задач: порівняння ознак, розпізнавання зсувів та порівняння розподілів. При цьому всі розглянуті критерії дають змогу досліджувати нечислові ознаки.

Ключові поняття

Двобічний тест
Експериментальна вибірка
Контрольна вибірка
Критичне значення тесту
Однобічний тест
Порівняння ознак
Порівняння розподілів
Розпізнавання зсувів
F-критерій Фішера—Снедекора
G-критерій знаків
H-критерій Крускала—Волліса
L-критерій Пейджа
m-критерій біноміальний
Q-критерій Розенбаума
S-критерій тенденцій Джонкіра
T-критерій Вілкоксона
U-критерій Манна—Вітні
z-тест
λ-критерій Колмогорова—Смірнова
$\varphi^{\star}$-критерій Фішера
χ^2-критерій порівняння розподілів
χ^2-тест дисперсії
χ^2_r-критерій Фрідмана

Вправи

1. Нехай для проходження до парламенту партія повинна подолати 4 %-й бар'єр. Щоб визначити стратегію поведінки на парламентських виборах, тобто йти на вибори окремо чи у блоці з іншими партіями, певна політична партія вирішила перевірити, чи змогла б вона подолати цей бар'єр, якби вибори відбувалися зараз. У замовленому опитуванні було отримано, що за партію зараз проголосувало б $m = 112$ осіб з репрезентативної вибірки обсягом $n = 2100$. Вважаючи вибірку простою випадковою і беручи рівень значущості $\alpha = 1\,\%$, перевірте, чи змогла б зараз партія подолати 4 %-й бар'єр. Здійсніть подібний аналіз при $\alpha = 0{,}1\,\%$.

2. Нехай деяка соціологічна служба отримала звіт про дослідження зарубіжних вчених, де показано, що середній зріст дорослих (віком старше 21 рік) чоловіків певної країни дорівнює 177,3 см, стандартне відхилення — 8,8 см. Припустимо, службі відомо результати аналізу вибірки обсягом $n = 258$ дорослих чоловіків в Україні. Нехай $\overline{X} = 176{,}0$ см, $s = 10{,}1$ см. Для того щоб перевірити, чи відрізняються результати аналізу української вибірки від зарубіжної, протестуйте

за українською вибіркою гіпотези $\mu = 177{,}3$ та $\sigma = 8{,}8$ при рівні значущості $\alpha = 5\,\%$.

3. Нехай досліджено рівень доходів у двох регіонах країни: південному та центральному. У південному регіоні середній дохід у вибірці обсягом 270 осіб становив 135,7 ум. од., виправлене стандартне відхилення — 16,3 ум. од. У центральному регіоні досліджувалась вибірка обсягом 315 осіб, в якій середнє значення дорівнювало 139,1 ум. од., а виправлене стандартне відхилення — 19,2 ум. од. Чи можна на основі цих даних стверджувати, що рівень доходів у центральному регіоні вищий? Чи можна стверджувати, що розсіювання доходів вище в центральному регіоні? Вкажіть рівні значущості обох тверджень.

4. Нехай досліджено пропорцію людей з вищою освітою серед жінок та чоловік. У вибірці з 1145 жінок вищу освіту мали 180, а у вибірці з 1050 чоловіків — 155. Чи можна на основі цих даних стверджувати, що пропорція людей з вищою освітою більша серед жінок? Якою буде відповідь при рівні значущості 5 %.

5. Дослідник аналізує гіпотезу про те, що регулярне прослуховування класичної музики покращує музичний слух. Для перевірки цього твердження він сформував дві групи: контрольну і експериментальну. В обох групах людям пропонували на слух визначити 30 нот і підлічували кількість правильних відповідей. Цю ознаку вважали показником рівня музичного слуху людини. Упродовж наступних двох місяців представники експериментальної групи щотижня відвідували концерти класичної музики. У контрольній групі жодних заходів не здійснювалось. Після експерименту знову протестували рівень музичного слуху в обох групах. Результати досліджень наведено в таблиці.

Кількість неправильних відповідей на питання тесту

Експериментальна група			Контрольна група		
Номер у списку	Кількість помилок		Номер у списку	Кількість помилок	
	до експерименту	після експерименту		до експерименту	після експерименту
1	2	3	4	5	6
1	21	23	1	22	20

Закінчення таблиці

1	2	3	4	5	6
2	22	18	2	18	19
3	27	22	3	11	10
4	8	7	4	14	12
5	11	10	5	6	5
6	9	9	6	9	8
7	16	19	7	12	11
8	18	12	8	23	23
9	25	20	9	16	14
10	14	16	10	11	12
11	17	13	11	18	17
12	22	16	12	19	19
			13	26	27
			14	7	6
			15	23	21

За допомогою критерію Вілкоксона перевірте наявність зсуву рівня ознаки в кожній групі. За допомогою критерію Манна—Вітні порівняйте зсуви у групах.

6. З метою перевірки ефективності навчального процесу у вищому навчальному закладі було виконано таке дослідження. Випадково вибрали 11 студентів останнього курсу і для кожного з них обчислили середні екзаменаційні оцінки за всі курси. Дані дослідження наведено в таблиці.

Середні екзаменаційні оцінки за чотири курси

Номер у списку	Середня екзаменаційна оцінка за курс			
	I	II	III	IV
1	2	3	4	5
1	4,2	4,4	4,4	4,8
2	3,6	3,6	3,2	4,0
3	3,8	3,2	3,6	3,6
4	5,0	5,0	4,8	5,0
5	4,2	3,6	4,0	4,6
6	4,8	5,0	4,8	4,6

Закінчення таблиці

1	2	3	4	5
7	3,0	3,4	3,2	3,2
8	4,2	4,8	5,0	4,8
9	5,0	4,8	5,0	4,8
10	3,8	4,2	4,2	4,6
11	3,6	3,4	4,6	4,6

Чи можна за цими даними стверджувати, що від одного курсу до іншого ефективність навчання у вищому навчальному закладі підвищується? Перевірте це за допомогою критерію Пейджа.

7. Громадська організація планує встановити в парку рекламний щит соціальної спрямованості. У парку три головні алеї. Організації потрібно визначити, якій алеї віддають перевагу перехожі. Для цього було виконано вибіркове дослідження: у різні дні в різний час спостерігачі підлічували кількість перехожих, що проходили алеями. Дослідники отримали такі зведені результати у вибірці: першою алеєю пройшло 434 людини, другою — 421, третьою — 492. Чи можна на основі цих даних дійти висновку, що людський потік алеями різний? Іншими словами, чи можна стверджувати, що розподіл 434, 421, 492 відмінний від рівномірного?

8. На потоці навчаються 53 студенти. Інтервальний розподіл середніх оцінок студентів останньої сесії наведено в таблиці.

Інтервальний розподіл середніх екзаменаційних оцінок

Інтервал оцінок	Кількість студентів
[3; 3,25)	2
[3,25; 3,5)	5
[3,5; 3,75)	9
[3,75; 4)	12
[4; 4,25)	10
[4,25; 4,5)	7
[4,5; 4,75)	5
[4,75; 5]	3

Чи узгоджений цей розподіл з нормальним?

Дослідницький проект

Виберіть у Вашому інституті потік з двох академічних груп і деяку дисципліну, яка викладатиметься на потоці поточного семестру. Після кількох перших занять анонімно опитайте студентів щодо їх ставлення до лектора, запропонувавши, зокрема, оцінити його професійний рівень за десятибальною шкалою. На одному з останніх занять виконайте таке саме дослідження. При цьому в одній з груп попередньо надайте додаткову позитивну інформацію про цього викладача (сімейний стан, наукову діяльність тощо), а студентам іншої групи нічого не повідомляйте. Першу групу вважатимемо експериментальною, другу — контрольною. Проаналізувавши результати опитувань, дайте відповіді на такі запитання.

1. Чи є рівень оцінки викладача студентами на початку семестру в одній з двох груп вищим, а наприкінці семестру?
2. Чи є зсув у рівні оцінки лектора в кожній з груп?
3. Якщо зсув є в кожній з груп, чи можна сказати, що в одній з них зсув більший?
4. Чи можна сказати, що на оцінку професійної діяльності викладача вплинула зовнішня інформація?
5. Спробуйте визначити вигляд розподілу рівня оцінки викладача студентами в кожній з груп у кожному опитуванні.
6. Перевірте узгодженість групових розподілів рівня оцінки на початку семестру.
7. Чи є, на Вашу думку, узгодженість групових розподілів необхідною умовою для "чистоти" експерименту?

Розділ 7

Кореляційний аналіз

Важливим елементом математико-статистичних досліджень у багатьох наукових дисциплінах є виявлення специфічних зв'язків чи залежностей між різними ознаками, факторами тощо. Ця специфічність полягає в тому, що залежність між ознаками неможливо описати функціонально, тобто за допомогою певної однозначно визначеної функції. Зв'язок чи залежність цих ознак виявляється принципово по-іншому: від того, якого значення набуде одна величина, залежать імовірнісні характеристики іншої. Отже, незважаючи на те, що неможливо точно вказати значення залежної ознаки, все ж таки відома деяка інформація про можливе розташування її значень, певного найімовірнішого інтервалу, середнього значення, міри розсіювання тощо. Такі зв'язки у статистиці називають *кореляцією* (від пізньолат. *correlatio* — співвідношення).

Кореляційна залежність і кореляційний зв'язок

Кореляційна залежність засвідчує, що значення однієї ознаки впливають на ймовірність появи різних значень іншої (залежної) ознаки. *Кореляційний зв'язок* засвідчує узгоджену зміну ймовірнісних характеристик двох або більше (множинна кореляція) ознак. Принципова відмінність цих понять полягає в тому, що кореляційний зв'язок на відміну від кореляційної залежності не можна вважати свідченням причинно-наслідкового зв'язку. Наприклад, те, що в один і той самий час у різних людей виникає бажання легко вдягнутися, не означає, що вони причинно впливають один на одного, це — свідчення того, що встановилася жарка погода, причинний вплив третьої ознаки. Отже, статистичний зв'язок може свідчити тільки про можливе існування причинних відношень, примусити бути впевненим у своїх припущеннях або, навпаки, засумніватися в них, але вказати що від чого залежить — завдання не математиків, а спеціалістів відповідної галузі.

Про кореляційну залежність можна впевнено казати лише в разі певного контролюючого впливу на досліджуваний об'єкт або такої організації дослідження, що можна точно визначити інтенсивність незалежних впливів. Впливи, які можна якісно визначити чи навіть виміряти, можуть розглядатись як незалежні змінні (наприклад, вік людини, стать тощо). Вимірювані ознаки і такі за припущенням, що можуть змінюватися під впливом незалежних змінних, вважаються залежними змінними. У цьому разі узгоджені зміни незалежної і залежної змінних справді можуть розглядатись як залежність (наприклад, залежність соціального становища від віку).

Класифікація кореляцій

Кореляції розрізняють за формою (лінійна чи криволінійна), напрямом (пряма чи обернена) і силою.

Про *лінійну* кореляцію кажуть тоді, коли зв'язок між досліджуваними ознаками чи факторами описується лінійною функцією, тобто коли значення досліджуваних ефектів пропорційні. У противному разі кажуть про *криволінійну* кореляцію.

За напрямом, як правило, розрізняють лінійну кореляцію. Якщо зі збільшенням значень одного ефекту збільшуються значення іншого, то кореляцію називають *прямою*, або *додатною*. У цьому разі значення досліджуваних ефектів прямо пропорційні. Якщо зі збільшенням значень одного ефекту зменшуються значення іншого, то кореляцію називають *оберненою*, або *від'ємною*. У цьому разі значення досліджуваних ефектів обернено пропорційні. Назви додатної та від'ємної кореляції пов'язані з відповідним знаком коефіцієнта лінійної кореляції.

Коефіцієнт кореляції

Коефіцієнт кореляції є показником сили кореляційного зв'язку. Найбільше його абсолютне значення $|r| = 1$ відповідає простому функціональному зв'язку між значеннями досліджуваних ознак чи факторів, а найменше — $r = 0$ — відсутності або досліджуваного функціонального зв'язку [1], або зв'язку взагалі.

Класифікація сили кореляції

Використовують кілька систем класифікації сили кореляції.

Загальна класифікація засвідчує, що кореляція:

- *сильна*, або *тісна* при $|r| \geqslant 0{,}7$;
- *середня* при $0{,}5 \leqslant |r| < 0{,}7$;
- *помірна* при $0{,}3 \leqslant |r| < 0{,}5$;
- *слабка* при $0{,}2 \leqslant |r| < 0{,}3$;
- *дуже слабка* при $|r| < 0{,}2$.

Ця класифікація орієнтована тільки на величину коефіцієнта кореляції і жодною мірою не реагує на рівень його значущості.

[1] Відсутність досліджуваного функціонального зв'язку не означає відсутність будь-якого функціонального зв'язку. Наприклад, можливий випадок, коли коефіцієнт лінійної кореляції між значеннями досліджуваних ознак дорівнює нулю, а коефіцієнт параболічної (криволінійної) кореляції — одиниці. Однак доволі часто на практиці в разі рівності нулю коефіцієнта кореляції роблять висновок про відсутність будь-якого функціонального зв'язку. Цей висновок може бути хибний. До таких випадків слід ставитися обережніше і казати лише про відсутність досліджуваного функціонального зв'язку.

Частинна класифікація засвідчує, що між значеннями досліджуваних ефектів:

• *висока значуща* кореляція при r, що відповідає рівню статистичної значущості $\alpha \leqslant 0{,}01$;

• *значуща* кореляція при r, що відповідає рівню статистичної значущості $0{,}01 < \alpha \leqslant 0{,}05$;

• *тенденція достовірного зв'язку* при r, що відповідає рівню статистичної значущості $0{,}05 < \alpha \leqslant 0{,}10$;

• *незначуща кореляція* при r, що не досягає рівня статистичної значущості $\alpha \geqslant 0{,}10$.

На відміну від попередньої ця класифікація орієнтована на те, якого рівня значущості досягає коефіцієнт кореляції при конкретному обсязі вибірки.

Відмінність вказаних класифікацій сили кореляції полягає насамперед у тому, що друга класифікація не висвітлює силу кореляційного зв'язку, натомість перша — рівень довіри отриманого коефіцієнта кореляції. Зазвичай ці класифікації поєднують, тобто визначають і коефіцієнт кореляції, і його значущість[1].

Мірами кореляції використовують такі:

1) емпіричні міри тісноти зв'язку:
   - коефіцієнт асоціації, або тетрахоричний показник зв'язку;
   - коефіцієнти взаємної спряженості Пірсона, Чупрова та Крамера, які полягають у нормуванні критерію χ^2;
   - коефіцієнт Фехнера;
   - коефіцієнт рангової кореляції Спірмена та Кендалла;
2) лінійний коефіцієнт кореляції r;
3) кореляційне відношення η;
4) множинні коефіцієнти кореляції.

[1] Часто у вибірці малого обсягу коефіцієнт кореляції засвідчує тісний зв'язок, тобто $|r| \geqslant 0{,}7$, але він не достовірний. І навпаки, у вибірках великого обсягу навіть слабка кореляція може виявитися достовірною.

7.1. Кореляційний аналіз номінальних даних

Вивчення математико-статистичних методів студентами-соціологами чи психологами, як правило, супроводжується відкиданням цих методів на підставі їх чужорідності для соціолога чи психолога. Вони вважають, що математика лише допомагає охопити великі масиви, стисло відобразити суть закладених у них закономірностей, взаємозв'язків тощо, але для отримання найцікавіших, глибинних фактів, пов'язаних з ґрунтовним аналізом причинно-наслідкових відношень, математики замало. Ґрунтовніший аналіз соціологи та психологи пов'язують зазвичай з розумінням, а не з поясненням, яке дає математика[1].

Зважаючи на те що в соціальних науках дані вимірюються переважно в номінальних шкалах, стає зрозумілим таке зневажливе ставлення до математичних методів. Однак насправді зв'язок між математикою та соціальними науками існує і він значно глибший, ніж може здатися. Саме тому студенти й не помічають його.

Найвідоміші дві інтерпретації номінальних даних. Згідно з першою значення кожної номінальної ознаки — це самостійні сутності, що відповідають різним якостям досліджуваних об'єктів[2]. Згідно з другою інтерпретацією — за конкретними значеннями (або сукупністю значень) стоїть деяка латентна неперервна (випадкова) величина, а номінальність досліджуваної ознаки — наслідок невміння точно виміряти цю величину [3].

За першою інтерпретацією дослідник шукає насамперед поєднання значень ознак, що детермінують (визначають) "поведінку" досліджуваного, тобто він шукає взаємодії. Друга інтерпретація потребує

[1] Детальніше цю проблему дослідила Ю. Н. Толстова [19].

[2] У такий спосіб інтерпретують номінальні дані так звані номіналісти, які вважають, що "універсалії" не існують насправді незалежно від людини. Вони є лише іменами. Наприклад, "людина взагалі" як родова спільність не існує, фактично існують лише окремі люди; "людина" — лише загальне ім'я, яким називають кожну конкретну людину.

[3] Такої інтерпретації дотримуються реалісти, які вважають, що "універсалії" існують насправді незалежно від людської думки і мови.

від дослідника "витягнення" з вихідної інформації латентної змінної, що "міститься поза кадром", визначення "істинного" її значення для кожного респондента.

Розглянемо лише окремі методи дослідження кореляцій між номінальними даними.

7.1.1. Коефіцієнти зв'язку для чотириклітинних таблиць спряженості

Для оцінювання зв'язку між ознаками використовують так звані *частотні таблиці*, що становлять сукупність частот усіх можливих комбінацій значень досліджуваних ознак. Наведемо більш строге означення частотної таблиці для двох ознак.

Означення 7.1. Нехай досліджується кореляційний зв'язок між двома ознаками X і Y. Ознака X може приймати n різних значень з номерами $1, 2, 3, \ldots, n$, а ознака Y — m різних значень з номерами $1, 2, 3, \ldots, m$. Тоді загальна кількість можливих комбінацій ознак X і Y $N = nm$.

Двовимірною таблицею спряженості (*двовимірною частотною таблицею*) називають таку, основи рядків якої є значеннями ознаки X, а стовпців — значеннями ознаки Y. На перетині i-го рядка ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) з j-м стовпцем ($j = 1, 2, 3, \ldots, m$) розміщується частота n_{ij}, яка відповідає кількості об'єктів з i-м значенням ознаки X і j-м значенням ознаки Y (табл. 7.1).

Частинним випадком двовимірної таблиці спряженості є *чотириклітинна таблиця* — частотна таблиця, побудована для двох дихотомічних ознак. Необхідність вивчення саме таких таблиць пов'язана насамперед з тим, що у процесі їх аналізу можна виявити те, що неможливо виявити з таблиць більшої розмірності. За допомогою спеціально організованих чотириклітинних таблиць можливо перейти від вивчення глобальних зв'язків (між ознаками загалом) до вивчення локальних (між окремими значеннями досліджуваних ознак) або проміжних між першими та другими. Крім того, багато відомих коефіцієнтів кореляції для чотириклітинних таблиць збігаються, дає змогу уникати зайвих розрахунків.

Таблиця 7.1

Загальний вигляд двомірної таблиці спряженості

Номер значення ознаки X	Номер значення ознаки Y						
	1	2	3	...	j	...	m
1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	...	n_{1j}	...	n_{1m}
2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	...	n_{2j}	...	n_{2m}
3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	...	n_{3j}	...	n_{3m}
...	...	...	...	...	...	...	...
i	n_{i1}	n_{i2}	n_{i3}	...	n_{ij}	...	n_{im}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	n_{n1}	n_{n2}	n_{n3}	...	n_{nj}	...	n_{nm}

Отже, перейдемо безпосередньо до коефіцієнтів кореляції для чотириклітинних таблиць.

Для зручності частоти n_{11}, n_{12}, n_{21} і n_{22} чотириклітинних таблиць позначимо відповідно як a, b, c і d (табл. 7.2)[1].

Таблиця 7.2

Загальний вигляд чотириклітинної таблиці спряженості

Номер значення ознаки X	Номер значення ознаки Y		Разом
	1	2	
1	a	b	$a+b$
2	c	d	$c+d$
Разом	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

Усі відомі коефіцієнти зв'язку для чотириклітинних таблиць базуються на порівнянні часток

$$\frac{a}{a+c} \quad \text{і} \quad \frac{b}{b+d},$$

що по суті відповідає на питання, чи пропорційні стовпці (або рядки) частотної таблиці. Точніше, порівнюють не власне частки, а визна-

[1]Часто як значення дихотомічних шкал беруть 1 (об'єкт має певну ознаку) і 0 (об'єкт не має певної ознаки) або 1 і -1 (для акцентування уваги на протилежності значень).

чають різницю
$$ad - bc.$$

Якщо ця різниця дорівнює нулю, то частки однакові, а це означає відсутність статистичного зв'язку, адже розподіл досліджуваної ознаки X не залежить від розподілу досліджуваної ознаки Y. Однак користуватися цією різницею в такому вигляді не можна, позаяк її можливе абсолютне значення не обмежене, тобто в цьому разі дуже важко визначити тісноту зв'язку. Для визначення тісноти зв'язку вказану різницю потрібно нормувати так, щоб вона набувала значень від -1 до 1 (при цьому знак вказував би напрям зв'язку) або від 0 до 1 (у цьому разі коефіцієнт кореляції вказуватиме лише силу зв'язку).

Розглянемо два найпопулярніших коефіцієнти.

Коефіцієнт асоціації Юла

$$Q = \frac{ad - bc}{ad + bc}.$$

Коефіцієнт контингенції

$$\Phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}.$$

Основні властивості цих коефіцієнтів полягають у такому:

• обидва коефіцієнти набувають значень з інтервалу від -1 до $+1$ (тобто вони "напрямлені");

• дорівнюють нулю за відсутності статистичної залежності, про яку вже йшлося;

• набувають абсолютного значення одиниці в різних випадках:
коефіцієнт Юла при $b = 0$ або $c = 0$;
коефіцієнт контингенції при $a = d = 0$ або $b = c = 0$;

• якщо значення ознак узяти такими, що дорівнюють нулю або одиниці, то обчислений за звичайними правилами коефіцієнт кореляції збігатиметься з коефіцієнтом контингенції.

За третьою властивістю для кожного коефіцієнта можна виризнити певні закономірності. Припустимо, досліджується зв'язок між статтю і схильністю до паління. Рівність абсолютного значення коефіцієнта контингенції одиниці означатиме або “усі чоловіки палять, а всі жінки не палять”, або “усі жінки палять, а всі чоловіки не палять”. Однак виявити залежність на кшталт “усі чоловіки палять, а жінки не палять (тобто не всі)” неможливо. У подібних ситуаціях можна виявити коефіцієнт асоціації Юла (саме в таких випадках абсолютне значення цього коефіцієнта дорівнює одиниці). Якщо казати більш строго, коефіцієнт контингенції вимірює двобічний зв’язок, а коефіцієнт Юла — однобічний.

Приклад 7.1.1. Розглянемо дві дихотомічні ознаки: стать (1 — чоловік, 0 — жінка) і паління (1 — палить, 0 — не палить). Припустимо, для перевірки зв’язку між статтю і палінням досліджено 100 осіб (див. таблицю).

Чотириклітинна таблиця спряженості між ознаками “стать” і “паління”

Схильність до паління	Стать		Разом
	Чоловік	Жінка	
Палить	42	18	60
Не палить	13	27	40
Разом	55	45	100

Чи взаємопов’язані статистично досліджувані ознаки “стать” і “паління”?

Для цього обчислимо коефіцієнти асоціації Юла та контингенції:

$$Q = \frac{ad - bc}{ad + bc} = \frac{42 \cdot 27 - 18 \cdot 13}{42 \cdot 27 + 18 \cdot 13} = \frac{1134 - 234}{1134 + 234} = \frac{900}{1368} \approx$$

$$\approx 0{,}6579;$$

$$\Phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}} =$$

$$= \frac{42 \cdot 27 - 18 \cdot 13}{\sqrt{(42+18)(13+27)(42+13)(18+27)}} =$$

$$= \frac{1134 - 234}{\sqrt{60 \cdot 40 \cdot 55 \cdot 45}} = \frac{900}{\sqrt{5940000}} = \frac{3}{\sqrt{66}} \approx$$
$$\approx 0{,}3693.$$

Як бачимо, ці коефіцієнти відмінні від нуля і водночас суттєво різняться. Зважаючи на однобічність коефіцієнта Юла і двобічність коефіцієнта контингенції, доходимо висновку: залежність між ознаками "стать" і "паління" існує, причому вона швидше однобічна, ніж багатобічна, тобто з-поміж чоловіків більшість палить, а з-поміж жінок такої явної переваги до непаління, як у чоловіків до паління, не спостерігається[1].

7.1.2. Коефіцієнти кореляції, що базуються на критерії χ^2 Пірсона

Алгоритм розрахунку коефіцієнта кореляції, що базується на критерії χ^2 Пірсона, полягає в такому.

1. Висувають основну гіпотезу про відсутність зв'язку між досліджуваними номінальними змінними.

2. Обчислюють емпіричне значення критерію χ^2 Пірсона так, як у п. 6.4.5.

3. На підставі порівняння отриманого емпіричного значення χ^2 з теоретичним основна гіпотеза підтверджується чи відхиляється.

4. Для оцінювання сили кореляційного зв'язку емпіричне значення χ^2 нормують так, щоб абсолютне значення коефіцієнта кореляції не перевищувало одиниці. Найвідоміші коефіцієнти кореляції Пірсона, Чупрова і Крамера. Обчислюють їх за такими формулами:

$$P = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}};$$

[1] Насправді, це не все. Для остаточного висновку потрібно перевірити гіпотезу про значущість обчислених коефіцієнтів кореляції. Методики перевірки наведено в [13].

$$T = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(c-1)(r-1)}};$$

$$K = \sqrt{\frac{\chi^2}{n\min\{c-1, r-1\}}},$$

де n — обсяг вибірки; c, r — кількість розрядів досліджуваної ознаки відповідно першої та другої (тобто кількість рядків і стовпців двовимірної таблиці спряженості).

Опишемо окремі властивості зазначених коефіцієнтів кореляції.

По-перше, усі коефіцієнти набувають значень з інтервалу від нуля до одиниці і дорівнюють нулю в разі статистичної незалежності. По-друге, усі ці показники симетричні відносно досліджуваних ознак, тобто за їх допомогою неможливо визначити залежну та незалежну змінні й те, яка змінна на яку "впливає". Недолік коефіцієнта кореляції Пірсона полягає в тому, що його максимальне значення залежить від розмірності таблиці спряженості [1]. Це спричинює утруднення при порівнянні таблиць різної розмірності. Для виправлення цієї властивості коефіцієнта Пірсона (запропонованого першим) Чупров увів інший коефіцієнт, але і його максимальне значення досягає одиниці лише в разі рівності кількості розрядів досліджуваних ознак ($c = r$) і менше від одиниці при $c \neq r$. З перелічених лише коефіцієнт кореляції Крамера може досягати одиниці незалежно від вигляду таблиць спряженості. Для квадратних таблиць спряженості ($c = r$) коефіцієнти Чупрова та Крамера збігаються, в усіх інших випадках $K > T$.

Суттєвий недолік коефіцієнтів кореляції, що базуються на критерії χ^2 Пірсона, полягає в тому, що всі вони припускають існування деякої латентної [2] числової неперервної випадкової величини, що відповідає вихідній номінальній змінній.

[1] Максимального значення коефіцієнт кореляції Пірсона досягає при $c = r$, але залежить від кількості розрядів. Наприклад, якщо $c = 3$, то $P \leqslant 0,8$, якщо $c = 5$, то $P \leqslant 0,89$ і так до кінця.

[2] Термін "латентна" тут використовується доволі умовно. У теорії соціологічного вимірювання вважається, що латентна така змінна, яка принципово не піддається безпосередньому вимірюванню. Натомість вихідна змінна вимірюється безпосередньо.

Приклад 7.1.2. Повернімося до прикладу 6.4.6 [1]. Переформулюємо запитання цього прикладу. Чи залежить кількість пропускань слів при вимірюванні вибірковості перцептивної уваги від належності досліджуваного до групи студентів чи артистів балету?

Спочатку переформулюємо гіпотези.

H_0: розподіли помилок (пропускань слів) не залежать від належності досліджуваного до студентів чи артистів балету;

H_1: розподіли помилок (пропускань слів) залежать від належності досліджуваного до студентів чи артистів балету.

Нагадаємо, що в цьому разі емпіричне значення критерію χ^2 Пірсона

$$\chi^2_{\text{емп}} \approx 43{,}94.$$

Це дає змогу відхилити основну гіпотезу, тобто розподіли помилок (пропускань слів) залежать від належності досліджуваного до студентів чи артистів балету (артисти балету помилялися частіше).

Оцінимо рівень залежності змінних за допомогою відомих коефіцієнтів кореляції Пірсона, Чупрова і Крамера:

$$P = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = \sqrt{\frac{43{,}94}{43{,}94 + 241}} \approx 0{,}3927;$$

$$T = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(c-1)(r-1)}} = \sqrt{\frac{43{,}94}{241 \cdot (5-1)(2-1)}} \approx 0{,}2135;$$

$$K = \sqrt{\frac{\chi^2}{n \min\{c-1, r-1\}}} = \sqrt{\frac{43{,}94}{241 \min\{5-1, 2-1\}}} \approx 0{,}4270.$$

Знайдені коефіцієнти кореляції вказують на слабкий (коефіцієнт Чупрова) чи помірний (коефіцієнти Пірсона і Крамера) зв'язок між досліджуваними змінними, але водночас ця кореляція високозначуща. Крім того, коефіцієнт Чупрова при $c \neq r$ (у розглядуваному

[1] Доречнішим був би приклад, в якому обидві ознаки були номінальні (у розглядуваному випадку поєднання номінальної ознаки з числовою). Однак це не впливає на математичні викладки, бо значення числової ознаки в підрахунках безпосередньої участі не беруть. У цьому прикладі ми зекономимо час на підрахунку емпіричного значення критерію Пірсона.

випадку $c = 5$, $r = 2$), особливо при істотній відмінності c і r, погано виявляє кореляційний зв'язок.

Отже, доходимо висновку: зв'язок між досліджуваними змінними помірний.

7.1.3. Коефіцієнти кореляції, що базуються на моделях прогнозу

Розглянемо міри кореляції, що базуються на так званих моделях прогнозу. При цьому ознаки вважатимемо пов'язаними, якщо реалізоване значення однієї з ознак дає змогу доволі добре передбачити значення іншої. Наприклад, при спробі визначити вік довільним способом вибраної особи нею може виявитися людина будь-якого віку, тобто ймовірність того, що це буде людина віком 20 чи 40 років, майже не відрізнятиметься, а якщо розглянемо лише студентів стаціонару, то ймовірність того, що така людина буде старша 30 років, дуже близька до нуля. Отже, у цьому разі прогностичні здібності різко поліпшуються.

Перейдемо до формального визначення міри зв'язку, що відповідає моделям прогнозу.

Найпоширеніші три *міри* (*коефіцієнти*) λ *Гуттмана*: дві напрямлені й одна — усереднення двох перших. Напрямленість означає, що за даними однієї з ознак можна визначити здатність до прогнозування іншої, причому ця міра не надає жодної інформації про можливість прогнозування у зворотному напрямі. Іншими словами, для того щоб виявити міру зв'язку між двома ознаками, необхідно розрахувати два коефіцієнти, кожний з яких характеризує силу зв'язку в певному напрямі — від першої ознаки до другої і навпаки.

Подамо формулу для обчислення лише одного коефіцієнта λ Гуттмана[1]:

[1]Зрозуміло, другий коефіцієнт λ_{xy} обчислюється за допомогою переставлення стовпців і рядків таблиці спряженості, а третій — усереднений — середнє арифметичне перших двох:

$$\lambda = \frac{\lambda_{yx} + \lambda_{xy}}{2}.$$

$$\lambda_{yx} = \frac{\sum\limits_i \max\limits_j n_{ij} - \max\limits_i \sum\limits_j n_{ij}}{n - \max\limits_i \sum\limits_j n_{ij}}.$$

Пояснимо зміст цієї формули на прикладі.

Приклад 7.1.3. Припустимо, необхідно визначити рівень задоволення навчанням студентів певного вищого навчального закладу. Ознакою X є спеціальність, за якою навчаються студенти, а ознакою Y — рівень задоволення навчанням за трибальною системою: "незадоволений" (рівень 1), "задоволений" (рівень 2), "дуже задоволений" (рівень 3). Дані дослідження[1] подано в таблиці.

Таблиця спряженості двох ознак: спеціальність студента (X) і його задоволення навчанням (Y)

Майбутня спеціальність студента (X)	Кількість студентів з рівнем задоволення навчанням (Y)			Максимальна частота	Загальна кількість студентів
	1	2	3		
Соціологія	15	27	48	48	90
Соціальна робота	19	14	28	28	61
Практична психологія	11	25	58	58	94
Медична психологія	23	17	12	23	52
Максимальна частота	23	27	58		108
Разом	68	83	146	157	297

За наведеними досліджуваними даними розраховуємо коефіцієнти Гуттмана:

$$\lambda_{yx} = \frac{\sum\limits_i \max\limits_j n_{ij} - \max\limits_i \sum\limits_j n_{ij}}{n - \max\limits_i \sum\limits_j n_{ij}} =$$

[1]Дані для цього прикладу дібрано спеціально, тобто вони не експериментальні.

$$= \frac{(48+28+58+23) - \max\{68; 83; 146\}}{297 - \max\{68; 83; 146\}} = \frac{157-146}{297-146} = \frac{11}{151} \approx$$

$$\approx 0{,}0728;$$

$$\lambda_{xy} = \frac{\sum\limits_j \max\limits_i n_{ji} - \max\limits_j \sum\limits_i n_{ji}}{n - \max\limits_j \sum\limits_i n_{ji}} =$$

$$= \frac{(23+27+58) - \max\{90; 61; 94; 52\}}{297 - \max\{90; 61; 94; 52\}} = \frac{108-94}{297-94} = \frac{14}{203} \approx$$

$$\approx 0{,}0690;$$

$$\lambda = \frac{\lambda_{yx} + \lambda_{xy}}{2} \approx \frac{0{,}0728}{0{,}0690} \approx 0{,}709.$$

При обчисленні цих коефіцієнтів виявляється наявність у рядках (у другому випадку — у стовпцях) модальних груп, тобто яскраво вираженого "рівня задоволення навчанням". З огляду на дані таблиці таких груп немає, що підтверджується малими значеннями коефіцієнтів.

Дослідники вирізняють такі властивості коефіцієнта Гуттмана:

1. Він змінюється від нуля до одиниці.

2. Він дорівнює одиниці лише тоді, коли в кожному рядку (у другому випадку — у стовпці) заповнена лише одна клітинка. Іншими словами, можна наприклад, стовідсотково правильно спрогнозувати значення "рівня задоволення навчанням" за відомою "майбутньою спеціальністю студента".

3. Він дорівнює нулю у двох випадках: коли всі частоти зосереджені в одному рядку чи стовпці та коли відсутній феномен модальності, тобто спостерігається повна "розмитість" даних у таблиці спряженості. При цьому зауважимо, що в першому випадку обидва напрямлені коефіцієнти Гуттмана дорівнюють нулю, хоча за елементарною логікою знання про те, що всі студенти однаково "задоволені навчанням", робить прогноз безпомилковим (властивість 1). Тому кажуть, що коефіцієнт Гуттмана "погано поводиться в нулі".

7.2. Рангова кореляція

На практиці соціологічні та психологічні дослідники мають справу переважно з ознаками, рівні яких вимірюються в нечислових шкалах. Якщо дані досліджень можна впорядкувати (наприклад, за зростанням), то для дослідження кореляційного зв'язку між досліджуваними ознаками чи факторами використовують так звані коефіцієнти рангової кореляції. Їх простота, широкі можливості та універсальність виявляються насамперед у тому, що вони застосовні до будь-яких числових чи ранжованих даних і їх легко обчислити без жодних технічних засобів.

7.2.1. Коефіцієнт рангової кореляції r_s Спірмена

Методом рангової кореляції Спірмена можна визначити силу і напрям кореляційного зв'язку між двома ознаками чи двома профілями (ієрархіями) ознак. Даними для застосування цього методу можуть бути такі значення:

- двох ознак однієї і тієї самої групи досліджуваних;
- двох індивідуальних ієрархій ознак двох досліджуваних за одним і тим самим набором ознак;
- двох групових ієрархій ознак;
- індивідуальної та групової ієрархій ознак.

Обмеження критерію r_s

Перед застосуванням критерію r_s потрібно перевірити такі умови-обмеження.

1. Дані повинні бути подані принаймні в порядковій шкалі.

2. Кількість значень вибірки за кожною змінною не повинна бути меншою від 5. Верхня межа обмежується наявними таблицями (у табл. Д.2.15 $n \leqslant 40$).

3. За великої кількості однакових рангів однієї чи обох змінних коефіцієнт рангової кореляції r_s Спірмена дає дуже "грубі" значення. У цьому разі необхідно внести поправку на однакові ранги.

Алгоритм розрахунку критерію r_s

Розрахунок критерію r_s зручно подати у вигляді алгоритму.

1. Визначити змінні, що порівнюватимуться.
2. Перевірити, чи виконуються умови застосування критерію r_s.
3. Сформулювати основну і альтернативну гіпотези.

H_0: кореляція між досліджуваними змінними не відрізняється від нуля;

H_1: кореляція між досліджуваними змінними достовірно відрізняється від нуля.

4. Проранжувати значення порівнюваних змінних окремо за кожною змінною. При цьому менший ранг отримує менше значення (правила ранжування див. у п. 1.3.5). Ранги записати поряд з відповідними значеннями.

5. Розрахувати різниці d_i між рангами відповідних рівнів досліджуваних змінних.

6. Обчислити квадрати різниць d_i^2 і їх суму $\sum\limits_i d_i^2$.

7. За однакових рангів розрахувати поправки:

$$T_a = \sum \frac{a^3 - a}{12}, \quad T_b = \sum \frac{b^3 - b}{12},$$

де a, b — обсяг кожної групи однакових рангів у ранговому ряду відповідно першому та другому.

8. Розрахувати коефіцієнт рангової кореляції r_s:

- за відсутності однакових рангів

$$r_s^{\text{емп}} = 1 - 6\frac{\sum\limits_i d_i^2}{n(n^2-1)},$$

де n — кількість рівнів порівнюваних змінних;

- за наявності однакових рангів

$$r_s^{\text{емп}} = 1 - 6\frac{\sum\limits_i d_i^2 + T_a + T_b}{n(n^2-1)}.$$

9. За табл. Д.2.15 визначити критичні значення коефіцієнта $r_s^{0,05}$ і $r_s^{0,01}$ для заданого n.

10. Якщо $|r_s^{\text{емп}}| \geqslant r_s^{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється, якщо $|r_s^{\text{емп}}| \leqslant r_s^{0,05}$ — приймається. Якщо $r_s^{0,05} < |r_s^{\text{емп}}| < r_s^{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,05 (або 5 %).

Приклад 7.2.1. У дослідженнях, що моделюють діяльність авіадиспетчерів, група досліджуваних студентів фізичного факультету Ленінградського державного університету проходила практику перед початком роботи на тренажері. Досліджувані мали розв'язати задачі вибору оптимального типу злітно-посадочної смуги для заданого типу літака[1]. Дані дослідження подані в табл. 1.

Таблиця 1

Показники кількості помилок, зроблених під час тренувальної сесії, і рівня вербального інтелекту студентів-фізиків

№ пор.	Код імені спостережуваного	Кількість помилок	Показник вербального інтелекту
1	2	3	4
1	Т. А.	29	131
2	П. А.	54	132
3	Ч. І.	13	121
4	Ц. А.	8	127
5	См. А.	14	136
6	К. Є.	26	124
7	К. А.	9	134
8	Б. Л.	20	136
9	І. А.	2	132
10	Ф. В.	17	136
	Сума	192	1309
	Середнє	19,2	130,9

Чи пов'язана кількість помилок, зроблених досліджуваними під час тренувальної сесії, з показником вербального інтелекту, обчисленим за методикою Д. Векслера?

[1] Цей приклад запозичено з [17].

Як бачимо, обмеження критерію r_s задовольняються: дані представлено щонайменше в порядковій шкалі, кількість значень вибірки більше п'яти (10).

Сформулюємо основну й альтернативну гіпотези:

H_0: кореляція між показниками кількості помилок і рівнем вербального інтелекту не відрізняється від нуля;

H_1: кореляція між показниками кількості помилок і рівнем вербального інтелекту статистично значуще відрізняється від нуля.

Проранжуємо обидва показника від найменшого до найбільшого, підрахуємо різниці між рангами та піднесемо їх до квадрату. Дані занесемо в табл. 2.

Таблиця 2

Розрахунок d^2 для рангового коефіцієнта кореляції Спірмена r_s при порівнянні показників кількості помилок і вербального інтелекту студентів-фізиків

№ пор.	Код імені спостережуваного	Кількість помилок		Показник вербального інтелекту		Різниця рангів d	d^2
		Значення	Ранг	Значення	Ранг		
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Т. А.	29	9	131	4	5	25
2	П. А.	54	10	132	5,5	4,5	20,25
3	Ч. І.	13	4	121	1	3	9
4	Ц. А.	8	2	127	3	−1	1
5	См. А.	14	5	136	9	−4	16
6	К. Є.	26	8	124	2	6	36
7	К. А.	9	3	134	7	−4	16
8	Б. Л.	20	7	136	9	−2	4
9	І. А.	2	1	132	5,5	−4,5	20,25
10	Ф. В.	17	6	136	9	−3	9
Сума			55		55	0	156,5

Оскільки деякі показники вербального інтелекту мають однакові ранги, розрахуємо поправку:

$$T_b = \sum \frac{b^3 - b}{12} = \frac{2^3 - 2}{12} + \frac{3^3 - 3}{12} = \frac{6}{12} + \frac{24}{12} = 2{,}5.$$

Емпіричне значення коефіцієнта рангової кореляції

$$r_s^{\text{емп}} = 1 - 6 \cdot \frac{\sum\limits_i d_i^2 + T_a + T_b}{n \cdot (n^2 - 1)} = 1 - 6 \cdot \frac{156{,}5 + 0 + 2{,}5}{10 \cdot (10^2 - 1)} = \frac{2}{55} \approx 0{,}036.$$

За табл. Д.2.15 визначимо критичні значення коефіцієнта $r_s^{0,05}$ і $r_s^{0,01}$ для заданого $n = 10$:

$$r_s^{0,05} = 0{,}64; \quad r_s^{0,01} = 0{,}79.$$

Оскільки $|r_s^{\text{емп}}| \leqslant r_s^{0,05}$, гіпотеза H_0 приймається. Кореляція між показниками кількості помилок і рівнем вербального інтелекту не відрізняється від нуля.

7.2.2. Коефіцієнт рангової кореляції r_k Кендалла

Методом рангової кореляції Кендалла, як і Спірмена, можна визначити силу і напрям кореляційного зв'язку між двома ознаками чи профілями (ієрархіями) ознак. Вимоги до даних для використання цього методу такі самі, як і для методу рангової кореляції r_s Спірмена.

Обмеження критерію r_k

Перед застосуванням критерію r_k потрібно перевірити такі умови-обмеження.

1. Дані повинні бути подані принаймні в порядковій шкалі.
2. Кількість значень вибірки за кожною змінною не повинна бути меншою від 4. Верхньої межі не існує, але застосування критерію r_k при доволі великій кількості значень значно ускладнює його розрахунок.

Алгоритм розрахунку критерію r_k

Розрахунок критерію r_k зручно подати у вигляді алгоритму.

1. Визначити змінні, що порівнюватимуться.
2. Перевірити, чи виконуються умови застосування критерію r_k.

3. Сформулювати основну і альтернативну гіпотези.

H_0: кореляція між досліджуваними змінними не відрізняється від нуля;

H_1: кореляція між досліджуваними змінними достовірно відрізняється від нуля.

4. Проранжувати значення порівнюваних змінних окремо за кожною змінною. При цьому менший ранг отримує менше значення (правила ранжування див. у п. 1.3.5). Ранги записати поряд з відповідними значеннями.

5. Розташувати у порядку зростання ранги першої змінної і записати поруч відповідні ранги другої змінної. Записати дані у два рядки.

6. Розрахувати кількість рангів у другому рядку, що перевищують перший ранг другого рядка. Викреслити перший ранг другого рядка. Розрахувати кількість рангів у другому рядку, що перевищують другий ранг другого рядка. Викреслити другий ранг другого рядка і так до кінця. Суму цих значень позначити R.

7. Розрахувати коефіцієнт рангової кореляції r_k:

$$r_k^{\text{емп}} = \frac{4R}{N(N-1)} - 1,$$

де N — кількість рівнів порівнюваних змінних.

8. Визначити критичні значення коефіцієнта $r_s^{0,05}$ і $r_s^{0,01}$ для заданого N за формулою

$$r_k^{\alpha} = z_{\text{кр}}(\alpha)\sqrt{\frac{2(2N+5)}{9N(N-1)}},$$

де $z_{\text{кр}}(\alpha)$ — критичне значення двобічного тесту (див. підрозд. 6.1)[1].

9. Якщо $|r_k^{\text{емп}}| \geqslant r_k^{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється, якщо $|r_k^{\text{емп}}| \leqslant r_k^{0,05}$ — приймається. Якщо $r_k^{0,05} < |r_k^{\text{емп}}| < r_k^{0,01}$, гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості 0,05 (або 5 %).

[1] Нагадаємо, що $z_{\text{кр}}(0{,}05) = 1{,}96$, $z_{\text{кр}}(0{,}01) = 2{,}58$.

Приклад 7.2.2. Повернімося до прикладу 7.2.1. Скориставшись табл. 2 цього прикладу, запишемо у два рядки розташовані в порядку зростання ранги першої змінної і відповідні ранги другої.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5,5	3	7	1	9	9	9	2	4	5,5

Розрахуємо кількість рангів у другому рядку, що перевищують перший ранг другого рядка. Бачимо, що число 5,5 перевищують 4 значення з другого рядка. Викреслюємо перший ранг другого рядка (5,5). Розрахуємо кількість рангів у другому рядку, що перевищують другий ранг другого рядка: число 3 перевищують 6 значень.

Продовжуючи в такий спосіб, остаточно отримаємо таку суму цих значень:

$$R = 4 + 6 + 3 + 6 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 = 22.$$

Розрахуємо коефіцієнт рангової кореляції r_k:

$$r_k^{\text{емп}} = \frac{4R}{N(N-1)} - 1 = \frac{4 \cdot 22}{10(10-1)} - 1 = -\frac{1}{45} \approx -0{,}022.$$

Визначимо критичні значення коефіцієнта $r_s^{0,05}$ і $r_s^{0,01}$ для заданого $N = 10$:

$$r_k^{0,05} = z_{\text{кр}}(0{,}05)\sqrt{\frac{2(2N+5)}{9N(N-1)}} = 1{,}96\sqrt{\frac{2(2\cdot 10+5)}{9\cdot 10(10-1)}} \approx 0{,}487;$$

$$r_k^{0,01} = z_{\text{кр}}(0{,}01)\sqrt{\frac{2(2N+5)}{9N(N-1)}} = 2{,}58\sqrt{\frac{2(2\cdot 10+5)}{9\cdot 10(10-1)}} \approx 0{,}641.$$

Оскільки $|r_s^{\text{емп}}| \leqslant r_s^{0,05}$, гіпотеза H_0 приймається. Тобто, як і у прикладі 7.2.1, кореляція між показниками кількості помилок і рівнем вербального інтелекту не відрізняється від нуля.

7.3. Лінійна кореляція

У разі дослідження залежності ознак, що вимірюються в числових шкалах, використовують класичний регресійний аналіз. Його основна ідея полягає у знаходженні функціональної залежності вигляду

$$Y = f(X),$$

де X, Y — змінна відповідно незалежна і залежна.

Оскільки вихідна залежність не функціональна, а статистична, то цей вираз має доволі умовний характер — насправді шукають не точне значення ознаки Y за відомим значенням ознаки X, а очікуване середнє значення ознаки Y, яке позначають $\overline{Y}_X$.

Обмежимося лінійною кореляцією, тобто залежністю вигляду

$$\overline{Y}_X = kX + b,$$

де k, b — деякі константи.

Для соціологічних та психологічних даних типовою є ситуація, коли одному значенню X відповідає кілька значень Y (на рис. 7.1 цю ситуацію зображено точками). Задача полягає у знаходженні такої прямої, яка б якнайкраще наближала до себе отримані статистичні дані.

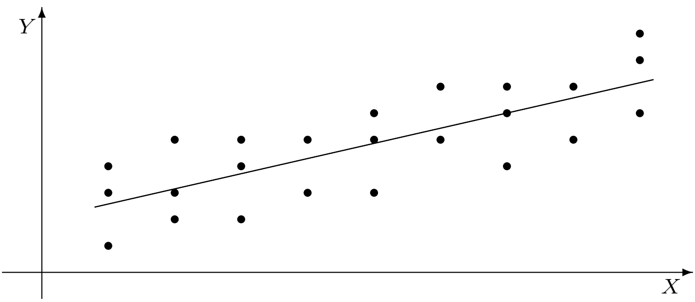


Рис. 7.1. **Принципова схема прямої лінії регресії**

Таку пряму, побудовану за даними вибірки, називають *вибірковою прямою лінією регресії*.

Наведемо більш строге означення.

Означення 7.2. Нехай ознаки Y і X — незалежна і залежна змінні. *Вибірковим рівнянням прямої лінії регресії* Y на X називають рівняння

$$\overline{Y}_X - \overline{Y} = r_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - \overline{X}),$$

де $\overline{Y}_X$ — умовне середнє; $\overline{Y}$, $\overline{X}$ — вибіркові середні; σ_Y, σ_X — вибіркове стандартне відхилення ознаки відповідно Y і X; r_{XY} — *вибірковий коефіцієнт лінійної кореляції*,

$$r_{XY} = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\cdot\overline{Y}}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Для того щоб перевірити гіпотезу про значущість вибіркового коефіцієнта лінійної кореляції (і тим самим значущість лінії регресії), потрібно слідувати такому алгоритму[1].

Алгоритм перевірки гіпотези про значущість вибіркового коефіцієнта лінійної кореляції r_{XY}

1. Визначити змінні, що порівнюватимуться.
2. Знайти коефіцієнт лінійної кореляції r_{XY}.
3. Сформулювати основну і альтернативну гіпотези.

H_0: кореляція між досліджуваними змінними не відрізняється від нуля;

H_1: кореляція між досліджуваними змінними достовірно відрізняється від нуля.

4. Розрахувати емпіричне значення критерію t:

$$t^{\text{емп}} = r_{XY}\sqrt{\frac{n-2}{1-r_{XY}^2}},$$

де n — обсяг вибірки.

[1]Насправді перед застосуванням цього алгоритму необхідно перевірити гіпотезу про нормальний розподіл сукупності (X, Y). На жаль, тут ці алгоритми не наводитимемо через їх складність. На практиці a priori виходять з припущення, що сукупність (X, Y) розподілена нормально.

5. Визначити критичні точки $t^{0,05}$ і $t^{0,01}$ t-розподілу Стьюдента для двобічної критичної області за заданою кількістю ступенів вільності $k = n - 2$ (див. табл. Д.2.21).

6. Якщо $|t^{\text{емп}}| \geqslant t^{0,05}$, гіпотеза H_0 відхиляється, якщо $|t^{\text{емп}}| \leqslant r_k^{0,01}$ — приймається. Якщо $r_k^{0,01} < |t^{\text{емп}}| < t^{0,05}$, гіпотеза H_0 приймається на рівні значущості 0,05 (або 5 %).

Приклад 7.3.1. На основі досліджень доходів населення деякого населеного пункту було отримано кореляційну таблицю залежності рівня місячних доходів від віку[1].

Кореляційна таблиця залежності від віку (ознака Y) рівня місячних доходів (ознака X) серед 42 працевлаштованих осіб

Місячний дохід X, грн.	Кількість працевлаштованих осіб при Y (вік, років)					n_X
	до 28	28–38	38–48	48–58	58 і старше	
1	2	3	4	5	6	7
< 550	4	3	—	—	—	7
550–750	1	4	4	—	—	9
750–950	—	1	7	5	—	13
950–1150	—	—	2	5	3	10
> 1150	—	—	—	1	2	3
n_Y	5	8	13	11	5	$n = 42$

Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними кореляційної таблиці. При цьому використовуватимемо середні значення інтервалів (450, 650, 850, 1050, 1250 для ознаки X; 23, 33, 43, 53, 63, 73 для Y).

Знайдемо $\overline{X}$, $\overline{Y}$:

$$\overline{X} = \frac{7 \cdot 450 + 9 \cdot 650 + 13 \cdot 850 + 10 \cdot 1050 + 3 \cdot 1250}{42} = \frac{2450}{3} \approx 816{,}7;$$

$$\overline{Y} = \frac{5 \cdot 23 + 8 \cdot 33 + 13 \cdot 43 + 11 \cdot 53 + 5 \cdot 63}{42} = \frac{306}{7} \approx 43{,}7.$$

[1] Дані для цього прикладу підібрано спеціально, вони не базуються на реальних дослідженнях.

Визначимо $\overline{X^2}$, $\overline{Y^2}$:

$$\overline{X^2} = \frac{7\cdot 450^2 + 9\cdot 650^2 + 13\cdot 850^2 + 10\cdot 1050^2 + 3\cdot 1250^2}{42} =$$
$$= \frac{15162500}{21} \approx 722023{,}8;$$
$$\overline{Y^2} = \frac{5\cdot 23^2 + 8\cdot 33^2 + 13\cdot 43^2 + 11\cdot 53^2 + 5\cdot 63^2}{42} = \frac{43069}{21} \approx$$
$$\approx 2050{,}9.$$

Обчислимо σ_X, σ_Y:

$$\sigma_X = \sqrt{\overline{X^2} - \overline{X}^2} = \sqrt{\frac{15162500}{21} - \left(\frac{2450}{3}\right)^2} \approx 234{,}7;$$
$$\sigma_Y = \sqrt{\overline{Y^2} - \overline{Y}^2} = \sqrt{\frac{43069}{21} - \left(\frac{306}{7}\right)^2} \approx 11{,}8.$$

Розрахуємо $\overline{XY}$:

$$\overline{XY} = (23\cdot 450\cdot 4 + 33\cdot 450\cdot 3 + 23\cdot 650\cdot 1 + 33\cdot 650\cdot 4 + 43\cdot 650\cdot 4 +$$
$$+\ 33\cdot 850\cdot 1 + 43\cdot 850\cdot 7 + 53\cdot 850\cdot 5 + 43\cdot 1050\cdot 2 +$$
$$+\ 53\cdot 1050\cdot 5 + 63\cdot 1050\cdot 3 + 53\cdot 1250\cdot 1 + 63\cdot 1250\cdot 2)/42 =$$
$$= \frac{266400}{7} \approx 38057{,}1.$$

Тоді вибірковий коефіцієнт кореляції

$$r_{XY} = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\cdot\overline{Y}}{\sigma_X\sigma_Y} \approx \frac{38057{,}1 - 816{,}7\cdot 43{,}7}{234{,}7\cdot 11{,}8} \approx 0{,}849.$$

Отримане значення свідчить про сильну або тісну пряму (додатну) лінійну кореляцію. Перевіримо її значущість.

Сформулюємо основну і альтернативну гіпотези.

H_0: кореляція між досліджуваними змінними не відрізняється від нуля;

H_1: кореляція між досліджуваними змінними достовірно відрізняється від нуля.

Розрахуємо емпіричне значення критерію t:

$$t^{\text{емп}} = r_{XY}\sqrt{\frac{n-2}{1-r_{XY}^2}} = 0{,}849\sqrt{\frac{42-2}{1-0{,}849^2}} \approx 10{,}16.$$

Визначимо критичні точки $t^{0{,}05}$ і $t^{0{,}01}$ t-розподілу Стьюдента для двобічної критичної області за заданою кількістю ступенів вільності $k = n - 2 = 42 - 2 = 40$ (див. табл. Д.2.21):

$$t^{0{,}05} = 2{,}02; \quad t^{0{,}01} = 2{,}70.$$

Оскільки $|t^{\text{емп}}| \geqslant t^{0{,}05}$, гіпотеза H_0 відхиляється. Іншими словами, кореляція між досліджуваними змінними достовірно відрізняється від нуля.

Висновки

У теорії та практиці доволі часто постає потреба визначити наявність і характер залежності між досліджуваними ознаками, факторами тощо. Далеко не завжди така залежність функціональна. У цьому разі дослідник може скористатись кореляційним аналізом, що дає змогу дійти висновку не тільки про наявність зв'язку чи залежності, а й про її тісноту та достовірність.

Тут розглянуто кореляційний аналіз номінальних даних (найпоширеніших у соціологічних і психологічних дослідженнях), рангових (коефіцієнти кореляції Кендалла та Спірмена) та частково числових (лінійна кореляція). Кореляційний аналіз числових даних подано недостатньою мірою через те, що в соціології та психології такі дані зустрічаються вкрай рідко. За необхідності з ним можна ознайомитися, наприклад, у [2; 4; 8; 10; 20; 22].

Розглянуті методи дослідження зв'язків і залежностей не дають повне уявлення про кореляційний аналіз, однак їх достатньо для вирішення більшості задач кореляційного аналізу, що виникають у практиці соціологічних та психологічних досліджень.

Ключові поняття

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії
Вибірковий коефіцієнт лінійної кореляції
Коефіцієнт кореляції
- асоціації Юла
- контингенції
- Крамера
- Пірсона
- рангової r_k Кендалла
- рангової r_s Спірмена
- Чупрова
- λ Гуттмана

Кореляційна залежність
Кореляційний зв'язок
Кореляція
- висока значуща
- від'ємна
- додатна
- дуже слабка
- значуща
- криволінійна
- лінійна
- незначуща
- обернена
- помірна
- пряма
- середня
- сильна
- слабка
- тісна

Модель прогнозу
Таблиця спряженості
- двовимірна
- чотириклітинна

Тенденція достовірного зв'язку

Вправи

1. Нехай досліджується читацька аудиторія деякого журналу за статевою ознакою. Припустимо, у результаті опитування 100 осіб отримано такі дані.

Чотириклітинна таблиця спряженості між ознаками "стать" і "читач журналу"

Ставлення до журналу	Стать		Разом
	Чоловік	Жінка	
Читач	12	25	37
Не читач	31	32	63
Разом	43	57	100

Чи взаємопов'язані статистично досліджувані ознаки "стать" і "читач журналу"? Висновок зробіть, розрахувавши коефіцієнти асоціації Юла та контингенції.

2. Повернімося до прикладу 6.3.3. У ньому йшлося про експеримент з дослідження інтелектуальної наполегливості шляхом пропонування анаграм. Переформулюємо запитання цього прикладу. Чи залежить тривалість розв'язання анаграм від того, хто їх розв'язує?

Застосуйте до розв'язання цього прикладу критерій χ^2. Висновок зробіть на основі обчислення коефіцієнтів кореляції Пірсона, Чупрова і Крамера.

3. Припустимо, на певному підприємстві в результаті дослідження було визначено залежність рівня освіти працівників від їх темпераменту. Дані дослідження подано в таблиці.

Таблиця спряженості двох ознак: темперамент працівника (X) і його рівень освіти (Y)

Темперамент працівника X	Кількість працівників, освіта яких Y		
	середня	вища I–II рівня	вища III–IV рівня
Холерик	25	47	58
Сангвінік	36	51	63
Флегматик	17	35	47
Меланхолік	11	23	27

За допомогою використання моделей прогнозу, а саме обчислення трьох коефіцієнтів λ Гуттмана, визначте, чи існує зв'язок між досліджуваними ознаками. Який напрям цього зв'язку?

4. У дослідженні проблем ціннісної реорієнтації виявлялись ієрархії термінальних[1] цінностей за методикою М. Рокича у батьків і їх дорослих дітей[2].

Ранги термінальних цінностей, отримані при дослідженні пари "мати — донька" (матері 66 років, доньці — 42 роки), подані в таблиці.

[1] **Термінальний** (від лат. *terminalis* — такий, що стосується кінця) — кінцевий.

[2] Цей приклад запозичено з [17].

Ранги термінальних цінностей за списком М. Рокича в індивідуальних ієрархіях матері та доньки

№ пор.	Термінальні цінності	Ряд цінностей в ієрархії	
		матері	доньки
1	Активне діяльне життя	15	15
2	Життєва мудрість	1	3
3	Здоров'я	7	14
4	Цікава робота	8	12
5	Краса природи і мистецтво	16	17
6	Любов	11	10
7	Матеріально забезпечене життя	12	13
8	Наявність вірних друзів	9	11
9	Суспільне визнання	17	5
10	Пізнання	5	1
11	Продуктивне життя	2	2
12	Розвиток	6	8
13	Розваги	18	18
14	Свобода	4	6
15	Щасливе подружнє життя	13	4
16	Щастя інших	14	16
17	Творчість	10	9
18	Упевненість у собі	3	7
	Сума	171	171

Чи пов'язані ці ціннісні ієрархії? Для відповіді на це запитання застосуйте метод рангової кореляції Спірмена.

5. Повернімося до попереднього прикладу. Розв'яжіть його методом рангової кореляції Кендалла. Висновки порівняйте з висновками попереднього прикладу.

6. На основі досліджень доходів населення деякого населеного пункту було отримано таку кореляційну таблицю залежності рівня місячних доходів від віку[1].

[1] Дані для цього прикладу підібрано спеціально, вони не базуються на реальних дослідженнях.

Кореляційна таблиця залежності від віку (ознака Y) рівня місячних доходів (ознака X) серед 42 працевлаштованих осіб

Місячний дохід X, грн.	Кількість працевлаштованих осіб при Y (вік, років)					n_X
	до 28	28–38	38–48	48–58	58 і старше	
< 550	5	3	—	—	—	8
550–750	1	3	4	—	—	8
750–950	—	1	7	6	—	14
950–1150	—	—	2	4	4	10
> 1150	—	—	—	—	2	2
n_Y	6	7	13	10	6	$n = 42$

Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними кореляційної таблиці.

Дослідницький проект

За даними про результати екзаменаційної сесії у Вашому інституті виконайте такі завдання.

1. Проаналізуйте залежність кількості "боржників" від статі студента. Для цього складіть чотириклітинну таблицю спряженості двох ознак ("боржник" — "не боржник" і стать) і обчисліть коефіцієнти асоціації Юла та контингенції.

2. За допомогою критерію χ^2 Пірсона та розрахунку коефіцієнтів Пірсона, Чупрова і Крамера дайте відповідь на запитання: "Чи залежить рівень успішності студента від курсу, на якому він навчається?"

3. Дослідіть залежність між статтю студента і найнижчою оцінкою, отриманою ним під час екзаменаційної сесії, за допомогою моделей прогнозу (розрахувавши коефіцієнти λ Гуттмана). Порівняйте результати дослідження з результатами попереднього пункту.

4. Використовуючи коефіцієнти рангової кореляції Спірмена і Кендалла, дослідіть залежність між курсом, на якому навчається студент, і найнижчою оцінкою, отриманою ним під час екзаменаційної сесії.

5. Побудуйте пряму лінію регресії за даними кореляційної таблиці залежності рівня успішності (обчислюється як пропорція тих, хто успішно завершив сесію) від кількості аудиторних годин за навчаль-

ним планом, відведених для кожної дисципліни. Розрахуйте вибірковий коефіцієнт кореляції та зробіть висновок.

6. За результатами досліджень пп. 1–5 сформуйте звіт.

Додатки

Додаток 1

Таблиця випадкових чисел

Нагадаємо підходи до генерування випадкових чисел. У першому з них (див. п. 4.3.3) використовують спеціальні таблиці випадкових чисел, у другому, який не розглядатимемо, — комп'ютерні програми.

Далі наведено таблицю випадкових чисел, користуючись якою, можна вибрати одне випадкове число.

Зауважимо, що висвітлюватимуться лише основні ідеї статистичного дослідження, а не повний опис усіх професійних інструментів.

У контексті завдання генерування випадкових чисел це означає, що табл. Д.2.1 випадкових цифр створено лише з навчальною метою. Вона надто мала для коректного професійного застосування.

Генерування одного числа

Одне або кілька випадкових чисел, як правило, потрібно отримати в задачах випадкового зменшення статистичної сукупності на кілька елементів.

При генеруванні одного випадкового числа за допомогою таблиці випадкових цифр легко припуститися неточності. Річ у тім, що для вибору випадкового числа з таблиці потрібно було б вказати довільне число в таблиці і вважати його вибором. Проте за такої процедури існує певна частка суб'єктивізму. Можна підсвідомо вибрати число, яке більше подобається. При генеруванні великої (довгої) послідовності випадкових чисел дещо суб'єктивний вибір першої цифри не має суттєвого значення, його суб'єктивність нівелюється випадковістю інших елементів.

Частково цю проблему можна вирішити в такий спосіб. Наперед зафіксувати деяке число, наприклад, 10. Далі *випадково* вибрати будь-яку цифру в табл. Д.2.1 і полічити від неї 10 позицій. Тоді цифру, яка стоїть на останній позиції (у розглядуваному випадку це позиція 10), потрібно вважати початком шуканого випадкового числа.

Приклад. Нехай потрібно згенерувати число в межах від 1 до 36. Зафіксуємо довільне число. Нехай це число 12. Далі виберемо довільне значення в табл. Д.2.1. Нехай це цифра 6, розміщена у 3-му рядку та 37-му стовпці. Відлічимо від цієї позиції 12 цифр. Остання позиція розташована у 4-му рядку та 4-му стовпці. На ній записано 9.

Починаючи з отриманої цифри 9 запишемо послідовно кілька цифр з таблиці:

$$9582055947...$$

Оскільки потрібно отримати двозначне число, поділимо цю послідовність на групи з двох цифр:

$$95\ 82\ 05\ 59\ 47...$$

Перші два числа — 95 та 82 — не потрапляють у бажані межі від 1 до 36, а третє — 05 — потрапляє. Тому беремо число 5 як згенероване випадкове значення.

Таблиця Д.1.1

Випадкові цифри

29366	17014	73116	42122	37970	37899	36493	34060	81463	97475
60191	13096	77913	46920	83473	77111	95729	59672	05606	21360
31971	74269	29105	37559	48422	56831	95535	56895	82055	94740
04036	70889	17805	02924	38964	12329	63524	29811	11187	33043
71203	40063	73935	41536	83697	56946	55921	12000	38083	88338
58178	23821	03344	07353	02356	84084	69350	83665	39605	56193
29164	07720	14014	19935	85546	13824	02038	22667	60782	11872
47454	49630	15152	17971	05928	68939	27328	63695	28954	03960
02720	08379	32178	51087	33732	87155	70185	91454	22581	59144
01727	40686	00242	42809	25608	06247	82677	88557	97527	95845
72104	61788	20921	71913	97660	43638	62733	80943	81392	26301
66299	83099	61358	33620	24570	42775	25085	07107	99687	06017
07390	73902	64022	42128	51440	63740	50914	92047	83669	12141
31787	05110	01835	86314	97738	12470	97274	57645	24571	38836
50705	01893	36765	31073	88321	11271	81014	12009	61185	21794
08131	18216	56762	75887	09024	94222	49030	35073	92824	69151
07706	12429	17703	83407	88293	96294	21219	98004	18505	20575
03513	89051	97640	12263	23703	72421	11073	17062	83608	12162
40975	21951	55069	34385	14920	57868	94014	54656	14373	30604
56084	51871	69197	34581	25071	38678	32623	83633	22513	84589
65094	44902	46495	84207	82619	92548	73202	44314	31701	90551
30382	78152	67236	85029	42833	50968	63519	47655	72248	42371
93394	72062	42728	79049	39899	49950	11438	32050	02291	17997
48587	55554	86641	75573	30594	47913	21517	10018	66498	54938
73774	36130	04735	65310	37358	61077	93016	64252	52829	85494
45603	82144	90735	96026	65054	65569	19211	89580	43349	15463
21100	54874	50644	83174	14952	31666	18669	92978	53710	20413
32411	11283	20961	71041	16731	17873	22563	38196	57840	17318
80463	31318	65259	74368	24521	21678	14604	54974	69145	79383
39751	02150	06205	67391	80275	79943	83744	63114	96421	77073

Закінчення табл. Д.1.1

91441 43555 06025 28195 14882	92078 46021 14886 82018 57656	18987 52831 88452 08441 86105	90933 79090 35060 72034 36328	06960 51162 80646 19097 59578	80350 36244 98236 24034 48774	07562 58297 20497 88895 40712	46961 24081 30084 99472 72091	55100 19565 66502 71662 86783	75915 06625 34115 23587 65826
59348 11894 98124 26216 01048	99449 78161 29171 58586 25666	71385 28417 29058 62940 87540	52941 38976 86917 93368 72504	38340 61809 79155 68607 34449	74359 49026 87280 38447 16586	01917 99936 97933 99506 00444	50065 90468 56057 51998 57957	19772 26022 34778 26412 44801	74592 02629 85483 76882 22916

Додаток 2

Таблиці статистичних розподілів

Таблиця Д.2.1

Значення інтегральної функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,00	0,0000	0,12	0,0478	0,24	0,0948	0,36	0,1406	0,48	0,1844
0,01	0,0040	0,13	0,0517	0,25	0,0987	0,37	0,1443	0,49	0,1879
0,02	0,0080	0,14	0,0557	0,26	0,1026	0,38	0,1480	0,50	0,1915
0,03	0,0120	0,15	0,0596	0,27	0,1064	0,39	0,1517	0,51	0,1950
0,04	0,0160	0,16	0,0636	0,28	0,1103	0,40	0,1554	0,52	0,1985
0,05	0,0199	0,17	0,0675	0,29	0,1141	0,41	0,1591	0,53	0,2019
0,06	0,0239	0,18	0,0714	0,30	0,1179	0,42	0,1628	0,54	0,2054
0,07	0,0279	0,19	0,0753	0,31	0,1217	0,43	0,1664	0,55	0,2088
0,08	0,0319	0,20	0,0793	0,32	0,1255	0,44	0,1700	0,56	0,2123
0,09	0,0359	0,21	0,0832	0,33	0,1293	0,45	0,1736	0,57	0,2157
0,10	0,0398	0,22	0,0871	0,34	0,1331	0,46	0,1772	0,58	0,2190
0,11	0,0438	0,23	0,0910	0,35	0,1368	0,47	0,1808	0,59	0,2224

Закінчення табл. Д.2.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,60	0,2257	1,06	0,3554	1,52	0,4357	1,98	0,4761	2,44	0,4927
0,61	0,2291	1,07	0,3577	1,53	0,4370	1,99	0,4767	2,45	0,4929
0,62	0,2324	1,08	0,3599	1,54	0,4382	2,00	0,4772	2,46	0,4931
0,63	0,2357	1,09	0,3621	1,55	0,4394	2,01	0,4778	2,47	0,4932
0,64	0,2389	1,10	0,3643	1,56	0,4406	2,02	0,4783	2,48	0,4934
0,65	0,2422	1,11	0,3665	1,57	0,4418	2,03	0,4788	2,49	0,4936
0,66	0,2454	1,12	0,3686	1,58	0,4429	2,04	0,4793	2,50	0,4938
0,67	0,2486	1,13	0,3708	1,59	0,4441	2,05	0,4798	2,52	0,4941
0,68	0,2517	1,14	0,3729	1,60	0,4452	2,06	0,4803	2,54	0,4945
0,69	0,2549	1,15	0,3749	1,61	0,4463	2,07	0,4808	2,56	0,4948
0,70	0,2580	1,16	0,3770	1,62	0,4474	2,08	0,4812	2,58	0,4951
0,71	0,2611	1,17	0,3790	1,63	0,4484	2,09	0,4817	2,60	0,4953
0,72	0,2642	1,18	0,3810	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,62	0,4956
0,73	0,2673	1,19	0,3830	1,65	0,4505	2,11	0,4826	2,64	0,4959
0,74	0,2704	1,20	0,3849	1,66	0,4515	2,12	0,4830	2,66	0,4961
0,75	0,2734	1,21	0,3869	1,67	0,4525	2,13	0,4834	2,68	0,4963
0,76	0,2764	1,22	0,3888	1,68	0,4535	2,14	0,4838	2,70	0,4965
0,77	0,2794	1,23	0,3907	1,69	0,4545	2,15	0,4842	2,72	0,4967
0,78	0,2823	1,24	0,3925	1,70	0,4554	2,16	0,4846	2,74	0,4969
0,79	0,2852	1,25	0,3944	1,71	0,4564	2,17	0,4850	2,76	0,4971
0,80	0,2881	1,26	0,3962	1,72	0,4573	2,18	0,4854	2,78	0,4973
0,81	0,2910	1,27	0,3980	1,73	0,4582	2,19	0,4857	2,80	0,4974
0,82	0,2939	1,28	0,3997	1,74	0,4591	2,20	0,4861	2,82	0,4976
0,83	0,2967	1,29	0,4015	1,75	0,4599	2,21	0,4864	2,84	0,4977
0,84	0,2995	1,30	0,4032	1,76	0,4608	2,22	0,4868	2,86	0,4979
0,85	0,3023	1,31	0,4049	1,77	0,4616	2,23	0,4871	2,88	0,4980
0,86	0,3051	1,32	0,4066	1,78	0,4625	2,24	0,4875	2,90	0,4981
0,87	0,3078	1,33	0,4082	1,79	0,4633	2,25	0,4878	2,92	0,4982
0,88	0,3106	1,34	0,4099	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,94	0,4984
0,89	0,3133	1,35	0,4115	1,81	0,4649	2,27	0,4884	2,96	0,4985
0,90	0,3159	1,36	0,4131	1,82	0,4656	2,28	0,4887	2,98	0,4986
0,91	0,3186	1,37	0,4147	1,83	0,4664	2,29	0,4890	3,00	0,4987
0,92	0,3212	1,38	0,4162	1,84	0,4671	2,30	0,4893	3,05	0,4989
0,93	0,3238	1,39	0,4177	1,85	0,4678	2,31	0,4896	3,10	0,49903
0,94	0,3264	1,40	0,4192	1,86	0,4686	2,32	0,4898	3,15	0,49918
0,95	0,3289	1,41	0,4207	1,87	0,4693	2,33	0,4901	3,20	0,49931
0,96	0,3315	1,42	0,4222	1,88	0,4699	2,34	0,4904	3,30	0,49952
0,97	0,3340	1,43	0,4236	1,89	0,4706	2,35	0,4906	3,40	0,49966
0,98	0,3365	1,44	0,4251	1,90	0,4713	2,36	0,4909	3,50	0,49977
0,99	0,3389	1,45	0,4265	1,91	0,4719	2,37	0,4911	3,60	0,49984
1,00	0,3413	1,46	0,4279	1,92	0,4726	2,38	0,4913	3,70	0,49989
1,01	0,3438	1,47	0,4292	1,93	0,4732	2,39	0,4916	3,80	0,499928
1,02	0,3461	1,48	0,4306	1,94	0,4738	2,40	0,4918	3,90	0,499952
1,03	0,3485	1,49	0,4319	1,95	0,4744	2,41	0,4920	4,00	0,499968
1,04	0,3508	1,50	0,4332	1,96	0,4750	2,42	0,4922	4,50	0,499997
1,05	0,3531	1,51	0,4345	1,97	0,4756	2,43	0,4925	5,00	0,4999997

Таблиця Д.2.2

Значення локальної функції Лапласа $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Перші дві цифри числа x	Значення чотирьох цифр після коми функції $\varphi(x)$, якщо друга цифра після коми числа x дорівнює									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця Д.2.3

Значення функції Пуассона $P_n(m)=\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

m	Значення після коми функції $P_n(m)$, якщо λ дорівнює									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066	3679
1	0905	1637	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659	3679
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647	1839
3	0002	0011	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494	0613
4	0000	0001	0003	0007	0016	0030	0050	0077	0111	0153

m	Значення після коми функції $P_n(m)$, якщо λ дорівнює									
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
0	0,3329	3012	2725	2466	2231	2019	1827	1653	1496	1353
1	3662	3614	3543	3452	3347	3230	3106	2975	2842	2707
2	2014	2169	2303	2417	2510	2584	2640	2678	2700	2707
3	0738	0867	0998	1128	1255	1378	1496	1607	1710	1804
4	0203	0260	0324	0395	0471	0551	0636	0723	0812	0902
5	0045	0062	0084	0111	0141	0176	0216	0260	0309	0361
6	0008	0012	0018	0026	0035	0047	0061	0078	0098	0120
7	0001	0002	0003	0005	0008	0011	0015	0020	0027	0034

m	Значення після коми функції $P_n(m)$, якщо λ дорівнює									
	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
0	0,1225	1108	1003	0907	0821	0743	0672	0608	0550	0498
1	2572	2438	2306	2177	2052	1931	1815	1703	1596	1494
2	2700	2681	2652	2613	2565	2510	2450	2384	2314	2240
3	1890	1966	2033	2090	2138	2176	2205	2225	2237	2240
4	0992	1082	1169	1254	1336	1414	1488	1557	1622	1680
5	0417	0476	0538	0602	0668	0735	0804	0872	0940	1008
6	0146	0174	0206	0241	0278	0319	0362	0407	0455	0504
7	0044	0055	0068	0083	0099	0118	0139	0163	0188	0216
8	0011	0015	0019	0025	0031	0038	0047	0057	0068	0081
9	0003	0004	0005	0007	0009	0011	0014	0018	0022	0027

m	Значення після коми функції $P_n(m)$, якщо λ дорівнює									
	3	3,5	4	4,5	5	6	7	8	9	10
0	0,0498	0302	0183	0111	0067	0025	0009	0003	0001	0000
1	1494	1057	0733	0500	0337	0149	0064	0027	0011	0005
2	2240	1850	1465	1125	0842	0446	0223	0107	0050	0023
3	2240	2158	1954	1687	1404	0892	0521	0286	0150	0076
4	1680	1888	1954	1898	1755	1339	0912	0573	0337	0189
5	1008	1322	1563	1708	1755	1606	1277	0916	0607	0378
6	0504	0771	1042	1281	1462	1606	1490	1221	0911	0631
7	0216	0385	0595	0824	1044	1377	1490	1396	1171	0901
8	0081	0169	0298	0463	0653	1033	1304	1396	1318	1126
9	0027	0066	0132	0232	0363	0688	1014	1241	1318	1251
10	0008	0023	0053	0104	0181	0413	0710	0993	1186	1251

Таблиця Д.2.4

Значення функції $t_\alpha = t(\alpha, n)$

n	Значення t_α, якщо α дорівнює			n	Значення t_α, якщо α дорівнює		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблиця Д.2.5

Значення функції $q = q(\alpha, n)$

n	Значення q, якщо α дорівнює			n	Значення q, якщо α дорівнює		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Таблиця Д.2.6

Критичні значення критерію Q Розенбаума
(n_1, n_2 — обсяг вибірки відповідно більшої та меншої)

n_1	Критичні значення Q, якщо n_2 дорівнює															
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
	Рівень значущості $p = 0{,}05$															
11	6															
12	6	6														
13	6	6	6													
14	7	7	6	6												
15	7	7	6	6	6											
16	8	7	7	7	6	6										
17	7	7	7	7	7	7	7									
18	7	7	7	7	7	7	7	7								
19	7	7	7	7	7	7	7	7	7							
20	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7						
21	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7					
22	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7				
23	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7			
24	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7		
25	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	
26	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7
	Рівень значущості $p = 0{,}01$															
11	9															
12	9	9														
13	9	9	9													
14	9	9	9	9												
15	9	9	9	9	9											
16	9	9	9	9	9	9										
17	10	9	9	9	9	9	9									
18	10	10	9	9	9	9	9	9								
19	10	10	10	9	9	9	9	9	9							
20	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9						
21	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9					
22	11	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9				
23	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9			
24	12	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9		
25	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9	
26	12	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9

Таблиця Д.2.7

Критичні значення критерію *U* Манна—Вітні
(n_1, n_2 — обсяг вибірки відповідно більшої та меншої)

n_1	Критичні значення U, якщо n_2 дорівнює																		
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	Рівень значущості $p = 0{,}05$																		
3	—	0																	
4	—	0	1																
5	0	1	2	4															
6	0	2	3	5	7														
7	0	2	4	6	8	11													
8	1	3	5	8	10	13	15												
9	1	4	6	9	12	15	18	21											
10	1	4	7	11	14	17	20	24	27										
11	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34									
12	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42								
13	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51							
14	3	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61						
15	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72					
16	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83				
17	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96			
18	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109		
19	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	
20	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138
	Рівень значущості $p = 0{,}01$																		
5	—	—	0	1															
6	—	—	1	2	3														
7	—	0	1	3	4	6													
8	—	0	2	4	6	7	9												
9	—	1	3	5	7	9	11	14											
10	—	1	3	6	8	11	13	16	19										
11	—	1	4	7	9	12	15	18	22	25									
12	—	2	5	8	11	14	17	21	24	28	31								
13	0	2	5	9	12	16	20	23	27	31	35	39							
14	0	2	6	10	13	17	22	26	30	34	38	43	47						
15	0	3	7	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56					
16	0	3	7	12	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66				
17	0	4	8	13	18	23	28	33	38	44	49	55	60	66	71	77			
18	0	4	9	14	19	24	30	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88		
19	1	4	9	15	20	26	32	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101	
20	1	5	10	16	22	28	34	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114

Продовження табл. Д.2.7

n_1	Критичні значення U, якщо n_2 дорівнює																	
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	Рівень значущості $p = 0{,}05$																	
21	19	26	34	41	49	57	65	73	81	89	97	105	115	121	130	138	146	154
22	20	28	36	44	52	60	69	77	85	94	102	111	119	128	136	145	154	162
23	21	29	37	46	55	63	72	81	90	99	107	116	125	134	143	152	161	170
24	22	31	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	131	141	150	160	169	179
25	23	32	41	50	60	69	79	89	98	108	118	128	137	147	157	167	177	187
26	24	33	43	53	62	72	82	93	103	113	123	133	143	154	164	174	185	195
27	25	35	45	55	65	75	86	96	107	118	128	139	150	160	171	182	193	203
28	26	36	47	57	68	79	89	100	111	122	133	144	156	167	178	189	200	212
29	27	38	48	59	70	82	93	104	116	127	139	150	162	173	185	196	208	220
30	28	39	50	62	73	85	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228
31	29	41	52	64	76	88	100	112	124	137	149	161	174	186	199	211	224	236
32	30	42	54	66	78	91	103	116	129	141	154	167	180	193	206	219	232	245
33	31	43	56	68	81	94	107	120	133	146	159	173	186	199	213	226	239	253
34	32	45	58	71	84	97	110	124	137	151	164	178	192	206	219	233	247	261
35	33	46	59	73	86	100	114	128	142	156	170	184	198	212	226	241	255	269
36	35	48	61	75	89	103	117	132	146	160	175	189	204	219	233	248	263	278
37	36	49	63	77	92	106	121	135	150	165	180	195	210	225	240	255	271	286
38	37	51	65	79	94	109	124	139	155	170	185	201	216	232	247	263	278	294
39	38	52	67	82	97	112	128	143	159	175	190	206	222	238	254	270	286	302
40	39	53	69	84	100	115	131	147	163	179	196	212	228	245	261	278	294	311
	Рівень значущості $p = 0{,}01$																	
21	10	16	22	29	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	113	120	127
22	10	17	23	30	37	45	52	59	66	74	81	89	96	104	111	119	127	134
23	11	18	25	32	39	47	55	62	70	78	86	94	102	109	117	125	133	141
24	12	19	26	34	42	49	57	66	74	82	90	98	107	115	122	132	140	149
25	12	20	27	35	44	52	60	69	77	86	95	103	112	121	130	138	147	156
26	13	21	29	37	46	54	63	72	81	90	99	108	117	126	136	145	154	163
27	14	22	30	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	132	142	151	161	171
28	14	23	32	41	50	59	69	78	88	98	108	118	128	138	148	158	168	178
29	15	24	33	42	52	62	72	82	92	102	112	123	133	143	154	164	175	185
30	15	25	34	44	54	64	75	85	95	106	117	127	138	149	160	171	182	192
31	16	26	36	46	56	67	77	88	99	110	121	132	143	155	166	177	188	200
32	17	27	37	47	58	69	80	91	103	114	126	137	149	160	172	184	195	207
33	17	28	38	49	60	72	83	95	106	118	130	142	154	166	178	190	202	214
34	18	29	40	51	62	74	86	98	110	122	134	147	159	172	184	197	209	222
35	19	30	41	53	64	77	89	101	114	126	139	152	164	177	190	203	216	229
36	19	31	42	54	67	79	92	104	117	130	143	156	170	183	196	210	223	236
37	20	32	44	56	69	81	95	108	121	134	148	161	175	189	202	216	230	244
38	21	33	45	58	71	84	97	111	125	138	152	166	180	194	208	223	237	251
39	21	34	46	59	73	86	100	114	128	142	157	171	185	200	214	229	244	258
40	22	35	48	61	75	89	103	117	132	146	161	176	191	206	221	236	251	266

Продовження табл. Д.2.7

n_1	Критичні значення U, якщо n_2 дорівнює																		
	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	Рівень значущості $p = 0{,}05$																		
22	171																		
23	180	189																	
24	188	198	207																
25	197	207	217	227															
26	206	216	226	237	247														
27	214	225	236	247	258	268													
28	223	234	245	257	268	279	291												
29	232	243	255	267	278	290	302	314											
30	240	252	265	277	289	301	313	326	338										
31	249	261	274	287	299	312	325	337	350	363									
32	258	271	284	297	310	323	336	349	362	375	389								
33	266	280	293	307	320	334	347	361	374	388	402	415							
34	275	289	303	317	331	345	359	373	387	401	415	429	443						
35	284	298	312	327	341	356	370	385	399	413	428	442	457	471					
36	292	307	322	337	352	367	381	396	411	426	441	456	471	486	501				
37	301	316	332	347	362	378	393	408	424	439	454	470	485	501	516	531			
38	310	325	341	357	373	388	404	420	436	452	467	483	499	515	531	547	563		
39	318	335	351	367	383	399	416	432	448	464	481	497	513	530	546	562	579	595	
40	327	344	360	377	394	410	427	444	460	477	494	511	527	544	561	578	594	611	628
	Рівень значущості $p = 0{,}01$																		
22	142																		
23	150	158																	
24	154	166	174																
25	165	174	183	192															
26	173	182	191	201	210														
27	180	190	200	209	219	229													
28	188	198	208	218	229	239	249												
29	196	206	217	227	238	249	259	270											
30	203	214	225	236	247	258	270	281	292										
31	211	223	234	245	257	268	280	291	303	314									
32	219	231	242	254	266	278	290	302	314	326	338								
33	227	239	251	263	276	288	300	313	325	337	350	362							
34	234	247	260	272	285	298	311	323	336	349	362	375	387						
35	242	255	268	281	294	308	321	334	347	360	374	387	400	413					
36	250	263	277	290	304	318	331	345	358	372	386	399	413	427	440				
37	258	271	285	299	313	327	341	355	370	384	398	412	426	440	454	468			
38	265	280	294	308	323	337	352	366	381	395	410	424	439	453	468	482	497		
39	273	288	303	317	332	347	362	377	392	407	422	437	452	467	482	497	512	527	
40	281	296	311	326	342	357	372	388	403	418	434	449	465	480	495	511	526	542	557

Продовження табл. Д.2.7

n_1	Критичні значення U, якщо n_2 дорівнює															
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	Рівень значущості $p = 0{,}05$															
41	40	55	70	86	102	118	135	151	168	184	201	218	234	251	268	285
42	41	56	72	88	105	121	138	155	172	189	206	223	240	258	275	292
43	42	58	74	91	107	124	142	159	176	194	211	229	247	264	282	300
44	43	59	76	93	110	128	145	163	181	199	216	235	253	271	289	307
45	44	61	78	95	113	131	149	167	185	203	222	240	259	277	296	315
46	45	62	80	97	115	134	152	171	189	208	227	246	265	284	303	322
47	46	64	81	100	118	137	156	175	194	213	232	251	271	290	310	329
48	47	65	83	102	121	140	159	178	198	218	237	257	277	297	317	337
49	48	66	85	104	123	143	163	182	202	222	243	263	283	303	324	344
50	49	68	87	106	126	146	166	186	207	227	248	268	289	310	331	352
51	50	69	89	109	129	149	170	190	211	232	253	274	295	316	338	359
52	51	71	91	111	131	152	173	194	215	237	258	280	301	323	345	366
53	52	72	92	113	134	155	177	198	220	241	263	285	307	329	352	374
54	53	74	94	115	137	158	180	202	224	246	269	291	313	336	359	381
55	54	75	96	118	139	161	184	206	228	251	274	297	319	344	365	389
56	55	76	98	120	142	164	187	210	233	256	279	302	326	349	372	396
57	57	78	100	122	145	167	191	214	237	261	284	308	332	355	379	403
58	58	79	102	124	147	171	194	218	241	265	289	314	338	362	386	411
59	59	81	103	127	150	174	198	222	246	270	295	319	344	368	393	418
60	60	82	105	129	153	177	201	225	250	275	300	325	350	375	400	426
	Рівень значущості $p = 0{,}01$															
41	23	36	49	63	77	91	106	121	136	151	166	181	196	211	227	242
42	23	37	50	65	79	94	109	124	139	155	170	186	201	217	233	249
43	24	38	52	66	81	96	112	127	143	159	175	190	207	223	239	255
44	25	39	53	68	83	99	115	130	146	163	179	195	212	228	245	262
45	25	40	54	70	85	101	117	134	150	167	183	200	217	234	251	268
46	26	41	56	71	87	104	120	137	154	171	188	205	222	240	257	275
47	27	42	57	73	90	106	123	140	157	175	192	210	228	245	263	281
48	27	43	58	75	92	109	126	143	161	179	197	215	233	251	269	288
49	28	44	60	77	94	111	129	147	165	183	201	220	238	257	276	294
50	29	45	61	78	96	114	132	150	168	187	206	225	244	263	282	301
51	29	46	63	80	98	116	135	153	172	191	210	229	249	268	288	307
52	30	47	64	82	100	119	137	157	176	195	215	234	254	274	294	314
53	31	48	65	83	102	121	140	160	179	199	219	239	259	280	300	320
54	31	49	67	85	104	124	143	163	183	203	224	244	265	285	306	327
55	32	50	68	87	106	126	146	166	187	207	228	249	270	291	312	333
56	33	51	69	89	108	129	149	169	190	211	233	254	275	297	318	340
57	33	52	71	90	111	131	152	173	194	215	237	259	281	302	324	347
58	34	53	72	92	113	133	155	176	198	220	242	264	286	308	331	353
59	34	54	73	94	115	136	158	179	201	224	246	268	291	314	337	360
60	35	55	75	96	117	138	160	183	205	228	250	273	296	320	343	366

Продовження табл. Д.2.7

n_1	Критичні значення U, якщо n_2 дорівнює															
	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
	Рівень значущості $p = 0{,}05$															
41	302	319	336	353	370	387	404	421	438	456	473	490	507	524	541	559
42	310	327	345	362	380	397	415	432	450	467	485	503	520	538	556	573
43	318	335	353	371	389	407	425	443	461	479	497	515	533	552	570	588
44	325	344	362	380	399	417	436	454	473	491	510	528	547	565	584	602
45	333	352	371	390	408	427	446	465	484	503	522	541	560	579	598	617
46	341	360	380	399	418	437	457	476	495	515	534	554	573	593	612	631
47	349	369	388	408	428	447	467	487	507	527	547	566	586	606	626	646
48	357	377	397	417	437	458	478	498	518	539	559	579	600	620	640	661
49	365	385	406	426	447	468	488	509	530	550	571	592	613	634	654	675
50	372	393	414	435	457	478	499	520	541	562	583	605	626	647	669	690
51	380	402	423	445	466	488	509	531	553	574	596	618	639	661	683	704
52	388	410	432	454	476	498	520	542	564	586	608	630	652	675	697	719
53	396	418	441	463	485	508	530	553	575	598	620	643	666	688	711	734
54	404	427	449	472	495	518	541	564	587	610	633	656	679	702	725	748
55	412	435	458	481	505	528	551	575	598	622	645	669	692	716	739	763
56	420	443	467	491	514	538	562	586	610	634	657	681	705	729	753	777
57	427	451	476	500	524	548	572	597	621	645	670	694	719	743	768	792
58	435	460	484	509	534	558	583	608	633	657	682	707	732	757	782	807
59	443	468	493	518	543	568	594	619	644	669	694	720	745	770	796	821
60	451	476	502	527	553	578	604	630	655	681	707	733	758	784	810	836
	Рівень значущості $p = 0{,}01$															
41	258	273	289	304	320	336	351	367	383	398	414	430	446	462	477	493
42	265	280	296	312	328	345	361	377	393	409	425	442	458	474	490	507
43	271	288	304	321	337	354	370	387	403	420	437	453	470	487	503	520
44	278	295	312	329	346	363	380	397	414	431	448	465	482	499	516	533
45	285	303	320	337	354	372	389	407	424	441	459	476	494	511	529	547
46	292	310	328	345	363	381	399	416	434	452	470	488	506	524	542	560
47	299	317	335	353	372	390	408	426	445	463	481	500	518	536	555	573
48	306	325	343	362	380	399	418	436	455	474	492	511	530	549	568	587
49	313	332	351	370	389	408	427	446	465	484	504	523	542	561	581	600
50	320	339	359	378	398	417	437	456	476	495	515	535	554	574	594	613
51	327	347	366	386	406	426	446	466	486	506	526	546	566	587	607	627
52	334	354	374	395	415	435	456	476	496	517	537	558	578	599	620	640
53	341	361	382	403	423	444	465	486	507	528	549	570	591	612	633	654
54	348	369	390	411	432	453	475	496	517	538	560	581	603	624	646	667
55	355	376	398	419	441	462	484	506	527	549	571	593	615	637	659	680
56	362	384	405	427	449	471	494	516	538	560	582	605	627	649	671	694
57	369	391	413	436	458	481	503	526	548	571	593	616	639	662	684	707
58	376	398	421	444	467	490	513	536	559	582	605	628	651	674	697	721
59	383	406	429	452	475	499	522	545	569	592	616	640	663	687	710	734
60	390	413	437	460	484	508	532	555	579	603	627	651	675	699	723	747

Продовження табл. Д.2.7

n_1	Критичні значення U, якщо n_2 дорівнює												
	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
	Рівень значущості $p = 0{,}05$												
41	576	593	610	628	645	662							
42	591	609	626	644	662	679	697						
43	606	624	642	660	679	697	715	733					
44	621	640	658	677	695	714	733	751	770				
45	636	655	674	693	712	731	750	769	789	808			
46	651	670	690	709	729	749	768	788	807	827	846		
47	666	686	706	726	746	766	786	806	826	846	866	886	
48	681	701	722	742	763	783	804	824	845	865	886	906	927
49	696	717	738	759	780	800	821	842	863	884	905	926	947
50	711	732	754	775	796	818	839	861	882	903	925	946	968
51	726	748	770	791	813	835	857	879	901	922	944	966	988
52	741	763	786	808	830	852	875	897	919	942	964	986	1009
53	756	779	802	824	847	870	893	915	938	961	984	1006	1029
54	771	794	818	841	864	887	910	934	957	980	1003	1026	1050
55	786	810	834	857	881	904	928	952	975	999	1023	1046	1070
56	801	825	850	874	898	922	946	970	994	1018	1042	1067	1091
57	816	841	865	890	915	939	964	988	1013	1037	1062	1087	1111
58	832	856	881	906	931	956	981	1007	1032	1057	1082	1107	1132
59	847	872	897	923	948	974	999	1025	1050	1076	1101	1127	1152
60	862	888	913	939	965	991	1017	1043	1069	1095	1121	1147	1173
	Рівень значущості $p = 0{,}01$												
41	509	525	541	557	573	589							
42	523	539	556	572	588	605	621						
43	537	553	570	587	604	621	637	654					
44	550	568	585	602	619	636	654	671	688				
45	564	582	599	617	635	652	670	688	706	723			
46	578	596	614	632	650	668	687	705	723	741	759		
47	592	610	629	647	666	684	703	722	740	759	777	796	
48	606	625	643	662	681	700	719	738	757	776	795	814	834
49	619	639	658	678	697	716	736	755	775	794	814	833	853
50	633	653	673	693	713	732	752	772	792	812	832	852	872
51	647	667	688	708	728	748	769	789	809	830	850	870	891
52	661	682	702	723	744	764	785	806	827	847	868	889	910
53	675	696	717	738	759	780	802	823	844	865	886	908	929
54	689	710	732	753	775	796	818	840	861	883	905	926	948
55	702	724	746	768	790	812	834	857	879	901	923	945	967
56	716	738	761	784	806	828	851	873	896	919	941	964	986
57	730	753	776	799	822	844	867	890	913	936	959	982	1005
58	744	767	790	814	837	861	884	907	931	954	978	1001	1024
59	758	781	805	829	853	877	900	924	948	972	996	1020	1044
60	772	796	820	844	868	893	917	941	965	990	1014	1038	1063

Закінчення табл. Д.2.7

n_1	Критичні значення U, якщо n_2 дорівнює											
	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	Рівень значущості $p = 0{,}05$											
49	968											
50	989	1010										
51	1010	1032	1054									
52	1031	1053	1076	1098								
53	1052	1075	1098	1120	1143							
54	1073	1096	1119	1143	1166	1189						
55	1094	1113	1141	1165	1189	1213	1236					
56	1115	1139	1163	1187	1212	1236	1260	1284				
57	1136	1161	1185	1210	1235	1259	1284	1309	1333			
58	1157	1182	1207	1232	1257	1283	1308	1333	1358	1383		
59	1178	1204	1229	1255	1280	1306	1331	1357	1383	1408	1434	
60	1199	1225	1251	1277	1303	1329	1355	1381	1407	1433	1460	1486
	Рівень значущості $p = 0{,}01$											
49	872											
50	892	912										
51	911	932	952									
52	931	951	972	993								
53	950	971	993	1014	1035							
54	970	991	1013	1035	1057	1078						
55	989	1011	1034	1056	1078	1100	1122					
56	1009	1031	1054	1077	1099	1122	1145	1167				
57	1028	1051	1074	1098	1121	1141	1167	1190	1213			
58	1048	1071	1095	1118	1142	1165	1189	1213	1236	1260		
59	1068	1091	1115	1139	1163	1187	1211	1235	1259	1283	1307	
60	1087	1111	1136	1160	1185	1209	1234	1258	1282	1307	1331	1356

Таблиця Д.2.8

Критичні значення критерію *H* Крускала—Волліса
(p — рівень значущості)

Обсяг вибірки			H	p
n_1	n_2	n_3		
1	2	3	4	5
2	1	1	2,7000	0,500
2	2	1	3,6000	0,200
2	2	2	4,5714	0,067
3	1	1	3,2000	0,300
3	2	1	4,2857	0,100
			3,8571	0,133
3	2	2	5,3572	0,029
			4,7143	0,048
			4,5000	0,067
			4,4643	0,105
3	3	1	5,1429	0,043
			4,5714	0,100
			4,0000	0,129
3	3	2	6,2500	0,011
			5,3611	0,032
			5,1389	0,061
			4,5556	0,100
			4,2500	0,121
3	3	3	7,2000	0,004
			6,4889	0,011
			5,6889	0,029
			5,6000	0,050
			5,0667	0,086
			4,6222	0,100
4	1	1	3,5714	0,200
4	2	1	4,8214	0,057
			4,5000	0,076
			4,0179	0,114
4	2	2	6,0000	0,014
			5,3333	0,033
			5,1250	0,052
			4,4583	0,100
			4,1667	0,105
4	3	1	5,8333	0,021
			5,2083	0,050
			5,0000	0,057
			4,0556	0,093
			3,8889	0,129
6	7	8	9	10
4	3	2	6,4444	0,008
			6,3000	0,011
			5,4444	0,046
			5,4000	0,051
			4,5111	0,098
			4,4444	0,102
4	3	3	6,7455	0,010
			6,7091	0,013
			5,7909	0,046
			5,7273	0,050
			4,7091	0,092
			4,7000	0,101
4	4	1	6,6667	0,010
			6,1667	0,022
			4,9667	0,048
			4,8667	0,054
			4,1667	0,082
			4,0667	0,102
4	4	2	7,0364	0,006
			6,8727	0,011
			5,4545	0,046
			5,2364	0,052
			4,5545	0,098
			4,4455	0,103
4	4	3	7,1439	0,010
			7,1364	0,011
			5,5985	0,049
			5,5758	0,051
			4,5455	0,099
			4,4773	0,102
4	4	4	7,6538	0,008
			7,5385	0,011
			5,6923	0,049
			5,6538	0,054
			4,6539	0,097
			4,5001	0,104

Закінчення табл. Д.2.8

1	2	3	4	5
5	1	1	3,8571	0,143
5	2	1	5,2500	0,036
			5,0000	0,048
			4,4500	0,071
			4,2000	0,095
			4,0500	0,119
5	2	2	6,5333	0,008
			6,1333	0,013
			5,1600	0,034
			5,0400	0,056
			4,3733	0,090
			4,2933	0,122
5	3	1	6,4000	0,012
			4,9600	0,048
			4,8711	0,052
			4,0178	0,095
			3,8400	0,123
5	3	2	6,9091	0,009
			6,8281	0,010
			5,2509	0,049
			5,1055	0,052
			4,6509	0,091
			4,4945	0,101
5	3	3	7,0788	0,009
			6,9818	0,011
			5,6485	0,049
			5,5152	0,051
			4,5333	0,097
			4,4121	0,109
5	4	1	6,9545	0,008
			6,8400	0,011
			4,9855	0,044
			4,8600	0,056
			3,9873	0,098
			3,9600	0,102
5	4	2	7,2045	0,009
			7,1182	0,010
			5,2727	0,049
			5,2682	0,050
			4,5409	0,098
			4,5182	0,101

6	7	8	9	10
5	4	3	7,4449	0,010
			7,3949	0,011
			5,6564	0,049
			5,6308	0,050
			4,5487	0,099
			4,5231	0,103
5	4	4	7,7604	0,009
			7,7470	0,011
			5,6571	0,049
			5,6176	0,050
			4,6187	0,100
			4,5527	0,102
5	5	1	7,3091	0,009
			6,8364	0,011
			5,1273	0,046
			4,9091	0,053
			4,1091	0,086
			4,0364	0,105
5	5	2	7,3385	0,010
			7,2692	0,010
			5,3385	0,047
			5,2462	0,051
			4,6231	0,097
			4,5077	0,100
5	5	3	7,5780	0,010
			7,5429	0,010
			5,7055	0,046
			5,6264	0,051
			4,5451	0,100
			4,5363	0,102
5	5	4	7,8229	0,010
			7,7914	0,010
			5,6657	0,049
			5,6429	0,050
			4,5229	0,099
			4,5200	0,101
5	5	5	8,0000	0,009
			7,9800	0,010
			5,7800	0,049
			5,6600	0,051
			4,5600	0,100
			4,5000	0,102

Таблиця Д.2.9

Критичні значення критерію тенденцій S Джонкіра

Кількість груп c	Критичні значення S при рівні значущості $p = 0{,}05$								
	Кількість досліджуваних N								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	10	17	24	33	42	53	64	76	88
4	14	26	38	51	66	82	100	118	138
5	20	34	51	71	92	115	140	166	194
6	26	44	67	93	121	151	184	219	256

Кількість груп c	Критичні значення S при рівні значущості $p = 0{,}01$								
	Кількість досліджуваних N								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	—	23	32	45	59	74	90	106	124
4	20	34	50	71	92	115	140	167	195
5	26	48	72	99	129	162	197	234	274
6	34	62	94	130	170	213	260	309	361

Таблиця Д.2.10

Критичні значення критерію знаків G
(n — обсяг вибірки; p — рівень значущості)

Критичні значення G											
n	p		n	p		n	p		n	p	
	0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01
5	0	—	27	8	7	49	18	15	92	37	34
6	0	—	28	8	7	50	18	16	94	38	35
7	0	0	29	9	7	52	19	17	96	39	36
8	1	0	30	10	8	54	20	18	98	40	37
9	1	0	31	10	8	56	21	18	100	41	37
10	1	0	32	10	8	58	22	19	110	45	42
11	2	1	33	11	9	60	23	20	120	50	46
12	2	1	34	11	9	62	24	21	130	55	51
13	3	1	35	12	10	64	24	22	140	59	55
14	3	2	36	12	10	66	25	23	150	64	60
15	3	2	37	13	10	68	26	23	160	69	64
16	4	2	38	13	11	70	27	24	170	73	69
17	4	3	39	13	11	72	28	25	180	78	73
18	5	3	40	14	12	74	29	26	190	83	78
19	5	4	41	14	12	76	30	27	200	87	83
20	5	4	42	15	13	78	31	28	220	97	92
21	6	4	43	15	13	80	32	29	240	106	101
22	6	5	44	16	13	82	33	30	260	116	110
23	7	5	45	16	14	84	33	30	280	125	120
24	7	5	46	16	14	86	34	31	300	135	129
25	7	6	47	17	15	88	35	32			
26	8	6	48	17	15	90	36	33			

Таблиця Д.2.11

Критичні значення критерію *T* Вілкоксона
(n — обсяг вибірки; p — рівень значущості)

n	Критичні значення T при p		n	Критичні значення T при p	
	0,05	0,01		0,05	0,01
5	0	—	28	130	101
6	2	—	29	140	110
7	3	0	30	151	120
8	5	1	31	163	130
9	8	3	32	175	140
10	10	5	33	187	151
11	13	7	34	200	162
12	17	9	35	213	173
13	21	12	36	227	185
14	25	15	37	241	198
15	30	19	38	256	211
16	35	23	39	271	224
17	41	27	40	286	238
18	47	32	41	302	252
19	53	37	42	319	266
20	60	43	43	336	281
21	67	49	44	353	296
22	75	55	45	371	312
23	83	62	46	389	328
24	91	69	47	407	345
25	100	76	48	426	362
26	110	84	49	446	379
27	119	92	50	466	397

Таблиця Д.2.12

Рівні статистичної значущості p значень критерію $\varphi^\star$ Фішера

p	Значення $\varphi^\star$, якщо третя цифра p після коми дорівнює									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	2,91	2,81	2,70	2,62	2,55	2,49	2,44	2,39	2,35	2,33
0,01	2,31	2,28	2,25	2,22	2,19	2,16	2,14	2,11	2,09	2,07
0,02	2,05	2,03	2,01	1,99	1,97	1,96	1,94	1,92	1,91	1,89
0,03	1,88	1,86	1,85	1,84	1,82	1,81	1,80	1,79	1,77	1,76
0,04	1,75	1,74	1,73	1,72	1,71	1,70	1,68	1,67	1,66	1,65
0,05	1,64	1,64	1,63	1,62	1,61	1,60	1,59	1,58	1,57	1,56
0,06	1,56	1,55	1,54	1,53	1,52	1,52	1,51	1,50	1,49	1,48
0,07	1,48	1,47	1,46	1,46	1,45	1,44	1,43	1,43	1,42	1,41
0,08	1,41	1,40	1,39	1,39	1,38	1,37	1,37	1,36	1,36	1,35
0,09	1,34	1,34	1,33	1,32	1,32	1,31	1,31	1,30	1,30	1,29
0,10	1,29									

Таблиця Д.2.13

Значення кута $\varphi = 2\arcsin\sqrt{P}$ у радіанах для різних часток (%)

%	Значення кута φ, якщо останній десятковий знак частки (%) дорівнює									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,0	0,0000	0,0200	0,0283	0,0346	0,0400	0,0447	0,0490	0,0529	0,0566	0,0600
0,1	0,0633	0,0663	0,0693	0,0721	0,0749	0,0775	0,0800	0,0825	0,0849	0,0872
0,2	0,0895	0,0917	0,0938	0,0960	0,0980	0,1000	0,1020	0,1040	0,1059	0,1078
0,3	0,1096	0,1114	0,1132	0,1150	0,1167	0,1184	0,1201	0,1217	0,1234	0,1250
0,4	0,1266	0,1282	0,1297	0,1312	0,1328	0,1343	0,1358	0,1372	0,1387	0,1401
0,5	0,1415	0,1430	0,1443	0,1457	0,1471	0,1485	0,1498	0,1511	0,1525	0,1538
0,6	0,1551	0,1564	0,1576	0,1589	0,1602	0,1614	0,1627	0,1639	0,1651	0,1663
0,7	0,1675	0,1687	0,1699	0,1711	0,1723	0,1734	0,1746	0,1757	0,1769	0,1780
0,8	0,1791	0,1802	0,1814	0,1825	0,1836	0,1847	0,1857	0,1868	0,1879	0,1890
0,9	0,1900	0,1911	0,1921	0,1932	0,1942	0,1952	0,1963	0,1973	0,1983	0,1993
1	0,2003	0,2101	0,2195	0,2285	0,2372	0,2456	0,2537	0,2615	0,2691	0,2766
2	0,2838	0,2909	0,2977	0,3045	0,3111	0,3176	0,3239	0,3301	0,3362	0,3423
3	0,3482	0,3540	0,3597	0,3653	0,3709	0,3764	0,3818	0,3871	0,3924	0,3976
4	0,4027	0,4078	0,4128	0,4178	0,4227	0,4275	0,4323	0,4371	0,4418	0,4464
5	0,4510	0,4556	0,4601	0,4646	0,4690	0,4735	0,4778	0,4822	0,4864	0,4907
6	0,4949	0,4991	0,5033	0,5074	0,5115	0,5156	0,5196	0,5236	0,5276	0,5316
7	0,5355	0,5394	0,5433	0,5472	0,5510	0,5548	0,5586	0,5624	0,5661	0,5698
8	0,5735	0,5772	0,5808	0,5845	0,5881	0,5917	0,5953	0,5988	0,6024	0,6059
9	0,6094	0,6129	0,6163	0,6198	0,6232	0,6266	0,6300	0,6334	0,6368	0,6402
10	0,6435	0,6468	0,6501	0,6534	0,6567	0,6600	0,6632	0,6665	0,6697	0,6729
11	0,6761	0,6793	0,6825	0,6857	0,6888	0,6920	0,6951	0,6982	0,7013	0,7044
12	0,7075	0,7106	0,7136	0,7167	0,7197	0,7227	0,7258	0,7288	0,7318	0,7347
13	0,7377	0,7407	0,7437	0,7466	0,7495	0,7525	0,7554	0,7583	0,7612	0,7641
14	0,7670	0,7699	0,7727	0,7756	0,7785	0,7813	0,7841	0,7870	0,7898	0,7926
15	0,7954	0,7982	0,8010	0,8038	0,8065	0,8093	0,8121	0,8148	0,8176	0,8203
16	0,8230	0,8258	0,8285	0,8312	0,8339	0,8366	0,8393	0,8420	0,8446	0,8473
17	0,8500	0,8526	0,8553	0,8579	0,8606	0,8632	0,8658	0,8685	0,8711	0,8737
18	0,8763	0,8789	0,8815	0,8841	0,8867	0,8892	0,8918	0,8944	0,8969	0,8995
19	0,9021	0,9046	0,9071	0,9097	0,9122	0,9147	0,9173	0,9198	0,9223	0,9248
20	0,9273	0,9298	0,9323	0,9348	0,9373	0,9397	0,9422	0,9447	0,9471	0,9496
21	0,9521	0,9545	0,9570	0,9594	0,9619	0,9643	0,9667	0,9692	0,9716	0,9740
22	0,9764	0,9788	0,9812	0,9836	0,9860	0,9884	0,9908	0,9932	0,9956	0,9980
23	1,0004	1,0027	1,0051	1,0075	1,0098	1,0122	1,0146	1,0169	1,0193	1,0216
24	1,0239	1,0263	1,0286	1,0310	1,0333	1,0356	1,0379	1,0403	1,0426	1,0449
25	1,0472	1,0495	1,0518	1,0541	1,0564	1,0587	1,0610	1,0633	1,0656	1,0679
26	1,0701	1,0724	1,0747	1,0770	1,0792	1,0815	1,0838	1,0860	1,0883	1,0905
27	1,0928	1,0951	1,0973	1,0995	1,1018	1,1040	1,1063	1,1085	1,1107	1,1130
28	1,1152	1,1174	1,1196	1,1219	1,1241	1,1263	1,1285	1,1307	1,1329	1,1351
29	1,1374	1,1396	1,1418	1,1440	1,1461	1,1483	1,1505	1,1527	1,1549	1,1571
30	1,1593	1,1615	1,1636	1,1658	1,1680	1,1702	1,1723	1,1745	1,1767	1,1788

Продовження табл. Д.2.13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
31	1,1810	1,1832	1,1853	1,1875	1,1896	1,1918	1,1939	1,1961	1,1982	1,2004
32	1,2025	1,2047	1,2068	1,2090	1,2111	1,2132	1,2154	1,2175	1,2196	1,2218
33	1,2239	1,2260	1,2281	1,2303	1,2324	1,2345	1,2366	1,2387	1,2408	1,2430
34	1,2451	1,2472	1,2493	1,2514	1,2535	1,2556	1,2577	1,2598	1,2619	1,2640
35	1,2661	1,2682	1,2703	1,2724	1,2745	1,2766	1,2787	1,2807	1,2828	1,2849
36	1,2870	1,2891	1,2912	1,2932	1,2953	1,2974	1,2995	1,3016	1,3036	1,3057
37	1,3078	1,3098	1,3119	1,3140	1,3160	1,3181	1,3202	1,3222	1,3243	1,3264
38	1,3284	1,3305	1,3325	1,3346	1,3367	1,3387	1,3408	1,3428	1,3449	1,3469
39	1,3490	1,3510	1,3531	1,3551	1,3572	1,3592	1,3613	1,3633	1,3654	1,3674
40	1,3694	1,3715	1,3735	1,3756	1,3776	1,3796	1,3817	1,3837	1,3857	1,3878
41	1,3898	1,3918	1,3939	1,3959	1,3979	1,4000	1,4020	1,4040	1,4061	1,4081
42	1,4101	1,4121	1,4142	1,4162	1,4182	1,4202	1,4223	1,4243	1,4263	1,4283
43	1,4303	1,4324	1,4344	1,4364	1,4384	1,4404	1,4424	1,4445	1,4465	1,4485
44	1,4505	1,4525	1,4545	1,4565	1,4586	1,4606	1,4626	1,4646	1,4666	1,4686
45	1,4706	1,4726	1,4746	1,4767	1,4787	1,4807	1,4827	1,4847	1,4867	1,4887
46	1,4907	1,4927	1,4947	1,4967	1,4987	1,5007	1,5027	1,5047	1,5068	1,5088
47	1,5108	1,5128	1,5148	1,5168	1,5188	1,5208	1,5228	1,5248	1,5268	1,5288
48	1,5308	1,5328	1,5348	1,5368	1,5388	1,5408	1,5428	1,5448	1,5468	1,5488
49	1,5508	1,5528	1,5548	1,5568	1,5588	1,5608	1,5628	1,5648	1,5668	1,5688
50	1,5708	1,5728	1,5748	1,5768	1,5788	1,5808	1,5828	1,5848	1,5868	1,5888
51	1,5908	1,5928	1,5948	1,5968	1,5988	1,6008	1,6028	1,6048	1,6068	1,6088
52	1,6108	1,6128	1,6148	1,6168	1,6188	1,6208	1,6228	1,6248	1,6268	1,6288
53	1,6308	1,6328	1,6348	1,6368	1,6388	1,6409	1,6429	1,6449	1,6469	1,6489
54	1,6509	1,6529	1,6549	1,6569	1,6589	1,6609	1,6629	1,6649	1,6669	1,6690
55	1,6710	1,6730	1,6750	1,6770	1,6790	1,6810	1,6830	1,6850	1,6871	1,6891
56	1,6911	1,6931	1,6951	1,6971	1,6991	1,7012	1,7032	1,7052	1,7072	1,7092
57	1,7113	1,7133	1,7153	1,7173	1,7193	1,7214	1,7234	1,7254	1,7274	1,7295
58	1,7315	1,7335	1,7355	1,7376	1,7396	1,7416	1,7437	1,7457	1,7477	1,7497
59	1,7518	1,7538	1,7559	1,7579	1,7599	1,7620	1,7640	1,7660	1,7681	1,7701
60	1,7722	1,7742	1,7762	1,7783	1,7803	1,7824	1,7844	1,7865	1,7885	1,7906
61	1,7926	1,7947	1,7967	1,7988	1,8008	1,8029	1,8049	1,8070	1,8090	1,8111
62	1,8132	1,8152	1,8173	1,8193	1,8214	1,8235	1,8255	1,8276	1,8297	1,8317
63	1,8338	1,8359	1,8380	1,8400	1,8421	1,8442	1,8463	1,8483	1,8504	1,8525
64	1,8546	1,8567	1,8588	1,8608	1,8629	1,8650	1,8671	1,8692	1,8713	1,8734
65	1,8755	1,8776	1,8797	1,8818	1,8839	1,8860	1,8881	1,8902	1,8923	1,8944
66	1,8965	1,8986	1,9008	1,9029	1,9050	1,9071	1,9092	1,9113	1,9135	1,9156
67	1,9177	1,9198	1,9220	1,9241	1,9262	1,9284	1,9305	1,9326	1,9348	1,9369
68	1,9391	1,9412	1,9434	1,9455	1,9477	1,9498	1,9520	1,9541	1,9563	1,9584
69	1,9606	1,9628	1,9649	1,9671	1,9693	1,9714	1,9736	1,9758	1,9780	1,9801
70	1,9823	1,9845	1,9867	1,9889	1,9911	1,9933	1,9954	1,9976	1,9998	2,0020

Закінчення табл. Д.2.13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
71	2,0042	2,0064	2,0087	2,0109	2,0131	2,0153	2,0175	2,0197	2,0219	2,0242
72	2,0264	2,0286	2,0309	2,0331	2,0353	2,0376	2,0398	2,0420	2,0443	2,0465
73	2,0488	2,0510	2,0533	2,0556	2,0578	2,0601	2,0624	2,0646	2,0669	2,0692
74	2,0715	2,0737	2,0760	2,0783	2,0806	2,0829	2,0852	2,0875	2,0898	2,0921
75	2,0944	2,0967	2,0990	2,1013	2,1037	2,1060	2,1083	2,1106	2,1130	2,1153
76	2,1176	2,1200	2,1223	2,1247	2,1270	2,1294	2,1318	2,1341	2,1365	2,1389
77	2,1412	2,1436	2,1460	2,1484	2,1508	2,1532	2,1556	2,1580	2,1604	2,1628
78	2,1652	2,1676	2,1700	2,1724	2,1749	2,1773	2,1797	2,1822	2,1846	2,1871
79	2,1895	2,1920	2,1944	2,1969	2,1994	2,2019	2,2043	2,2068	2,2093	2,2118
80	2,2143	2,2168	2,2193	2,2218	2,2243	2,2269	2,2294	2,2319	2,2345	2,2370
81	2,2395	2,2421	2,2446	2,2472	2,2498	2,2523	2,2549	2,2575	2,2601	2,2627
82	2,2653	2,2679	2,2705	2,2731	2,2758	2,2784	2,2810	2,2837	2,2863	2,2890
83	2,2916	2,2943	2,2970	2,2996	2,3023	2,3050	2,3077	2,3104	2,3131	2,3158
84	2,3186	2,3213	2,3240	2,3268	2,3295	2,3323	2,3351	2,3378	2,3406	2,3434
85	2,3462	2,3490	2,3518	2,3546	2,3575	2,3603	2,3631	2,3660	2,3689	2,3717
86	2,3746	2,3775	2,3804	2,3833	2,3862	2,3891	2,3920	2,3950	2,3979	2,4009
87	2,4039	2,4068	2,4098	2,4128	2,4158	2,4189	2,4219	2,4249	2,4280	2,4310
88	2,4341	2,4372	2,4403	2,4434	2,4465	2,4496	2,4528	2,4559	2,4591	2,4623
89	2,4655	2,4687	2,4719	2,4751	2,4784	2,4816	2,4849	2,4882	2,4915	2,4948
90	2,4981	2,5014	2,5048	2,5082	2,5115	2,5149	2,5184	2,5218	2,5253	2,5287
91	2,5322	2,5357	2,5392	2,5428	2,5463	2,5499	2,5535	2,5571	2,5607	2,5644
92	2,5681	2,5718	2,5755	2,5792	2,5830	2,5868	2,5906	2,5944	2,5983	2,6022
93	2,6061	2,6100	2,6140	2,6179	2,6220	2,6260	2,6301	2,6342	2,6383	2,6425
94	2,6467	2,6509	2,6551	2,6594	2,6638	2,6681	2,6725	2,6770	2,6815	2,6860
95	2,6906	2,6952	2,6998	2,7045	2,7093	2,7141	2,7189	2,7238	2,7288	2,7338
96	2,7389	2,7440	2,7492	2,7545	2,7598	2,7652	2,7707	2,7762	2,7819	2,7876
97	2,7934	2,7993	2,8053	2,8115	2,8177	2,8240	2,8305	2,8371	2,8438	2,8507
98	2,8578	2,8650	2,8725	2,8801	2,8879	2,8960	2,9044	2,9131	2,9221	2,9314
99,0	2,9413	2,9423	2,9433	2,9443	2,9453	2,9463	2,9474	2,9484	2,9495	2,9505
99,1	2,9516	2,9526	2,9537	2,9548	2,9559	2,9569	2,9580	2,9591	2,9602	2,9613
99,2	2,9625	2,9636	2,9647	2,9659	2,9670	2,9682	2,9693	2,9705	2,9717	2,9729
99,3	2,9741	2,9753	2,9765	2,9777	2,9789	2,9802	2,9814	2,9827	2,9839	2,9852
99,4	2,9865	2,9878	2,9891	2,9905	2,9918	2,9931	2,9945	2,9959	2,9972	2,9986
99,5	3,0001	3,0015	3,0029	3,0044	3,0058	3,0073	3,0088	3,0103	3,0119	3,0134
99,6	3,0150	3,0166	3,0182	3,0199	3,0215	3,0232	3,0249	3,0266	3,0284	3,0302
99,7	3,0320	3,0338	3,0357	3,0376	3,0396	3,0416	3,0436	3,0456	3,0477	3,0499
99,8	3,0521	3,0544	3,0567	3,0591	3,0616	3,0641	3,0667	3,0695	3,0723	3,0752
99,9	3,0783	3,0816	3,0850	3,0887	3,0926	3,0969	3,1016	3,1069	3,1133	3,1216
100	3,1416	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Таблиця Д.2.14

Критичні значення критерію χ_r^2 Фрідмана

Кількість умов $c = 3$								
n	χ_r^2	p	n	χ_r^2	p	n	χ_r^2	p
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,000	1,000	6	6,333	0,052	8	7,000	0,030
2	1,000	0,833	6	7,000	0,029	8	7,750	0,018
2	3,000	0,500	6	8,333	0,012	8	9,000	0,0099
2	4,000	0,167	6	9,000	0,0081	8	9,250	0,0080
3	0,000	1,000	6	9,333	0,0055	8	9,750	0,0048
3	0,667	0,944	6	10,333	0,0017	8	10,750	0,0024
3	2,000	0,528	6	12,000	0,00013	8	12,000	0,0011
3	2,667	0,361	7	0,000	1,000	8	12,250	0,00086
3	4,667	0,194	7	0,286	0,964	8	13,000	0,00026
3	6,000	0,028	7	0,857	0,768	8	14,250	0,000061
4	0,000	1,000	7	1,143	0,620	8	16,000	0,0000036
4	0,500	0,931	7	2,000	0,486	9	0,000	1,000
4	1,500	0,653	7	2,571	0,305	9	0,222	0,971
4	2,000	0,431	7	3,429	0,237	9	0,667	0,814
4	3,500	0,273	7	3,714	0,192	9	0,889	0,765
4	4,500	0,125	7	4,571	0,112	9	1,556	0,569
4	6,000	0,069	7	5,429	0,085	9	2,000	0,398
4	6,500	0,042	7	6,000	0,052	9	2,667	0,328
4	8,000	0,0046	7	7,143	0,027	9	2,889	0,278
5	0,000	1,000	7	7,714	0,021	9	3,556	0,187
5	0,400	0,954	7	8,000	0,016	9	4,222	0,154
5	1,200	0,691	7	8,857	0,0084	9	4,667	0,107
5	1,600	0,522	7	10,286	0,0036	9	5,556	0,069
5	2,800	0,367	7	10,571	0,0027	9	6,000	0,057
5	3,600	0,182	7	11,143	0,0012	9	6,222	0,048
5	4,800	0,124	7	12,286	0,00032	9	6,889	0,031
5	5,200	0,093	7	14,000	0,000021	9	8,000	0,019
5	6,400	0,039	8	0,000	1,000	9	8,222	0,016
5	7,600	0,024	8	0,250	0,967	9	8,667	0,010
5	8,400	0,0085	8	0,750	0,794	9	9,556	0,0060
5	10,000	0,00077	8	1,000	0,654	9	10,667	0,0035
6	0,000	1,000	8	1,750	0,531	9	10,889	0,0029
6	0,333	0,956	8	2,250	0,355	9	11,556	0,0013
6	1,000	0,740	8	3,000	0,285	9	12,667	0,00066
6	1,333	0,570	8	3,250	0,236	9	13,556	0,00035
6	2,333	0,430	8	4,000	0,149	9	14,000	0,00020
6	3,000	0,252	8	4,750	0,120	9	14,222	0,000097
6	4,000	0,184	8	5,250	0,079	9	14,889	0,000054
6	4,333	0,142	8	6,250	0,047	9	16,222	0,000011
6	5,333	0,072	8	6,750	0,038	9	18,000	0,0000006

Закінчення табл. Д.2.14

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Кількість умов $c = 4$								
2	0,0	1,000	3	5,8	0,148	4	4,8	0,200
2	0,6	0,958	3	6,6	0,075	4	5,1	0,190
2	1,2	0,834	3	7,0	0,054	4	5,4	0,158
2	1,8	0,792	3	7,4	0,033	4	5,7	0,141
2	2,4	0,625	3	8,2	0,017	4	6,0	0,105
2	3,0	0,542	3	9,0	0,0017	4	6,3	0,094
2	3,6	0,458	4	0,0	1,000	4	6,6	0,077
2	4,2	0,375	4	0,3	0,992	4	6,9	0,068
2	4,8	0,208	4	0,6	0,928	4	7,2	0,054
2	5,4	0,167	4	0,9	0,900	4	7,5	0,052
2	6,0	0,042	4	1,2	0,800	4	7,8	0,036
3	0,0	1,000	4	1,5	0,754	4	8,1	0,033
3	0,6	0,958	4	1,8	0,677	4	8,4	0,019
3	1,0	0,910	4	2,1	0,649	4	8,7	0,014
3	1,8	0,727	4	2,4	0,524	4	9,3	0,012
3	2,2	0,608	4	2,7	0,508	4	9,6	0,0079
3	2,6	0,524	4	3,0	0,432	4	9,9	0,0062
3	3,4	0,446	4	3,3	0,389	4	10,2	0,0027
3	3,8	0,342	4	3,6	0,355	4	10,8	0,0016
3	4,2	0,300	4	3,9	0,324	4	11,1	0,00094
3	5,0	0,207	4	4,5	0,242	4	12,0	0,000072
3	5,4	0,175						

Таблиця Д.2.15

Критичні значення вибіркового коефіцієнта рангової кореляції r_s Спірмена

Критичні значення r_s								
n	Рівень значущості α		n	Рівень значущості α		n	Рівень значущості α	
	0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01
5	0,94	—	17	0,48	0,62	29	0,37	0,48
6	0,85	—	18	0,47	0,60	30	0,36	0,47
7	0,78	0,94	19	0,46	0,58	31	0,36	0,46
8	0,72	0,88	20	0,45	0,57	32	0,36	0,45
9	0,68	0,83	21	0,44	0,56	33	0,34	0,45
10	0,64	0,79	22	0,43	0,54	34	0,34	0,44
11	0,61	0,76	23	0,42	0,53	35	0,33	0,43
12	0,58	0,73	24	0,41	0,52	36	0,33	0,43
13	0,56	0,70	25	0,40	0,51	37	0,33	0,43
14	0,54	0,68	26	0,39	0,50	38	0,32	0,41
15	0,52	0,66	27	0,38	0,49	39	0,32	0,41
16	0,50	0,64	28	0,38	0,48	40	0,31	0,40

Таблиця Д.2.16

Критичні значення критерію тенденцій L Пейджа
(n — обсяг вибірки, c — кількість умов, p — рівень значущості)

n	Критичні значення L при c				p
	3	4	5	6	
2	—	—	109	178	0,001
	—	60	106	173	0,01
	28	58	103	166	0,05
3	—	89	160	260	0,001
	42	87	155	252	0,01
	41	84	150	244	0,05
4	56	117	210	341	0,001
	55	114	204	331	0,01
	54	111	197	321	0,05
5	70	145	259	420	0,001
	68	141	251	409	0,01
	66	137	244	397	0,05
6	83	172	307	499	0,001
	81	167	299	486	0,01
	79	163	291	474	0,05
7	96	198	355	577	0,001
	93	193	346	563	0,01
	91	189	338	550	0,05
8	109	225	403	655	0,001
	106	220	393	640	0,01
	104	214	384	625	0,05
9	121	252	451	733	0,001
	119	246	441	717	0,01
	116	240	431	701	0,05
10	134	278	499	811	0,001
	131	272	487	793	0,01
	128	266	477	777	0,05
11	147	305	546	888	0,001
	144	298	534	869	0,01
	141	292	523	852	0,05
12	160	331	593	965	0,001
	156	324	581	946	0,01
	153	317	570	928	0,05

Таблиця Д.2.17

Критичні значення критерію χ^2

Кількість ступенів вільності k	Критичні значення критерію χ^2 при рівні значущості α				
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1
1	2	3	4	5	6
1	7,879	6,635	5,024	3,841	2,706
2	10,597	9,210	7,378	5,991	4,605
3	12,838	11,345	9,348	7,815	6,251
4	14,860	13,277	11,143	9,488	7,779
5	16,750	15,086	12,832	11,070	9,236
6	18,548	16,812	14,449	12,592	10,645
7	20,278	18,475	16,013	14,067	12,017
8	21,955	20,090	17,535	15,507	13,362
9	23,589	21,666	19,023	16,919	14,684
10	25,188	23,209	20,483	18,307	15,987
11	26,757	24,725	21,920	19,675	17,275
12	28,300	26,217	23,337	21,026	18,549
13	29,819	27,688	24,736	22,362	19,812
14	31,319	29,141	26,119	23,685	21,064
15	32,801	30,578	27,488	24,996	22,307
16	34,267	32,000	28,845	26,296	23,542
17	35,718	33,409	30,191	27,587	24,769
18	37,156	34,805	31,526	28,869	25,989
19	38,582	36,191	32,852	30,144	27,204
20	39,997	37,566	34,170	31,410	28,412
21	41,401	38,932	35,479	32,671	29,615
22	42,796	40,289	36,781	33,924	30,813
23	44,181	41,638	38,076	35,172	32,007
24	45,558	42,980	39,364	36,415	33,196
25	46,928	44,314	40,647	37,652	34,382
26	48,290	45,642	41,923	38,885	35,563
27	49,645	46,963	43,195	40,113	36,741
28	50,994	48,278	44,461	41,337	37,916
29	52,336	49,588	45,722	42,557	39,087
30	53,672	50,892	46,979	43,773	40,256
31	55,002	52,191	48,232	44,985	41,422
32	56,328	53,486	49,480	46,194	42,585
33	57,648	54,775	50,725	47,400	43,745
34	58,964	56,061	51,966	48,602	44,903
35	60,275	57,342	53,203	49,802	46,059
36	61,581	58,619	54,437	50,998	47,212
37	62,883	59,893	55,668	52,192	48,363
38	64,181	61,162	56,895	53,384	49,513
39	65,475	62,428	58,120	54,572	50,660
40	66,766	63,691	59,342	55,758	51,805

Продовження табл. Д.2.17

1	2	3	4	5	6
41	68,053	64,950	60,561	56,942	52,949
42	69,336	66,206	61,777	58,124	54,090
43	70,616	67,459	62,990	59,304	55,230
44	71,892	68,710	64,201	60,481	56,369
45	73,166	69,957	65,410	61,656	57,505
46	74,437	71,202	66,616	62,830	58,641
47	75,704	72,443	67,821	64,001	59,774
48	76,969	73,683	69,023	65,171	60,907
49	78,231	74,919	70,222	66,339	62,038
50	79,490	76,154	71,420	67,505	63,167
51	80,746	77,386	72,616	68,669	64,295
52	82,001	78,616	73,810	69,832	65,422
53	83,253	79,843	75,002	70,993	66,548
54	84,502	81,069	76,192	72,153	67,673
55	85,749	82,292	77,380	73,311	68,796
56	86,994	83,514	78,567	74,468	69,919
57	88,237	84,733	79,752	75,624	71,040
58	89,477	85,950	80,936	76,778	72,160
59	90,715	87,166	82,117	77,930	73,279
60	91,952	88,379	83,298	79,082	74,397
61	93,186	89,591	84,476	80,232	75,514
62	94,419	90,802	85,654	81,381	76,630
63	95,649	92,100	86,830	82,529	77,745
64	96,878	93,217	88,004	83,675	78,860
65	98,105	94,422	89,177	84,821	79,973
66	99,330	95,626	90,349	85,965	81,085
67	100,554	96,828	91,519	87,108	82,197
68	101,776	98,028	92,688	88,250	83,308
69	102,996	99,227	93,856	89,391	84,418
70	104,215	100,425	95,023	90,531	85,527
71	105,432	101,621	96,189	91,670	86,635
72	106,647	102,816	97,353	92,808	87,743
73	107,862	104,100	98,516	93,945	88,850
74	109,074	105,202	99,678	95,081	89,956
75	110,285	106,393	100,839	96,217	91,061
76	111,495	107,582	101,999	97,351	92,166
77	112,704	108,771	103,158	98,484	93,270
78	113,911	109,958	104,316	99,617	94,374
79	115,116	111,144	105,473	100,749	95,476
80	116,321	112,329	106,629	101,880	96,578

Продовження табл. Д.2.17

1	2	3	4	5	6
81	117,524	113,512	107,783	103,010	97,680
82	118,726	114,695	108,937	104,139	98,780
83	119,927	115,876	110,090	105,267	99,880
84	121,126	117,057	111,242	106,395	100,980
85	122,324	118,236	112,393	107,522	102,079
86	123,522	119,414	113,544	108,648	103,177
87	124,718	120,591	114,693	109,773	104,275
88	125,912	121,767	115,842	110,898	105,372
89	127,106	122,942	116,989	112,022	106,469
90	128,299	124,116	118,136	113,145	107,565
91	129,490	125,289	119,282	114,268	108,661
92	130,681	126,462	120,427	115,390	109,756
93	131,871	127,633	121,571	116,511	110,850
94	133,059	128,803	122,715	117,632	111,944
95	134,247	129,973	123,858	118,752	113,038
96	135,433	131,141	125,000	119,871	114,131
97	136,619	132,309	126,141	120,990	115,223
98	137,803	133,476	127,282	122,108	116,315
99	138,987	134,642	128,422	123,225	117,407
100	140,170	135,807	129,561	124,342	118,498
110	151,948	147,414	140,917	135,480	129,385
120	163,649	158,950	152,211	146,567	140,233
130	175,278	170,423	163,453	157,610	151,045
140	186,847	181,841	174,648	168,613	161,827
150	198,360	193,208	185,800	179,581	172,581
160	209,824	204,530	196,915	190,516	183,311
170	221,242	215,812	207,996	201,423	194,017
180	232,620	227,056	219,044	212,304	204,704
190	243,959	238,266	230,065	223,160	215,371
200	255,264	249,445	241,058	233,994	226,021
250	311,346	304,939	295,689	287,882	279,050
300	366,844	359,906	349,875	341,395	331,789
350	421,901	414,474	403,723	394,626	384,306
400	476,607	468,724	457,306	447,632	436,649
450	531,026	522,717	510,670	500,456	488,849
500	585,206	576,493	563,851	553,127	540,930
600	692,981	683,516	669,769	658,094	644,800
700	800,131	789,974	775,211	762,661	748,359
800	906,786	895,984	880,275	866,911	851,671
1000	1118,948	1106,969	1089,531	1074,679	1057,724

Продовження табл. Д.2.17

Кількість ступенів вільності k	Критичні значення критерію χ^2 при рівні значущості α				
	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	7	8	9	10	11
1	0,0158	0,00393	0,000982	0,000157	0,0000393
2	0,211	0,1026	0,0506	0,0201	0,01002
3	0,584	0,352	0,216	0,1148	0,0717
4	1,064	0,711	0,484	0,297	0,207
5	1,610	1,145	0,831	0,554	0,412
6	2,204	1,635	1,237	0,872	0,676
7	2,833	2,167	1,690	1,239	0,989
8	3,490	2,733	2,180	1,647	1,344
9	4,168	3,325	2,700	2,088	1,735
10	4,865	3,940	3,247	2,559	2,156
11	5,578	4,575	3,816	3,053	2,603
12	6,304	5,226	4,404	3,571	3,074
13	7,042	5,892	5,009	4,107	3,565
14	7,790	6,571	5,629	4,660	4,075
15	8,547	7,261	6,262	5,229	4,601
16	9,312	7,962	6,908	5,812	5,142
17	10,085	8,672	7,564	6,408	5,697
18	10,865	9,390	8,231	7,015	6,265
19	11,651	10,117	8,907	7,633	6,844
20	12,443	10,851	9,591	8,260	7,434
21	13,240	11,591	10,283	8,897	8,034
22	14,041	12,338	10,982	9,542	8,643
23	14,848	13,092	11,689	10,196	9,260
24	15,659	13,848	12,401	10,856	9,886
25	16,473	14,611	13,120	11,524	10,520
26	17,292	15,379	13,844	12,198	11,160
27	18,114	16,151	14,573	12,878	11,808
28	18,939	16,928	15,308	13,565	12,461
29	19,768	17,708	16,047	14,256	13,121
30	20,599	18,493	16,791	14,953	13,787
31	21,434	19,281	17,539	15,655	14,458
32	22,271	20,072	18,291	16,362	15,134
33	23,110	20,867	19,047	17,073	15,815
34	23,952	21,664	19,806	17,789	16,501
35	24,797	22,465	20,569	18,509	17,192
36	25,643	23,269	21,336	19,233	17,887
37	26,492	24,075	22,106	19,960	18,586
38	27,343	24,884	22,878	20,691	19,289
39	28,196	25,695	23,654	21,426	19,996
40	29,051	26,509	24,433	22,164	20,707

Продовження табл. Д.2.17

1	7	8	9	10	11
41	29,907	27,326	25,215	22,906	21,421
42	30,765	28,144	25,999	23,650	22,138
43	31,625	28,965	26,785	24,398	22,860
44	32,487	29,788	27,575	25,148	23,584
45	33,350	30,612	28,366	25,901	24,311
46	34,215	31,439	29,160	26,657	25,041
47	35,081	32,268	29,956	27,416	25,775
48	35,949	33,098	30,755	28,177	26,511
49	36,818	33,930	31,555	28,941	27,249
50	37,689	34,764	32,357	29,707	27,991
51	38,560	35,600	33,162	30,475	28,735
52	39,433	36,437	33,968	31,246	29,481
53	40,308	37,276	34,776	32,019	30,230
54	41,183	38,116	35,586	32,793	30,981
55	42,060	38,958	36,398	33,571	31,735
56	42,937	39,801	37,212	34,350	32,491
57	43,816	40,646	38,027	35,131	33,248
58	44,696	41,492	38,844	35,914	34,008
59	45,577	42,339	39,662	36,698	34,770
60	46,459	43,188	40,482	37,485	35,534
61	47,342	44,038	41,303	38,273	36,300
62	48,226	44,889	42,126	39,063	37,068
63	49,111	45,741	42,950	39,855	37,838
64	49,996	46,595	43,776	40,649	38,610
65	50,883	47,450	44,603	41,444	39,383
66	51,771	48,305	45,431	42,240	40,158
67	52,659	49,162	46,261	43,038	40,935
68	53,548	50,020	47,092	43,838	41,714
69	54,438	50,879	47,924	44,639	42,493
70	55,329	51,739	48,758	45,442	43,275
71	56,221	52,600	49,592	46,246	44,058
72	57,113	53,462	50,428	47,051	44,843
73	58,006	54,325	51,265	47,858	45,629
74	58,900	55,189	52,103	48,666	46,417
75	59,795	56,054	52,942	49,475	47,206
76	60,690	56,920	53,782	50,286	47,996
77	61,586	57,786	54,623	51,097	48,788
78	62,483	58,654	55,466	51,910	49,581
79	63,380	59,522	56,309	52,725	50,376
80	64,278	60,391	57,153	53,540	51,172

Закінчення табл. Д.2.17

1	7	8	9	10	11
81	65,176	61,262	57,999	54,357	51,969
82	66,076	62,132	58,845	55,174	52,767
83	66,976	63,004	59,692	55,993	53,567
84	67,876	63,876	60,540	56,813	54,368
85	68,777	64,749	61,389	57,634	55,170
86	69,679	65,623	62,239	58,456	55,973
87	70,581	66,498	63,089	59,279	56,777
88	71,484	67,373	63,941	60,103	57,582
89	72,387	68,249	64,793	60,928	58,389
90	73,291	69,126	65,647	61,754	59,196
91	74,196	70,003	66,501	62,581	60,005
92	75,100	70,882	67,356	63,409	60,815
93	76,006	71,760	68,211	64,238	61,625
94	76,912	72,640	69,068	65,068	62,437
95	77,818	73,520	69,925	65,898	63,250
96	78,725	74,401	70,783	66,730	64,063
97	79,633	75,282	71,642	67,562	64,878
98	80,541	76,164	72,501	68,396	65,693
99	81,449	77,046	73,361	69,230	66,510
100	82,358	77,929	74,222	70,065	67,328
110	91,471	86,792	82,867	78,458	75,550
120	100,624	95,705	91,573	86,923	83,852
130	109,811	104,662	100,331	95,451	92,223
140	119,029	113,659	109,137	104,034	100,655
150	128,275	122,692	117,985	112,668	109,142
160	137,546	131,756	126,870	121,346	117,679
170	146,839	140,849	135,790	130,064	126,261
180	156,153	149,969	144,741	138,821	134,884
190	165,485	159,113	153,721	147,610	143,545
200	174,835	168,279	162,728	156,432	152,241
250	221,806	214,392	208,098	200,939	196,160
300	269,068	260,878	253,912	245,973	240,663
350	316,550	307,648	300,064	291,406	285,608
400	364,207	354,641	346,482	337,155	330,903
450	412,007	401,817	393,118	383,163	376,483
500	459,926	449,147	439,936	429,387	422,303
600	556,056	544,180	534,019	522,365	514,529
700	652,497	639,613	628,577	615,907	607,379
800	749,185	735,362	723,513	709,897	700,725
1000	943,133	927,594	914,257	898,912	888,563

Таблиця Д.2.18

Критичні значення максимального модуля різниці накопичених частостей $d_{\max}$ (α — рівень значущості)

n	$d_{\max}$		n	$d_{\max}$	
	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$		$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$
5	0,6074	0,7279	50	0,1921	0,2302
10	0,4295	0,5147	60	0,1753	0,2101
15	0,3507	0,4202	70	0,1623	0,1945
20	0,3037	0,3639	80	0,1518	0,1820
25	0,2716	0,3255	90	0,1432	0,1718
30	0,2480	0,2972	100	0,1358	0,1630
40	0,2147	0,2574	> 100	$1{,}36/\sqrt{n}$	$1{,}63/\sqrt{n}$

Таблиця Д.2.19

Рівні статистичної значущості значень критерію λ Колмогорова—Смірнова

λ	Рівень значущості критерію λ, якщо другий десятковий знак λ дорівнює									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,3	0,99999	99998	99995	99991	99983	99970	99949	99917	99872	99807
0,4	99719	99603	99452	99262	99027	98741	98400	97998	97532	96998
0,5	96394	95719	94969	94147	93250	92282	91242	90134	88960	87724
0,6	86428	85077	83678	82225	80732	79201	77636	76042	74422	72781
0,7	71124	69453	67774	66089	64402	62717	61036	59363	57700	56050
0,8	54414	52796	51197	49619	48063	46532	45026	43545	42093	40668
0,9	39273	37907	36571	35266	33992	32748	31536	30356	29206	28087
1,0	27000	25943	24917	23922	22957	22021	21114	20236	19387	18566
1,1	17772	17005	16264	15550	14861	14196	13556	12939	12345	11774
1,2	11225	10697	10190	09703	09235	08787	08357	07944	07550	07171
1,3	06809	06463	06132	05815	05513	05224	04949	04686	04435	04196
1,4	03968	03751	03545	03348	03162	02984	02815	02655	02503	02359
1,5	02222	02092	01969	01852	01742	01638	01539	01446	01357	01274
1,6	01195	01121	01051	00985	00922	00864	00808	00756	00707	00661
1,7	00618	00577	00539	00503	00469	00438	00408	00380	00354	00330
1,8	00307	00285	00265	00247	00229	00213	00198	00186	00170	00158
1,9	00146	00136	00126	00116	00108	00100	00092	00085	00079	00073
2,0	00067	00062	00057	00053	00048	00045	00041	00038	00035	00032
2,1	00030	00027	00025	00023	00021	00019	00018	00016	00015	00014
2,2	00013	00011	00010	00010	00009	00008	00007	00007	00006	00006
2,3	00005	00005	00004	00004	00004	00003	00003	00003	00002	00002
2,4	00002	00002	00002	00001	00001	00001	00001	00001	00001	00001

Таблиця Д.2.20

Критичні значення біноміального критерію m

Рівень значущості $p = 0{,}05$													
n	Критичні значення m при теоретичній імовірності “успіху” P												
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13
2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3
5	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
6	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3
7	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4
8	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4
9	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4
10	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
11	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
12	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5
13	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5
14	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5
15	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5
16	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5
17	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6
18	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	6
19	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6
20	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6
21	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6
22	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7
23	2	3	3	4	4	4	5	5	6	6	6	6	7
24	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7
25	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7
26	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7
27	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	8
28	2	3	4	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8
29	2	3	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8
30	2	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	8	8
31	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8
32	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	8
33	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
34	2	3	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8	9
35	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
36	3	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
37	3	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
38	3	3	4	5	5	6	6	7	8	8	9	9	10
39	3	3	4	5	5	6	6	7	8	8	9	9	10
40	3	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	10

Продовження табл. Д.2.20

Рівень значущості $p = 0,05$													
n	Критичні значення m при теоретичній імовірності "успіху" P												
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13
41	3	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	10	10
42	3	4	4	5	6	6	7	7	8	9	9	10	10
43	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10
44	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	11
45	3	4	4	5	6	7	7	8	8	9	10	10	11
46	3	4	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11
47	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11
48	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11	11
49	3	4	5	5	6	7	8	8	9	10	10	11	11
50	3	4	5	5	6	7	8	8	9	10	10	11	11
Рівень значущості $p = 0,01$													
n	Критичні значення m при теоретичній імовірності "успіху" P												
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	—	—	—
3	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
4	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
5	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4
6	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
7	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
8	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5
9	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5
10	2	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5
11	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5
12	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6
13	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6
14	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6
15	2	3	3	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
16	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	7
17	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7
18	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7
19	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7
20	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8
21	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8
22	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	7	8	8
23	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8
24	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8
25	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	9
26	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	8	9
27	3	4	4	5	6	6	6	7	7	8	8	9	9

Продовження табл. Д.2.20

Рівень значущості $p = 0{,}01$													
n	Критичні значення m при теоретичній імовірності “успіху” P												
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13
28	3	4	4	5	6	6	7	7	8	8	8	9	9
29	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9
30	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10
31	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10
32	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	10	10
33	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	10	10
34	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10
35	3	4	5	6	6	7	7	8	9	9	10	10	11
36	3	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11
37	3	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	11	11
38	3	4	5	6	7	7	8	8	9	10	10	11	11
39	3	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11
40	3	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	12
41	3	4	5	6	7	8	8	9	9	10	11	11	12
42	3	4	5	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12
43	3	5	5	6	7	8	8	9	10	10	11	12	12
44	3	5	5	6	7	8	9	9	10	11	11	12	12
45	4	5	6	6	7	8	9	9	10	11	11	12	13
46	4	5	6	6	7	8	9	9	10	11	11	12	13
47	4	5	6	7	7	8	9	10	10	11	12	12	13
48	4	5	6	7	7	8	9	10	10	11	12	12	13
49	4	5	6	7	8	8	9	10	11	11	12	13	13
50	4	5	6	7	8	8	9	10	11	11	12	13	13
Рівень значущості $p = 0{,}05$													
n	Критичні значення m при теоретичній імовірності “успіху” P												
	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	—	—	—	—
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4
5	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
6	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5
7	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
8	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5
9	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6
10	4	4	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6
11	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6
12	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	7	7
13	5	5	5	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7
14	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7

Продовження табл. Д.2.20

Рівень значущості $p = 0{,}05$													
n	Критичні значення m при теоретичній імовірності "успіху" P												
	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26
15	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8
16	6	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8
17	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8
18	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	8	9	9
19	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9
20	7	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9	10
21	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9	10	10
22	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9	10	10	10
23	7	7	8	8	8	9	9	9	9	10	10	10	11
24	7	8	8	8	9	9	9	9	10	10	10	11	11
25	8	8	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11	11
26	8	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11	11	12
27	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11	11	12	12
28	8	8	9	9	10	10	10	11	11	11	12	12	12
29	8	9	9	9	10	10	10	11	11	12	12	12	13
30	8	9	9	10	10	10	11	11	11	12	12	13	13
31	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12	12	13	13
32	9	9	10	10	10	11	11	12	12	12	13	13	14
33	9	9	10	10	11	11	12	12	12	13	13	13	14
34	9	10	10	11	11	11	12	12	13	13	13	14	14
35	9	10	10	11	11	12	12	12	13	13	14	14	14
36	10	10	11	11	11	12	12	13	13	14	14	14	15
37	10	10	11	11	12	12	13	13	13	14	14	15	15
38	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	15
39	10	11	11	12	12	13	13	14	14	14	15	15	16
40	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16
41	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	15	16	16
42	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17
43	11	11	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17
44	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17
45	11	12	12	13	13	14	15	15	16	16	17	17	18
46	11	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17	18
47	12	12	13	13	14	15	15	16	16	17	17	18	18
48	12	12	13	14	14	15	15	16	16	17	18	18	19
49	12	13	13	14	14	15	16	16	17	17	18	18	19
50	12	13	13	14	14	15	16	16	17	17	18	18	19

Продовження табл. Д.2.20

Рівень значущості $p = 0{,}01$													
n	Критичні значення m при теоретичній імовірності “успіху” P												
	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26
3	3	3	3	3	3	3	3	3	—	—	—	—	—
4	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
6	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5
7	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
8	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6
9	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	7
10	5	5	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7
11	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7
12	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8	8
13	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8
14	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	9	9
15	7	7	7	7	8	8	8	8	8	9	9	9	9
16	7	7	7	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9
17	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9	9	10	10
18	7	8	8	8	8	9	9	9	9	10	10	10	10
19	8	8	8	8	9	9	9	9	10	10	10	10	11
20	8	8	8	9	9	9	9	10	10	10	10	11	11
21	8	8	9	9	9	10	10	10	10	11	11	11	11
22	8	9	9	9	10	10	10	10	11	11	11	11	12
23	9	9	9	9	10	10	10	11	11	11	12	12	12
24	9	9	9	10	10	10	11	11	11	12	12	12	13
25	9	9	10	10	10	11	11	11	12	12	12	13	13
26	9	10	10	10	11	11	11	12	12	12	13	13	13
27	9	10	10	11	11	11	12	12	12	13	13	13	14
28	10	10	10	11	11	12	12	12	13	13	13	14	14
29	10	10	11	11	11	12	12	13	13	13	14	14	14
30	10	10	11	11	12	12	12	13	13	14	14	14	15
31	10	11	11	12	12	12	13	13	14	14	14	15	15
32	10	11	11	12	12	13	13	13	14	14	15	15	15
33	11	11	12	12	12	13	13	14	14	15	15	15	16
34	11	11	12	12	13	13	14	14	14	15	15	16	16
35	11	12	12	13	13	13	14	14	15	15	16	16	16
36	11	12	12	13	13	14	14	15	15	15	16	16	17
37	12	12	13	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17
38	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17	17
39	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17	18
40	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17	18	18
41	12	13	13	14	14	15	16	16	17	17	18	18	18
42	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17	18	18	19

Продовження табл. Д.2.20

Рівень значущості $p = 0{,}01$													
n	Критичні значення m при теоретичній імовірності "успіху" P												
	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26
43	13	13	14	14	15	16	16	17	17	18	18	19	19
44	13	14	14	15	15	16	16	17	17	18	18	19	19
45	13	14	14	15	15	16	17	17	18	18	19	19	20
46	13	14	15	15	16	16	17	17	18	19	19	20	20
47	14	14	15	15	16	17	17	18	18	19	19	20	21
48	14	14	15	16	16	17	17	18	19	19	20	20	21
49	14	15	15	16	16	17	18	18	19	19	20	21	21
50	14	15	15	16	16	17	18	18	19	19	20	21	21
Рівень значущості $p = 0{,}05$													
n	Критичні значення m при теоретичній імовірності "успіху" P												
	0,27	0,28	0,29	0,30	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	—	—	—
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5
6	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
7	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6
8	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
9	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7
10	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
11	6	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8
12	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8
13	7	7	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9
14	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9
15	8	8	8	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10
16	8	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10
17	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10	11	11	11
18	9	9	9	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11
19	9	10	10	10	10	10	11	11	11	11	12	12	12
20	10	10	10	10	11	11	11	11	12	12	12	12	12
21	10	10	11	11	11	11	12	12	12	12	12	13	13
22	10	11	11	11	11	12	12	12	12	13	13	13	13
23	11	11	11	12	12	12	12	13	13	13	13	14	14
24	11	11	12	12	12	13	13	13	13	14	14	14	14
25	12	12	12	12	13	13	13	13	14	14	14	15	15
26	12	12	12	13	13	13	14	14	14	14	15	15	15
27	12	12	13	13	13	14	14	14	15	15	15	15	16
28	13	13	13	13	14	14	14	15	15	15	16	16	16
29	13	13	14	14	14	14	15	15	15	16	16	16	17
30	13	14	14	14	15	15	15	16	16	16	17	17	17

Продовження табл. Д.2.20

Рівень значущості $p = 0{,}05$													
n	Критичні значення m при теоретичній імовірності “успіху” P												
	0,27	0,28	0,29	0,30	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39
31	14	14	14	15	15	15	16	16	16	17	17	17	18
32	14	14	15	15	15	16	16	16	17	17	17	18	18
33	14	15	15	15	16	16	16	17	17	17	18	18	19
34	15	15	15	16	16	16	17	17	18	18	18	19	19
35	15	15	16	16	16	17	17	18	18	18	19	19	19
36	15	16	16	16	17	17	18	18	18	19	19	20	20
37	16	16	16	17	17	18	18	18	19	19	20	20	20
38	16	16	17	17	18	18	18	19	19	20	20	20	21
39	16	17	17	17	18	18	19	19	20	20	20	21	21
40	17	17	17	18	18	19	19	20	20	20	21	21	22
41	17	17	18	18	19	19	20	20	20	21	21	22	22
42	17	18	18	19	19	19	20	20	21	21	22	22	23
43	18	18	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23
44	18	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23	24
45	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23	24	24
46	18	19	20	20	21	21	22	22	22	23	23	24	24
47	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23	24	24	25
48	19	20	20	21	21	22	22	23	23	24	24	25	25
49	19	20	21	21	22	22	23	23	24	24	25	25	26
50	19	20	21	21	22	22	23	23	24	24	25	25	26
Рівень значущості $p = 0{,}01$													
n	Критичні значення m при теоретичній імовірності “успіху” P												
	0,27	0,28	0,29	0,30	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39
4	4	4	4	4	4	—	—	—	—	—	—	—	—
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7
8	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
9	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8
10	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9
11	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9
12	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	10	10
13	8	9	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10
14	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10	10	11	11
15	9	9	10	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11
16	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	11	12	12
17	10	10	10	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12
18	10	11	11	11	11	12	12	12	12	12	13	13	13
19	11	11	11	12	12	12	12	12	13	13	13	13	13

Продовження табл. Д.2.20

Рівень значущості $p = 0{,}01$													
n	Критичні значення m при теоретичній імовірності "успіху" P												
	0,27	0,28	0,29	0,30	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39
20	11	11	12	12	12	12	13	13	13	13	14	14	14
21	12	12	12	12	13	13	13	13	14	14	14	14	14
22	12	12	13	13	13	13	14	14	14	14	15	15	15
23	12	13	13	13	13	14	14	14	15	15	15	15	15
24	13	13	13	14	14	14	14	15	15	15	15	16	16
25	13	13	14	14	14	15	15	15	15	16	16	16	17
26	14	14	14	14	15	15	15	16	16	16	16	17	17
27	14	14	15	15	15	15	16	16	16	17	17	17	18
28	14	15	15	15	16	16	16	17	17	17	17	18	18
29	15	15	15	16	16	16	17	17	17	18	18	18	19
30	15	15	16	16	16	17	17	17	18	18	18	19	19
31	15	16	16	16	17	17	17	18	18	19	19	19	19
32	16	16	16	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20
33	16	16	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20	20
34	16	17	17	17	18	18	19	19	20	20	20	21	21
35	17	17	18	18	18	19	19	20	20	20	21	21	21
36	17	18	18	18	19	19	20	20	20	21	21	22	22
37	18	18	18	19	19	20	20	20	21	21	22	22	22
38	18	18	19	19	20	20	20	21	21	22	22	23	23
39	18	19	19	20	20	20	21	21	22	22	23	23	23
40	19	19	20	20	20	21	21	22	22	23	23	23	24
41	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23	23	24	24
42	19	20	20	21	21	22	22	23	23	23	24	24	25
43	20	20	21	21	22	22	23	23	23	24	24	25	25
44	20	21	21	21	22	22	23	23	24	24	25	25	26
45	20	21	21	22	22	23	23	24	24	25	25	26	26
46	21	21	22	22	23	23	24	24	25	25	26	26	27
47	21	22	22	23	23	24	24	25	25	26	26	27	27
48	21	22	22	23	24	24	25	25	26	26	27	27	28
49	22	22	23	23	24	24	25	26	26	27	27	28	28
50	22	22	23	23	24	24	25	26	26	27	27	28	28

Рівень значущості $p = 0{,}05$											
n	Критичні значення m при теоретичній імовірності "успіху" P										
	0,40	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49	0,50
4	4	4	4	4	4	4	4	—	—	—	—
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7
8	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7

Продовження табл. Д.2.20

Рівень значущості $p = 0{,}05$											
n	Критичні значення m при теоретичній імовірності "успіху" P										
	0,40	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49	0,50
9	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8
10	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9
11	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9
12	9	9	9	9	9	9	9	9	10	10	10
13	9	9	9	10	10	10	10	10	10	10	10
14	10	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11
15	10	10	10	11	11	11	11	11	11	12	12
16	11	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12
17	11	11	12	12	12	12	12	12	13	13	13
18	12	12	12	12	12	13	13	13	13	13	13
19	12	12	13	13	13	13	13	13	14	14	14
20	13	13	13	13	13	14	14	14	14	14	15
21	13	13	14	14	14	14	14	15	15	15	15
22	14	14	14	14	15	15	15	15	15	16	16
23	14	14	15	15	15	15	16	16	16	16	16
24	15	15	15	15	16	16	16	16	17	17	17
25	15	15	16	16	16	16	17	17	17	17	18
26	16	16	16	16	17	17	17	17	18	18	18
27	16	16	17	17	17	17	18	18	18	18	19
28	16	17	17	17	18	18	18	18	19	19	19
29	17	17	18	18	18	18	19	19	19	20	20
30	17	18	18	18	19	19	19	20	20	20	20
31	18	18	19	19	19	20	20	20	20	21	21
32	18	19	19	19	20	20	20	21	21	21	22
33	19	19	20	20	20	21	21	21	22	22	22
34	19	20	20	20	21	21	21	22	22	22	23
35	20	20	21	21	21	22	22	22	23	23	23
36	20	21	21	21	22	22	22	23	23	24	24
37	21	21	22	22	22	23	23	23	24	24	24
38	21	22	22	22	23	23	24	24	24	25	25
39	22	22	22	23	23	24	24	24	25	25	26
40	22	23	23	23	24	24	25	25	25	26	26
41	23	23	23	24	24	25	25	26	26	26	27
42	23	23	24	24	25	25	26	26	26	27	27
43	24	24	24	25	25	26	26	27	27	27	28
44	24	24	25	25	26	26	27	27	28	28	28
45	24	25	25	26	26	27	27	28	28	29	29
46	25	25	26	26	27	27	28	28	29	29	30
47	25	26	26	27	27	28	28	29	29	30	30
48	26	26	27	27	28	28	29	29	30	30	31

Продовження табл. Д.2.20

Рівень значущості $p = 0{,}05$											
n	Критичні значення m при теоретичній імовірності “успіху” P										
	0,40	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49	0,50
49	26	27	27	28	28	29	29	30	30	31	31
50	26	27	27	28	28	29	29	30	30	31	32

Рівень значущості $p = 0{,}01$											
n	Критичні значення m при теоретичній імовірності “успіху” P										
	0,40	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49	0,50
6	6	6	6	6	6	6	6	—	—	—	—
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9
10	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	10
11	9	9	9	10	10	10	10	10	10	10	10
12	10	10	10	10	10	10	10	11	11	11	11
13	10	10	11	11	11	11	11	11	11	11	12
14	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12
15	11	12	12	12	12	12	12	12	13	13	13
16	12	12	12	12	13	13	13	14	14	14	14
17	13	13	13	13	13	13	14	14	14	14	14
18	13	13	13	14	14	14	14	14	14	15	15
19	14	14	14	14	14	15	15	15	15	15	15
20	14	14	15	15	15	15	15	16	16	16	16
21	15	15	15	15	16	16	16	16	16	17	17
22	15	15	16	16	16	16	17	17	17	17	17
23	16	16	16	16	17	17	17	17	18	18	18
24	16	16	17	17	17	17	18	18	18	18	19
25	17	17	17	18	18	18	18	19	19	19	19
26	17	18	18	18	18	19	19	19	19	20	20
27	18	18	18	19	19	19	19	20	20	20	20
28	18	19	19	19	19	20	20	20	21	21	21
29	19	19	19	20	20	20	21	21	21	21	22
30	19	20	20	20	21	21	21	21	22	22	22
31	20	20	20	21	21	21	22	22	22	23	23
32	20	21	21	21	22	22	22	22	23	23	24
33	21	21	21	22	22	22	23	23	23	24	24
34	21	22	22	22	23	23	23	24	24	24	25
35	22	22	23	23	23	24	24	24	25	25	25
36	22	23	23	23	24	24	25	25	25	26	26
37	23	23	24	24	24	25	25	25	26	26	27
38	23	24	24	24	25	25	26	26	26	27	27
39	24	24	25	25	25	26	26	27	27	27	28

Закінчення табл. Д.2.20

Рівень значущості $p = 0{,}01$											
n	Критичні значення m при теоретичній імовірності "успіху" P										
	0,40	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49	0,50
40	24	25	25	26	26	26	27	27	28	28	28
41	25	25	26	26	26	27	27	28	28	28	29
42	25	26	26	27	27	27	28	28	29	29	29
43	26	26	27	27	28	28	28	29	29	30	30
44	26	27	27	28	28	28	29	29	30	30	31
45	27	27	28	28	29	29	29	30	30	31	31
46	27	28	28	29	29	30	30	30	31	31	32
47	28	28	29	29	30	30	31	31	31	32	32
48	28	29	29	30	30	31	31	32	32	33	33
49	29	29	30	30	31	31	32	32	33	33	34
50	29	29	30	30	31	31	32	32	33	33	34
Критичні значення m при теоретичній імовірності "успіху" $P = 0{,}50$											
p	n										
	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72
0,05	33	34	35	36	37	38	40	41	42	43	44
0,01	35	36	38	39	40	41	42	43	45	46	47
p	n										
	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94
0,05	45	46	47	48	49	51	52	53	54	55	56
0,01	48	49	50	51	52	54	55	56	57	58	59
p	n										
	96	98	100	110	120	130	140	150	160	170	180
0,05	57	58	59	65	70	75	81	86	91	97	102
0,01	60	61	63	68	74	79	85	90	96	101	107
p	n										
	190	200	220	240	260	280	300				
0,05	107	113	123	134	144	155	165				
0,01	112	117	128	139	150	160	171				

Таблиця Д.2.21

Критичні точки розподілу Стьюдента

Кількість ступенів вільності k	Критичні точки розподілу Стьюдента при рівні значущості α для двобічної критичної області					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,71	31,82	63,66	318,29	636,58
2	2,92	4,30	6,96	9,92	22,33	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,21	12,92
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,02	2,57	3,36	4,03	5,89	6,87
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,02	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,72	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,50	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,48	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,75
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,73
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,43	3,71
27	1,70	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,47	2,76	3,41	3,67
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Критичні точки розподілу Стьюдента при рівні значущості α для однобічної критичної області					

Таблиця Д.2.22

Критичні точки розподілу F Фішера—Снедекора (k_1, k_2 — кількість ступенів вільності відповідно чисельника і знаменника)

k_2	Рівень значущості $\alpha = 0{,}01$											
	Критичні точки розподілу F при k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5404	5624	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6107
2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,96	9,89
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,24	3,17
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14	3,07
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	3,06	2,99
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,99	2,93
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,93	2,87
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84
31	7,53	5,36	4,48	3,99	3,67	3,45	3,28	3,15	3,04	2,96	2,88	2,82
32	7,50	5,34	4,46	3,97	3,65	3,43	3,26	3,13	3,02	2,93	2,86	2,80
33	7,47	5,31	4,44	3,95	3,63	3,41	3,24	3,11	3,00	2,91	2,84	2,78
34	7,44	5,29	4,42	3,93	3,61	3,39	3,22	3,09	2,98	2,89	2,82	2,76

Продовження табл. Д.2.22

k_2	Рівень значущості $\alpha = 0{,}01$											
	Критичні точки розподілу F при k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,20	3,07	2,96	2,88	2,80	2,74
36	7,40	5,25	4,38	3,89	3,57	3,35	3,18	3,05	2,95	2,86	2,79	2,72
37	7,37	5,23	4,36	3,87	3,56	3,33	3,17	3,04	2,93	2,84	2,77	2,71
38	7,35	5,21	4,34	3,86	3,54	3,32	3,15	3,02	2,92	2,83	2,75	2,69
39	7,33	5,19	4,33	3,84	3,53	3,30	3,14	3,01	2,90	2,81	2,74	2,68
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66
41	7,30	5,16	4,30	3,81	3,50	3,28	3,11	2,98	2,87	2,79	2,71	2,65
42	7,28	5,15	4,29	3,80	3,49	3,27	3,10	2,97	2,86	2,78	2,70	2,64
43	7,26	5,14	4,27	3,79	3,48	3,25	3,09	2,96	2,85	2,76	2,69	2,63
44	7,25	5,12	4,26	3,78	3,47	3,24	3,08	2,95	2,84	2,75	2,68	2,62
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	3,07	2,94	2,83	2,74	2,67	2,61
46	7,22	5,10	4,24	3,76	3,44	3,22	3,06	2,93	2,82	2,73	2,66	2,60
47	7,21	5,09	4,23	3,75	3,43	3,21	3,05	2,92	2,81	2,72	2,65	2,59
48	7,19	5,08	4,22	3,74	3,43	3,20	3,04	2,91	2,80	2,71	2,64	2,58
49	7,18	5,07	4,21	3,73	3,42	3,19	3,03	2,90	2,79	2,71	2,63	2,57
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,63	2,56
55	7,12	5,01	4,16	3,68	3,37	3,15	2,98	2,85	2,75	2,66	2,59	2,53
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50
65	7,04	4,95	4,10	3,62	3,31	3,09	2,93	2,80	2,69	2,61	2,53	2,47
70	7,01	4,92	4,07	3,60	3,29	3,07	2,91	2,78	2,67	2,59	2,51	2,45
75	6,99	4,90	4,05	3,58	3,27	3,05	2,89	2,76	2,65	2,57	2,49	2,43
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,48	2,42
85	6,94	4,86	4,02	3,55	3,24	3,02	2,86	2,73	2,62	2,54	2,46	2,40
90	6,93	4,85	4,01	3,53	3,23	3,01	2,84	2,72	2,61	2,52	2,45	2,39
95	6,91	4,84	3,99	3,52	3,22	3,00	2,83	2,70	2,60	2,51	2,44	2,38
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,43	2,37
125	6,84	4,78	3,94	3,47	3,17	2,95	2,79	2,66	2,55	2,47	2,39	2,33
150	6,81	4,75	3,91	3,45	3,14	2,92	2,76	2,63	2,53	2,44	2,37	2,31
175	6,78	4,73	3,90	3,43	3,12	2,91	2,74	2,61	2,51	2,42	2,35	2,29
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	2,27
300	6,72	4,68	3,85	3,38	3,08	2,86	2,70	2,57	2,47	2,38	2,31	2,24
400	6,70	4,66	3,83	3,37	3,06	2,85	2,68	2,56	2,45	2,37	2,29	2,23
500	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,68	2,55	2,44	2,36	2,28	2,22
600	6,68	4,64	3,81	3,35	3,05	2,83	2,67	2,54	2,44	2,35	2,28	2,21
700	6,67	4,64	3,81	3,35	3,04	2,83	2,66	2,54	2,43	2,35	2,27	2,21
800	6,67	4,63	3,81	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	2,27	2,21
900	6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	2,27	2,20
1000	6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	2,27	2,20
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,25	2,18

Продовження табл. Д.2.22

k_2	Рівень значущості $\alpha = 0{,}01$											
	Критичні точки розподілу F при k_1											
	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	6143	6170	6209	6234	6260	6286	6302	6324	6334	6350	6360	6366
2	99,43	99,44	99,45	99,46	99,47	99,48	99,48	99,48	99,49	99,49	99,50	99,50
3	26,92	26,83	26,69	26,60	26,50	26,41	26,35	26,28	26,24	26,18	26,15	26,13
4	14,25	14,15	14,02	13,93	13,84	13,75	13,69	13,61	13,58	13,52	13,49	13,46
5	9,77	9,68	9,55	9,47	9,38	9,29	9,24	9,17	9,13	9,08	9,04	9,02
6	7,60	7,52	7,40	7,31	7,23	7,14	7,09	7,02	6,99	6,93	6,90	6,88
7	6,36	6,28	6,16	6,07	5,99	5,91	5,86	5,79	5,75	5,70	5,67	5,65
8	5,56	5,48	5,36	5,28	5,20	5,12	5,07	5,00	4,96	4,91	4,88	4,86
9	5,01	4,92	4,81	4,73	4,65	4,57	4,52	4,45	4,41	4,36	4,33	4,31
10	4,60	4,52	4,41	4,33	4,25	4,17	4,12	4,05	4,01	3,96	3,93	3,91
11	4,29	4,21	4,10	4,02	3,94	3,86	3,81	3,74	3,71	3,66	3,62	3,60
12	4,05	3,97	3,86	3,78	3,70	3,62	3,57	3,50	3,47	3,41	3,38	3,36
13	3,86	3,78	3,66	3,59	3,51	3,43	3,38	3,31	3,27	3,22	3,19	3,17
14	3,70	3,62	3,51	3,43	3,35	3,27	3,22	3,15	3,11	3,06	3,03	3,00
15	3,56	3,49	3,37	3,29	3,21	3,13	3,08	3,01	2,98	2,92	2,89	2,87
16	3,45	3,37	3,26	3,18	3,10	3,02	2,97	2,90	2,86	2,81	2,78	2,75
17	3,35	3,27	3,16	3,08	3,00	2,92	2,87	2,80	2,76	2,71	2,68	2,65
18	3,27	3,19	3,08	3,00	2,92	2,84	2,78	2,71	2,68	2,62	2,59	2,57
19	3,19	3,12	3,00	2,92	2,84	2,76	2,71	2,64	2,60	2,55	2,51	2,49
20	3,13	3,05	2,94	2,86	2,78	2,69	2,64	2,57	2,54	2,48	2,44	2,42
21	3,07	2,99	2,88	2,80	2,72	2,64	2,58	2,51	2,48	2,42	2,38	2,36
22	3,02	2,94	2,83	2,75	2,67	2,58	2,53	2,46	2,42	2,36	2,33	2,31
23	2,97	2,89	2,78	2,70	2,62	2,54	2,48	2,41	2,37	2,32	2,28	2,26
24	2,93	2,85	2,74	2,66	2,58	2,49	2,44	2,37	2,33	2,27	2,24	2,21
25	2,89	2,81	2,70	2,62	2,54	2,45	2,40	2,33	2,29	2,23	2,19	2,17
26	2,86	2,78	2,66	2,58	2,50	2,42	2,36	2,29	2,25	2,19	2,16	2,13
27	2,82	2,75	2,63	2,55	2,47	2,38	2,33	2,26	2,22	2,16	2,12	2,10
28	2,79	2,72	2,60	2,52	2,44	2,35	2,30	2,23	2,19	2,13	2,09	2,06
29	2,77	2,69	2,57	2,49	2,41	2,33	2,27	2,20	2,16	2,10	2,06	2,03
30	2,74	2,66	2,55	2,47	2,39	2,30	2,25	2,17	2,13	2,07	2,03	2,01
31	2,72	2,64	2,52	2,45	2,36	2,27	2,22	2,14	2,11	2,04	2,01	1,98
32	2,70	2,62	2,50	2,42	2,34	2,25	2,20	2,12	2,08	2,02	1,98	1,96
33	2,68	2,60	2,48	2,40	2,32	2,23	2,18	2,10	2,06	2,00	1,96	1,93
34	2,66	2,58	2,46	2,38	2,30	2,21	2,16	2,08	2,04	1,98	1,94	1,91
35	2,64	2,56	2,44	2,36	2,28	2,19	2,14	2,06	2,02	1,96	1,92	1,89
36	2,62	2,54	2,43	2,35	2,26	2,18	2,12	2,04	2,00	1,94	1,90	1,87

Продовження табл. Д.2.22

k_2	Рівень значущості $\alpha = 0{,}01$											
	Критичні точки розподілу F при k_1											
	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
37	2,61	2,53	2,41	2,33	2,25	2,16	2,10	2,03	1,98	1,92	1,88	1,85
38	2,59	2,51	2,40	2,32	2,23	2,14	2,09	2,01	1,97	1,90	1,86	1,84
39	2,58	2,50	2,38	2,30	2,22	2,13	2,07	1,99	1,95	1,89	1,85	1,82
40	2,56	2,48	2,37	2,29	2,20	2,11	2,06	1,98	1,94	1,87	1,83	1,80
41	2,55	2,47	2,36	2,28	2,19	2,10	2,04	1,97	1,92	1,86	1,82	1,79
42	2,54	2,46	2,34	2,26	2,18	2,09	2,03	1,95	1,91	1,85	1,80	1,78
43	2,53	2,45	2,33	2,25	2,17	2,08	2,02	1,94	1,90	1,83	1,79	1,76
44	2,52	2,44	2,32	2,24	2,15	2,07	2,01	1,93	1,89	1,82	1,78	1,75
45	2,51	2,43	2,31	2,23	2,14	2,05	2,00	1,92	1,88	1,81	1,77	1,74
46	2,50	2,42	2,30	2,22	2,13	2,04	1,99	1,91	1,86	1,80	1,76	1,73
47	2,49	2,41	2,29	2,21	2,12	2,03	1,98	1,90	1,85	1,79	1,74	1,71
48	2,48	2,40	2,28	2,20	2,12	2,02	1,97	1,89	1,84	1,78	1,73	1,70
49	2,47	2,39	2,27	2,19	2,11	2,02	1,96	1,88	1,83	1,77	1,72	1,69
50	2,46	2,38	2,27	2,18	2,10	2,01	1,95	1,87	1,82	1,76	1,71	1,68
55	2,42	2,34	2,23	2,15	2,06	1,97	1,91	1,83	1,78	1,71	1,67	1,64
60	2,39	2,31	2,20	2,12	2,03	1,94	1,88	1,79	1,75	1,68	1,63	1,60
65	2,37	2,29	2,17	2,09	2,00	1,91	1,85	1,77	1,72	1,65	1,60	1,57
70	2,35	2,27	2,15	2,07	1,98	1,89	1,83	1,74	1,70	1,62	1,57	1,54
75	2,33	2,25	2,13	2,05	1,96	1,87	1,81	1,72	1,67	1,60	1,55	1,52
80	2,31	2,23	2,12	2,03	1,94	1,85	1,79	1,70	1,65	1,58	1,53	1,49
85	2,30	2,22	2,10	2,02	1,93	1,83	1,77	1,69	1,64	1,56	1,51	1,47
90	2,29	2,21	2,09	2,00	1,92	1,82	1,76	1,67	1,62	1,55	1,49	1,46
95	2,28	2,20	2,08	1,99	1,90	1,81	1,75	1,66	1,61	1,53	1,48	1,44
100	2,27	2,19	2,07	1,98	1,89	1,80	1,74	1,65	1,60	1,52	1,47	1,43
125	2,23	2,15	2,03	1,94	1,85	1,76	1,69	1,60	1,55	1,47	1,41	1,37
150	2,20	2,12	2,00	1,92	1,83	1,73	1,66	1,57	1,52	1,43	1,38	1,33
175	2,19	2,10	1,98	1,90	1,81	1,71	1,64	1,55	1,50	1,41	1,35	1,30
200	2,17	2,09	1,97	1,89	1,79	1,69	1,63	1,53	1,48	1,39	1,33	1,28
300	2,14	2,06	1,94	1,85	1,76	1,66	1,59	1,50	1,44	1,35	1,28	1,22
400	2,13	2,05	1,92	1,84	1,75	1,64	1,58	1,48	1,42	1,32	1,25	1,19
500	2,12	2,04	1,92	1,83	1,74	1,63	1,57	1,47	1,41	1,31	1,23	1,16
600	2,11	2,03	1,91	1,82	1,73	1,63	1,56	1,46	1,40	1,30	1,22	1,15
700	2,11	2,03	1,90	1,82	1,72	1,62	1,55	1,45	1,39	1,29	1,21	1,14
800	2,10	2,02	1,90	1,81	1,72	1,62	1,55	1,45	1,39	1,29	1,20	1,13
900	2,10	2,02	1,90	1,81	1,72	1,61	1,55	1,44	1,39	1,28	1,20	1,12
1000	2,10	2,02	1,90	1,81	1,72	1,61	1,54	1,44	1,38	1,28	1,19	1,11
∞	2,08	2,00	1,88	1,79	1,70	1,59	1,52	1,42	1,36	1,25	1,15	1,00

Продовження табл. Д.2.22

k_2	Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$											
	Критичні точки розподілу F при k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09
31	4,16	3,30	2,91	2,68	2,52	2,41	2,32	2,25	2,20	2,15	2,11	2,08
32	4,15	3,29	2,90	2,67	2,51	2,40	2,31	2,24	2,19	2,14	2,10	2,07
33	4,14	3,28	2,89	2,66	2,50	2,39	2,30	2,23	2,18	2,13	2,09	2,06
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,08	2,05
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	2,07	2,04
36	4,11	3,26	2,87	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,11	2,07	2,03

Продовження табл. Д.2.22

k_2	Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$											
	Критичні точки розподілу F при k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
37	4,11	3,25	2,86	2,63	2,47	2,36	2,27	2,20	2,14	2,10	2,06	2,02
38	4,10	3,24	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02
39	4,09	3,24	2,85	2,61	2,46	2,34	2,26	2,19	2,13	2,08	2,04	2,01
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00
41	4,08	3,23	2,83	2,60	2,44	2,33	2,24	2,17	2,12	2,07	2,03	2,00
42	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06	2,03	1,99
43	4,07	3,21	2,82	2,59	2,43	2,32	2,23	2,16	2,11	2,06	2,02	1,99
44	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05	2,01	1,98
45	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,22	2,15	2,10	2,05	2,01	1,97
46	4,05	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,15	2,09	2,04	2,00	1,97
47	4,05	3,20	2,80	2,57	2,41	2,30	2,21	2,14	2,09	2,04	2,00	1,96
48	4,04	3,19	2,80	2,57	2,41	2,29	2,21	2,14	2,08	2,03	1,99	1,96
49	4,04	3,19	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,08	2,03	1,99	1,96
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95
55	4,02	3,16	2,77	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,06	2,01	1,97	1,93
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92
65	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,03	1,98	1,94	1,90
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,93	1,89
75	3,97	3,12	2,73	2,49	2,34	2,22	2,13	2,06	2,01	1,96	1,92	1,88
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88
85	3,95	3,10	2,71	2,48	2,32	2,21	2,12	2,05	1,99	1,94	1,90	1,87
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94	1,90	1,86
95	3,94	3,09	2,70	2,47	2,31	2,20	2,11	2,04	1,98	1,93	1,89	1,86
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,08	2,01	1,96	1,91	1,87	1,83
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,85	1,82
175	3,90	3,05	2,66	2,42	2,27	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,84	1,81
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80
300	3,87	3,03	2,63	2,40	2,24	2,13	2,04	1,97	1,91	1,86	1,82	1,78
400	3,86	3,02	2,63	2,39	2,24	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,78
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,77
600	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	2,02	1,95	1,90	1,85	1,80	1,77
700	3,85	3,01	2,62	2,38	2,23	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,77
800	3,85	3,01	2,62	2,38	2,23	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76
900	3,85	3,01	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75

Продовження табл. Д.2.22

k_2	Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$											
	Критичні точки розподілу F при k_1											
	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254
2	19,42	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,48	19,49	19,49	19,49	19,50
3	8,71	8,69	8,66	8,64	8,62	8,59	8,58	8,56	8,55	8,54	8,53	8,53
4	5,87	5,84	5,80	5,77	5,75	5,72	5,70	5,68	5,66	5,65	5,64	5,63
5	4,64	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,42	4,41	4,39	4,37	4,37
6	3,96	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,73	3,71	3,69	3,68	3,67
7	3,53	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,29	3,27	3,25	3,24	3,23
8	3,24	3,20	3,15	3,12	3,08	3,04	3,02	2,99	2,97	2,95	2,94	2,93
9	3,03	2,99	2,94	2,90	2,86	2,83	2,80	2,77	2,76	2,73	2,72	2,71
10	2,86	2,83	2,77	2,74	2,70	2,66	2,64	2,60	2,59	2,56	2,55	2,54
11	2,74	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,51	2,47	2,46	2,43	2,42	2,40
12	2,64	2,60	2,54	2,51	2,47	2,43	2,40	2,37	2,35	2,32	2,31	2,30
13	2,55	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23	2,22	2,21
14	2,48	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,21	2,19	2,16	2,14	2,13
15	2,42	2,38	2,33	2,29	2,25	2,20	2,18	2,14	2,12	2,10	2,08	2,07
16	2,37	2,33	2,28	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	2,07	2,04	2,02	2,01
17	2,33	2,29	2,23	2,19	2,15	2,10	2,08	2,04	2,02	1,99	1,97	1,96
18	2,29	2,25	2,19	2,15	2,11	2,06	2,04	2,00	1,98	1,95	1,93	1,92
19	2,26	2,21	2,16	2,11	2,07	2,03	2,00	1,96	1,94	1,91	1,89	1,88
20	2,22	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,97	1,93	1,91	1,88	1,86	1,84
21	2,20	2,16	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,90	1,88	1,84	1,83	1,81
22	2,17	2,13	2,07	2,03	1,98	1,94	1,91	1,87	1,85	1,82	1,80	1,78
23	2,15	2,11	2,05	2,01	1,96	1,91	1,88	1,84	1,82	1,79	1,77	1,76
24	2,13	2,09	2,03	1,98	1,94	1,89	1,86	1,82	1,80	1,77	1,75	1,73
25	2,11	2,07	2,01	1,96	1,92	1,87	1,84	1,80	1,78	1,75	1,73	1,71
26	2,09	2,05	1,99	1,95	1,90	1,85	1,82	1,78	1,76	1,73	1,71	1,69
27	2,08	2,04	1,97	1,93	1,88	1,84	1,81	1,76	1,74	1,71	1,69	1,67
28	2,06	2,02	1,96	1,91	1,87	1,82	1,79	1,75	1,73	1,69	1,67	1,65
29	2,05	2,01	1,94	1,90	1,85	1,81	1,77	1,73	1,71	1,67	1,65	1,64
30	2,04	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,72	1,70	1,66	1,64	1,62
31	2,03	1,98	1,92	1,88	1,83	1,78	1,75	1,70	1,68	1,65	1,62	1,61
32	2,01	1,97	1,91	1,86	1,82	1,77	1,74	1,69	1,67	1,63	1,61	1,59
33	2,00	1,96	1,90	1,85	1,81	1,76	1,72	1,68	1,66	1,62	1,60	1,58
34	1,99	1,95	1,89	1,84	1,80	1,75	1,71	1,67	1,65	1,61	1,59	1,57
35	1,99	1,94	1,88	1,83	1,79	1,74	1,70	1,66	1,63	1,60	1,57	1,56
36	1,98	1,93	1,87	1,82	1,78	1,73	1,69	1,65	1,62	1,59	1,56	1,55

Закінчення табл. Д.2.22

k_2	Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$											
	Критичні точки розподілу F при k_1											
	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
37	1,97	1,93	1,86	1,82	1,77	1,72	1,68	1,64	1,62	1,58	1,55	1,54
38	1,96	1,92	1,85	1,81	1,76	1,71	1,68	1,63	1,61	1,57	1,54	1,53
39	1,95	1,91	1,85	1,80	1,75	1,70	1,67	1,62	1,60	1,56	1,53	1,52
40	1,95	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,61	1,59	1,55	1,53	1,51
41	1,94	1,90	1,83	1,79	1,74	1,69	1,65	1,61	1,58	1,54	1,52	1,50
42	1,94	1,89	1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,60	1,57	1,53	1,51	1,49
43	1,93	1,89	1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,59	1,57	1,53	1,50	1,48
44	1,92	1,88	1,81	1,77	1,72	1,67	1,63	1,59	1,56	1,52	1,49	1,48
45	1,92	1,87	1,81	1,76	1,71	1,66	1,63	1,58	1,55	1,51	1,49	1,47
46	1,91	1,87	1,80	1,76	1,71	1,65	1,62	1,57	1,55	1,51	1,48	1,46
47	1,91	1,86	1,80	1,75	1,70	1,65	1,61	1,57	1,54	1,50	1,47	1,46
48	1,90	1,86	1,79	1,75	1,70	1,64	1,61	1,56	1,54	1,49	1,47	1,45
49	1,90	1,85	1,79	1,74	1,69	1,64	1,60	1,56	1,53	1,49	1,46	1,44
50	1,89	1,85	1,78	1,74	1,69	1,63	1,60	1,55	1,52	1,48	1,46	1,44
55	1,88	1,83	1,76	1,72	1,67	1,61	1,58	1,53	1,50	1,46	1,43	1,41
60	1,86	1,82	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,51	1,48	1,44	1,41	1,39
65	1,85	1,80	1,73	1,69	1,63	1,58	1,54	1,49	1,46	1,42	1,39	1,37
70	1,84	1,79	1,72	1,67	1,62	1,57	1,53	1,48	1,45	1,40	1,37	1,35
75	1,83	1,78	1,71	1,66	1,61	1,55	1,52	1,47	1,44	1,39	1,36	1,34
80	1,82	1,77	1,70	1,65	1,60	1,54	1,51	1,45	1,43	1,38	1,35	1,32
85	1,81	1,76	1,70	1,65	1,59	1,54	1,50	1,45	1,42	1,37	1,34	1,31
90	1,80	1,76	1,69	1,64	1,59	1,53	1,49	1,44	1,41	1,36	1,33	1,30
95	1,80	1,75	1,68	1,63	1,58	1,52	1,48	1,43	1,40	1,35	1,32	1,29
100	1,79	1,75	1,68	1,63	1,57	1,52	1,48	1,42	1,39	1,34	1,31	1,28
125	1,77	1,73	1,66	1,60	1,55	1,49	1,45	1,40	1,36	1,31	1,27	1,25
150	1,76	1,71	1,64	1,59	1,54	1,48	1,44	1,38	1,34	1,29	1,25	1,22
175	1,75	1,70	1,63	1,58	1,52	1,46	1,42	1,36	1,33	1,27	1,23	1,20
200	1,74	1,69	1,62	1,57	1,52	1,46	1,41	1,35	1,32	1,26	1,22	1,19
300	1,72	1,68	1,61	1,55	1,50	1,43	1,39	1,33	1,30	1,23	1,19	1,15
400	1,72	1,67	1,60	1,54	1,49	1,42	1,38	1,32	1,28	1,22	1,17	1,13
500	1,71	1,66	1,59	1,54	1,48	1,42	1,38	1,31	1,28	1,21	1,16	1,11
600	1,71	1,66	1,59	1,54	1,48	1,41	1,37	1,31	1,27	1,20	1,15	1,10
700	1,71	1,66	1,59	1,53	1,48	1,41	1,37	1,30	1,27	1,20	1,15	1,09
800	1,70	1,66	1,58	1,53	1,47	1,41	1,37	1,30	1,26	1,20	1,14	1,09
900	1,70	1,65	1,58	1,53	1,47	1,41	1,36	1,30	1,26	1,19	1,14	1,08
1000	1,70	1,65	1,58	1,53	1,47	1,41	1,36	1,30	1,26	1,19	1,13	1,08
∞	1,69	1,64	1,57	1,52	1,46	1,39	1,35	1,28	1,24	1,17	1,11	1,00

Термінологічний словник

BLUE-оцінка — точкова оцінка, яка є лінійною, незміщеною та ефективною.

Абсолютне відхилення — абсолютне значення індивідуального відхилення.

Альтернативна гіпотеза — одна зі статистичних гіпотез, правильність яких перевіряється статистичним критерієм; будується за основною і, як правило, є її логічним доповненням.

Багаторівнева вибірка — вибірка, яку формують, попередньо зобразивши генеральну сукупність у вигляді ієрархічно-групової структури. Далі з усіх груп найвищого рівня вибирають кілька, у кожній з них вибирають кілька груп нижчого рівня і так аж до найнижчого рівня, на якому вибирають елементи генеральної сукупності.

Відносна частота — частота варіанти, виражена у відсотках до загального обсягу сукупності.

Відносне відхилення — відношення абсолютного відхилення до значення відповідної усередненої характеристики.

Варіанта — окреме значення варіаційного ряду.

Варіаційний ряд — впорядкований список усіх можливих значень ознаки, які потенційно можуть зустрічатися в сукупності.

Вибірка зі зміненими пропорціями — вибірка, в якій збільшено пропорцію елементів тих груп генеральної сукупності, властивості яких потрібно вивчити якомога точніше.

Вибірка — сукупність (як правило, невелика) даних, вибраних за допомогою певної процедури з генеральної сукупності. Аналізуючи вибірку, дослідник намагається встановити властивості генеральної сукупності. Основна вимога до вибірки — репрезентативність.

Вибірковий параметр — параметр частотного розподілу вибіркової сукупності.

Вибірковий розподіл — розподіл, отриманий за такою процедурою: з генеральної сукупності беруть всі можливі прості випадкові вибірки заданого розміру і для кожної з цих вибірок обчислюють значення деякого параметра. Розподіл отриманих значень називають вибірковим розподілом цього параметра. Теоретичні результати про властивості вибіркових розподілів використовують для вмотивування точкових оцінок, а також для визначення надійності інтервальних оцінок. Найчастіше використовують вибіркові розподіли середнього значення, пропорції, різниці середніх значень та різниці пропорцій.

Випадкова вибірка — вибірка, для якої ймовірність бути нерепрезентативною мала, обчислювана і швидко зменшується зі збільшенням обсягу вибірки.

Виправлене стандартне відхилення — незміщена точкова оцінка генерального стандартного відхилення.

Гістограма частот — графічне зображення емпіричного частотного розподілу сукупності даних. Формально гістограму утворюють прямокутники, висоти яких дорівнюють частотам варіант, а самі варіанти лежать всередині їх основ.

Генеральна сукупність — сукупність (як правило, великого обсягу) усіх елементів з певною властивістю. У практичних дослідженнях намагаються отримати якомога точнішу інформацію про властивості генеральної сукупності.

Генеральний параметр — параметр частотного розподілу генеральної сукупності.

Двобічний тест — параметричний тест, основна гіпотеза якого стверджує рівність генерального параметра деякому фіксованому числу.

Дискретна шкала — числова шкала, для кожного значення якої можна вказати його найближчі сусідні значення.

Дисперсія — середнє арифметичне значення квадратів індивідуальних відхилень від середнього значення сукупності.

Дихотомічна шкала — номінальна шкала, яка складається лише з двох значень.

Довірчий інтервал — інтервал для реального значення оцінюваного параметра, який вказується інтервальною оцінкою.

Експериментальна вибірка — вибірка, з якою експериментують з метою порівняння статистичних даних, отриманих до і після експерименту у вибірці.

Ексцес — параметр частотного розподілу, що вказує, які значення переважають у сукупності, близькі чи далекі від середнього.

Емпіричний частотний розподіл — таблиця, сформована варіантами варіаційного ряду сукупності та їх частотами.

Ефективна оцінка — оцінка, стандартна помилка якої є найменшою у класі незміщених оцінок.

Індивідуальне відхилення — різниця між значенням конкретного елемента сукупності та деякою її усередненою характеристикою.

Інтервальна оцінка — оцінка генерального параметра вигляду "реальне значення генерального параметра належить такому-то інтервалу". При цьому вказується рівень довіри до інтервальної оцінки.

Інтервальна шкала — числова шкала з відносним нулем.

Інтервальний частотний розподіл — спосіб компактнішого запису емпіричного частотного розподілу. Таблиця інтервального частотного розподілу складається з неперетинних інтервалів, які вичерпують всі варіанти, та інтервальних частот. Інтервальна частота — це кількість значень сукупності, які потрапляють до інтервалу. При переході до інтервального частотного розподілу частина інформації про вихідну сукупність втрачається.

Кількісна ознака — ознака, для якої природне використання операції підсумовування її значень. Скажімо, природно казати про сукупний прибуток індивідуумів у сукупності.

Кластерна вибірка — багаторівнева вибірка з генеральної сукупності, ієрархічну структуру якої сформовано за географічним принципом.

Коефіцієнт асиметрії — параметр частотного розподілу, який характеризує те, якою мірою елементи сукупності зміщені відносно середнього рівня.

Коефіцієнт варіації — показник у відсотках розсіювання даних, який обчислюється як відношення стандартного відхилення сукупності до її середнього значення.

Коефіцієнт кореляції — показник сили кореляційного зв'язку чи залежності. Найбільше його абсолютне значення — одиниця — відповідає простому функціональному зв'язку між значеннями досліджуваних ознак, найменше — нуль — відсутності або функціонального зв'язку, або зв'язку взагалі.

Контрольна вибірка — вибірка, на яку впливають лише зовнішні щодо експерименту умови. Порівняння результатів, отриманих на експериментальній та контрольній вибірках, дає змогу сформулювати висновок про дієвість експерименту.

Кореляційна залежність — це залежність, яка вказує на вплив однієї з досліджуваних ознак на ймовірність появи різних значень іншої (залежної) ознаки. Кореляційна залежність є свідченням причинно-наслідкового зв'язку.

Кореляційний зв'язок — це взаємозалежність або узгоджена зміна ймовірнісних характеристик кількох ознак. Кореляційний зв'язок не можна вважати свідченням причинно-наслідкового зв'язку.

Кореляція — ймовірнісна або статистична залежність, або зв'язок. На відміну від функціональної залежності кореляція виникає тоді, коли залежність однієї з ознак від іншої ускладнюється наявністю низки випадкових факторів.

Критичні значення — значення, з якими порівнюється емпірична статистика для того, щоб прийняти або відхилити основну гіпотезу.

Кумулята частот — графічне зображення частотного розподілу, яке будують у вигляді ламаної, що послідовно з'єднує точки вигляду (варіанта; накопичена частота).

Лінійна оцінка — точкова оцінка, формула для розрахунку якої лінійна відносно даних вибірки. Умова лінійності свідчить про простоту розрахунку оцінки.

Медіана — усереднений показник, значення якого перевищує одну половину даних сукупності й одночасно менше від іншої.

Міри розсіювання — числові параметри частотного розподілу, які характеризують ступінь розсіювання даних сукупності. У статистиці найважливішою мірою розсіювання вважають стандартне відхилення.

Мода — значення, яке найчастіше зустрічається в сукупності статистичних даних.

Модель прогнозу — модель, в якій зв'язність досліджуваних ознак означає, що реалізоване значення однієї з ознак дає змогу доволі добре передбачити значення іншої. При цьому може розрізнятися напрямленість зв'язку: добре передбачення значення однієї з досліджуваних змінних за значеннями іншої не завжди означає таку саму зворотну передбачуваність.

Накопичена частота — сумарна частота всіх варіант, що не перевищують задану.

Незміщена оцінка — така точкова оцінка, для якої середнє значення параметра, отримане з вибірок однакового обсягу однієї і тієї самої генеральної сукупності, збігається з реальним значенням оцінюваного генерального параметра. Незміщеність — одна з найважливіших характеристик точкових оцінок.

Неперервна шкала — числова шкала з властивістю, що між будь-якими двома її значеннями знайдеться інше значення шкали. Сукупності з неперервною шкалою можуть моделюватися неперервними розподілами.

Номінальна шкала — шкала, усі можливі значення якої суть деякі назви, імена. Усі значення номінальної шкали рівноправні.

Обсяг сукупності — кількість елементів сукупності.

Однобічний тест — параметричний тест, основна гіпотеза якого стверджує, що генеральний параметр не перевищує (або не менший) деяке фіксоване число.

Ознака — деяка властивість елементів сукупності. Кожний елемент сукупності має деяке значення (не обов'язково числове) за ознакою. Ці значення породжують нову сукупність, а саме сукупність даних.

Основна гіпотеза — статистична гіпотеза, правильність якої перевіряють статистичним критерієм. Часом її називають нульовою.

Оцінка найбільшої правдоподібності — метод точкового оцінювання параметрів генеральної сукупності.

Полігон частот — графічне зображення частотного розподілу сукупності даних. Формально це ламана, яка послідовно з'єднує точки вигляду (варіанта; частота варіанти).

Порівняння ознак — порівняння кількох генеральних сукупностей за величиною ознаки.

Порівняння розподілів — розпізнавання відмінності між розподілами кількох генеральних сукупностей або між генеральним розподілом і деяким теоретичним.

Порядкова шкала — шкала, значення якої можна впорядкувати за відношенням "менше — більше".

Потужність критерію — здатність статистичного критерію розпізнати правильність альтернативної гіпотези. Формально потужність дорівнює одиниці мінус ймовірність помилки II роду. Помилка II роду полягає у прийнятті неправильної основної гіпотези.

Пропорційна шкала — числова шкала, нульове значення якої абсолютне.

Пропорція — відсоток елементів сукупності з певною властивістю.

Проста випадкова вибірка — вибірка, ймовірність вибору якої з генеральної сукупності дорівнює ймовірності отримати довільну вибірку такого самого обсягу.

Ранжування — процедура, яка допомагає оцифрувати (тобто перетворити на числову) порядкову шкалу. При цьому кожне значення порядкової шкали отримує певний ранг.

Регресія — залежність середнього значення однієї з досліджуваних ознак від значення іншої (інших) ознаки. Розрізняють регресії за їх функціональним виглядом: лінійна, параболічна тощо.

Рівень довіри — показник надійності інтервальної оцінки, зміст якого полягає в такому. Якби було виконано одне й те саме вибіркове дослідження багаторазово, у результаті було б отримано різні довірчі інтервали. Рівень довіри фактично вказує відсоток правильних з них, тобто відсоток інтервалів, які містять реальне значення оцінюваного генерального параметра.

Рівень значущості — ймовірність помилки I роду при тестуванні статистичної гіпотези. Ця помилка полягає в тому, що статистичний критерій відхиляє правильну основну гіпотезу. Рівень значущості є основною характеристикою надійності тестування. Вважають, що нижчий рівень значущості, то надійніші висновки статистичного критерію.

Рівномірна шкала — спеціальна числова шкала з властивістю, що відстань між будь-якими двома її сусідніми значеннями є однією і тією ж. На практиці рівномірні шкали майже не зустрічаються. Проте є спеціальні процедури рівноміризації нерівномірних шкал. Найчастіше рівномірні шкали застосовують у психології.

Розмах варіації — показник розсіювання даних у сукупності, який обчислюється як різниця між найбільшим та найменшим значеннями в ній.

Розпізнавання зсувів — розпізнавання зміни генеральної сукупності з часом або під зовнішнім впливом.

Розподіл вибіркового середнього — інший термін для вибіркового розподілу середнього значення.

Середнє абсолютне відхилення — середнє значення всіх абсолютних відхилень від середнього арифметичного сукупності.

Середнє значення — найуживаніший усереднений показник, який обчислюється як відношення суми всіх даних до їх кількості.

Систематична вибірка — вибірка за деяким систематичним правилом. Наприклад, можна опитати кожного десятого перехожого на вулиці. Систематичні вибірки часто дають змогу отримати достатню репрезентативність генеральної сукупності. Як правило, їх застосовують тоді, коли випадковий вибір утруднений.

Спроможна оцінка — оцінка, математичне сподівання вибіркового розподілу якої наближається до реального значення оцінюваного генерального параметра зі збільшенням вибірки. Іншими словами, для великих вибірок "змістовність" оцінки означає її "незміщеність".

Стандартне відхилення — найуживаніший показник розсіювання даних у сукупності, який обчислюється як квадратний корінь з дисперсії.

Статистична гіпотеза — гіпотеза про параметри чи форму розподілу генеральної сукупності. Правильність статистичних гіпотез перевіряють за допомогою статистичних критеріїв. Як правило, перед застосуванням критерію потрібно навести дві гіпотези: нульову (основну) та альтернативну.

Статистичний критерій — правило, яке за даними вибірки дає змогу прийняти чи відхилити статистичну гіпотезу з певною надійністю (рівнем значущості).

Стратифікаційна вибірка — вибірка, яка враховує кількісне співвідношення між обсягами певних частин генеральної сукупності.

Сукупність — початкове поняття статистики, під яким розуміють набір однорідних елементів з подібними властивостями будь-якої природи.

Таблиця спряженості — частотна таблиця, що містить сукупність частот усіх можливих комбінацій значень досліджуваних ознак.

Точкова оцінка — формула, яка за даними будь-якої вибірки породжує деяке значення. Це значення вважають певною оцінкою генерального параметра. Існує низка властивостей точкових оцінок, які характеризують їх надійність та простоту застосування.

Точність інтервальної оцінки — половина ширини довірчого інтервалу. Як правило, вона фіксується наперед. Потрібно вміти знаходити мінімальний розмір вибірки, здатної забезпечити бажану точність. Не варто плутати точність оцінки з її надійністю. Що вища точність дослідження (тобто довірчий інтервал менший, вужчий), то нижча його надійність.

Умовні варіанти — варіанти, застосування яких при обчисленні числових характеристик розподілу дає змогу перейти до простіших (щодо складності обчислень) розподілів.

Усереднений показник — значення, яке характеризує середній рівень даних у сукупності. Усереднений показник не обов'язково є числовим значенням.

Частота варіанти — кількість потраплянь варіанти до заданої сукупності.

Числова шкала — шкала, значення якої є числами.

Шкала ознаки — список усіх можливих значень ознаки. Найуживаніші типи шкал: номінальна, порядкова та числова.

Якісна ознака — ознака, для якої неприродно застосовувати операцію додавання значень елементів сукупності. Наприклад, неприродно казати про сумарний зріст індивідуумів сукупності.

Предметний покажчик

Список використаної та рекомендованої літератури

1. *Бешелев С. Д., Гурвич Ф. Г.* Математико-статистические методы экспертных оценок. — М.: Статистика, 1980.
2. *Вайнберг Дж., Шуменер Дж.* Статистика: Пер. с англ. — М.: Статистика, 1979.
3. *Гласс Дж., Стенли Дж.* Статистические методы в педагогике и психологии: Пер. с англ. — М.: Прогресс, 1976.
4. *Громыко Г. Л.* Статистика. — М.: Изд-во МГУ, 1981.
5. *Захаров В. П.* Применение математических методов в социально-психологических исследованиях. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
6. *Кендалл М. Дж., Стюарт А.* Статистические алгоритмы в социологических исследованиях. — Новосибирск: Наука, 1985.
7. *Кимбл Г.* Как правильно пользоваться статистикой: Пер. с англ. — М.: Финансы и статистика, 1982.
8. *Лбов Г. С.* Методы обработки разнотипных экспериментальных данных. — Новосибирск: Наука, 1981.
9. *Максименко В. С., Паніотто В. І., Харченко Н. М.* Статистичний аналіз соціологічних даних. — К.: Видав. дім “КМ Академія”, 2004.
10. *Математическая* статистика: Учебник. — М.: Высш. шк., 1981.

11. *Мюллер П., Нойман, Шторм Р.* Таблицы по математической статистике: Пер. с нем. — М.: Финансы и статистика, 1982.
12. *Окунь Я.* Факторный анализ: Пер. с польск. — М.: Статистика, 1974.
13. *Паниотто В. И., Максименко В. С.* Количественные методы в социологии. — К.: Наук. думка, 1982.
14. *Паповян С. С.* Математические методы в социальной психологии. — М.: Наука, 1983.
15. *Практикум* з теорії ймовірності та математичної статистики: Навч. посіб. / Р. К. Чорней, О. Ю. Дюженкова, О. Б. Жильцов та ін.; За ред. Р. К. Чорнея. — К.: МАУП, 2003.
16. *Руниoн Р.* Справочник по непараметрической статистике. — М.: Финансы и статистика, 1982.
17. *Сидоренко Е. В.* Методы математической обработки в психологии. — СПб.: Речь, 2001.
18. *Суходольский Г. В.* Основы математической статистики для психологов. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.
19. *Толстова Ю. Н.* Анализ социологических данных. — М.: Науч. мир, 2000.
20. *Турчин В. М.* Математична статистика: Навч. посіб. — К.: Видав. центр “Академія”, 1999.
21. *Фелингер А. Ф.* Статистические алгоритмы в социологических исследованиях. — Новосибирск: Наука, 1985.
22. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. — М.: Мир, 1964, 1967.
23. *Хастинг Н., Пикон Дж.* Справочник по статистическим распределениям: Пер. с англ. — М.: Статистика, 1980.
24. *Холлендер М., Вулф Д. А.* Непараметрические методы статистики: Пер. с англ. — М.: Финансы и статистика, 1983.
25. *Эренберг А.* Анализ и интерпретация статистических данных. — М.: Финансы и статистика, 1981.
26. *Gujarati D.* Essentials of econometrics. — N. Y.: McGraw-Hill, 1992.

Зміст

The proposed educational manual contains the main theoretical provisions, principles of mathematic-statistical researches and directions for the development of modern mathematic-statistical methods on sociology and psychology. The special attention is given to the presentation of the material.

For sociology and psychology students of higher educational institutions and everyone who deals with sociology and psychology researches.

Навчальне видання

Телейко Андрій Богданович
Чорней Руслан Костянтинович

МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ В СОЦІОЛОГІЇ ТА ПСИХОЛОГІЇ

Навчальний посібник

Educational edition

Teleyko, Andriy B.
Chorney, Ruslan K.

MATHEMATIC-STATISTICAL METHODS IN SOCIOLOGY AND PSYCHOLOGY

Educational manual

Відповідальний редактор *С. Г. Рогузько*
Редактор *І. В. Хронюк*
Коректор *Л. В. Логвиненко*
Комп'ютерне верстання *М. І. Фадєєва*
Оформлення обкладинки *Т. М. Бойко*

Підп. до друку 03.08.07. Формат 60×84/$_{16}$. Папір офсетний. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 24,65. Обл.-вид. арк. 24,75. Наклад 5000 пр. Зам. № 7-141

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ-39, вул. Фрометівська, 2, МАУП

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи ДК № 8 від 23.02.2000

Друкарня ТОВ "Техніка ЛТД"

03142 Київ-142, вул. А.Кримського,27

Свідоцтво ДК № 54 від 17.04.2000