ВСП ЗВО «ВІДКРИТИЙ МІЖНАРОДНИЙ УНІВЕСИТЕТ РОЗВИТКУ ЛЮДИНИ “УКРАЇНА”»

ЛУЦЬКИЙ ІНСТИТУТ РОЗВИТКУ ЛЮДИНИ

КАФЕДРА ІНФОРМАЦІЙНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ТА ТУРИЗМУ

Олена Помазун

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ

(методичні рекомендації для здобувачів вищої освіти

денної форми навчання 2 курсу)

ЛУЦЬК – 2023

УДК 340.12

Помазун Олена Олександрівна. Методичні рекомендації для виконання практичних завдань з курсу «Теорія ймовірності» для здобувачів вищої освіти денної форми навчання. Луцьк: ПП. Іванюк В. П., 2023. 56 с.

Укладач: О. О. Помазун – асистент кафедри інформаційної дільності та туризму Луцького інституту розвитку людини Університету «Україна»

Рецензенти:

О. А. Бундак – кандидат історичних наук, доцент, доцент кафедри права та фінансів Луцького інституту розвитку людини Університету «Україна»

О.М. Собчук - кандидат педагогічних наук, доцент кафедри загальної математики та методики навчання інформатики Волинського національного університету ім. Лесі Українки

Розглянуто та затверджено на засіданні кафедри інформаційних технологій та туризму Луцького інституту розвитку людини Університету «Україна».

Протокол № 1 від « 01 » вересня 2023 року.

Завідувач кафедри

Завідувач кафедри інформаційних технологій та туризму Андрій МАЙСТЕР

Розглянуто та затверджено навчально-методичною радою Луцького інституту розвитку людини Університету «Україна».

Протокол № 1 від « 01 » вересня 2023 року.

© ЛІРоЛ Університету «Україна», 2023.
© Помазун О. О., 2023.

Зміст

Вступ

Курс «Теорія ймовірності» що вивчається студентами 2 курсу Луцького інституту розвитку людини Університету «Україна», має на меті формування у майбутніх спеціалістів повноцінних теоретичних знань та практичних навичок по застосуванню ймовірнісно-статистичних методів для оцінки стохастичних процесів в галузі комп'ютерної інженерії.

Завдання дисципліни – навчити студентів робити науково обгрунтовану статистичну оцінку отриманого результату при розв'язуванні задач практичного змісту, привити навики застосування основних теорем теорії ймовірностей та математичної статистики до побудови та дослідження математичних моделей, використовувати математичний апарат для аналізу експериментальних результатів, отриманих у процесі написання курсових та дипломних робіт.

Студент повинен знати:

- методи обчислення ймовірностей випадкових подій і випадкових величин;
- закони розподілу та числові характеристики дискретних і неперервних випадкових величин;
- граничні теореми теорії ймовірностей та їх застосування в математичній статистиці;
- базові поняття математичної статистики;
- методи опрацювання емпіричних даних та отримання спроможних статистичних оцінок невідомих параметрів;
- методи перевірки статистичних гіпотез;
- елементи теорії кореляції.

Студент повинен вміти:

- виконувати якісний і кількісний аналіз випадкових подій, випадкових величин та систем таких величин;
- використовувати апарат дослідження дискретних і неперервних випадкових величин;

– проводити математичну обробку статистичних даних;
– давати статистичну оцінку параметрів генеральної сукупності;
– здійснювати статистичну перевірку гіпотез;
– використовувати елементи теорії кореляції;
– включати результати досліджень у математичні моделі інженерних задач.

Структура даного видання містить тематику курсу, завдання до практичних занять та методичні вказівки до їх виконання, питання на екзамен, глосарій та загальний список літератури, що в тій чи іншій мірі підходить до всіх тем.

Зміст тем курсу

Змістовий модуль 1. Основні поняття теорії ймовірностей

Тема 1. Елементи комбінаторики.

Правила суми та добутку в комбінаториці. Перестановки з n елементів. Розміщення з n по k елементів. Сполучення з n по k елементів. Перестановки, розміщення та сполучення з повтореннями.

Тема 2. Простір елементарних подій. Класичне означення ймовірності.

Випадковий (стохастичний) експеримент. Елементарна подія та простір елементарних подій. Випадкова, вірогідна та неможлива подія. Незалежні та несумісні події. Операції над подіями.

Класичне, статистичне та геометричне означення ймовірності. Властивості ймовірності. Обчислення ймовірностей за класичним означенням.

Тема 3. Основні теореми про ймовірності.

Протилежні події та їх ймовірності. Умовна ймовірність події. Теореми додавання ймовірностей. Теореми множення ймовірностей. Ймовірність настання хоча б однієї події. Поняття гіпотез. Повна ймовірність. Формули Байеса.

Тема 4. Повторні незалежні випробування.

Схема Бернуллі. Найімовірніше число настання події в схемі Бернуллі. Теорема Пуассона. Локальна та інтегральна теореми Муавра–Лапласа. Функції Гауса та Лапласа.

Тема 5. Випадкові величини та їх числові характеристики.

Поняття випадкової величини. Дискретні та неперервні випадкові величини. Закон розподілу дискретної випадкової величини. Функція розподілу та її властивості. Числові характеристики дискретної випадкової величини. Математичне сподівання та його властивості. Дисперсія та її властивості. Середнє квадратичне відхилення.

Функція щільності розподілу неперервної випадкової величини та її властивості. Числові характеристики неперервної випадкової величини. Математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини.

Тема 6. Закони розподілу випадкових величин.

Біноміальний і геометричний розподіли, а також розподіл Пуассона як приклади дискретних розподілів. Їх числові характеристики. Рівномірний, показниковий та нормальний розподіли як приклади неперервних розподілів. Їх числові характеристики.

Змістовий модуль 2. Елементи математичної статистики

Тема 7. Статистичний розподіл вибірки.

Предмет та задачі математичної статистики. Генеральна та вибіркова сукупності. Варіанти та варіаційний ряд. Частоти та відносні частоти. Дискретний статистичний розподіл. Полігон частот. Інтервальний статистичний розподіл. Гістограма частот. Емпірична функція розподілу.

Тема 8. Вибіркові характеристики. Точкові та інтервальні оцінки параметрів розподілу.

Вибіркові характеристики. Середнє вибіркове. Вибіркова дисперсія. Середнє квадратичне відхилення та “виправлене“ середнє квадратичне відхилення. Мода. Медіана. Показники варіації. Асиметрія та ексцес.

Оцінка параметрів розподілу. Точкові та інтервальні оцінки невідомих параметрів розподілу. Довірчі інтервали.

Тема 9. Елементи теорії кореляції.

Двовимірний статистичний розподіл вибірки. Кореляційна залежність. Кореляційне поле. Кореляційна таблиця. Вибірковий коефіцієнт кореляції Пірсона. Прямі регресії.

Рангова кореляція. Ранговий коефіцієнт кореляції Спірмена. Ранговий коефіцієнт кореляції Кендала.

Тема 10. Перевірка статистичних гіпотез.

Статистичні гіпотези. Статистичний критерій. Критична область. Критичні точки. Рівень значущості. Перевірка статистичних гіпотез про дисперсії. Критерій Фішера. Перевірка статистичних гіпотез про середні. Критерій Стьюдента. Перевірка статистичних гіпотез про нормальний розподіл генеральної сукупності. Критерій узгодженості Пірсона.

Методичні рекомендації до практичних завдань

Методичні вказівки до практичних занять розроблено з метою забезпечення високого рівня знань майбутніх фахівців з теорії ймовірності та містить теоретичний матеріал для повторення, приклади розв'язання задач та задачі.

Практична робота №1. Простір елементарних подій. Класичне означення ймовірності.

ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

Правило додавання. Якщо деякий об'єкт A можна вибрати із сукупності об'єктів m способами, а інший об'єкт B можна вибрати n способами, то або A, або B можна вибрати $m+n$ способами.

Приклад 1. У класі 12 хлопчиків і 15 дівчаток.

Скількома способами можна вибрати одного учня?

Розв'язок. 12+15=27 способами.

Правило множення (основне правило комбінаторики). Якщо деякий об'єкт A можна вибрати із сукупності об'єктів m способами і після кожного такого вибору об'єкт B можна вибрати n способами, то пару об'єктів A, а потім B можна вибрати $m \cdot n$ способами.

Приклад 2. У класі 12 хлопчиків і 15 дівчаток.

Скількома способами можна вибрати одного хлопчика і одну дівчинку?

Розв'язок. 12·15=180способами.

Основне правило комбінаторики у загальному вигляді. Нехай необхідно виконати одну за одною k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами, третю – n_3 способами і так до k– ї дії, яку можна виконати n_k способами, то усі k дій разом можуть бути виконані

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

способами.

Перестановки. Перестановками називаються набори елементів, які складаються з одних і тих самих n різних елементів і відрізняються лише порядком їхнього розташування. Число перестановок з n елементів

$$P_n = n!,$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Розміщення. Розміщеннями із n елементів по k елементів називають набори елементів, які містять k елементів, вибраних із n різних елементів. При цьому ці набори повинні відрізнятися або складом елементів, або порядком їх розташування. Число усіх можливих розміщень із n елементів по k елементів

$$A_n^m = n(n\text{-}1)(n\text{-}2)...(n\text{-}k+1).$$

Комбінації (сполучення). Комбінаціями із n елементів по k елементів називають набори елементів, які містять k елементів, вибраних із n різних елементів. При цьому ці набори повинні відрізнятися хоча б одним елементом. Порядок розташування елементів ролі не грає. Число комбінацій із n елементів по k елементів

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Розбиття на групи. Число способів, якими можна розбити множину із n елементів на m груп, кожна з яких містить відповідно k_1, k_2, k_3,..., k_m елементів, дорівнює

$$C_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!..k_m!}.$$

Приклад 3. Скількома способами можна розселити 8 студентів у трьох кімнатах: одномісній, тримісній та чотиримісній?

Розв'язок. Вісім студентів необхідно розбити на три групи: з 1-го, 3-х та 4-х чоловік, тому використовуємо формулу для розбиття на групи. Число можливих способів дорівнює

$$C_8(1,3,4) = \frac{8!}{1!\cdot 3!\cdot 4!} = 280.$$

Перестановки з повтореннями. Число різних перестановок, які можна скласти з n елементів, серед яких є k_1 однакових елементів першого типу, k_2 однакових елементів другого типу, … , k_m однакових елементів m– го типу, дорівнює

$$C_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!..k_m!}.$$

Приклад 4. Скільки різних слів можна отримати, переставляючи букви слова “математика”?

Розв’язок. Слово “математика” містить 10 букв, серед них 3 букви ”а”, 2 – “м”, 2 – “т”, 1 – “е”, 1 – “и”, 1 – “к”. Шукане число слів дорівнює

$$C_{10}(3,2,2,1,1,1)=\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=151200$$

Класичне означення ймовірності. Ймовірністю події A називають відношення числа елементарних результатів досліду, які сприяють настанню події A, до загального числа можливих елементарних результатів досліду

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Задачі до практичної роботи:

Задача 1. Гральну кість кидають два рази. Записати простір елементарних подій у цьому випадку.

Задача 2. Партія деталей складається з різних 8 стандартних і 3 нестандартних. Яка ймовірність того, що вибрані на вмання 3 деталі будуть стандартними.

Задача 3. Протягом зміни приймальник прийняв у ремонт 9 годинників тієї самої марки від 9 різних осіб і перед закінченням зміни навмання розклав їх підряд на круглій полиці. Знайти ймовірність того, що чотири годинники, які належать певним особам, опинилися поруч

Задача 4. Партія деталей складається з різних 6 стандратних (С) і 2 нестандратних (Н). Яка ймовірність того, що з вибраних на вманання трьох деталей деталей 2 будуть стандартними і 1 нестандартною. При цьому вибір деталей відбувається покроково з поверненням.

Задача 5. а) Скількома способами можуть випасти три різнокольорові гральні кубики? б) У скількох випадках хоча б на одному кубику випаде шість очок? в) У скількох випадках хоча б на одному кубику з’явиться шість очок і хоча б на одному кубику – три очки?

Задача 6. З колоди, яка налічує 52 карти, вибрали 10 карт. У скількох випадках серед цих карт є: а) хоча б один туз; б) рівно один туз; в) не менше двох тузів; г) рівно два тузи?

Задача 7. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

Задача 8. Підкидають 12 гральних кубиків. Скількома способами можуть випасти: а) всі грані кубика; б) кожна грань двічі?

Задача 9. Розв'яжуть попередню задачу, вважаючи способи, що відрізняються лише порядком кубиків, однаковими.

Задача 10. На залізничній станції є n світлофорів. Скільки різних сигналів можна подати за допомогою цих світлофорів, якщо кожен з них має три стани: горить зелене, або жовте, або червоне світло?

Задача 11. Скількома способами можна вибрати з колоди, що складається з 52 карт, шість карт так, щоб серед них були всі чотири масті?

Задача 12. Із двоцифрових чисел, що не перевищують 20, навмання вибирається одне число. Описати простір елементарних наслідків Ω і події A=$\{$вибране число ділиться на 5$\}$; B=$\{$вибране число просте$\}$; C=$\{$вибране число парне$\}$.

Задача 13. Гральний кубик підкидають двічі. Випадкові події цього випробування: A – сума очок рівна 8, B – при другому підкиданні випало 6 очок. Описати простір елементарних подій та події A, B, $A+B$, $A\cdot B$, $A-B$.

Задача 14. Монету підкидають двічі. Для даного випробування описати простір елементарних подій, події: A – хоча би один раз з'явиться «герб», B – під час другого кидання з'явиться «герб». Знайти $A+B$, $A\cdot B$, $A-B$, $B-A, \bar{A}$.

Задача 15. У квадрат на площині зі стороною $2a$ і з центром у початку координат, сторони якого паралельні до осей координат, навмання «кидають» точку. Описати простір елементарних подій.

Задача 16. Партія складається з 10 стандартних (С) і 5 нестандартних (Н) деталей. Із партії навмання беруть 5 деталей. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей 3 виявились стандартними.

Задача 17. Протягом зміни чоловік прийняв у ремонт 10 годинників тієї самої марки від 10 різних осіб і перед закінченням зміни навмання розклав їх підряд на круглій полиці. Знайти ймовірність того, що три годинники, які належать певним особам, виявились поруч.

Задача 18. На двох суміжних сторонах квадрата з довжиною сторони, що дорівнює 1, навмання взято по точці. Знайти ймовірність того, що відстань між цими точками не перевищить 0,5.

Задача 19. Кинуто 2 гральних кубики. Яка ймовірність випадання «дубля»?

Задача 20. Вісім різних книжок, серед яких є двотомник, розставляються навмання на одній полиці. Знайти ймовірність того, що книги двотомника стоятимуть поруч?

Задача 21. Монету підкинути два раза. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз з’явиться «герб».

Практична робота №2. Основні теореми про ймовірності.

ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

Протилежні події. Подія $\bar{A}$ називається протилежною до події A, якщо вона полягає у тому, що подія A не відбулась.

Приклад 1. Кидають гральний кубик. Подія A – випаде парне число очок, значить протилежна подія $\bar{A}$ – парне число очок не випаде.

Якщо у результаті експерименту відбулась подія A, то, відповідно, подія $\bar{A}$ не відбулась. І навпаки, якщо відбулась подія $\bar{A}$, то подія A не відбулась. Звідси випливає, що

$$P(A)+P(\bar{A})=1.$$

Прийнято ймовірність події A позначати через p, а ймовірність протилежної події $\bar{A}$ – через q. Тоді отримуємо

$$p+q=1.$$

Приклад 2. Ймовірність того, що солдат влучить у мішень $p=0{,}7$. Знайти ймовірність того, що солдат у мішень не влучить.

Розв'язок. Події "влучив у мішень" та "не влучив" протилежні, тому шукана ймовірність дорівнює $q=1-p=1-0{,}7=0{,}3$.

Сумісні та несумісні події. Події A та B називаються сумісними, якщо вони можуть відбутись одночасно в одному і тому ж експерименті. Події A та B називаються несумісними, якщо вони не можуть відбутись одночасно в одному і тому ж експерименті.

Приклад 3. Кидають гральний кубик. Подія A – випаде число 6, подія B – випаде число очок більше 4. Події A та B сумісні, так як якщо випаде число очок 6, то відбудуться обидві події A та B.

Приклад 4. Кидають гральний кубик. Подія A – випаде парне число очок, подія B – випаде непарне число очок. Події A та B несумісні, так як не може одночасно випасти парна та непарна кількість очок.

Залежні та незалежні події. Події *A* та *B* називаються незалежними, якщо ймовірність однієї із них не залежить від настання чи ненастання іншої. Відповідно, події *A* та *B* називаються залежними, якщо ймовірність однієї із них залежить від настання чи ненастання іншої.

Умовна ймовірність. Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називають ймовірність події *B*, обчислену при умові, що подія *A* уже відбулась.

Приклад 5. Гральний кубик кидають два рази. Подія *A* – випало 5 очок при першому киданні. Подія *B* – випало 6 очок при другому киданні. Події *A* та *B* незалежні, так як ймовірність кожної з цих подій не залежить від настання іншої, завжди залишається однаковою і дорівнює 1/6.

Приклад 6. Студент знає 20 із 25 питань програми. Він отримує два питання. Позначимо: подія *A* – студент знає перше питання, подія *B* – студент знає друге питання. Події *A* та *B* залежні, так як ймовірність події *B* залежить від того, відбулась подія *A* чи ні. Якщо студент знає перше питання, то серед 24 питань, що залишились, буде 19, які він знає і ймовірність події *B* буде дорівнювати

$$P_A(B)=\frac{19}{24}=0,79.$$

Якщо студент не знає перше питання, то серед 24 питань, що залишились, буде 20, які він знає і ймовірність події *B* буде дорівнювати

$$P_A(B)=\frac{20}{24}=0,83.$$

Добуток подій. Добутком двох подій *A* та *B* називається така подія *C*, яка полягає у тому, що відбулись обидві події *A* та *B*.

Теорема 1. Ймовірність того, що відбулись дві незалежні події *A* та *B* дорівнює добутку ймовірностей цих подій

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Приклад 7. Кидають два гральні кубики. Знайти ймовірність того, що на першому кубику випаде число 6, а на другому – число 5.

Розв'язок. Позначимо: подія *A* – на першому кубику випаде число 6, подія *B* – на другому випаде число 5.

Повинні відбутись і подія A і подія B. Отже маємо добуток двох подій AB. Події A та B незалежні. За теоремою 1 обчислюємо шукану ймовірність

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0{,}028.$$

Теорема 2. Ймовірність того, що відбулись дві залежні події A та B дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність іншої при умові, що перша подія вже відбулась,

$$P(AB)=P(A)P_A(B).$$

Приклад 8. Студент знає 20 із 25 питань програми. Він отримує два питання. Знайти ймовірність того, що студент буде знати обидва питання.

Розв'язок. Позначимо: подія A – студент знає перше питання, подія B – студент знає друге питання. Події A та B залежні, так як ймовірність події B залежить від того, відбулась подія A чи ні. Застосовуючи теорему 2 отримаємо шукану ймовірність

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} = 0{,}63.$$

Сума подій. Сумою двох подій A та B називається така подія C, яка полягає у тому, що відбулась або подія A або подія B або обидві події A та B разом.

Теорема 3. Ймовірність суми двох несумісних подій A та B дорівнює сумі ймовірностей цих подій

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Приклад 9. Кидають гральний кубик. Знайти ймовірність того, що випаде або число 6 або непарна кількість очок.

Розв'язок. Позначимо: подія A – випало число 6, подія B – випала непарна кількість очок. Події A та B несумісні. Застосовуючи теорему 3 отримуємо шукану ймовірність

$$P(A+B)=P(A)+P(B)= \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = 0{,}67.$$

Теорема 4. Ймовірність суми двох сумісних подій A та B дорівнює сумі ймовірностей подій A та B без ймовірності добутку цих подій

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Приклад 10. Ймовірність, що перший студент здасть екзамен дорівнює 0,7. Ймовірність, що другий студент здасть екзамен дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що екзамен здасть хоча б один студент.

Розв'язок. Позначимо: подія A – перший студент здав екзамен, подія B – другий студент здав екзамен. Події A та B сумісні, тому

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}7+0{,}8-0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}94.$$

Задачі до практичної роботи:

Задача 1. Ймовірність того, що солдат влучить у мішень p=0,7. Знайти ймовірність того, солдат у мішень не влучить.

Задача 2. Кидають два гральні кубики. Знайти ймовірність того, що на першому кубику випаде число 6, а на другому – число

Задача 3. Студент знає 20 із 25 питань програми. Він отримує два питання. Знайти ймовірність того, що студент буде знати обидва питання.

Задача 4. Кидають гральний кубик. Знайти ймовірність того, що випаде або число 6 або непарна кількість очок.

Задача 5. Ймовірність, що перший студент здасть екзамен дорівнює 0,7. Ймовірність, що другий студент здасть екзамен дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що екзамен здасть хоча б один студент.

Задача 6. Партія містить 12 стандартних і 4 нестандартні деталі. Навмання беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

1) не менш як дві стандартні;
2) усі три нестандартні;
3) принаймні одна стандартна.

Задача 7. Перевезення вантажів для підприємства забезпечують дві бригади, які з цієї метою щодня в першу зміну мають виділяти по одному автомобілю. Імовірність виходу автомобіля на лінію в першій бригаді дорівнює 0,7, а в другій –

0,6. Знайти ймовірність того, що в першу зміну на підприємстві перевозитимуться вантажі.

Задача 8. Імовірність влучення стрілком у першу область мішені дорівнює 0,45, у другу область – 0,35, у третю – 0,15. Знайти імовірність того, що при одному пострілі стрілок влучить у першу або другу області мішені.

Задача 9. Студент знає 20 з 25 питань програми іспиту. Знайти ймовірність того, що він дасть правильну відповідь на три питання, які він отримав на іспиті.

Задача 10. На двох верстатах-автоматах виробляють однакові деталі, які надходять на транспортер. Продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, причому перший верстат виробляє нестандартну деталь з імовірністю 0,15, а другий – з імовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що навмання взята з транспортера деталь буде стандартною.

Задача 11. Партію виготовлених деталей перевіряли два контролери. Перший перевірив 45 %, а другий – 55 % деталей. Імовірність припуститися помилки під час перевірки для першого контролера становить 0,15, для другого – 0,1. Після додаткової перевірки в партії прийнятих деталей виявлено браковану. Оцінити ймовірність помилки для кожного контролера.

Практична робота №3. Випадкові величини та їх числові характеристики.

ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

Формула повної ймовірності. Ймовірність події A, яка може відбутись лише після настання однієї із несумісних подій (гіпотез) $B_1, B_2, \ldots, B_n$, які утворюють повну групу подій ($P(B_1)+ P(B_2)+\ldots+ P(B_n) =1$), дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної із гіпотез на відповідну умовну ймовірність події A

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B1}(A)+ P(B_2)\cdot P_{B2}(A)+\ldots+ P(B_n)\cdot P_{Bn}(A).$$

Приклад 1. На курсі чотири групи, у кожній з яких 25 студентів. У першій групі 5 відмінників, у другій – 6, у третій – 4, у четвертій – 3. Навмання вибирають групу а потім з цієї групи навмання вибирають студента.

Знайти ймовірність того, що вибраний студент відмінник.

Розв'язок. Використаємо формулу повної ймовірності. Події (гіпотези) B_1, B_2, B_3, B_4 – це вибір першої, другої, третьої або четвертої групи

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Якщо вибрали першу групу, то ймовірність вибрати відмінника з цієї групи дорівнює

$$P_{B_1}(A) = \frac{5}{25} = 0{,}2.$$

Якщо вибрали другу групу, то ймовірність вибрати відмінника з цієї групи дорівнює

$$P_{B_2}(A) = \frac{6}{25} = 0{,}24.$$

Відповідно для третьої і четвертої груп отримуємо

$$P_{B_3}(A) = \frac{4}{25} = 0{,}16,\quad P_{B_4}(A) = \frac{3}{25} = 0{,}12.$$

Підставимо отримані дані у формулу повної ймовірності

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)+P(B_4)\cdot\cdot P_{B_4}(A)=$$

$$=0{,}25\cdot 0{,}2+0{,}25\cdot 0{,}24+0{,}25\cdot 0{,}16+0{,}25\cdot 0{,}12=0{,}18.$$

Формула Бейеса. Нехай подія A може відбутись лише після настання однієї із несумісних подій (гіпотез) B_1, B_2, …, B_n, які утворюють повну групу подій. Якщо подія A вже відбулась, то ймовірності гіпотез можуть бути переоцінені за формулою Бейеса

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}\quad (i=1,2,\ldots,n),$$

де

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A).$$

Формула Бернуллі. Ймовірність того, що в n незалежних дослідах, у кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p ($0<p<1$), подія відбудеться рівно k разів (незалежно у якій послідовності), дорівнює

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

де $q=1-p$.

Ймовірність того, що в n незалежних дослідах, у кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p ($0<p<1$), подія відбудеться не менше k_1 і не більше k_2 разів дорівнює

$$P_n(k_1)+P_n(k_1+1)+P_n(k_1+2)+\ldots+P_n(k_2).$$

Локальна формула Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних дослідах, у кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p ($0<p<1$), подія відбудеться рівно k разів (незалежно у якій послідовності), наближено дорівнює (тим точніше, чим більше n)

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

де

$$q = 1 - p, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значення функції Гауса $\varphi(x)$ наведені у додатку 1. Функція $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Інтегральна формула Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних дослідах, у кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p ($0<p<1$), подія відбудеться не менше k_1 і не більше k_2 разів наближено дорівнює

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x^{''}) - \Phi(x^{'}),$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} d(z) - \text{ функція Лапласа,}$$

$$x^{'} = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x^{''} = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблиця значень функції Лапласа для додатних значень x ($0 \le x \le 5$) наведена у додатку 2. Для значень $x>5$ приймають $\Phi(x)=0,5$. Для від'ємних значень x використовують цю ж таблицю, враховуючи, що функція Лапласа непарна [$\Phi(-x) = -\Phi(x)$].

Задачі до практичної роботи:

Задача 1. Проводиться випробування надійності системи, яка складається з трьох приладів, що працюють незалежно один від одного. Надійність (імовірність безвідмовної роботи) першого приладу дорівнює 0,9, другого — 0,8, третього — 0,7. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X — кількості надійних приладів у системі. Побудувати функцію розподілу випадкової величини X і знайти ймовірності того, що X набуде можливого значення з проміжку (0,5; 2).

Задача 2. Маємо 4 заготівки для виготовлення деталей. Імовірність виготовлення придатної деталі дорівнює 0,75. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількість заготівок, що їх буде використано для виготовлення придатної деталі. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X, а також імовірність того, що із цих заготівок буде виготовлено стандартну деталь.

Задача 3. Задано функцію

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 1; \\ ax^2 + bx, 1 < x \le 4; \\ 1, x > 4. \end{cases}$$

Довести, що можна підібрати такі значення a i b, при яких $F(x)$ буде функцією розподілу ймовірностей випадкової величини X. Знайти $P(2 \le X \le 3)$.

Задача 4. Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	2	3	10
P	0,1	0,4	0,5

Знайти середнє квадратичне відхилення.

Задача 5. У грошовій лотереї випущено 100 білетів. Розігрується один виграш у 50 гривень і 10 виграшів по 1 гривні. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію дискретної випадкової величини X – вартості можливого виграшу для власника одного лотерейного білету.

Практична робота №4. Закони розподілу випадкових величин.

ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

Закон розподілу дискретної випадкової величини. Законом розподілу дискретної випадкової величини називають перелік її можливих значень і відповідних їм ймовірностей. Найчастіше закон розподілу задають у вигляді таблиці

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

$x_1, x_2, \ldots\ x_n$ – це значення, яких набирає випадкова величина X, $p_1, p_2, \ldots\ p_n$ – відповідні цим значенням ймовірності, причому $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$.

Математичне сподівання. Нехай дискретна випадкова величина X може приймати лише значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ймовірності яких відповідно рівні $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називають суму добутків усіх її можливих значень на відповідні ймовірності

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n.$$

Властивості математичного сподівання.

Властивість 1. Математичне сподівання постійної величини дорівнює самій постійній величині

$$M(C)=C.$$

Властивість 2. Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання

$$M(CX)=CM(X).$$

Властивість 3. Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих величин

$$M(X+У)=M(X)+M(У).$$

Властивість 4. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань цих величин

$$M(XУ)=M(X)M(У).$$

Властивість 5. Математичне сподівання числа настання події *A* в *n* незалежних дослідах, у кожному з яких ймовірність настання події *p* постійна, дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність настання події у кожному випробуванні

$$M(X)=np.$$

Відхилення. Відхиленням називають різницю між випадковою величиною і її математичним сподіванням $X - M(X)$.

Дисперсія. Дисперсією дискретної випадкової величини називають математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини від її математичного сподівання

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Для обчислення дисперсії зручно використовувати формулу

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

$M(X^2)$ знаходять за формулою

$$M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_n^2 p_n.$$

Властивості дисперсії.

Властивість 1. Дисперсія постійної величини дорівнює нулю

$$D(C)=0.$$

Властивість 2. Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, піднісши його до квадрату

$$D(CX)=C^2D(X).$$

Властивість 3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Властивість 4. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин

$$D(X - Y)=D(X)+D(Y).$$

Властивість 5. Дисперсія числа настання події *A* в *n* незалежних дослідах, у кожному з яких ймовірність настання події *p* постійна, дорівнює добутку числа випробувань на ймовірності настання і ненастання події у кожному випробуванні

$$D(X)=npq.$$

Середнє квадратичне відхилення. Середнім квадратичним відхиленням називають квадратний корінь із дисперсії

$$\sigma = \sqrt{D}.$$

Приклад 1. Дискретна випадкова величина *X* задана законом розподілу

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,5	0,3

Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Розв'язок. Математичне сподівання знаходимо за означенням

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}3 = 2{,}1.$$

Дисперсію знаходимо за формулою

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Спочатку знайдемо $M(X^2)$

$$M(X^2) = 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}5 + 3^2 \cdot 0{,}3 = 4{,}9.$$

Тоді

$$D(X) = 4{,}9 - 2{,}1^2 = 0{,}49.$$

Середнє квадратичне відхилення – це квадратний корінь із дисперсії

$$\sigma = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7.$$

Задачі до практичної роботи:

Задача 1. У цеху є 5 верстатів. Імовірність того, що верстат працює, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що працюватимуть не менш як 3 верстати.

Задача 2. При виготовленні довільного виробу інструмент з імовірністю p = 0,2 може бути пошкодженим і потребуватиме заміни. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості виробів, які будуть виготовлені цим інструментом.

Задача 3. На автоматичну телефонну станцію надходить простий потік викликів, інтенсивність (щільність) якого k = 0,8 (викликів/хв.). Знайти ймовірність того, що за дві хвилини: а) не надійде жодного виклику; б) надійде рівно один виклик; в) надійде хоча б один виклик.

Задача 4. Випадкова величина X розподілена рівномірно. Знайти щільність її розподілу, якщо $P(X \geq 3) = 0{,}4$, а математичне сподівання рівне $MX = 2$.

Задача 5. Висунуто гіпотезу про те, що відхилення розміру деталі від номіналу є випадковою нормально розподіленою величиною з $MX = 0$ і $DX = 25$ мкм^2. Чи відповідає заданій гіпотезі те, що в перевірених 6 деталях відхилення належить проміжку $[5{,}13)$? Рівень значущості $\alpha = 0{,}0005$.

Задача 6. Похибка спостереження X при вимірюванні довжини розподілена нормально з $a = 5$ мм і $\sigma = 4$ мм. Знайти ймовірність того, що виміряне значення відхилиться від істинного більш ніж на 10 мм.

Практична робота №5. Статистичний розподіл вибірки.

ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

Генеральна сукупність. Генеральна сукупність – множина однотипних об'єктів, кількісна чи якісна ознака яких підлягає вивченню.

Вибіркова сукупність **–** підмножина об'єктів, відібраних у відповідний спосіб із генеральної сукупності.

Варіанти. Коли реалізується вибірка, кількісна ознака X набуває конкретних числових значень $x_1, x_2, \ldots, x_k$, які називаються варіантами.

Варіаційний ряд. Числовий ряд варіант, розташованих у зростаючому порядку, називається варіаційним.

Частоти. Кожна варіанта x_i вибірки може бути спостереженою n_i раз ($n_i \geq 1$). Число n_i називають частотою варіанти x_i. При цьому

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i ,$$

де k – кількість варіант, які відрізняються числовим значенням, n – об'єм вибірки.

Відносні частоти. Відношення частоти n_i варіанти x_i до об'єму вибірки n називають її відносною частотою і позначають через w_i

$$w_i = \frac{n_i}{n} .$$

Для кожної вибірки виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{k} w_i = 1 .$$

Накопичені частоти. Накопичена частота N_i варіанти x_i – це сума частот варіант, які не перевищують x_i.

Накопичені відносні частоти. Накопичена відносна частота W_i варіанти x_i – це сума відносних частот варіант, які не перевищують x_i.

Дискретний статистичний розподіл вибірки. Дискретним статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант варіаційного ряду і відповідних їм частот або відносних частот.

У табличній формі він має вигляд

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

або такий вигляд

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
w_i	w_1	w_2	w_3	…	w_k

Інтервальний статистичний розподіл вибірки. У разі, коли досліджувана ознака X є неперервною величиною і кількість варіант досить велика, результати вибірки подають інтервальним рядом. Для цього область значень розбивають на k інтервалів і для кожного інтервалу визначають частоти. Кількість інтервалів визначають за формулою Стерджеса

$$k=1+3{,}3\lg n,$$

де n – об'єм вибірки.

Довжину інтервалів h найчастіше беруть однаковою і визначають за формулою

$$h=(x_{max}-x_{min})/k,$$

де x_{max} та x_{min} – це максимальне та мінімальне значення у вибірці.

Інтервальним статистичним розподілом вибірки називають перелік часткових інтервалів і відповідних їм частот або відносних частот.

У табличній формі цей розподіл має вигляд

інтервал	x_0-x_1	x_1-x_2	x_2-x_3	…	$x_{k-1}-x_k$
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

Полігон частот і відносних частот. Дискретний статистичний розподіл вибірки можна зобразити графічно у вигляді ламаної лінії.

Полігон частот – це ламана, відрізки якої сполучають точки з координатами (x_i; n_i). Полігон відносних частот – це ламана, відрізки якої сполучають точки з координатами (x_i; W_i).

Гістограма частот і відносних частот. Для графічного зображення інтервального статистичного розподілу вибірки використовують гістограму частот і гістограму відносних частот.

Гістограмою частот називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжини $h=x_i-x_{i-1}$, а висотами відношення n_i/h (щільність частоти). Площа гістограми частот дорівнює об'єму вибірки.

Гістограмою відносних частот називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжини $h=x_i-x_{i-1}$, а висотами відношення w_i/h (щільність відносної частоти). Площа гістограми відносних частот дорівнює одиниці.

Кумулята. Кумулята частот – це ламана, відрізки якої сполучають точки з координатами $(x_i;\ N_i)$. Кумулята відносних частот – це ламана, відрізки якої сполучають точки з координатами $(x_i;\ W_i)$.

У випадку, коли статистичний розподіл вибірки є інтервальним, то у якості варіант приймають верхні межі інтервалів.

При збільшенні об'єму вибірки гістограма відносних частот наближається до функції щільності розподілу, а кумулята відносних частот – до функції розподілу.

Емпірична функція розподілу $F^*(x)$ та її властивості. Емпірична функція розподілу $F^*(x)$ – це функція аргументу x, що визначає відносну частоту події $X < x$, тобто

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n},$$

де n – об'єм вибірки, n_x – кількість варіант статистичного розподілу вибірки, значення яких менші за фіксовану варіанту x. Властивості $F^*(x)$:

1) $0 \le F^*(x) \le 1$;
2) $F^*(x) = 0$ для $x \le x_{min}$, де $x_{\min}$ - найменша варіанта варіаційного ряду;
3) $F^*(x)=1$ для $x>x_{max}$, де $x_{\max}$ - найбільша варіанта варіаційного ряду;
4) $F^*(x)$ є неспадна функція аргументу x, а саме: $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 \ge x_1$.

Приклад 1. У цеху встановлено 5 верстатів. Протягом 25 днів реєструвалась кількість верстатів, які не працювали. Отримали такі значення: 0, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 0, 0, 2, 2, 3, 3, 1, 0, 1, 2, 1, 3, 5, 0.

Записати статистичний розподіл вибірки, побудувати полігон і кумуляту частот, записати емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік.

Розв'язок. Досліджувана величина X (кількість верстатів, які не працювали) може набирати значення 0,1,2,3,4,5. Загальний об'єм вибірки n=25.

На підставі отриманих даних складемо статистичний розподіл вибірки і додамо до отриманої таблиці рядок з накопиченими частотами

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	5	7	7	4	1	1
N_i	5	12	19	23	24	25

На основі цієї таблиці будуємо полігон частот (рис.1) і кумуляту накопичених частот (рис.2).

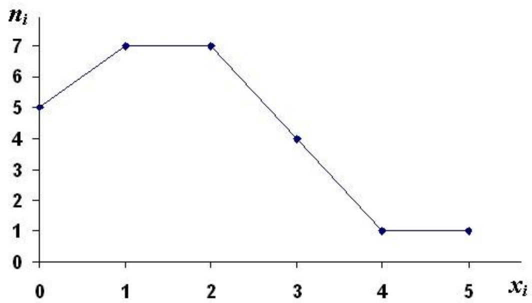

Рис.1

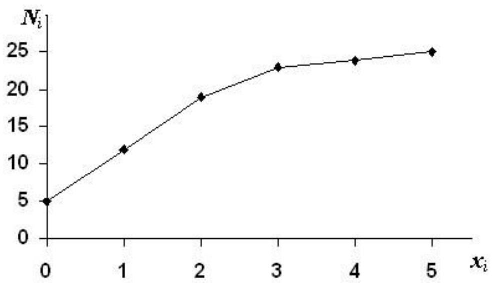

Рис.2.

Запишемо емпіричну функцію розподілу, скориставшись формулою

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n}$$

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ 0{,}2, & \text{якщо } 0<x\le 1;\\ 0{,}48, & \text{якщо } 1<x\le 2;\\ 0{,}76, & \text{якщо } 2<x\le 3;\\ 0{,}92, & \text{якщо } 3<x\le 4;\\ 0{,}96, & \text{якщо } 4<x\le 5;\\ 1, & \text{якщо } x>5.\end{cases}$$

Графік емпіричної функції розподілу наведено на рис.3.

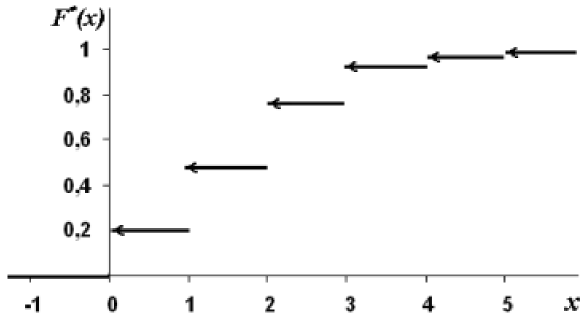

Рис.3.

Приклад 2. Магазин за тиждень реалізував 30 пар жіночого взуття наступних розмірів: 37, 35, 33, 36, 41, 37, 36, 36, 39, 38, 34, 40, 37, 35, 39, 36, 38, 37, 38, 35, 34, 36, 39, 38, 35, 37, 38, 39, 38, 37.

Записати інтервальний статистичний розподіл вибірки. Побудувати гістограму частот.

Розв'язок. Мінімальне значення вибірки дорівнює 33, максимальне значення дорівнює 41. Хоча обчислена за формулою Стерджеса кількість інтервалів для вибірки об'ємом 30 дорівнює 6, однак, виходячи з практичних міркувань розіб'ємо наш діапазон значень на 4 інтервали однакової довжини: 33-35, 35-37, 37-39, 39-41. Підраховуючи кількість значень з кожного інтервалу будемо дотримуватись наступного правила: якщо значення співпадає з лівим краєм інтервалу, то це значення відносять до даного інтервалу, якщо ж значення співпадає з правим краєм інтервалу, то це значення відносять до наступного інтервалу (крім останнього).

Враховуючи усе вище сказане запишемо інтервальний статистичний розподіл вибірки

Розмір (інтервал)	33-35	35-37	37-39	39-41
Кількість пар, n_i	3	9	12	6

Гістограму частот для отриманого розподілу наведено на рис.4.

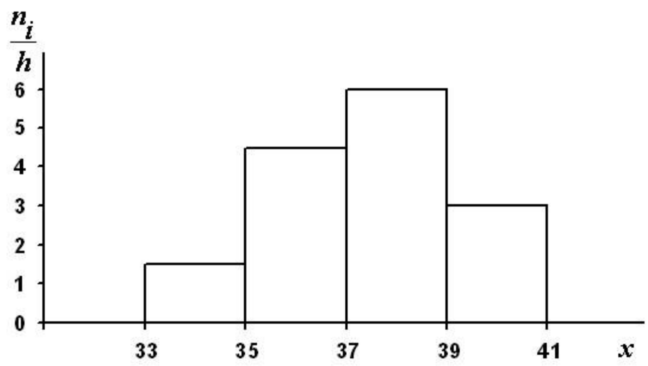

Рис.4.

Задачі до практичної роботи:

Задача 1. У цеху встановлено 5 верстатів. Протягом 25 днів реєструвалась кількість верстатів, які не працювали. Отримали такі значення: 0, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 0, 0, 2, 2, 3, 3, 1, 0, 1, 2, 1, 3, 5, 0.

Записати статистичний розподіл вибірки, побудувати полігон частот і кумуляту частот, записати емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік.

Задача 2. Магазин за тиждень реалізував 30 пар жіночого взуття наступних розмірів: 37, 35, 33, 36, 41, 37, 36, 36, 39, 38, 34, 40, 37, 35, 39, 36, 38, 37, 38, 35, 34, 36, 39, 38, 35, 37, 38, 39, 38, 37.

Записати інтервальний статистичний розподіл вибірки. Побудувати гістограму частот.

Задача 3. Студент здав 4 екзамени і отримав оцінки: 4,3,4,4. Обчислити середній бал.

Задача 4. Результати здачі екзамену 10 студентами: 3,4,3,4,4,5,3,5,4,4. Обчислити середній бал використавши формулу для середнього вибіркового зваженого.

Задача 5 Задано статистичний розподіл вибірки

x_i	0	1	2	4
n_i	2	3	3	2

Обчислити дисперсію, виправлену дисперсію, середнє квадратичне відхилення, виправлене середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. На виробництві 70 робітників. Розподіл кількості робітників залежно від стажу роботи наведено в таблиці

Стаж роботи	менше 5	5-10	10-15	15-20	20-25	Більше 25
Кількість робітників	8	12	20	16	9	5

Обчислити середній стаж роботи робітника.

Практична робота №6-7. Вибіркові характеристики. Точкові та інтегральні оцінки параметрів розподілу.

ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

Середнє вибіркове дискретного ряду. Середнє вибіркове визначають як відношення суми окремих значень вибірки до кількості цих значень. Розрізняють середнє вибіркове просте і зважене. Середнє вибіркове просте визначають за формулою

$$\overline{x}_в = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

де x_i – окремі значення (варіанти), n – об'єм вибірки.

Середнє вибіркове зважене застосовують тоді, коли значення досліджуваної ознаки $x_1, x_2, \ldots, x_k$ повторюються відповідно з частотами $n_1, n_2, \ldots, n_k$ (тобто задано дискретний статистичний розподіл вибірки).

Середнє вибіркове зважене визначають за формулою

$$\overline{x}_в = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n},$$

де x_i – варіанти, n_i, - частоти, n – об'єм вибірки.

Приклад 1. Студент здав 4 екзамени і отримав оцінки: 4,3,4,4. Обчислити середній бал.

Розв'язок. Використаємо формулу для середнього вибіркового простого

$$\overline{x}_в = \frac{4+3+4+4}{4} = 3{,}75.$$

Приклад 2. Результати здачі екзамену 10 студентами: 3,4,3,4,4,5,3,5,4,4. Обчислити середній бал.

Розв'язок. Запишемо статистичний розподіл вибірки:

Оцінка	3	4	5
Кількість студентів	3	5	2

Використаємо формулу для середнього вибіркового зваженого

$$\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{3\cdot 3 + 4\cdot 5 + 5\cdot 2}{10} = 3{,}9 .$$

Середнє вибіркове інтервального ряду. Середнє вибіркове інтервального ряду визначають наступним способом. Спочатку записують дискретний статистичний розподіл, значення якого – це середини часткових інтервалів вихідного інтервального ряду, а частоти це – відповідно частоти для часткових інтервалів вихідного ряду. Після цього середнє вибіркове визначають за формулою для середнього вибіркового зваженого.

У випадку, коли перший та останній інтервали ряду є відкритими, тобто не мають чіткої нижньої та верхньої межі, їхні середні значення визначають наступним чином. Щоб знайти середнє значення для першого відкритого інтервалу, від його верхньої межі віднімають половину величини наступного інтервалу, а щоб знайти середнє значення останнього відкритого інтервалу, до його нижньої межі додають половину величини попереднього інтервалу.

Приклад 3. На виробництві 70 робітників. Розподіл кількості робітників залежно від стажу роботи наведено в таблиці

Стаж роботи	менше 5	5-10	10-15	15-20	20-25	Більше 25
Кількість робітників	8	12	20	16	9	5

Обчислити середній стаж роботи робітника.

Розв'язок. Перейдемо від інтервального до дискретного статистичного розподілу вибірки, записавши його у таблицю

Стаж роботи	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
Кількість робітників	8	12	20	16	9	5

Використаємо формулу для середнього вибіркового зваженого

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{2{,}5\cdot 8 + 7{,}5\cdot 12 + 12{,}5\cdot 20 + 17{,}5\cdot 16 + 22{,}5\cdot 9 + 27{,}5\cdot 5}{70} = 14.$$

Середнє геометричне. Середнє геометричне використовується для визначення середніх темпів зростання (спадання), тобто коли загальний об’єм явищ становить не суму, а добуток значень досліджуваної ознаки.

Середнє геометричне обчислюють за формулою

$$\overline{x}_{геом} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}\ .$$

Мода. Модою називають значення, яке найчастіше повторюється у досліджуваній сукупності. У дискретному варіаційному ряду це варіанта, яка має найбільшу частоту.

Приклад 9. У місті 10 фірм реалізують деякий товар за наступними цінами: 100, 110, 90, 110, 110, 120, 90, 100, 110, 100 грн.

Знайти модальну ціну на даний товар.

Розв’язок. Запишемо статистичний розподіл вибірки

Ціна, грн	90	100	110	120
Кількість фірм	2	3	4	1

З розподілу видно, що модальною буде ціна 110 грн, так як вона зустрічається найчастіше

Медіана. Медіаною називають таке значення досліджуваної ознаки, яке ділить ранжируваний (записаний у порядку зростання або спадання) ряд значень вибірки на дві рівні за кількістю частини. При непарній кількості значень у вибірці за медіану приймають центральне значення ранжируваного ряду $M_e=x_{(n+1)/2}$, а при парній кількості – середню арифметичну двох центральних значень $M_e=(x_{n/2}+x_{(n+2)/2})/2$.

Приклад 11. У місті 9 фірм реалізують деякий товар за наступними цінами: 10, 11, 9, 11, 11, 12, 9, 10, 11 грн.

Знайти медіанне значення ціни на даний товар.

Розв'язок. Запишемо значення цін у вигляді варіаційного ряду 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 11,12. Медіаною буде значення 11 (виділене в ряду), так як воно займає центральне місце у варіаційному ряду.

Приклад 12. У місті 10 фірм реалізують деякий товар за наступними цінами: 100, 110, 90, 110, 110, 120, 90, 100, 110, 100 грн.

Знайти медіану даного цінового ряду.

Розв'язок. Запишемо значення цін у вигляді варіаційного ряду 90, 90, 100, 100, 100, 110, 110, 110, 110,120. Два центральних значення – це 100 і 110 (виділені в ряду). Медіаною буде середня арифметична цих значень, тобто число 105.

Варіація. Варіація – це зміна величини ознаки у досліджуваній сукупності.

Розмах варіації. Розмах варіації – це різниця між найбільшим та найменшим значенням варіюючої ознаки

$$R=x_{max}-x_{min}.$$

Середнє лінійне відхилення. Середнє лінійне відхилення – це середнє арифметичне з абсолютних відхилень усіх варіант від середнього значення варіюючої ознаки. Його визначають за формулою

$$\overline{d}=\frac{|x_1-\overline{x}_в|n_1+|x_2-\overline{x}_в|n_2+\ldots+|x_k-\overline{x}_в|n_k}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{k}|x_i-\overline{x}_в|n_i}{n},$$

де $x_в$ - вибіркова середня, x_i – варіанти, n_i – частоти, n – об'єм вибірки.

Лінійний коефіцієнт варіації. Лінійний коефіцієнт варіації – це відношення середнього лінійного відхилення до середнього значення ознаки

$$\lambda=\frac{\overline{d}}{\overline{x}_в}100\%.$$

За допомогою лінійного коефіцієнта варіації можна порівнювати варіацію різних сукупностей, так як на відміну від середнього лінійного відхилення його значення не залежить від одиниць вимірювання.

Вибіркова дисперсія. Дисперсія – це середнє арифметичне квадратів відхилень усіх значень ознаки від її середньої величини. Її обчислюють за такою формулою

$$D_в = \frac{\left(x_1 - \bar{x}_в\right)^2 n_1 + \left(x_2 - \bar{x}_в\right)^2 n_2 + \ldots + \left(x_k - \bar{x}_в\right)^2 n_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}_в\right)^2 n_i}{n}$$

де $x_в$ – вибіркова середня, x_i – варіанти, n_i – частоти, n – об’єм сукупності.

Для спрощення обчислень використовують формулу

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \, n_{x_i}}{n} - (\bar{x}_в)^2 = \overline{x^2} - \left(\bar{x}_в\right)^2,$$

де $\bar{x}_в$ – середнє арифметичне квадратів значень досліджуваної ознаки.

"Виправлена" вибіркова дисперсія Вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою дисперсії генеральної сукупності (дає занижені значення для генеральної дисперсії). Тому вибіркову дисперсію "виправляють" таким чином, щоб вона стала незміщеною оцінкою. Для цього вибіркову дисперсію множать на коефіцієнт Бесселя $\frac{n}{n-1}$ і позначають

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}_в\right)^2 n_i .$$

Середнє квадратичне відхилення. Вибіркове середнє квадратичне відхилення – це корінь квадратний з дисперсії

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} \, .$$

"Виправлене" вибіркове середнє квадратичне відхилення – це корінь квадратний з "виправленої" дисперсії

$$s = \sqrt{s^2} \, .$$

Коефіцієнт варіації. Коефіцієнт варіації (квадратичний коефіцієнт варіації) – це відношення середнього квадратичного відхилення до середнього значення ознаки

$$\nu = \frac{\sigma_в}{\overline{x}_в} 100\% .$$

Якщо коефіцієнт варіації менший або дорівнює 33%, то варіація вважається слабкою і можна говорити про однорідність даних, якщо більший за 33%, то варіація вважається сильною. У випадку сильної варіації досліджувана сукупність вважається неоднорідною (наприклад, розбита на групи), а середнє значення - нетиповим і його не можна використовувати як узагальнюючий показник цієї сукупності.

Приклад 2. Задано статистичний розподіл вибірки

x_i	0	1	2	4
n_i	2	3	3	2

Обчислити дисперсію, виправлену дисперсію, середнє квадратичне відхилення, виправлене середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.

Розв'язок. Знаходимо дисперсію за спрощеною формулою

$$D_в = \overline{x^2} - \left(\overline{x}_в\right)^2 .$$

Спочатку обчислюємо $x_в$

$$\overline{x}_в = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{10} = 1{,}7 .$$

Для полегшення обчислення x^2 додамо рядок із квадратами значень варіант

x_i	0	1	2	4
n_i	2	3	3	2
x_i^2	0	1	4	16

Величину $\overline{x^2}$ знайдемо за формулою для середнього арифметичного зваженого

$$\overline{x^2} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 16 \cdot 2}{10} = 4{,}7 .$$

Тоді шукане значення дисперсії дорівнюватиме

$$D_в = 4{,}7 - 1{,}7^2 = 1{,}81.$$

"Виправлена" дисперсія

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{10}{9} \cdot 1{,}81 = 2{,}01.$$

Середнє квадратичне відхилення дорівнює

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{1{,}81} = 1{,}35.$$

"Виправлене" середнє квадратичне відхилення

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2{,}01} = 1{,}42.$$

Коефіцієнт варіації

$$v = \frac{\sigma_в}{\overline{x}_в} 100\% = \frac{1{,}35}{1{,}7} \cdot 100\% = 79{,}4\%.$$

Асиметрія. Асиметрія (скошеність) емпіричного розподілу – це відношення центрального емпіричного моменту третього порядку до куба середнього квадратичного відхилення

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma_в^3} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{x}_в\right)^3 n_i}{n\sigma_в^3}.$$

Якщо асиметрія дорівнює нулю, то розподіл симетричний (для нормального розподілу A_s=0), якщо не дорівнює нулю – асиметричний. У випадках, коли A_s>0, розподіл має правосторонню асиметрію (права вітка кривої розподілу довша за ліву), коли A_s<0 – лівосторонню асиметрію (ліва вітка кривої розподілу довша за праву).

Прийнято вважати, що при значенні асиметрії $|A_s|<0{,}25$ асиметрія є незначною, при значенні $|A_s|>0{,}5$ – емпіричний розподіл відрізняється від нормального значним зміщенням.

При симетричному розподілі $\overline{x}_в = M_o = M_e$. Для правосторонньої асиметрії виконується таке співвідношення $\overline{x}_в > M_e > M_o$, для лівосторонньої таке $\overline{x}_в < M_e < M_o$.

Ексцес. Ексцес емпіричного розподілу – це відношення центрального емпіричного моменту четвертого порядку до середнього квадратичного відхилення у четвертому степені мінус три

$$E_s = \frac{\mu_4}{\sigma_в^{\ 4}} - 3 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}_в\right)^4 n_i}{n\sigma_в^{\ 4}} - 3.$$

При нормальному розподілі E_s=0, при гостровершинному (вершина емпіричного розподілу виступає над вершиною нормального) E_s>0, при плосковершинному (вершина емпіричного розподілу знаходиться нижче вершини нормального розподілу) E_s<0.

У тих випадках, коли $|E_s|<0{,}4$, крива емпіричного розподілу вважається слабоексцесивною.

Якщо у вибірці A_s та E_s близькі до нуля, то можна припустити, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом.

Інтервальні оцінки. Інтервальною називають оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу, який покриває досліджуваний параметр θ.

Точність оцінки. Точність оцінки – це таке додатне число δ, яке характеризує величину відхилення досліджуваного параметра θ від параметра θ^*, яким оцінюють θ, тобто виконується нерівність

$$|\theta - \theta^*| < \delta.$$

Чим менше δ, тим вища точність оцінки. Із збільшенням об’єму вибірки точність оцінки підвищується.

Надійність оцінки. Надійність оцінки – це таке число γ, яке дорівнює ймовірності того, що виконується нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$. Записують це таким чином

$$P(|\theta - \theta^*| < \delta) = \gamma \text{ або } P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = \gamma.$$

Як правило, надійність оцінки вибирають рівною 0,95, 0,99 або 0,999.

Число α=1-γ - це ймовірність похибки при оцінюванні.

Довірчий інтервал. Довірчим називають інтервал $(\theta^*-\delta;\theta^*+\delta)$, який із заданою надійністю γ покриває досліджуваний параметр θ. Довірчий інтервал часто записують у такому вигляді $\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta$.

Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання *a* ***нормально розподіленої ознаки X при відомому середньому квадратичному відхиленні σ.***

Для оцінки математичного сподівання *a* нормально розподіленої ознаки *X* при відомому середньому квадратичному відхиленні *σ* служить довірчий інтервал

$$\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

де $t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ – точність оцінки, *n* – об'єм вибірки, *t* – аргумент функції Лапласа, для якого $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, γ - надійність оцінки.

Параметр *t* знаходять із таблиці для значень функції Лапласа Ф(*x*) (додаток 2).

Таким чином можна записати

$$P\left(\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Зміст цього виразу полягає у тому, що довірчий інтервал $\left(\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покриває оцінюваний параметр *a* з надійністю γ. Точність оцінки $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Задачі до практичної роботи:

Задача 1. У місті 10 фірм реалізують деякий товар за наступними цінами: 100, 110, 90, 110, 110, 120, 90, 100, 110, 100 грн. Знайти розмах варіації, середнє лінійне відхилення цін на даний товар та лінійний коефіцієнт варіації.

Задача 2. Задано статистичний розподіл вибірки

x_i	0	1	2	4
n_i	2	3	3	2

Обчислити дисперсію, виправлену дисперсію, середнє квадратичне відхилення, виправлене середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.

Задача 3. Із генеральної сукупності отримано вибірку об'ємом 100 значень

x_i	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	4	7	9	17	24	19	10	7	3

Вважаючи, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 3$, побудувати з надійністю $\gamma = 0{,}95$ довірчий інтервал для математичного сподівання *a*.

Задача 4. Із генеральної сукупності, розподіленої за нормальним законом, отримано вибірку об'ємом n=20

x_i	1	2	4	6	7
n_i	2	3	10	3	2

Знайти з надійністю $\gamma = 0{,}95$ інтервальну оцінку для математичного сподівання *a* генеральної сукупності.

Задача 5 Із генеральної сукупності, розподіленої за нормальним законом, отримано вибірку об'ємом n=20

x_i	1	2	4	6	7
n_i	2	3	10	3	2

Знайти з надійністю $\gamma = 0{,}95$ інтервальну оцінку для середнього квадратичного відхилення σ генеральної сукупності.

Задача 6. Знайти з надійністю $\gamma = 0{,}95$ інтервальну оцінку для ймовірності настання події *A* в кожному із n =100 незалежних повторних випробувань, якщо подія відбулась m = 40 раз.

Задача 7. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю $\gamma = 0{,}99$ точність оцінки математичного сподівання *a* нормально розподіленої ознаки дорівнює $\delta = 0{,}6$, якщо середнє квадратичне відхилення $\sigma = 3$.

Практична робота №8. Елементи теорії кореляції.

ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

Двовимірний статистичний розподіл вибірки. Двовимірним статистичним розподілом вибірки, елементам якої притаманні кількісні ознаки X і Y, називають перелік варіант x_i, y_i та відповідних цим парам варіант частот n_i .

У табличній формі розподіл має такий вигляд

x_i	x_1	x_2	...	x_k
y_i	y_1	y_2	...	y_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

де $n_1+n_2+...+n_k=n$ – об'єм вибірки.

Кореляційна залежність. Кореляційною називають таку залежність між ознаками X та Y, коли при зміні однієї з ознак змінюється середнє значення іншої.

Кореляційне поле. Кореляційне поле ознак X та Y – це графічне представлення результатів досліджень на координатній площині xOy у вигляді точок з координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_n, y_n). На основі аналізу кореляційного поля можна вирішити питання про наявність чи відсутність залежності між ознаками, прослідкувати характер залежності (лінійна, нелінійна, функціональна чи статистична) та її тенденцію (додатну чи від'ємну).

Приклад 1. Задано двовимірну вибірку

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2	3,7	6,2	7,9	9,9	12	14,1	16,3	17,8	19,9

Побудувати кореляційне поле.

Розв'язок. Відкладемо на площині xOy точки з координатами (1;2), (2;3,7), (3;6,2) та ін. Отримаємо кореляційне поле для значень ознак X та Y, на якому чітко видно лінійну залежність Y від X (рис.5).

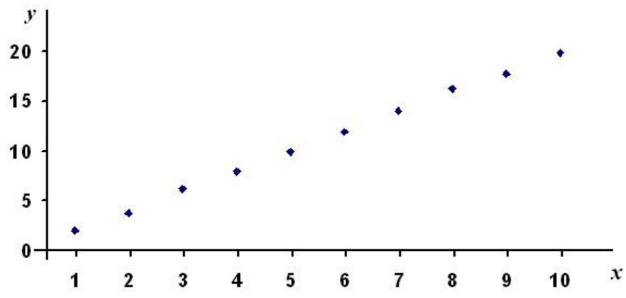

Рис.5.

Вибірковий коефіцієнт кореляції. Вибірковий коефіцієнт кореляції (коефіцієнт кореляції Пірсона) використовують для кількісної оцінки прямолінійного зв'язку між ознаками *X* та *Y*, які мають двовимірний нормальний розподіл. Вибірковий коефіцієнт кореляції обчислюють за формулою

$$r_в = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)(y_i - \bar{y}_в)}{n\sigma_x\sigma_y},$$

де σ_x та σ_y – це вибіркові середні квадратичні відхилення ознак *X* та *Y*.

На практиці для обчислення коефіцієнта кореляції незгрупованих даних використовують формулу

$$r_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}_в\bar{y}_в}{n\sigma_x\sigma_y},$$

для згрупованих даних

$$r_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i y_i n_i - n\bar{x}_в\bar{y}_в}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції знаходиться в межах від 0 до +1 при прямій залежності та від 0 до –1 при зворотній залежності. Чим ближчий коефіцієнт кореляції до ±1, тим тісніший зв'язок між ознаками *X* та *Y* і навпаки, чим ближчий коефіцієнт кореляції до 0, тим слабший зв'язок між ознаками.

Якщо вибірковий коефіцієнт кореляції дорівнює ±1, то між досліджуваними ознаками існує функціональний лінійний зв'язок.

Для оцінювання сили зв'язку між корелюючими ознаками використовують шкалу Чеддока: якщо | $r_в$ |= 0,1-0,3, то лінійний зв'язок дуже слабкий, якщо | $r_в$ |= 0,3-0,5 – зв'язок слабкий, якщо | $r_в$ |= 0,5-0,7 – зв'язок середній, якщо | $r_в$ |= 0,7-0,9 – зв'язок сильний, якщо | $r_в$ |> 0,9 – зв'язок дуже сильний.

Приклад 2. Задано двовимірну вибірку об'ємом n=11

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

Обчислити вибірковий коефіцієнт кореляції. Перевірити, чи існує залежність між ознаками X та Y.

Розв'язок. Знайдемо значення $\overline{x}_в$ та $\overline{y}_в$

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{-4+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+6}{11} = 1.$$

$$\overline{y}_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{25+16+9+4+1+0+1+4+9+16+25}{11} = 10.$$

Обчислимо коваріацію за формулою для незгрупованих даних

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \overline{x}_в \overline{y}_в = \frac{-4\cdot 25+(-3)\cdot 16+(-2)\cdot 9+(-1)\cdot 4+0\cdot 1}{11} +$$

$$+\frac{1\cdot 9+2\cdot 1+3\cdot 4+4\cdot 9+5\cdot 16+6\cdot 25}{11} - 1\cdot 10 = 10-10 = 0.$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції

$$r_в = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0}{\sigma_x \sigma_y} = 0.$$

Коваріація і вибірковий коефіцієнт кореляції дорівнюють нулю, отже ознаки X та Y є лінійно незалежними.

Використаємо кореляційне поле для перевірки наявності іншого типу зв'язку між цими ознаками. Кореляційне поле (рис.6) показує, що між *X* та *Y* існує параболічна залежність.

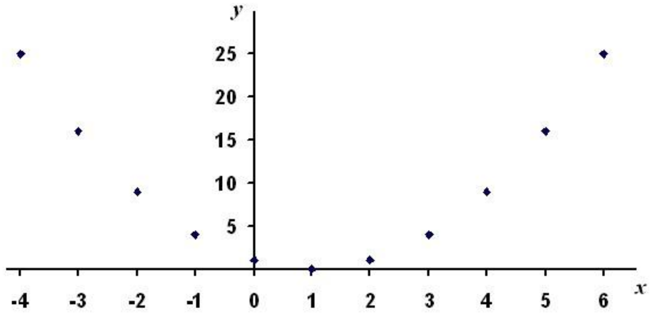

Рис.6.

Аналізуючи додатково дані з таблиці неважко встановити, що це функціональний зв'язок $Y = (X - 1)^2$.

Задачі до практичної роботи:

Задача 1. Задано двовимірну вибірку

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2	3,7	6,2	7,9	9,9	12	14,1	16,3	17,8	19,9

Побудувати кореляційне поле.

Задача 2. Задано двовимірну вибірку

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2	2,2	2,2	1,9	1,9	2	2,3	2,1	1,8	2,2
n_i	2	3	1	2	2	1	3	2	1	3

Встановити, чи існує лінійний зв'язок між ознаками *X* та *Y*.

Задача 3. Задано двовимірну вибірку об'ємом n=11

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

Обчислити коваріацію та вибірковий коефіцієнт кореляції. Перевірити, чи існує залежність між ознаками *X* та *Y*.

Глосарій
(термінологічний словник)

Асиметрія – відношення центрального моменту третього порядку до кубу середньоквадратичного відхилення.

Безповторна вибірка – вибірка, при якій відібраний об'єкт після проведення обстежень не повертається у генеральну сукупність.

Внутрішньогрупова дисперсія – середнє арифметичне групових дисперсій, зважене за обсягами груп.

Вибірка – сукупність випадково відібраних з досліджуваної сукупності об'єктів (генеральної сукупності).

Вибіркове середнє – частка від ділення суми значень всіх елементів вибірки на число елементів вибірки.

Випадкова величина – величина, яка має невідоме значення до випробування (безліч альтернатив), а в результаті інформативного випробування може прийняти якесь певне або більш обмежене в альтернативах значення.

Генеральна сукупність – сукупність усіх досліджуваних об'єктів.

Гістограма – ступінчаста фігура, що складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють n – числу значень, які потрапляють у ці інтервали.

Групова дисперсія – дисперсія значень ознаки, що належать групі, щодо групової середньої.

Групове середнє – середнє арифметичне значень ознаки, що належать групі.

Двовимірна випадкова величина – випадкова величина, яка має два аргументи.

Дискретна випадкова величина – величина, яка приймає окремі ізольовані значення з певними ймовірностями.

Дисперсія випадкової величини – математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

Довірчий інтервал – інтервал, який покриває невідомий параметр x із заданою надійністю (ймовірністю) p.

Достовірна подія – подія, яка обов'язково відбудеться, якщо буде здійснена певна сукупність умов.

Ексцес розподілу – міра гостровершинності розподілу, величина, що визначається відношенням центрального моменту четвертого порядку до четвертого ступеня середнього квадратичного відхилення за вирахуванням трійки. Ексцес показує, як швидко зменшується щільність розподілу поблизу її максимального значення. Для нормального розподілу Гаусса ексцес дорівнює нулю.

Ефективна оцінка – така оцінка, яка при заданому обсязі вибірки *n* має найменшу можливу дисперсію.

Закон розподілу випадкової величини – відповідність між можливими значеннями випадкової величини і їх ймовірностями.

Інтервальна оцінка – оцінка, яка визначається кінцями інтервалу.

Імовірність – це відношення числа сприятливих результатів до загального числа можливих результатів експерименту.

Коефіцієнт варіації – виражене у відсотках відношення вибіркового середньоквадратичного відхилення до вибіркового середнього.

Коефіцієнт кореляції – відношення коваріації двох випадкових величин до добутку їхніх середньоквадратичних відхилень.

Конкуруюча гіпотеза – гіпотеза, яка суперечить основній.

Кореляційна залежність – залежність, при якій при зміні однієї з величин змінюється середнє значення іншої.

Кореляційний момент – характеристика зв'язку між двома випадковими величинами.

Критерій Стьюдента – спрямований на оцінку відмінностей величин середніх і двох вибірок X та Y, які розподілені за нормальним законом. Одним з головних достоїнств критерію є широта його застосування. Він може бути використаний для зіставлення середніх у зв'язаних і незв'язних вибірках, причому вибірки можуть бути не рівні за величиною.

Критична область – сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу відкидають.

Математичне сподівання – число, щодо якого стабілізується середнє арифметичне можливих значень випадкової величини при досить великій кількості випробувань.

Міжгрупова дисперсія – дисперсія групових середніх відносно загальної середньої.

Метод найменших квадратів – завдання полягає у знаходженні коефіцієнтів функціональної залежності досліджуваних змінних величин, при яких забезпечується мінімальна дисперсія різниці вибіркових значень і функції, якою апроксимують стохастичну залежність досліджуваних змінних. Тобто, при заданих a й b сума квадратів відхилень експериментальних даних від знайденої прямої буде найменшою.

Медіана – варіанта ряду, яка ділить варіаційний ряд на рівні за об'ємом частини.

Мода – варіанта ряду, яка має найбільшу частоту.

Моменти випадкових величин – характеристики випадкових величин, що визначають математичне сподівання k– го ступеня відхилення випадкової величини.

Неперервна випадкова величина – величина, що приймає значення, які як завгодно мало відрізняються один від одного.

Незміщена оцінка – оцінка *x*, математичне сподівання якої дорівнює оцінюваному параметру *x*.

Нульова гіпотеза – сновна висунута гіпотеза.

Повторна вибірка – вибірка, при якій відібраний об'єкт повертається після проведення обстеження назад у генеральну сукупність.

Полігон частот – ламана лінія, відрізки якої з'єднують точки (x_i, n_i).

Виробляє функція – функція, яка визначає ймовірність настання події при різних можливостях появи у кожному випробуванні.

Розмах варіювання *R* – різниця між найбільшою і найменшою варіантами.

Регресія – уявлення однієї випадкової величини як функції іншої.

Статистична гіпотеза – гіпотеза (припущення) про вид невідомого розподілу або параметри невідомого розподілу.

Статистичний критерій – випадкова величина, що служить для перевірки нульової гіпотези.

Статистичний розподіл вибірки – перелік варіант і відповідних їм частот або відносних частот.

Стохастична залежність – залежність, при якій зміна однієї з величин тягне за собою зміну іншої.

Теорема Лапласа – визначення ймовірності настання події в k вимірах з n (при великих k і n).

Теорія ймовірностей – наука, що вивчає загальні закономірності випадкових явищ масового характеру.

Точкова оцінка – оцінка, яка визначається одним числом.

Умовна ймовірність – ймовірність настання події, пов'язана з додатковими умовами.

Формула Байєса – визначення апостеріорної (післядослідної) ймовірності на основі апріорної (додослідної) на основі проведення експерименту.

Формула Бернуллі – визначення ймовірності настання події у k вимірах з n.

Функція розподілу – функція, яка визначає ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше за x.

Характеристики положення – характеристики, що визначають найбільш можливі значення випадкової величини.

Характеристики розсіювання – характеристики, що визначають розкид можливих значень випадкової величини.

Центральна гранична теорема – теорема, яка доводить, що підсумовування великого числа випадкових величин з різними законами розподілу призводить в результаті до нормального розподілу.

Щільність розподілу ймовірностей – ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення на зазначеному інтервалі.

ОРІЄНТОВНИЙ ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДО ЕКЗАМЕНУ

1. Правила суми та добутку в комбінаториці.
2. Перестановки з n елементів.
3. Розміщення з n по k елементів.
4. Сполучення з n по k.
5. Перестановки, розміщення та сполучення з повтореннями.
6. Випадковий (стохастичний) експеримент. Елементарна подія та простір елементарних подій.
7. Випадкова, вірогідна та неможлива подія. Незалежні та несумісні події. Операції над подіями.
8. Класичне означення ймовірності.
9. Статистичне означення ймовірності.
10. Геометричне означення ймовірності.
11. Властивості ймовірності.
12. Обчислення ймовірностей за класичним означенням.
13. Протилежні події та їх ймовірності. Умовна ймовірність події.
14. Теореми додавання ймовірностей.
15. Теореми множення ймовірностей.
16. Ймовірність настання хоча б однієї події.
17. Поняття гіпотез. Повна ймовірність.
18. Формули Байеса.
19. Схема Бернуллі.
20. Найімовірніше число настання події в схемі Бернуллі.
21. Теорема Пуассона. Локальна та інтегральна теореми Муавра–Лапласа.
22. Функції Гауса та Лапласа.
23. Поняття випадкової величини. Дискретні та неперервні випадкові величини.
24. Закон розподілу дискретної випадкової величини.
25. Функція розподілу та її властивості.
26. Числові характеристики дискретної випадкової величини.
27. Математичне сподівання та його властивості.

28. Дисперсія та її властивості.
29. Середнє квадратичне відхилення.
30. Функція щільності розподілу неперервної випадкової величини та її властивості.
31. Числові характеристики неперервної випадкової величини.
32. Математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини.
33. Біноміальний розподіл.
34. Геометричний розподіл.
35. Розподіл Пуассона.
36. Рівномірний розподіл.
37. Показниковий розподіл.
38. Нормальний розподіл.
39. Властивості нормально розподілених випадкових величин.
40. Предмет математичної статистики. Задачі математичної статистики.
41. Генеральна та вибіркова сукупності.
42. Варіанти та варіаційний ряд.
43. Частоти та відносні частоти.
44. Статистичний розподіл.
45. Полігон частот.
46. Гістограма частот.
47. Емпірична функція розподілу.
48. Вибіркові характеристики.
49. Середнє вибіркове.
50. Вибіркова дисперсія.
51. Закон розподілу ймовірностей функції двох випадкових аргументів.
52. Числові характеристики функцій випадкових аргументів (математичні сподівання, дисперсії, кореляційний момент).
53. Приклади випадкових величин, що мають гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей.
54. Закон рівномірного розподілу ймовірностей випадкової величини.

55. Поняття статистичної оцінки.

56. Визначте суть методу Монте Карло.

57. Дайте визначення характеристичної функції, які властивості вона має.

58. Сформулюйте центральну граничну теорему.

59. Які події називають незалежними?

60. Сформулюйте теореми Муавра-Лапласа та теорему Пуассона.

Список рекомендованої літератури

1. Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч.-метод. посіб., 5-те вид. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська, О. К. Лопатін. – К . : Центр навчальної літератури, 2017. – 424 с.
2. Валєєв К. Г. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навч. посіб. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2005. – 334 с.
3. Волощенко А. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч.-метод. посібник для сам. вивчення дисц. / А. Б. Волощенко, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2003. – 256 с.
4. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов ; за ред. Г.О. Михаліна. – К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. – 336 с.
5. Зайцев Є. П. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч. посіб. / Є. П. Зайцев. – К. : Алерта, 2017. – 440 с.
6. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач : Навч. посіб. / Г. І. Кармелюк. – К. : Центр учбової літератури, 2007. – 576 с.
7. Кушлик-Дивульська О. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. / О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабалюк.− Київ, НТУУ «КПІ», 2012. – 220 с.
8. Мамчич Я.М. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч. – метод. посібник / Я. М. Мамчич. – Луцьк: ПП. Іванюк В.П., 2018. – 164 с.
9. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник / П. С. Сеньо. – К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 448 с.