ВСП ЗВО «ВІДКРИТИЙ МІЖНАРОДНИЙ УНІВЕСИТЕТ РОЗВИТКУ ЛЮДИНИ “УКРАЇНА”»
ЛУЦЬКИЙ ІНСТИТУТ РОЗВИТКУ ЛЮДИНИ

КАФЕДРА ІНФОРМАЦІЙНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ТА ТУРИЗМУ

Олена Помазун

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДЛЯ ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ДИСЦИПЛІНИ ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ

(методичні рекомендації для здобувачів вищої освіти денної форми навчання 2 курсу)

ЛУЦЬК – 2023

УДК 340.12
Помазун Олена Олександрівна. Методичні рекомендації для виконання самостійної роботи з курсу «Теорія ймовірності» для здобувачів вищої освіти денної форми навчання. Луцьк: ПП. Іванюк В. П., 2023. 40 с.

Укладач: О. О. Помазун – асистент кафедри інформаційної дільності та туризму Луцького інституту розвитку людини Університету «Україна»

Рецензенти:
О. А. Бундак – кандидат історичних наук, доцент, доцент кафедри права та фінансів Луцького інституту розвитку людини Університету «Україна»

О.М. Собчук - кандидат педагогічних наук, доцент кафедри загальної математики та методики навчання інформатики Волинського національного університету ім. Лесі Українки

Розглянуто та затверджено на засіданні кафедри інформаційних технологій та туризму Луцького інституту розвитку людини Університету «Україна».
Протокол № 1 від « 01 » вересня 2023 року.
Завідувач кафедри

Розглянуто та затверджено навчально-методичною радою Луцького інституту розвитку людини Університету «Україна».
Протокол № 1 від « 01 » вересня 2023 року.

Зміст

Вступ

Курс «Теорія ймовірності» що вивчається студентами 2 курсу Луцького інституту розвитку людини Університету «Україна», має на меті формування у майбутніх спеціалістів повноцінних теоретичних знань та практичних навичок по застосуванню ймовірнісно-статистичних методів для оцінки стохастичних процесів в галузі комп'ютерної інженерії.

Завдання дисципліни – навчити студентів робити науково обгрунтовану статистичну оцінку отриманого результату при розв'язуванні задач практичного змісту, привити навики застосування основних теорем теорії ймовірностей та математичної статистики до побудови та дослідження математичних моделей, використовувати математичний апарат для аналізу експериментальних результатів, отриманих у процесі написання курсових та дипломних робіт.

Студент повинен знати:

- методи обчислення ймовірностей випадкових подій і випадкових величин;
- закони розподілу та числові характеристики дискретних і неперервних випадкових величин;
- граничні теореми теорії ймовірностей та їх застосування в математичній статистиці;
- базові поняття математичної статистики;
- методи опрацювання емпіричних даних та отримання спроможних статистичних оцінок невідомих параметрів;
- методи перевірки статистичних гіпотез;
- елементи теорії кореляції.

Студент повинен вміти:

- виконувати якісний і кількісний аналіз випадкових подій, випадкових величин та систем таких величин;
- використовувати апарат дослідження дискретних і неперервних випадкових величин;
- проводити математичну обробку статистичних даних;

– давати статистичну оцінку параметрів генеральної сукупності;
– здійснювати статистичну перевірку гіпотез;
– використовувати елементи теорії кореляції;
– включати результати досліджень у математичні моделі інженерних задач.

Структура даного видання містить тематику курсу, методичні рекомендації до виконання самостійної роботи, питання на екзамен, глосарій та загальний список літератури, що в тій чи іншій мірі підходить до всіх тем.

Тема самостійної роботи в методичних вказівках обирається самостійно і узгоджується з викладачем.

Зміст тем курсу

Змістовий модуль 1. Основні поняття теорії ймовірностей

Тема 1. Елементи комбінаторики.

Правила суми та добутку в комбінаториці. Перестановки з n елементів. Розміщення з n по k елементів. Сполучення з n по k елементів. Перестановки, розміщення та сполучення з повтореннями.

Тема 2. Простір елементарних подій. Класичне означення ймовірності.

Випадковий (стохастичний) експеримент. Елементарна подія та простір елементарних подій. Випадкова, вірогідна та неможлива подія. Незалежні та несумісні події. Операції над подіями.

Класичне, статистичне та геометричне означення ймовірності. Властивості ймовірності. Обчислення ймовірностей за класичним означенням.

Тема 3. Основні теореми про ймовірності.

Протилежні події та їх ймовірності. Умовна ймовірність події. Теореми додавання ймовірностей. Теореми множення ймовірностей. Ймовірність настання хоча б однієї події. Поняття гіпотез. Повна ймовірність. Формули Байеса.

Тема 4. Повторні незалежні випробування.

Схема Бернуллі. Найімовірніше число настання події в схемі Бернуллі. Теорема Пуассона. Локальна та інтегральна теореми Муавра–Лапласа. Функції Гауса та Лапласа.

Тема 5. Випадкові величини та їх числові характеристики.

Поняття випадкової величини. Дискретні та неперервні випадкові величини. Закон розподілу дискретної випадкової величини. Функція розподілу та її властивості. Числові характеристики дискретної випадкової величини. Математичне сподівання та його властивості. Дисперсія та її властивості. Середнє квадратичне відхилення.

Функція щільності розподілу неперервної випадкової величини та її властивості. Числові характеристики неперервної випадкової величини.

Математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини.

Тема 6. Закони розподілу випадкових величин.

Біноміальний і геометричний розподіли, а також розподіл Пуассона як приклади дискретних розподілів. Їх числові характеристики. Рівномірний, показниковий та нормальний розподіли як приклади неперервних розподілів. Їх числові характеристики.

Змістовий модуль 2. Елементи математичної статистики

Тема 7. Статистичний розподіл вибірки.

Предмет та задачі математичної статистики. Генеральна та вибіркова сукупності. Варіанти та варіаційний ряд. Частоти та відносні частоти. Дискретний статистичний розподіл. Полігон частот. Інтервальний статистичний розподіл. Гістограма частот. Емпірична функція розподілу.

Тема 8. Вибіркові характеристики. Точкові та інтервальні оцінки параметрів розподілу.

Вибіркові характеристики. Середнє вибіркове. Вибіркова дисперсія. Середнє квадратичне відхилення та “виправлене“ середнє квадратичне відхилення. Мода. Медіана. Показники варіації. Асиметрія та ексцес.

Оцінка параметрів розподілу. Точкові та інтервальні оцінки невідомих параметрів розподілу. Довірчі інтервали.

Тема 9. Елементи теорії кореляції.

Двовимірний статистичний розподіл вибірки. Кореляційна залежність. Кореляційне поле. Кореляційна таблиця. Вибірковий коефіцієнт кореляції Пірсона. Прямі регресії.

Рангова кореляція. Ранговий коефіцієнт кореляції Спірмена. Ранговий коефіцієнт кореляції Кендала.

Тема 10. Перевірка статистичних гіпотез.

Статистичні гіпотези. Статистичний критерій. Критична область. Критичні точки. Рівень значущості. Перевірка статистичних гіпотез про дисперсії. Критерій Фішера. Перевірка статистичних гіпотез про середні. Критерій

Стьюдента. Перевірка статистичних гіпотез про нормальний розподіл генеральної сукупності. Критерій узгодженості Пірсона.

Методичні рекомендації для самостійної роботи

У методичних вказівках наводяться в стислому вигляді основні поняття і положення теорії ймовірностей, а також вирішення типових задач, які розглядаються на практичних заняттях або пропонуються студентам для самостійного вирішення. Розв'язання задач супроводжується докладними поясненнями і є зразком для оформлення контрольних робіт і відповідей на практичні питання за письмовим контролем (модульним чи підсумковим). Для вирішення завдань, що пов'язані з пошуком значень табульованих функцій, методичні вказівки доповнені відповідними таблицями.

Модуль 1. Теорія ймовірностей та математична статистика

Змістовий модуль 1. Випадкові події

Основні поняття теорії ймовірності

Під *експериментом* (*випробуванням*) розуміють деяку сукупність умов, в яких спостерігається те або інше явище, фіксується той або інший результат.

Подією (або *випадковою подією*) називається усякий факт, який в результаті експерименту може відбутися або не відбутися.

Ймовірністю події називається чисельна міра ступеня об'єктивної можливості появи цього події в результаті нового експерименту.

Ймовірність події A позначається як $P(A)$.

Достовірним називається подія U, яка в результаті експерименту неодмінно відбувається. Для достовірної події $P(U)=1$.

Неможливим називається подія, яка в результаті експерименту не може відбутися. Ймовірність появи неможливої події дорівнює нулю.

Ймовірність власне випадкової події A лежить у межах від нуля до одиниці: $0 < P(A) < 1$.

Повною групою подій називається декілька попарно несумісних подій таких, що в результаті експерименту одне з них неодмінно відбувається.

Декілька подій називаються *несумісними, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися одночасно в одному експерименті.*

Декілька подій називаються *рівноможливими*, якщо вони володіють рівним ступенем об'єктивної можливості відбутися в результаті експерименту.

Якщо результати експерименту утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій, то вони називаються *випадками*.

Випадок називається сприятливим до події A, якщо його поява тягне за собою появу події A.

Класичне визначення ймовірності

Якщо результати експерименту зводяться до схеми випадків, то ймовірність події А обчислюється за формулою

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

де n – загальне число випадків; m – число випадків, що сприятливі до події A.

Часто для підрахунку величин n і m у формулі (1) використовують формули комбінаторики: для числа сполучень з n елементів по m – формулу $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!n!} = C_n^{n-m}$; для числа розміщень з n елементів по m – формулу $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$; для числа перестановок з m елементів – формулу $P_n = n! = A_n^n$. При цьому $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Виключення: 0! = 1.

Приклад 1. Кидають одночасно дві гральні кістки. Знайти ймовірності подій: A – сума очок на обох кістках дорівнює 6; B – добуток очок на обох кістках дорівнює 8; C – сума та добуток очок на обох кістках дорівнює 8.

Розв'язання. Загальне число можливих елементарних результатів експерименту $n = 36$, оскільки випадання очок на одній кістці має 6 варіантів, і кожен варіант однієї кістки може поєднуватися з 6 варіантами іншої кістки. Всі результати складають повну групу несумісних рівноможливих подій.

Сприятливими до події A є наступні результати кидання кісток: 2+6; 3+5; 4+4; 5+3; 6+2, тобто $m = 5$. Шукана ймовірність за формулою (1) $P(A) = \frac{5}{36}$.

Сприятливими до події B є два результати: $2 \times 4; 4 \times 2$, тобто $m = 2$. За формулою (1) $P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Сприятливих до події C результатів немає, тобто $m = 0$, і $P(C) = 0$.

Приклад 2. В ящику 100 деталей, з них 10 – браковані. Навмання витягують 4 деталі. Знайти ймовірність події A – наявність рівно трьох стандартних деталей серед витягнутих.

Розв'язання. Загальне число можливих виходів експерименту $n = C_{100}^4$. Всі вони утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій. Підрахуємо число результатів, що сприяють події A. Три стандартні деталі з 90 наявних в ящику можна витягнути C_{90}^3 способами. З кожною вибіркою з трьох стандартних деталей може поєднуватися одна нестандартна деталь з 10, тобто кожне поєднання трьох стандартних деталей з одною бракованою деталлю може здійснюватися C_{10}^1 способами. Кількість сприятливих випадків становить $m = C_{90}^3 C_{10}^1$. Отже, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{90}^3 \cdot C_{10}^1}{C_{100}^1} = 0{,}3$.

Приклад 3. На десяти картках написані цифри 0, 1, … , 9. Три з них вибираються навмання і укладаються на стіл в порядку появи. Знайти ймовірність того, що: *а*) вийде число 245 (подія *А*); *б*) з вибраних цифр можна скласти число 245 (подія *В*).

Розв'язання. Загальне число всіх можливих виходів експерименту – це число розміщень з 10 елементів по 3. Отримані з'єднання елементів (карток) можуть відрізнятися один від одного або самими елементами, або порядком їх входження. Всі результати утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій у кількості $n = A_{10}^3 = 720$. Із загального числа результатів тільки один сприятливий отриманню числа 245, тобто число сприяючих результатів $m = 1$. Тоді шукана ймовірність події *А* за формулою (1) $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$.

На відміну від події *А* для події *В* загальне число результатів експерименту обчислюється як число з'єднань з 10 по 3, оскільки порядок вибору елементів не грає ролі.. Шукана ймовірність $P(B) = \frac{1}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$.

Приклад 4. З п'яти букв розрізної азбуки складено слово «КНИГА». Дитина, що не уміє читати, розсипала букви, а потім зібрав їх в довільному порядку. Знайти ймовірність того, що у нього знову вийшло слово «КНИГА».

Розв'язання. З п'яти букв дитина може скласти різні буквосполучення, які відрізняються один від одного тільки порядком входження букв. Тому число всіх результатів експерименту обчислимо як число перестановок з 5 елементів: $n = P5 = 5! = 120$. Всі результати утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій, з яких тільки одна сприяє появі події *А* – відновленню слова «КНИГА». Отже, шукана ймовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$.

Приклад 5. З шести букв розрізної азбуки складено слово «*АНАНАС*». Знайти, як і в попередньому завданні, ймовірність відновлення слова.

Розв'язання. Загальне число можливих результатів експерименту $n = P_6 = 6! = 720$. Число сприятливих результатів m більше, ніж в попередньому завданні. Слід врахувати, що перестановка місцями двох букв *Н*, значення слова не змінює. Відповідне число перестановок визначається як $P_2 = 2! = 2$. Але з кожною перестановкою букв *Н* може поєднуватися перестановка з трьох букв *А*. Загальне число перестановок цих трьох букв визначається як $P_3 = 3! = 6$. Таким чином, число сприяючих результатів $m = P_2 \cdot P_3 = 12$. Шукана ймовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12}{720} = \frac{1}{60}$.

Складні події. Основні теореми теорії ймовірності

Сумою двох подій А і *В* називають подію *С*, що полягає в появі хоча би однієї з подій *А* і *В*.

Сумою декількох подій називають подію, що полягає в появі хоча би однієї з цих подій.

Добутком двох подій А і *В* називають подію D, що полягає в сумісній появі подій *А* і *В*.

Добутком декількох подій називають подію, що полягає в сумісній появі всіх цих подій.

Теорема про ймовірність суми подій. Ймовірність суми двох подій дорівнює сумі їх ймовірностей за відрахуванням імовірності добутку цих подій:

$$P(A + B) = H(A) + P(B) - P(A \cdot B). \tag{2}$$

У разі *несумісних* подій імовірність їх суми визначається за формулами:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \text{ – для двох подій } A \text{ і } B; \tag{3}$$

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) \text{ – для } n \text{ подій.} \tag{4}$$

Дві несумісні події А і $\overline{A}$ називаються *протилежними*, якщо вони складають повну групу. Сума ймовірності протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{5}$$

Теорема про ймовірність добутку двох подій. Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності одного з них на умовну ймовірність іншої за умови, що перша подія відбулася:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) \tag{6}$$

де – $P_A(B)$ умовна ймовірність події *В* за умови, що відбулася подія *А*; $P_B(A)$ – умовна ймовірність події *А* за умови, що відбулося події *В*.

У разі *незалежних* подій формула (6) спрощується:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \text{ – для двох подій } A \text{ і } B; \tag{7}$$

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) \text{ – для } n \text{ подій.} \qquad (8)$$

Приклад 6. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі з першої гармати дорівнює 0,7; з другої – 0,8. Знайти ймовірність ураження цілі при одному залпі з двох гармат.

Розв'язання. Введемо позначення. Хай A – подія, яка полягає у влученні в ціль першою гарматою; B – другою. Ці події є сумісними і незалежними. Отже, подія C (ураження мішені при залпі) є сумою двох сумісних подій. Ймовірність події C можна визначити за формулою (2)

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - PA) \cdot P(B) =$$
$$= 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94 .$$

Цю задачу можна вирішити й іншим способом.

Ціль буде уражена, якщо відбудеться одна з трьох несумісних подій: $A_1 \cdot \overline{A_2}$ – в ціль влучила перша гармата та не влучила друга; $\overline{A_1} \cdot A_2$ – в ціль не влучила перша гармата та влучила друга; $A_1 \cdot A_2$ – в ціль влучили обидві гармати. В цьому випадку, застосовуючи теорему про суму несумісних подій у формі (4), а потім теорему про добуток незалежних подій, отримаємо

$$P(C) = P(A_1 \cdot \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cdot A_2) + P(A_1 \cdot A_2) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_2) =$$
$$= 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}8) + (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94 .$$

Найпростіший спосіб вирішення цієї задачі полягає в подані ймовірності події C через імовірність протилежної події $\overline{C}$ – промах обох гармат:

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 1 - (1 - 0{,}7)(1 - 0{,}8) = 0{,}94 .$$

Приклад 7. Студент прийшов на іспит, знаючи відповіді на 15 з 20 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент відповість на три екзаменаційних питання.

Розв'язання. Подія C (студент знає відповіді на всі три питання) є добутком трьох залежних подій: A_1 (студент знає відповідь на перше питання); A_2 (студент знає відповідь на друге питання за умови, що він відповів на перше) і A_3 (студент знає відповідь на третє питання за умови, що він відповів на перше і друге). Обчислимо ймовірності цих подій: $P(A_1)= \frac{15}{20}$; $P_{A_1}(A_2) = \frac{14}{19}$; $P_{A_1 \cdot A_2}(A_3) = \frac{13}{18}$.

За теоремою про ймовірність добутку залежних подій

$$P(C) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cdot A_2}(A_3) = \tfrac{15}{20} \cdot \tfrac{14}{19} \cdot \tfrac{13}{18} = 0{,}368 .$$

Приклад 8. З п'яти букв розрізної азбуки складено слово «*КНИГА*». Дитина, що не уміє читати, розсипала букви, а потім зібрала в довільному порядку. Знайти ймовірність того, що у нього знову склалося слово «*КНИГА*».

Розв'язання. Ця задача вже розглядалася (див. Приклад 4). Наведемо другий варіант вирішення, використовуючи основні теореми теорії ймовірностей.

Щоб в порядку появи букв склалося слово «*КНИГА*», першою повинна з'явитися буква *К*. Ймовірність такої події становить $P(К)=\frac{1}{5}$, оскільки з п'яти можливих результатів тільки один сприяє появі букви *К*. Припустимо, що ця подія відбулася. Тоді ймовірність того, що з чотирьох букв, що залишилися, наступною з'явиться *Н*, визначається як $P_К(Н)=\frac{1}{4}$. Аналогічно обчислюється ймовірність послідовної появи букв *И*, *Г* і *А*: $P_{К\cdot Н}(И)=\frac{1}{3}$; $P_{К\cdot Н\cdot И}(Г)=\frac{1}{2}$; $P_{К\cdot Н\cdot И\cdot Г}(А)=1$. За теоремою про ймовірність добутку залежних подій знайдемо шукану ймовірність: $P(К\cdot Н\cdot И\cdot Г\cdot А)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{120}$.

Формула повної ймовірності та формула Байєса

Якщо в умовах експерименту подія *А* з'являється спільно з одним з повної групи несумісних подій (гіпотез) H_i $(i\in\{1,2,\dots,n\})$, то середня ймовірність події *А* визначається за *формулою повної* (середньою) *ймовірності*:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A/H_i), \tag{9}$$

де $P(H_i)$ – ймовірність гіпотези H_i; $P(A/H_i)$ – умовна ймовірність події *А* при здійсненні гіпотези H_i.

Якщо відома апріорна ймовірність гіпотез $P(H_i)$ і відомо, що подія *А* відбулося, то апостеріорна ймовірність гіпотез обчислюється за *формулою Байєса*:

$$P(H_j/A)=\frac{P(H_j)\cdot P(A/H_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_j)}. \tag{10}$$

Приклад 9. На склад надходить продукція з трьох фабрик, при цьому частка продукції першої фабрики становить 20%, другою – 46%, третьою – 34%. Відомо, що середній відсоток нестандартних виробів для першої фабрики становить 3%, другою – 2%, третьою – 1%. Знайти ймовірність того, що: *а*) Навмання узятий виріб виявиться нестандартним; *б*) виріб виготовлений на першій фабриці, якщо він виявився нестандартним; *у*) виріб виготовлений на другій фабриці, якщо він виявився стандартним. *г*) Визначити, на якій фабриці найімовірніше було виготовлено виріб, якщо він виявився стандартним?

Розв'язання

а) Навмання узятий виріб може бути виготовлений або на першій фабриці (гіпотеза H_1), або на другій (гіпотеза H_2), або на третій (гіпотеза H_3). Всі гіпотези несумісні і складають повну групу. Ймовірність кожної гіпотези визначається приведенням процентної частки продукції відповідної фабрики в безрозмірну величину, тобто діленням заданої за умовами частки на 100%. Так, $P(H_1)= 0{,}2$; $P(H_2)= 0{,}46$; $P(H_3)= 0{,}34$. Аналогічно визначається умовна ймовірність події A (виріб є нестандартним): $P(A/H_1)= 0{,}03$; $P(A/H_2)= 0{,}02$; $P(A/H_3)= 0{,}01$. Тепер, використовуючи формулу (9), можна отримати шукану повну ймовірність події A:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A/H_i)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$
$$=0{,}2\cdot 0{,}03+0{,}46\cdot 0{,}02+0{,}34\cdot 0{,}01=0{,}0186\,.$$

б) Відомо, що подія A вже відбулося. Потрібно визначити апостеріорну ймовірність гіпотези H_1. Шукану ймовірність знайдемо за формулою Байєса:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_j)}=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}03}{0{,}0186}\approx 0{,}3226\,.$$

в) По умові завдання виріб виявився стандартним, тобто в прийнятих нами позначеннях відбулася подія $\overline{A}$. Необхідно знайти апостеріорну ймовірність гіпотези H_2.

За формулою Байєса: $P(H_2/\overline{A})=\dfrac{P(H_2)\cdot P(\overline{A}/H_2)}{P(\overline{A})}$

Події A і $\overline{A}$ є протилежними. З урахуванням (5) $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}0186=0{,}9814$. Аналогічного обчислюємо умовну ймовірність події за умови, що здійснилася гіпотеза H_2: $P(\overline{A}/H_2)=1-P(A/H_2)=1-0{,}02=0{,}98$.

Підставляючи знайдену ймовірність у формулу Байєса, отримаємо шукану ймовірність:

$$P(H_2/\overline{A}) = \frac{P(H_2)\cdot P(\overline{A}/H_2)}{P(\overline{A})} = \frac{0,46\cdot 0,98}{0,9814} \approx 0,4593.$$

г) Щоб визначити, на якій фабриці найімовірніше було виготовлено стандартний виріб, необхідно порівняти між собою апостеріорні ймовірності гіпотез: $P(H_1/\overline{A}), P(H_2/\overline{A}), P(H_3/\overline{A})$. Найбільша з цих ймовірностей визначає шукану фабрику. Одна з вказаних ймовірність була тільки що визначена, а саме: $P(H_2/\overline{A}) = 0,4593$. Аналогічно визначимо інші апостеріорні ймовірності гіпотез: $P(H_1/A) = 0,1977$, $P(H_3/A) = 0,3430$. Найбільша апостеріорна ймовірність відповідає другій гіпотезі. Отже, стандартний виріб найімовірніше був виготовлений на другій фабриці.

Повторення експерименту

Формула Бернуллі. Якщо робиться n незалежних випробувань, у кожному з яких подія *A* з'являється з однаковою ймовірністю *p*, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія *A* відбудеться рівно k разів (байдуже в якій послідовності), визначаться за формулою

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}. \qquad (11)$$

Локальна теорема Лапласа. Якщо робиться n незалежних випробувань, у кожному з яких подія *A* з'являється з однаковою ймовірністю *p*, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія *A* відбудеться рівно k разів (байдуже в якій послідовності), може бути оцінена (тим точніше, чим більше n) за формулою

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x). \qquad (12)$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гауса, або щільність стандартного нормального розподілу; $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ – аргумент функції Гауса; $q = (1-p)$ – ймовірність протилежної події.

У **Додатку А** наведена таблиця значень функції $\varphi(x)$ від позитивного аргументу *x*. Функція Гауса – парна, тому значення функції від негативного аргументу визначається як $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Інтегральна теорема Лапласа. Якщо робиться n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A з'являється з однаковою ймовірністю p, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться не менше рівно k_1 разів і не більше k_2 разів (байдуже в якій послідовності), може бути оцінена (тим точніше, чим більше n) за формулою

$$P_n(k_1,k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad (13)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ – функція Лапласа, або інтегральна функція стандартного нормального розподілу; $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ і $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ – аргументи інтегральної функції розподілу; $q = (1-p)$ – ймовірність протилежної події.

У **Додатку В** наведена таблиця значень функції $\Phi(x)$ від позитивного аргументу x. Функція Лапласа – непарна, тому значення функції від негативного аргументу визначаються як $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Найімовірніше число настання події. Якщо в кожному з n незалежних випробуваннях подія з'являється з однаковою ймовірністю p, то найімовірніше число настання події k_0 в цих випробуваннях (байдуже в якій послідовності) визначається за допомогою подвійної нерівності:

$$np + p - 1 \le k_0 \le np + p. \quad (14)$$

Приклад 10. Робиться 5 пострілів у мішень з імовірністю кожного влучення 0,7. Яка ймовірність того, що буде: *а*) точно 3 влучення; *б*) не менше 4 влучень; *в*) не більше 3 влучень.

Розв'язання

а) Проводиться n = 5 незалежних випробувань з постійною ймовірністю ($p = 0{,}7$) появи події в кожному з них. Ймовірність того, що буде точно k = 3 влучень, обчислюється за формулою Бернуллі (11):

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}7^3(1-0{,}7)^2 = 0{,}3087.$$

б) Подію A, яка полягає в тому, що при 5 пострілах буде не менше 4 влучень, можна розглядати як суму двох несумісних подій: B (4 влучення з 5 пострілів) і C (5 влучень з 5 пострілів). Ймовірності двох останніх подій визначаються за формулою Бернуллі:

$$P(B) = P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}7^4(1-0{,}7)^1 = 0{,}36015;$$

$$P(C) = P_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}7^5 (1-0{,}7)^0 = 0{,}16807 .$$

Шукану ймовірність визначимо за теоремою про ймовірність суми двох подій:

$$P(A) = P(B) + P(C) = 0{,}36015 + 0{,}16807 = 0{,}52822 .$$

б) Міркуючи так само, як і в попередній задачі, можна обчислити ймовірність події (не більше трьох влучень з п'яти пострілів) як суму ймовірностей чотирьох несумісних подій: $P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3)$. Проте задача вирішується простіше, якщо врахувати, що події A (не менше чотирьох влучень з п'яти пострілів) і $\overline{A}$ (не більше трьох влучень з п'яти пострілів) є протилежними. Тоді

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}52822 = 0{,}47178 .$$

Приклад 11. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде уражена: *а*) рівно 75 разів; *б*) не менше 75 разів.

Розв'язання

а) За умови задачі проводиться $n = 100$ незалежних випробувань з однаковою ймовірністю появи події (влучення в мішень) $p = 0{,}8$. Ймовірність влучення в мішень рівно 75 разів при 100 пострілах $\left(P_{100}(75)\right)$ теоретично можна обчислити за формулою Бернуллі. Проте при $n > 10$ користуватися формулою Бернуллі недоцільно із-за невиправдано великих обчислювальних витрат. Визначимо шукану ймовірність за допомогою локальної теореми Лапласа. Для цього заздалегідь обчислимо вираз:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}8)} = 4 ,$$

а потім аргумент функції Гауса:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{4} = -1{,}25 .$$

У **Додатку А** знайдемо значення функції $\varphi(1{,}25) = 0{,}1826$. Через парність функції Гауса $\varphi(-1{,}25) = \varphi(1{,}25) = 0{,}1826$. Остаточно, за локальною теоремою Лапласа $\left(P_n(m) = \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \right)$ знайдемо шукану ймовірність:

$$P_{100}(75m) = \frac{\varphi(-1.25)}{\sqrt{npq}} = \frac{0,1826}{4} = 0,0456.$$

б) Скористаємося інтегральною теоремою Лапласа при $n = 100$; $p = 0,8$; $q = 0,2$; $k_1 = 75$; $k_2 = 100$:

$$P_n(k_1, k_2) = P(75;100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{100 - 100 \cdot 0.8}{4}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 100 \cdot 0.8}{4}\right) = \Phi(5) - \Phi(-1,25).$$

З урахуванням того, що функція Лапласа є непарною функцією, останній вираз слід перетворити:

$$\Phi(5) - \Phi(-1,25) = \Phi(5) + \Phi(1,25),$$

а потім у **Додатку В** знайти відповідні значення функції. В результаті отримаємо:

$$P(75;100) = \Phi(5) - \Phi(-1,25) = 0.5 - 0,3944 = 0,8944.$$

Приклад 12. Ймовірність того, що пасажир запізниться на потяг, дорівнює 0,22. Знайти найімовірніше число тих, що запізняться на потяг, якщо загальне число пасажирів становить 855.

Розв'язання. Проводиться n = 855 незалежних випробувань з постійною ймовірністю (p = 0,02) появи події A (запізнення пасажира на потяг) в кожному з них. Найімовірніше число настання події A слід визначається за допомогою подвійної нерівності (14):

$$np + p - 1 \le k_o \le np + p;$$

$$855 \cdot 0,02 + 0,02 - 1 \le k_o \le 855 \cdot 0,02 + 0,02;$$

$$16,12 \le k_o \le 17,12.$$

Найімовірніше число настання подій – це ціла величина. У діапазоні (14), знаходиться одне ціле число, якщо тільки твір np не є цілим. Тому шукане число $k_o = 17$.

Приклад 13. Скільки потрібно узяти деталей, щоб серед них найімовірніше число стандартних деталей дорівнювало 50, якщо ймовірність вибору навмання бракованою деталі становить 0,1?

Розв'язання. Ймовірність того, що деталь є стандартною, визначимо як ймовірність протилежної події: $p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$. Для визначення шуканої величини n (загальна кількість деталей, серед яких найімовірніше знаходяться 50 придатних) скористаємося формулою найімовірнішого числа появ подій (14), підставивши в неї $k_0 = 50$ і $p = 0{,}9$:

$$n \cdot 0{,}9 + 0{,}9 - 1 \le 50 \le n \cdot 0{,}9 + 0{,}9 .$$

Розв'яжемо двосторонню нерівність відносно n:

$$\begin{cases} n \cdot 0{,}9 + 0{,}9 - 1 \le 50 , \\ 50 \le n \cdot 0{,}9 + 0{,}9 ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \cdot 0{,}9 \le 50{,}1 , \\ n \cdot 0{,}9 \le 49{,}1 ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \le 55{,}5 , \\ n \le 54{,}5 ; \end{cases}$$

$$54{,}5 \le n \le 55{,}5 .$$

Шукане рішення є цілою величиною, тому $n = 55$.

Змістовий модуль 2. Випадкові величини та математична статистика

Випадкові величини

Випадковою величиною називають величину, яка в результаті експерименту приймає заздалегідь невідоме значення.

Дискретною випадковою величиною називають випадкову величину, можливі значення якої належать доліченої множини (скінченої або нескінченої).

Неперервною випадковою величиною називають випадкову величину, можливі значення якої належать до Неперервної множини (обмеженої або необмеженої).

Закон розподілу – це вичерпна характеристика випадкової величини, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними ймовірностями.

Закон розподілу дискретної випадкової величини може бути заданий у вигляді *ряду розподілу* або *інтегральної функції розподілу*.

Ряд розподілу – таблиця, що складається з двох рядків. У першому рядку перераховуються всі можливі значення випадкової величини в порядку їх зростання, а в другій – відповідна ймовірність:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Властивість ряду розподілу для будь-якої дискретної випадкової величини:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{15}$$

Інтегральна функція розподілу випадкової величини X – це така функція $F(x)$, яка при кожному значенні свого аргументу x чисельно дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X опиниться менше значення аргументу x:

$$F(x) = P\{X < x\}. \tag{16}$$

Аналітичний запис інтегральної функції розподілу $F(x)$ має вигляд:

Закон розподілу Неперервної випадкової величини може бути заданий *інтегральній функції розподілу* (16) або *щільністю розподілу.*

Щільність розподілу ймовірності є першою похідною від інтегральною функції розподілу:

$$f(x) = \frac{dF}{dx}. \tag{17}$$

Властивості щільності розподілу:

$$f(x) \geq 0; \tag{18}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{19}$$

Інтегральна функція розподілу $F(x)$ може бути виражена через щільність розподілу (зворотне перетворення):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{20}$$

Властивості інтегральної функції розподілу:

$$F(-\infty) = 0; \tag{21}$$

$$F(\infty) = 1; \tag{22}$$

$$\text{якщо} \quad x_2 > x_1, \quad \text{то} \quad F(x_2) \geq F(x_1). \tag{23}$$

Ймовірність влучення Неперервної випадкової величини на задану ділянку $[\alpha,\beta)$:

$$P\{\alpha \le X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \qquad (24)$$

Основні числові характеристики:

математичне сподівання дискретної випадкової величини:

$$m_x = M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i ; \qquad (25)$$

математичне сподівання Неперервної випадкової величини:

$$m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx; \qquad (26)$$

дисперсія дискретної випадкової величини:

$$D_x = D[X] = \sum (x_i - m_{xl})^2 p_i ; \qquad (27)$$

дисперсія Неперервної випадкової величини:

$$D_x = D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_l)^2 p_i ; \qquad (28)$$

середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} ; \qquad (29)$$

другий початковий момент дискретної випадкової величини:

$$\alpha_2 = M[X^2] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i ; \qquad (30)$$

другий початковий момент Неперервної випадкової величини:

$$\alpha_2 = M[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx. \qquad (31)$$

Формула зв'язку дисперсії з другим початковим моментом і математичним очікуванням:

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2. \qquad (32)$$

Приклад 13. Схожість насіння оцінюється ймовірністю 0,8. Розглядається випадкова величина X – число насінин, що зійшли, серед п'яти посіяних. Визначити закон розподілу у вигляді ряду розподілу. Побудувати графік інтегральної функції розподілу $F(x)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення σ_x випадкової величини X. Знайти також імовірність влучення випадкової величини X в інтервал значень (-5; 3,5).

Розв'язання. Випадкова величина X в умовах цієї задачі може приймати одне з числових значень: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Для побудови ряду розподілу залишається визначити тільки відповідні ймовірності. У різних задачах ця ймовірності визначаються за різними методиками, розглянутими в попередніх розділах курсу. В умовах даної задачі найбільш доцільним способом визначення шуканих імовірностей є формула Бернуллі (11), в якій $n = 5$; $p = 0{,}8$. Підставляючи замість k послідовно всі можливі значення випадкової величини, отримаємо відповідні ймовірності: для $x_1 = 0$ – $p_1 = 0{,}00032$; для $x_2 = 1$ – $p_2 = 0{,}0064$; для $x_3 = 2$ – $p_3 = 0{,}0512$; для $x_4 = 3$ – $p_4 = 0{,}2048$; для $x_5 = 4$ – $p_5 = 0{,}4096$; для $x_6 = 5$ – $p_6 = 0{,}32768$. Шуканий ряд розподілу має вигляд:

xi	0	1	2	3	4	5
pi	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4086	0,32768

Ряд розподілу містить вичерпну інформацію про випадкову величину, тому його можна використовувати для знаходження відповідей на решту питань задачі. Зокрема – для побудови графіка інтегральної функції $F(x)$.

При побудові графіка $F(x)$ вісь абсцис розбивається можливими значеннями випадкової величини на $(n+1)$ діапазон: 1-й діапазон – $x^{I} \le 0$; 2-й – $0 < x^{II} \le 1$; 3-й – $1 < x^{III} \le 2$; 4-й – $2 < x^{IV} \le 3$; 5-й – $3 < x^{V} \le 4$; 6-й – $4 < x^{VI} \le 5$; 7-й – $3 < x^{VII}$. У кожному з таких діапазонів функція $F(x)$ має постійне значення (рис.1).

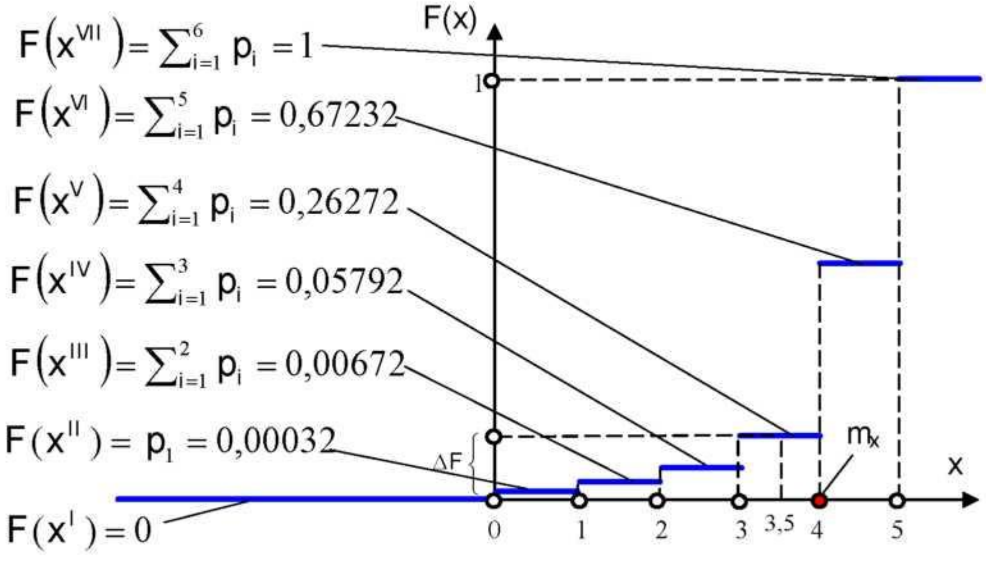

Рис.1. Графік інтегральної функції розподілу $F(x)$

Математичне сподівання m_x випадкової величини X визначається за формулою (25) при $n = 6$:

$$m_x = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 + x_6 p_6 =$$
$$= 0 \cdot 0{,}00032 + 1 \cdot 0{,}0064 + 2 \cdot 0{,}0512 + 3 \cdot 0{,}2048 +$$
$$+ 4 \cdot 0{,}4096 + 5 \cdot 0{,}32768 = 4 .$$

Математичне сподівання m_x є числовою характеристикою випадкової величини X, лежить в області визначення останньою і зображається крапкою на осі абсцис (див. рис.1).

Дисперсія D_x випадкової величини X визначається по формулі (27) при $n = 6$:

$$D_x = \sum_{i=1}^{6} (x_i - m_x)^2 p_i = (0-4)^2 0{,}00032 + (1-4)^2 0{,}0064 + (2-4)^2 0{,}0512 +$$
$$+ (3-4)^2 0{,}2048 + (4-4)^2 0{,}4096 + (5-4)^2 0{,}32768 = 0{,}8.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X визначається по формулі (29): $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0{,}8} \approx 0{,}8944$.

Ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал значень від $x1$ = -5 до x_2 = 2,7 можна визначити двома способами:

а) за допомогою графіка інтегральної функції $F(x)$:

$P(-5 < X < 3{,}5) = F(3{,}5) - F(-5) = 0{,}26272 - 0 = 0{,}26272$. На рис.1 цій ймовірності відповідає відрізок ΔF .

б) за допомогою основних теорем теорії ймовірності як ймовірність складної події:

$$P(-5 < X < 3{,}5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$
$$= 0{,}00032 + 0{,}0064 + 0{,}0512 + 0{,}2048 = 0{,}26272 .$$

Приклад 14. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \notin [0;1]; \\ cx & \text{при} \quad x \in [0;1]. \end{cases}$ Знайти значення постійної величини c, математичний вираз інтегральної функції розподілу $F(x)$. Побудувати графік щільності розподілу $f(x)$ і графік інтегральної функції розподілу $F(x)$. Визначити математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середнє квадратичне відхилення σ_x і ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (0; 0,5).

Розв'язання. Постійна величина c визначається за допомогою 2-ої властивості щільності розподілу (19). Обчислюється визначний інтеграл в нескінчених межах від заданої функції щільності розподілу $f(x)$ і прирівнюється одиниці. Отримане рівняння вирішується відносно постійної c.

Оскільки задана $f(x)$ – кусково-неперервна функція, то інтеграл від неї розпадається на три інтеграли:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{1} c\,x\,dx\int_0^1 cxdx + \int_{1}^{\infty} 0\cdot dx = 0 + \left.\frac{cx^2}{2}\right|_0^1 + 0 = \frac{c}{2}.$$

Прирівнюючи отриманий вираз одиниці, отримуємо рівняння $\frac{c}{2} = 1$, з якого $c = 2$.

З урахуванням знайденої константи щільність розподілу набуде вигляду:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \notin [0;1]; \\ 2x & \text{при} \quad x \in [0;1]. \end{cases}$$

Математичний вираз інтегральної функції розподілу $F(x)$ знаходиться за допомогою зворотного перетворення (20), при цьому перетворення здійснюється для кожного «відрізку» функції $F(x)$ окремо:

при $x \le 0$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\cdot dt = 0;$

при $0 < x \le 1$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot dt + \int_{0}^{x} 2t\cdot dt = 0 + t^2\Big|_0^x = x^2;$

при $1 < x$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot dt + \int_{0}^{1} 2t\cdot dt + \int_{1}^{x} 0\cdot dt = 0 + t^2\Big|_0^1 + 0 = 1.$

Остаточно отримуємо: $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0; \\ x^2, & \text{якщо} \quad 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 1. \end{cases}$

Графіки $f(x)$ і $F(X)$ будуються за методиками, відомими в «Математичному аналізі». В умовах цієї задачі шукані графіки $f(x)$ і $F(X)$ мають вигляд, показаний відповідно на рис.2 і рис.3.

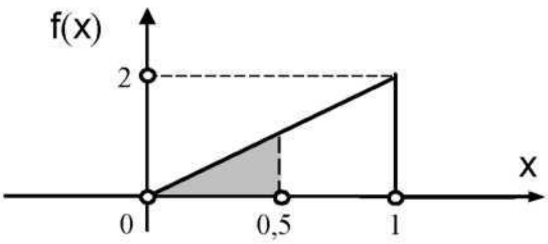

Рис.2. Графік щільності розподілу f(x)

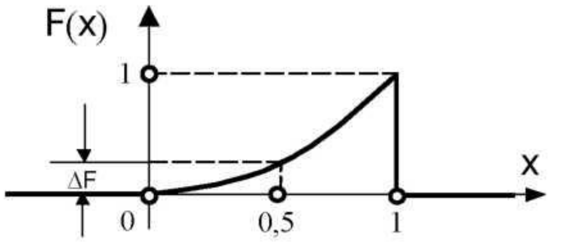

Рис.3. Графік інтегральної функції розподілу F(x)

Математичне сподівання m_x неперервної випадкової величини X визначається за формулою (26). При цьому інтеграл від кусково-неперервної функції $f(x)$ в нескінченних межах розпадається на три інтеграли відповідно до числа «кусків» підінтегральної функції:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} x \cdot 2x\, dx + \int_{1}^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx =$$

$$= 0 + \left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1 + 0 = \frac{2}{3}.$$

Дисперсію D_x неперервної випадкової величини X доцільно визначати за допомогою формули (32), для чого заздалегідь знаходять другий початковий момент за формулою (31):

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} x^2 \cdot 2x\, dx + \int_{1}^{\infty} x^2 \cdot 0 \cdot dx =$$

$$= 0 + \left.\frac{2x^4}{4}\right|_0^1 + 0 = \frac{1}{2};$$

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Середньоквадратичне відхилення випадкової величини X визначається за формулою (29):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\tfrac{1}{18}} = \tfrac{\sqrt{2}}{6} \approx 0{,}2357\,.$$

Ймовірність влучення неперервної випадкової величини в заданий інтервал значень від $x_1 = 0$ до $x_2 = 0{,}5$ можна визначити двома способами: *а*) за допомогою інтегральної функції; *б*) за допомогою щільності розподілу.

а) $P(0 < X < 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 0^2 = \tfrac{1}{4}$. На рис.3 цій ймовірності відповідає відрізок вісі ΔF .

б) $P(-5 < X < 3{,}5) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2xdx = x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{4}$. На рис.2 цій ймовірності відповідає площа, що виділена сірим фоном.

Приклад 15. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0; \\ c(1 - \cos x), & \text{якщо} \quad 0 < x \le \pi; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Знайти значення константи c, математичний вираз щільності розподілу $f(x)$. Побудувати графік інтегральної функції розподілу $F(x)$ і графік щільності розподілу $f(x)$. Визначити математичне сподівання m_x, дисперсію D_x, середнє квадратичне відхилення σ_x і ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $\left(\tfrac{\pi}{4};\ \tfrac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Постійна величина c визначається за допомогою 2-ої властивості інтегральної функції розподілу (22): $F(\infty) = 1$. В умовах задачі рівність (22) еквівалентна рівності $F(\pi) = 1$. Замінюючи в останній рівності $F(\pi)$ відповідним значенням, отримаємо рівняння

$$c(1 - \cos\pi) = 1\,,$$

з якого $c = 0{,}5$.

Щільність розподілу ймовірності $f(x)$ визначається як похідна від $F(x)$:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0; \\ 0{,}5 \cdot \sin x, & \text{якщо} \quad 0 < x \le \pi; \\ 0, & \text{якщо} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Графіки $f(x)$ і $F(X)$ будуються за методиками, відомими в «Математичному аналізі». В умовах даної задачі шукані графіки $F(X)$ і $f(x)$ мають вигляд, показаний відповідно на рис.4 і рис.5.

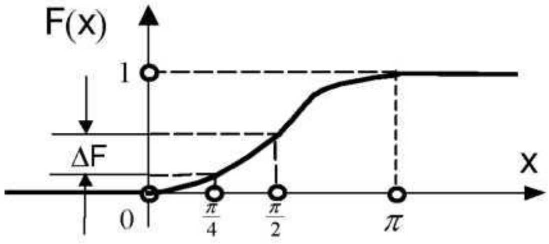

Рис.4. Графік інтегральної функції розподілу $F(x)$

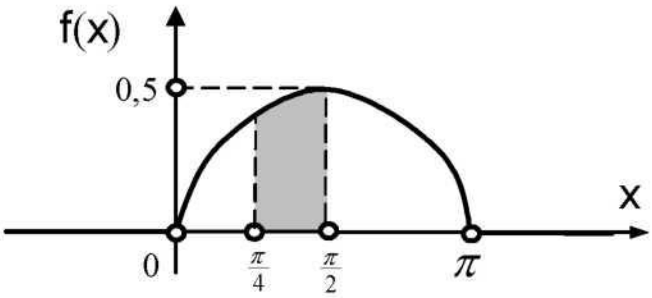

Рис.5. Графік щільності розподілу $f(x)$

Математичне сподівання m_x випадкової величини X (через симетричність закону розподілу) рівно $0{,}5\pi$. Цього ж значення можна набути за формулою (29). При цьому інтеграл від кусково-неперервної функції $f(x)$ в нескінченних межах розпадається на три інтеграли відповідно до числа «кусків» підінтегральної функції:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{\pi} x \cdot 0{,}5 \sin x\, dx + \int_{\pi}^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx =$$
$$= \int_{0}^{\pi} x \cdot 0{,}5 \sin x\, dx .$$

Інтегруючи по частинах (за формулою $\int_0^{\pi} UdV = UV\big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} VdU$), отримуємо

$$m_x = 0{,}5\int_0^{\pi} x \cdot \sin x\, dx = -0{,}5 x \cos x\big|_0^{\pi} - 0{,}5\int_0^{\pi} (-\cos x)\, dx =$$
$$= -0{,}5 \cos x\big|_0^{\pi} + 0{,}5 \sin x\big|_0^{\pi} = 0{,}5\pi .$$

Дисперсію D_x випадкової величини X доцільно визначати за допомогою формули (32), для чого спочатку визначають другий початковий момент: $\alpha_2 = 0{,}5\int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin x\,dx$. Інтегруючи двічі по частинах, знаходимо:

$$\alpha_2 = 0{,}5\int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin x\,dx = 0{,}5\left(\pi^2 - 4\right).$$

Тоді $D_x = \alpha_2 - m_x^2 = 0{,}5\left(\pi^2 - 4\right) - \left(0{,}5\pi\right)^2 \approx 0{,}4649$.

Середньоквадратичне відхилення випадкової величини X визначається по формулі (30):

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0{,}4649} \approx 0{,}6818.$$

Ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал значень від $x_1 = \frac{\pi}{4}$ до $x_2 = \frac{\pi}{2}$ можна визначити двома способами: *а*) за допомогою інтегральної функції; *б*) за допомогою щільності розподілу.

а) $P\left(\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) - 0{,}5\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}3536$. На рис.4 цій ймовірності відповідає відрізок вісі ΔF.

б) $P\left(\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{2}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 0{,}5\sin x\,dx = -0{,}5\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 0{,}3536$. На рис.5 цій ймовірності відповідає площа, виділена сірим фоном.

Тематика самостійної роботи

№, з/п	Назва теми	Кількість годин
1	**Тема 1. Елементи комбінаторики.** Правила суми та добутку в комбінаториці. Перестановки з n елементів. Розміщення з n по k елементів. Сполучення з n по k елементів. Перестановки, розміщення та сполучення з повтореннями.	8
2	**Тема 2. Простір елементарних подій. Класичне означення ймовірності.** Випадковий (стохастичний) експеримент. Елементарна подія та простір елементарних подій. Випадкова, вірогідна та неможлива подія. Незалежні та несумісні події. Операції над подіями. Статистичне та геометричне означення ймовірності.	6
3	**Тема 3. Основні теореми про ймовірності.** Протилежні події та їх ймовірності. Умовна ймовірність події. Ймовірність настання хоча б однієї події. Поняття гіпотез. Повна ймовірність. Формули Байеса.	6
4	**Тема 4. Повторні незалежні випробування.** Схема Бернуллі. Найімовірніше число настання події в схемі Бернуллі. Теорема Пуассона. Локальна та інтегральна теореми Муавра–Лапласа. Функції Гауса та Лапласа.	8
5	**Тема 5. Випадкові величини та їх числові характеристики.** Поняття випадкової величини. Дискретні та неперервні випадкові величини. Функція щільності розподілу неперервної випадкової величини та її властивості. Числові характеристики неперервної випадкової величини. Математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини.	6
6	**Тема 6. Закони розподілу випадкових величин.** Біноміальний і геометричний розподіли, а також розподіл Пуассона як приклади дискретних розподілів. Їх числові характеристики. Рівномірний та показниковий розподіли як приклади неперервних розподілів. Їх числові характеристики.	6

7	**Тема 7. Статистичний розподіл вибірки.** Предмет та задачі математичної статистики. Генеральна та вибіркова сукупності. Частоти та відносні частоти. Інтервальний статистичний розподіл. Гістограма частот. Емпірична функція розподілу.	8
8	**Тема 8. Вибіркові характеристики. Точкові та інтервальні оцінки параметрів розподілу.** Показники варіації. Асиметрія та ексцес. Оцінка параметрів розподілу. Точкові та інтервальні оцінки невідомих параметрів розподілу. Довірчі інтервали.	8
9	**Тема 9. Елементи теорії кореляції.** Прямі регресії. Рангова кореляція. Ранговий коефіцієнт кореляції Спірмена. Ранговий коефіцієнт кореляції Кендала.	10
10	**Тема 10. Перевірка статистичних гіпотез.** Статистичні гіпотези. Статистичний критерій. Критична область. Критичні точки. Рівень значущості. Перевірка статистичних гіпотез про дисперсії. Перевірка статистичних гіпотез про середні. Перевірка статистичних гіпотез про нормальний розподіл генеральної сукупності. Критерій узгодженості Пірсона.	8
Разом		**74**

Глосарій
(термінологічний словник)

Асиметрія – відношення центрального моменту третього порядку до кубу середньоквадратичного відхилення.

Безповторна вибірка – вибірка, при якій відібраний об'єкт після проведення обстежень не повертається у генеральну сукупність.

Внутрішньогрупова дисперсія – середнє арифметичне групових дисперсій, зважене за обсягами груп.

Вибірка – сукупність випадково відібраних з досліджуваної сукупності об'єктів (генеральної сукупності).

Вибіркове середнє – частка від ділення суми значень всіх елементів вибірки на число елементів вибірки.

Випадкова величина – величина, яка має невідоме значення до випробування (безліч альтернатив), а в результаті інформативного випробування може прийняти якесь певне або більш обмежене в альтернативах значення.

Генеральна сукупність – сукупність усіх досліджуваних об'єктів.

Гістограма – ступінчаста фігура, що складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють n – числу значень, які потрапляють у ці інтервали.

Групова дисперсія – дисперсія значень ознаки, що належать групі, щодо групової середньої.

Групове середнє – середнє арифметичне значень ознаки, що належать групі.

Двовимірна випадкова величина – випадкова величина, яка має два аргументи.

Дискретна випадкова величина – величина, яка приймає окремі ізольовані значення з певними ймовірностями.

Дисперсія випадкової величини – математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

Довірчий інтервал – інтервал, який покриває невідомий параметр *x* із заданою надійністю (ймовірністю) *p*.

Достовірна подія – подія, яка обов'язково відбудеться, якщо буде здійснена певна сукупність умов.

Ексцес розподілу – міра гостровершинності розподілу, величина, що визначається відношенням центрального моменту четвертого порядку до четвертого ступеня середнього квадратичного відхилення за вирахуванням трійки. Ексцес показує, як швидко зменшується щільність розподілу поблизу її максимального значення. Для нормального розподілу Гаусса ексцес дорівнює нулю.

Ефективна оцінка – така оцінка, яка при заданому обсязі вибірки *n* має найменшу можливу дисперсію.

Закон розподілу випадкової величини – відповідність між можливими значеннями випадкової величини і їх ймовірностями.

Інтервальна оцінка – оцінка, яка визначається кінцями інтервалу.

Імовірність – це відношення числа сприятливих результатів до загального числа можливих результатів експерименту.

Коефіцієнт варіації – виражене у відсотках відношення вибіркового середньоквадратичного відхилення до вибіркового середнього.

Коефіцієнт кореляції – відношення коваріації двох випадкових величин до добутку їхніх середньоквадратичних відхилень.

Конкуруюча гіпотеза – гіпотеза, яка суперечить основній.

Кореляційна залежність – залежність, при якій при зміні однієї з величин змінюється середнє значення іншої.

Кореляційний момент – характеристика зв'язку між двома випадковими величинами.

Критерій Стьюдента – спрямований на оцінку відмінностей величин середніх і двох вибірок X та Y, які розподілені за нормальним законом. Одним з головних достоїнств критерію є широта його застосування. Він може бути використаний для зіставлення середніх у зв'язаних і незв'язних вибірках, причому вибірки можуть бути не рівні за величиною.

Критична область – сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу відкидають.

Математичне сподівання – число, щодо якого стабілізується середнє арифметичне можливих значень випадкової величини при досить великій кількості випробувань.

Міжгрупова дисперсія – дисперсія групових середніх відносно загальної середньої.

Метод найменших квадратів – завдання полягає у знаходженні коефіцієнтів функціональної залежності досліджуваних змінних величин, при яких забезпечується мінімальна дисперсія різниці вибіркових значень і функції, якою апроксимують стохастичну залежність досліджуваних змінних. Тобто, при заданих a й b сума квадратів відхилень експериментальних даних від знайденої прямої буде найменшою.

Медіана – варіанта ряду, яка ділить варіаційний ряд на рівні за об'ємом частини.

Мода – варіанта ряду, яка має найбільшу частоту.

Моменти випадкових величин – характеристики випадкових величин, що визначають математичне сподівання k– го ступеня відхилення випадкової величини.

Неперервна випадкова величина – величина, що приймає значення, які як завгодно мало відрізняються один від одного.

Незміщена оцінка – оцінка *x*, математичне сподівання якої дорівнює оцінюваному параметру *x*.

Нульова гіпотеза – сновна висунута гіпотеза.

Повторна вибірка – вибірка, при якій відібраний об'єкт повертається після проведення обстеження назад у генеральну сукупність.

Полігон частот – ламана лінія, відрізки якої з'єднують точки (x_i, n_i).

Виробляє функція – функція, яка визначає ймовірність настання події при різних можливостях появи у кожному випробуванні.

Розмах варіювання *R* – різниця між найбільшою і найменшою варіантами.

Регресія – уявлення однієї випадкової величини як функції іншої.

Статистична гіпотеза – гіпотеза (припущення) про вид невідомого розподілу або параметри невідомого розподілу.

Статистичний критерій – випадкова величина, що служить для перевірки нульової гіпотези.

Статистичний розподіл вибірки – перелік варіант і відповідних їм частот або відносних частот.

Стохастична залежність – залежність, при якій зміна однієї з величин тягне за собою зміну іншої.

Теорема Лапласа – визначення ймовірності настання події в k вимірах з n (при великих k і n).

Теорія ймовірностей – наука, що вивчає загальні закономірності випадкових явищ масового характеру.

Точкова оцінка – оцінка, яка визначається одним числом.

Умовна ймовірність – ймовірність настання події, пов'язана з додатковими умовами.

Формула Байєса – визначення апостеріорної (післядослідної) ймовірності на основі апріорної (додослідної) на основі проведення експерименту.

Формула Бернуллі – визначення ймовірності настання події у k вимірах з n.

Функція розподілу – функція, яка визначає ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше за x.

Характеристики положення – характеристики, що визначають найбільш можливі значення випадкової величини.

Характеристики розсіювання – характеристики, що визначають розкид можливих значень випадкової величини.

Центральна гранична теорема – теорема, яка доводить, що підсумовування великого числа випадкових величин з різними законами розподілу призводить в результаті до нормального розподілу.

Щільність розподілу ймовірностей – ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення на зазначеному інтервалі.

ОРІЄНТОВНИЙ ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДО ЕКЗАМЕНУ

1. Правила суми та добутку в комбінаториці.
2. Перестановки з n елементів.
3. Розміщення з n по k елементів.
4. Сполучення з n по k.
5. Перестановки, розміщення та сполучення з повтореннями.
6. Випадковий (стохастичний) експеримент. Елементарна подія та простір елементарних подій.
7. Випадкова, вірогідна та неможлива подія. Незалежні та несумісні події. Операції над подіями.
8. Класичне означення ймовірності.
9. Статистичне означення ймовірності.
10. Геометричне означення ймовірності.
11. Властивості ймовірності.
12. Обчислення ймовірностей за класичним означенням.
13. Протилежні події та їх ймовірності. Умовна ймовірність події.
14. Теореми додавання ймовірностей.
15. Теореми множення ймовірностей.
16. Ймовірність настання хоча б однієї події.
17. Поняття гіпотез. Повна ймовірність.
18. Формули Байеса.
19. Схема Бернуллі.
20. Найімовірніше число настання події в схемі Бернуллі.
21. Теорема Пуассона. Локальна та інтегральна теореми Муавра–Лапласа.
22. Функції Гауса та Лапласа.
23. Поняття випадкової величини. Дискретні та неперервні випадкові величини.
24. Закон розподілу дискретної випадкової величини.
25. Функція розподілу та її властивості.

26. Числові характеристики дискретної випадкової величини.
27. Математичне сподівання та його властивості.
28. Дисперсія та її властивості.
29. Середнє квадратичне відхилення.
30. Функція щільності розподілу неперервної випадкової величини та її властивості.
31. Числові характеристики неперервної випадкової величини.
32. Математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини.
33. Біноміальний розподіл.
34. Геометричний розподіл.
35. Розподіл Пуассона.
36. Рівномірний розподіл.
37. Показниковий розподіл.
38. Нормальний розподіл.
39. Властивості нормально розподілених випадкових величин.
40. Предмет математичної статистики. Задачі математичної статистики.
41. Генеральна та вибіркова сукупності.
42. Варіанти та варіаційний ряд.
43. Частоти та відносні частоти.
44. Статистичний розподіл.
45. Полігон частот.
46. Гістограма частот.
47. Емпірична функція розподілу.
48. Вибіркові характеристики.
49. Середнє вибіркове.
50. Вибіркова дисперсія.
51. Закон розподілу ймовірностей функції двох випадкових аргументів.
52. Числові характеристики функцій випадкових аргументів (математичні сподівання, дисперсії, кореляційний момент).

53. Приклади випадкових величин, що мають гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей.
54. Закон рівномірного розподілу ймовірностей випадкової величини.
55. Поняття статистичної оцінки.
56. Визначте суть методу Монте Карло.
57. Дайте визначення характеристичної функції, які властивості вона має.
58. Сформулюйте центральну граничну теорему.
59. Які події називають незалежними?
60. Сформулюйте теореми Муавра-Лапласа та теорему Пуассона.

Список використаної літератури.

1. Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч.-метод. посіб., 5-те вид. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська, О. К. Лопатін. – К . : Центр навчальної літератури, 2017. – 424 с.
2. Валєєв К. Г. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навч. посіб. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2005. – 334 с.
3. Волощенко А. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч.-метод. посібник для сам. вивчення дисц. / А. Б. Волощенко, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2003. – 256 с.
4. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов ; за ред. Г.О. Михаліна. – К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. – 336 с.
5. Зайцев Є. П. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч. посіб. / Є. П. Зайцев. – К. : Алерта, 2017. – 440 с.
6. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач : Навч. посіб. / Г. І. Кармелюк. – К. : Центр учбової літератури, 2007. – 576 с.
7. Кушлик-Дивульська О. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. / О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабалюк.– Київ, НТУУ «КПІ», 2012. – 220 с.
8. Мамчич Я.М. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч. – метод. посібник / Я. М. Мамчич. – Луцьк: ПП. Іванюк В.П., 2018. – 164 с.
9. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник / П. С. Сеньо. – К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 448 с.