Первісна функції та визначений інтеграл

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$, C – довільна стала
0	C
1	$x + C$
x^{α}, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$

Властивості інтегралів:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C$$

1) $\int (f \pm g)\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$

2) $\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

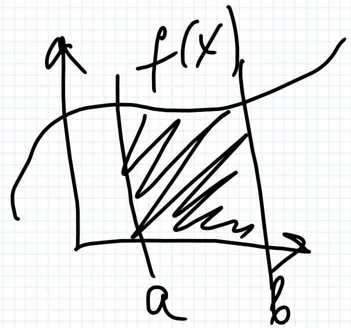
3) $\int f(kx)\,dx = \frac{1}{k} \int f(kx)\,dx$

2) $\int 2\cos x\,dx = 2 \int \cos x\,dx$

3) $\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2} \int \cos(2x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ – формула Ньютона-Лейбніца

площа – число



Яка з наведених функцій є первісною для функції $f(x) = 2 + \sin 2x$?

А $F(x) = 2x - \frac{\cos 2x}{2}$

Б $F(x) = 2x + \frac{\cos 2x}{2}$ –

В $F(x) = 2x + 2\cos 2x$ –

Г $F(x) = 2\cos 2x$ –

Д $F(x) = 2x - \cos 2x$ –

$$\int (2+\sin 2x)dx = \int 2dx + \int \sin 2x\, dx =$$

$$= 2\int 1dx + \int \sin 2x\, dx = 2\cdot x + \frac{1}{2}(-\cos 2x) + C =$$

$$= 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$$

Завдання 27 з 31

Функція $F(x) = \overset{C}{5x^4 - 1}$ є первісною функції $f(x)$. Укажіть функцію $G(x)$, яка також є первісною функції $f(x)$

А —	Б —	В —	Г +	Д —
$G(x) = x^5 - x$	$G(x) = 5x^4 - x$	$G(x) = 20x^3$	$G(x) = 5x^4 + \overset{C}{1}$	$G(x) = x^4 - 5$

$F(x) + C$

$\underbrace{5x^4}_{f(x)} - 1$

$(-1)' = 0$

Завдання 14 з 31

Визначте для функції $f(x) = 2x + 2$ первісну, графік якої проходить через точку (1; 4).

x y

C – ?

А $F(x) = 2x^2 + 2x$

Б $F(x) = x^2 + 2x + 1$

В $F(x) = x^2 + 2x + 2$

Г $F(x) = x^2 + 2x - 4$

Д $F(x) = 2x^2 + x + 1$

$$\int(2x+2)\,dx = \int 2x\,dx + \int 2\,dx = 2\int x\,dx + 2\int dx = \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} + 2x + C$$

$$F(x) = x^2 + 2x + C$$

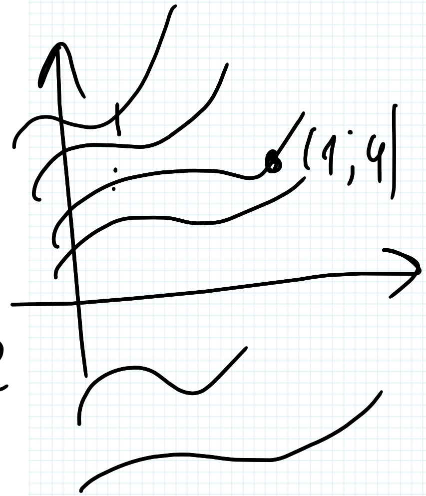
$$4 = 1^2 + 2\cdot 1 + C$$

$$4 = 1 + 2 + C$$

$$4 = 3 + C$$

C – ?

$C = 1$



$$\boxed{F(x) = x^2 + 2x + 1}$$

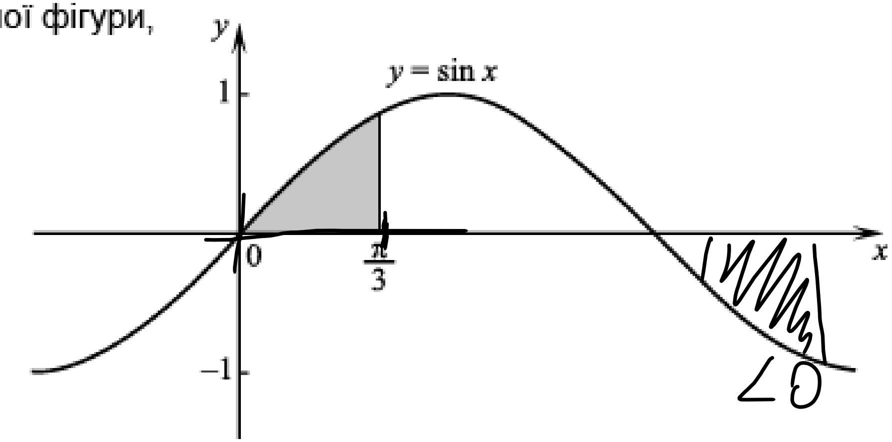
Використовуючи формулу Ньютона – Лейбніца, обчисліть $\int_1^2 6x^2dx$.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

А	Б	В	Г	Д
12	14	18	22	42

$$\int_1^2 6x^2dx = 6\int_1^2 x^2dx = \overset{2}{\cancel{6}} \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}}\Big|_1^2 = 2x^3\Big|_1^2 = 2\cdot 2^3 - 2\cdot 1^3 = 16 - 2 = 14$$

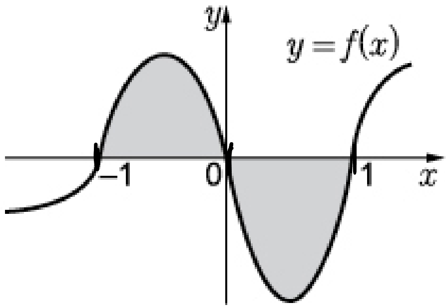
Обчисліть площу зафарбованої фігури, зображеної на рисунку.



А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{2}$	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\int_0^{\pi/3} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/3} = -\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{=\frac{1}{2}} - \Big(-\underbrace{\cos 0}_{=1}\Big) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

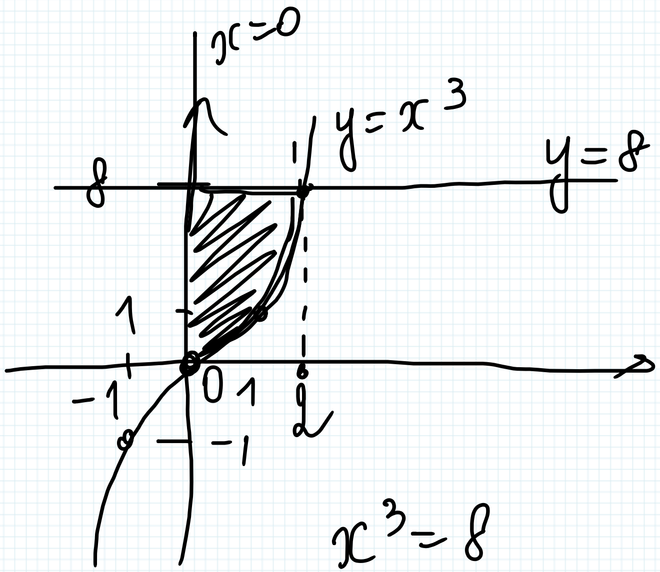
На рисунку зображено графік неперервної функції $y = f(x)$. Укажіть формулу для обчислення площі зафарбованої фігури.



А —	Б —	В —	Г —	Д +
$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$	$2\int_{0}^{1} f(x)\,dx$	$\int_{0}^{1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$	$2\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$	$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{1} f(x)\,dx$

Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

Від верхн. ф-ї — нижню ф-ю



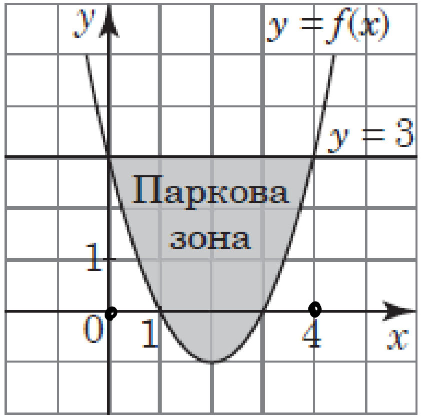
$$x^3 = 8$$
$$x = 2$$

$$\int_0^2 (8 - x^3)\,dx = \int_0^2 8\,dx - \int_0^2 x^3\,dx =$$

$$= \left(8 \cdot x - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \left(8 \cdot 2 - \frac{2^4}{4}\right) -$$

$$- \left(8 \cdot 0 - \frac{0^4}{4}\right) = 16 - \frac{\cancel{16}^{4}}{\cancel{4}_{1}} = 12 \text{ (кв. од.)}$$

У прямокутній системі координат на площині зображено план паркової зони, що має форму фігури, обмеженої графіками функцій $y = f(x)$ і $y = 3$ (див. рисунок). Укажіть формулу для обчислення площі S цієї фігури.



А $S = \int_{-1}^{3}(f(x) - 3)dx$ —

Б $S = \int_{-1}^{3}(3 - f(x))dx$ —

В $S = \int_{0}^{4}(f(x) + 3)dx$ —

Г $S = \int_{0}^{4}(f(x) - 3)dx$ —

Д $S = \int_{0}^{4}(3 - f(x))dx$ +