

Міністерство освіти і науки України

С.С. ЗАБАРА, К.Х. ЗЕЛЕНСЬКИЙ,  
В.М. ІГНАТЕНКО

**КОМП'ЮТЕРНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ  
СИГНАЛІВ ТА ЗОБРАЖЕНЬ**

КИЇВ 2007

УДК 518.12(07)  
З-24.

Забара С.С. Комп'ютерні методи обробки сигналів та зображень/Забара С.С.,  
Зеленський К.Х., Ігнатенко В.М.– К:

2007. – с., іл.  
ISBN

Для студентів вищих навчальних закладів, а також інженерно-технічних фахівців.  
Іл. Бібліогр. найм.

Гриф надано Міністерством освіти і науки України. Лист № 14/18-Г-52 від 18.05.2006.

Рецензенти:

ISBN

©С.С. Забара, К.Х. Зеленський, В.М. Ігнатенко.

©Н

---

## Зміст

---

<b>Цифрова обробка сигналів</b>	<b>8</b>
<b>1 Дискретні лінійні динамічні системи</b>	<b>10</b>
1.1 Загальні відомості . . . . .	10
1.2 Проектування цифрових систем керування . . . . .	11
<b>2 Перетворення та обробка сигналів</b>	<b>14</b>
2.1 Неперервні сигнали . . . . .	14
2.1.1 Класифікація функцій . . . . .	15
2.1.1.1 Деякі властивості функцій . . . . .	15
2.1.1.2 Типові впливи на систему . . . . .	16
2.2 Ряд Фур'є й інтегральне перетворення Фур'є . . . . .	17
2.2.1 Властивості перетворення Фур'є . . . . .	19
2.2.2 Характеристики спектрального подання функцій . . . . .	20
2.2.3 Застосування інтегрального перетворення Лапласа . . . . .	21
2.3 Дискретні сигнали . . . . .	23
2.3.1 Квантування сигналів . . . . .	24
2.3.2 Математичний опис дискретних сигналів . . . . .	24
2.4 Лінійні системи зі сталими параметрами . . . . .	25
2.4.1 Різницеві рівняння . . . . .	26
2.4.2 Частотна характеристика . . . . .	27
2.4.3 Дискретний ряд Фур'є . . . . .	28
2.4.4 Зв'язок між неперервними та дискретними системами . . . . .	29
2.5 Застосування перетворення Лапласа . . . . .	30
2.5.1 Фіксатор . . . . .	31
2.6 $Z$ -перетворення . . . . .	31
2.6.1 Властивості $Z$ -перетворення . . . . .	33
2.6.2 Обернене $Z$ -перетворення . . . . .	34
2.7 Дискретна передаточна функція . . . . .	34
2.7.1 Побудова дискретних моделей на основі неперервних моделей . . . . .	36
2.8 Дискретне перетворення Фур'є . . . . .	37
2.8.1 Теорема відліків . . . . .	38
2.8.2 Дискретне перетворення Фур'є . . . . .	40
2.8.2.1 Властивості ДПФ . . . . .	41
2.8.2.2 Обчислення дискретної згортки . . . . .	43
2.8.3 Швидке перетворення Фур'є . . . . .	45
2.8.4 Алгоритм ШПФ з основою 2 (алгоритм Кулі-Тьюкі) . . . . .	47
2.8.4.1 Проріджування за часом . . . . .	51
2.8.4.2 Проріджування за частотою . . . . .	53
2.9 Дискретне перетворення Фур'є типових сигналів . . . . .	53
2.9.1 Обчислення згортки . . . . .	56
2.10 Клас ортогональних функцій . . . . .	57

2.10.1	Визначення частоти . . . . .	58
2.10.2	Функції Радемахера та Хаара . . . . .	58
2.10.2.1	Алгоритм для перетворення Хаара . . . . .	60
2.10.3	Функції Уолша . . . . .	60
2.10.3.1	Представлення сигналів у вигляді функцій Уолша . . . . .	62
2.10.3.2	Перетворення Уолша–Адамара . . . . .	63
2.10.3.3	Швидке перетворення Уолша–Адамара . . . . .	64
2.10.4	Спектр ПУА з упорядкуванням за Адамаром . . . . .	66
2.11	Дискретне косинусне перетворення . . . . .	67
2.12	Стискання даних . . . . .	68
2.12.1	Пошук оптимального перетворення . . . . .	68
2.12.2	Дисперсійний критерій . . . . .	70
2.12.3	Основні поняття стискання зображень . . . . .	70
2.12.4	Приклади стискання зображень . . . . .	72
2.13	Узагальнена вінеровська фільтрація . . . . .	74
2.13.1	Неперервна оцінка форми сигналу . . . . .	74
2.13.2	Цифрова вінеровська фільтрація . . . . .	77
2.13.2.1	Визначення матриці фільтру . . . . .	78
<b>Цифрові фільтри</b>		<b>80</b>
<b>3</b>	<b>Вступ в цифрову фільтрацію</b>	<b>81</b>
3.0.3	Імпульсна характеристика фільтра . . . . .	82
3.0.4	Передаточна функція фільтра . . . . .	83
3.0.5	Частотні характеристики фільтрів . . . . .	86
3.0.6	Фазова характеристика та характеристика групового часу . . . . .	87
3.0.7	Перетворення Гільберта . . . . .	89
3.1	Вимоги до побудови фільтрів . . . . .	91
3.2	Форми реалізації цифрових фільтрів . . . . .	91
3.3	Критерії стійкості цифрових фільтрів . . . . .	94
3.3.0.1	Методи забезпечення стійкості систем . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Нерекурсивні фільтри</b>	<b>98</b>
4.1	Характеристики нерекурсивних фільтрів . . . . .	98
4.2	Нерекурсивні фільтри з лінійною ФЧХ . . . . .	101
4.3	Основні етапи проектування нерекурсивних фільтрів . . . . .	102
4.4	Формулювання задач апроксимації . . . . .	103
4.4.1	Критерії апроксимації . . . . .	103
4.4.2	Вибіркові фільтри з лінійною ФЧХ . . . . .	104
4.4.3	Фільтри із рівними смугами з лінійною ФЧХ . . . . .	104
4.4.4	Мінімально-фазові фільтри . . . . .	105
4.5	Методи вирішення задач апроксимації . . . . .	105
4.5.1	Метод зважування . . . . .	106
4.5.1.1	Прямокутне вікно . . . . .	108
	Вікно Бартлета. . . . .	108
	Вікно Хеннінга. . . . .	108
4.5.1.2	Вікно Хеммінга . . . . .	108
4.5.1.3	Вікно Блекмана . . . . .	109
4.5.1.4	Вікно Кайзера . . . . .	110
4.5.2	Особливості використання метода зважування . . . . .	114
4.5.3	Метод частотної вибірки . . . . .	114
4.5.4	Розв'язання задачі оптимізації . . . . .	118

4.5.5	Метод найменших квадратів . . . . .	121
4.5.6	Апроксимація із рівновеликими пульсаціями . . . . .	122
4.5.7	Метод найкращої рівномірної (чебишовської) апроксимації . . . . .	123
4.5.8	Вирішення задачі чебишовської апроксимації для фільтра з лінійною ФЧХ . . . . .	125
4.5.9	Вирішення задачі чебишовської апроксимації для мінімально-фазового фільтра . . . . .	126
4.5.10	Порівняння можливостей фільтрів з лінійною ФЧХ та мінімально-фазових фільтрів . . . . .	127
4.5.11	Порівняння методів вирішення апроксимаційних задач . . . . .	128
<b>5</b>	<b>Рекурсивні фільтри</b> . . . . .	<b>129</b>
5.1	Властивості рекурсивних фільтрів . . . . .	129
5.2	Методи проектування цифрових рекурсивних фільтрів . . . . .	138
5.3	Метод аналогового прототипу . . . . .	140
5.3.1	Апроксимація квадрата модуля передаточної функції . . . . .	141
5.3.1.1	Апроксимація по Баттерворту . . . . .	141
	Основні властивості фільтра Баттерворта. . . . .	141
	Передаточна функція . . . . .	142
5.3.1.2	Апроксимація по Чебишову . . . . .	145
	Основні властивості фільтра Чебишова . . . . .	146
	Передаточна функція. . . . .	148
5.3.2	Апроксимація по Бесселю . . . . .	151
5.3.2.1	Передаточна функція. . . . .	151
5.3.2.2	Перехідні фільтри . . . . .	154
5.3.3	Частотні перетворення для рекурсивних фільтрів . . . . .	155
	Перетворення НЧФ $\rightarrow$ НЧФ . . . . .	155
	Перетворення НЧФ $\rightarrow$ СФ . . . . .	156
	Перетворення НЧФ $\rightarrow$ РФ . . . . .	157
	Перетворення НЧ $\rightarrow$ ВЧ . . . . .	159
	Частотні перетворення для цифрових фільтрів . . . . .	159
5.4	Методи дискретизації аналогових фільтрів . . . . .	160
5.4.1	Метод відображення диференціалів . . . . .	160
5.4.2	Метод інваріантного перетворення імпульсної характеристики . . . . .	163
5.4.3	Метод білінійного $z$ -перетворення . . . . .	167
5.4.4	Метод узгодженого $z$ -перетворення . . . . .	168
5.4.5	Приклади проектування цифрових фільтрів . . . . .	168
5.5	Прямі методи проектування цифрових фільтрів . . . . .	175
5.5.1	Розрахунок цифрових фільтрів по квадрату модуля передаточної функції . . . . .	175
5.5.2	Розрахунок цифрових фільтрів у часовій області . . . . .	177
5.6	Проектування рекурсивних цифрових фільтрів на основі методів оптимізації . . . . .	177
<b>6</b>	<b>Двовимірні перетворення</b> . . . . .	<b>179</b>
6.1	Вступ . . . . .	179
6.2	Математичне представлення . . . . .	181
6.2.1	Представлення зображення в ортогональному базисі . . . . .	181
6.3	Кодування зображень . . . . .	182
6.3.1	Просторове кодування зображень . . . . .	182
6.3.2	Кодування зображень за допомогою перетворень . . . . .	183
6.4	Реставрування оригіналу . . . . .	185

<b>7</b>	<b>Багатовимірні сигнали та системи</b>	<b>186</b>
7.1	Двовимірні дискретні сигнали . . . . .	186
7.1.1	Деякі особливі послідовності . . . . .	186
7.1.2	Розділимі послідовності . . . . .	188
7.1.3	Послідовності скінченної протяжності . . . . .	189
7.1.4	Періодичні послідовності . . . . .	189
7.2	Багатовимірні системи . . . . .	190
7.2.1	Лінійні системи . . . . .	191
7.2.2	Опорні області . . . . .	194
7.3	Характеристики сигналів та систем у частотній області . . . . .	195
7.3.1	Частотний відгук двовимірної ЛІЗ-системи . . . . .	195
7.3.2	Визначення імпульсного відгуку по частотному відгуку . . . . .	197
7.3.3	Деякі властивості двовимірних перетворень Фур'є . . . . .	200
7.4	Дискретизація неперервних двовимірних сигналів . . . . .	201
7.4.1	Періодична дискретизація по прямокутному растру . . . . .	201
7.4.2	Періодична дискретизація при довільному растрі дискретизації . . . . .	204
7.4.3	Порівняння прямокутної та гексагональної дискретизації . . . . .	207
<b>8</b>	<b>Цифрова обробка зображень</b>	<b>209</b>
8.1	Математичний опис неперервних зображень . . . . .	209
8.1.1	Представлення неперервних зображень . . . . .	209
8.1.1.1	Сингулярні оператори . . . . .	210
8.1.2	Двовимірне перетворення Фур'є . . . . .	212
8.1.2.1	Властивості перетворення Фур'є . . . . .	213
8.1.3	Імовірнісний опис неперервних зображень . . . . .	215
8.1.4	Двовимірні перетворення . . . . .	217
8.1.5	Двовимірні дискретні перетворення . . . . .	218
8.1.5.1	Двовимірне перетворення Фур'є . . . . .	219
8.1.5.2	Косинусні перетворення . . . . .	220
8.1.5.3	Перетворення Карунена–Лоева . . . . .	222
8.2	Дискретизація та відновлення неперервних зображень . . . . .	223
8.2.1	Процеси дискретизації та відновлення зображень . . . . .	224
8.2.1.1	Дискретизація детермінованих зображень . . . . .	224
8.2.1.2	Дискретизація випадкових зображень . . . . .	226
8.3	Реальні системи дискретизації зображень . . . . .	228
8.3.1	Вплив форми дискретизуючого імпульсу . . . . .	228
8.4	Реальні системи відновлення зображень . . . . .	229
8.4.1	Інтерполяційні функції . . . . .	230
<b>9</b>	<b>Дискретний фур'є-аналіз багатовимірних сигналів</b>	<b>231</b>
9.1	Представлення прямокутно-періодичних послідовностей у вигляді дискретних рядів Фур'є . . . . .	231
9.1.1	Властивості дискретного перетворення Фур'є . . . . .	235
9.1.2	Циклічна згортка . . . . .	236
9.2	Обчислення ДПФ . . . . .	239
9.2.1	Пряме обчислення . . . . .	239
9.2.2	Алгоритм швидкого перетворення Фур'є по векторній основі . . . . .	240
9.2.3	Алгоритм ШПФ із гексагональною дискретизацією . . . . .	242
<b>10</b>	<b>Синтез та реалізація двовимірних СІХ-фільтрів</b>	<b>246</b>
10.1	Реалізація СІХ-фільтрів . . . . .	247
10.1.1	Пряма згортка . . . . .	247

10.1.2	Реалізація СІХ-фільтрів за допомогою дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) . . . . .	247
10.2	Синтез СІХ-фільтрів із використанням вікон . . . . .	248
10.2.1	Вибір функції вікна . . . . .	249
10.2.2	Приклад синтезу . . . . .	250
10.3	Синтез оптимальних СІХ-фільтрів . . . . .	251
10.3.1	Синтез за методом найменших квадратів . . . . .	252
10.3.2	Синтез СІХ-фільтрів із нульовою фазою та рівновеликими пульсаціями . . . . .	253
10.3.3	Синтез СІХ-фільтрів із використанням трансформацій . . . . .	254
10.4	Вправи . . . . .	255
<b>11</b>	<b>Багатовимірні рекурсивні фільтри</b>	<b>257</b>
11.1	Різницеві рівняння скінченного порядку . . . . .	257
11.2	Класичні схеми двовимірних НІХ-фільтрів . . . . .	258
11.3	Ітераційні методи реалізації двовимірних НІХ-фільтрів . . . . .	259
11.3.1	Базова ітераційна схема . . . . .	259
11.3.2	Узагальнення ітераційної схеми . . . . .	261
11.4	Синтез в просторовій області . . . . .	262
11.4.1	Метод Шенкса . . . . .	264
11.4.2	Ітеративний метод синтезу із попередньою фільтрацією . . . . .	265
11.5	Синтез у частотній області . . . . .	266
11.5.1	Алгоритм синтезу по амплітуді та квадрату амплітуди . . . . .	266
11.5.2	Синтез НІХ-фільтра із нульовою фазою в частотній області . . . . .	266
11.6	Вправи . . . . .	268
	<b>Література</b>	<b>269</b>

---

## Цифрова обробка сигналів

---

Теорія цифрової обробки сигналів в основному спирається на теорію дискретних лінійних систем зі сталими параметрами. Основними напрямками використання методів цифрової обробки являються цифрова фільтрація та спектральний аналіз. До цифрових фільтрів відносяться фільтри зі скінченною імпульсною характеристикою (КІХ-фільтри) та із нескінченною імпульсною характеристикою (БІХ-фільтри).

Спектральний аналіз можна виконувати шляхом обчислення спектрів за допомогою дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) або шляхом обчислення спектрів із застосуванням статистичних методів, наприклад, при аналізі випадкових сигналів (зокрема, шуму квантування, що виникає в цифрових системах). На практиці при спектральному аналізі, як правило, використовується швидке перетворення Фур'є (ШПФ) та методика обчислення швидкої згортки, що ґрунтується на ШПФ.

Двовимірною обробкою сигналів є порівняно молодого галузю і може ґрунтуватись на двовимірному ДПФ.

Іншими аспектами цифрової обробки сигналів є важливі проблеми побудови та застосування цифрових систем. Майже всі теоретичні положення стосовно проектування цифрових фільтрів та спектроаналізаторів виявляються безкорисними, якщо не буде чіткого розуміння проблем, що виникають внаслідок обмежень точності обчислень під час практичної побудови цих систем на основі ЕОМ або у вигляді спеціалізованих пристроїв. Отже, проблеми побудови систем у першу чергу пов'язані з математичними питаннями квантування в дискретних системах, причому залежно від того, як будується система – на основі ЕОМ або у вигляді спеціалізованих пристроїв – важливо уявляти переваги та недоліки кожного з цих варіантів реалізації.

На рис. 1 наведено основні розділи цифрової обробки сигналів.



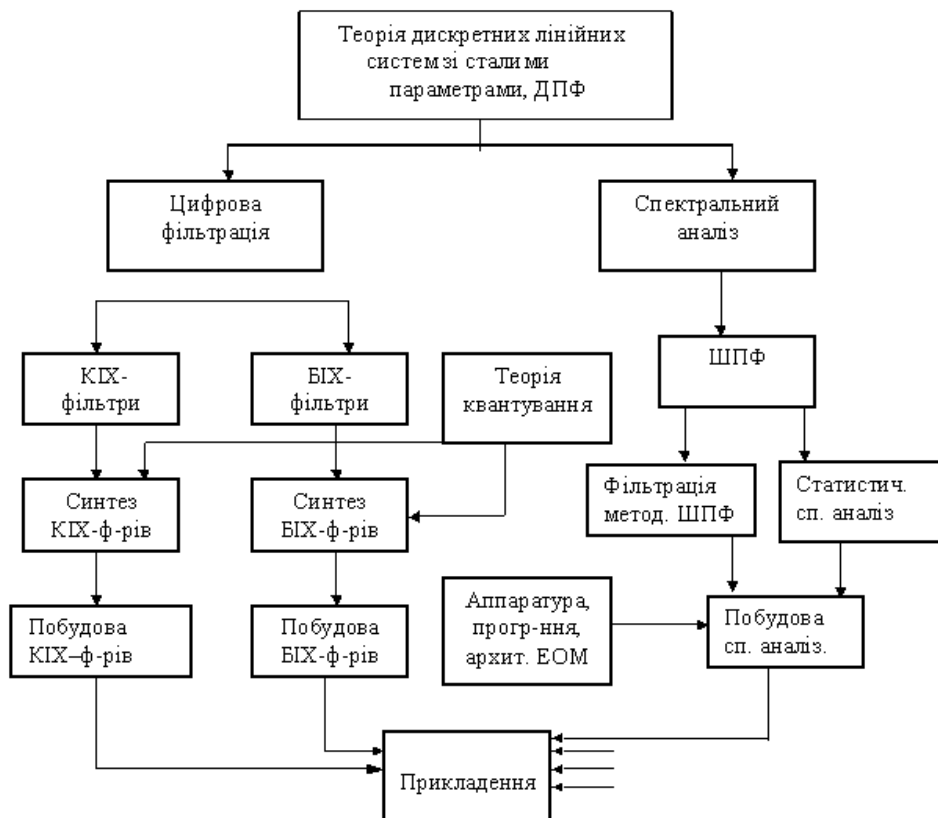


Рис. 1. Основні розділи цифрової обробки сигналів

---

## Дискретні лінійні динамічні системи

---

### 1.1. Загальні відомості

Дискретні та цифрові системи керування відрізняються від неперервних або аналогових систем тим, що сигнали в одній або декількох точках систем являють собою послідовність імпульсів або цифровий код. Термін "імпульсний" зазвичай стосується систем, в яких інформаційним сигналом є амплітуда імпульсу (сигнал модулюється за амплітудою). Термін "цифровий" стосується систем, в яких сигнали генеруються цифровими пристроями або ЕОМ у вигляді кодів. Але ж в реальних системах керування можуть бути у наявності як аналогові та імпульсні сигнали, так і цифрові коди. Тому у подальшому термін "дискретні системи" використовується для опису всіх систем, в яких сигнали мають цифрову або імпульсну форму.

Типова імпульсна система керування з оберненим зв'язком може бути представлена рис. 1.1.

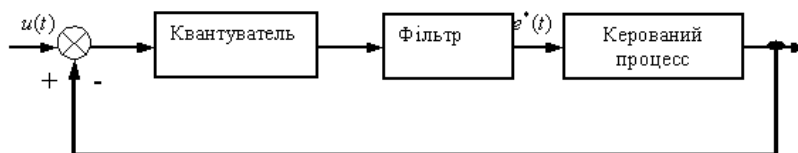


Рис. 1.1. Імпульсна система керування з оберненим зв'язком

Принцип роботи квантувача: неперервний вхідний сигнал  $e(t)$  квантується у часі (за рівнем) й вихідний сигнал квантувача являє собою послідовність імпульсів. Передбачається, що частота квантувача стала, а амплітуда імпульсу визначається відповідним значенням вхідного сигналу  $e(t)$ .

Фільтр, що розташовано між квантувачем та керованим процесом, виконує функцію згладжування, якщо керований процес розраховано на прийом аналогових сигналів.

В цифровій системі керування сигнали в одній або декількох точках представляються цифровими кодами, з якими оперує ЕОМ або цифровий пристрій. Структуру типової цифрової системи керування наведено на рис. 1.2. Наявність сигналу у вигляді цифрового коду обумовлює використання цифро-аналогових (ЦАП) та аналого-цифрових (АЦП) перетворювачів. АЦП виконує операції дискретизації, квантування та кодування, а ЦАП – операції цифро-аналогового перетворення та відновлення.

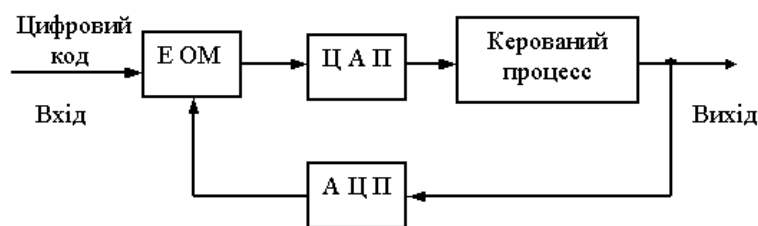


Рис. 1.2. Типова цифрова система керування

## 1.2. Проектування цифрових систем керування

Однією із суттєвих переваг цифрових регуляторів (контролерів) є їхня більша гнучкість порівняно з аналоговими регуляторами. Цифрові компоненти електронних схем є більш надійними, міцними та компактними порівняно з аналоговими компонентами того ж призначення.

Розглянемо спрощену схему автопілоту для одного керованого параметра (кут тангажу, ристання або крену) апарату, що літає (рис. 1.2). Метою керування є слідкування пристроєм регулювання кута орієнтації за командним сигналом. З метою покращення стійкості системи введено обернений зв'язок за швидкістю. Аналоговий регулятор в системі можна замінити цифровим, при цьому додатково треба мати АЦП та ЦАП.



Рис. 1.3. Спрощена схема аналогового автопілоту

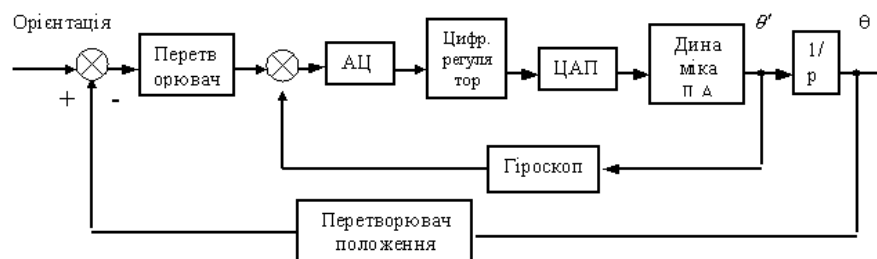


Рис. 1.4. Спрощена схема цифрового автопілоту

На рис. 1.2 наведено структурну схему цифрового автопілоту, в якому сигнали про місцезнаходження та швидкість апарату, що літає, надходять від цифрових пристроїв – квантувателів та фіксаторів. В кожному тактовий момент часу квантувальник перетворює аналоговий сигнал в імпульсний, а фіксатор утримує рівень сигналу незмінним до наступного тактового моменту часу. Квантувальники мають різні періоди квантування

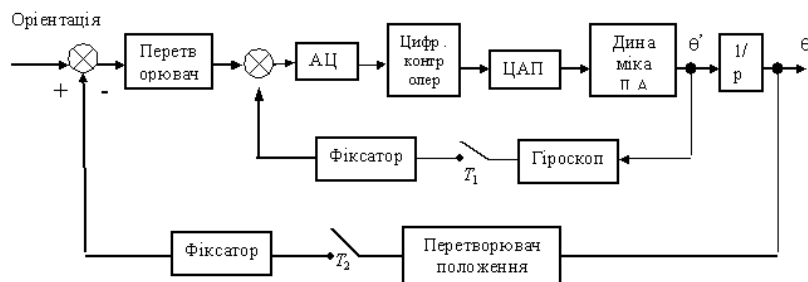


Рис. 1.5. Спрощена схема цифрового автопілоту з квантуванням та фіксатором

( $T_1$ ,  $T_2$ ). Така система називається системою із багаторазовим квантуванням.

При проектуванні систем керування вибір керуючого алгоритму залежить від повноти опису об'єкту керування у формі його математичної моделі та показників, за якими можна оцінити ефективність алгоритмів різного типу. Такими показниками слугують якість керування, що забезпечує алгоритмічну складність його реалізації, чутливість до змінювання параметрів і впливу перешкод, потрібна швидкодія ЕОМ, властивості об'єкту керування.

Перелічимо основні задачі, які треба вирішувати при проектуванні цифрових систем керування.

1. *Одержання інформації про об'єкт керування та сигнали.* Ця інформація може бути представлена у вигляді входів, виходів, змінних стану, що є досяжними для безпосереднього вимірювання; у вигляді моделей об'єктів керування та моделей сигналів; у формі оцінок сигналів та станів об'єктів керування.

Для побудови моделей об'єктів керування та сигналів можуть застосовуватись методи ідентифікації та оцінювання параметрів. Моделі об'єктів можна одержати й за допомогою теоретичних досліджень. Змінні, що є недосяжними для вимірювань, можна відновити із використанням теорії спостерігачів або оцінювання станів.

2. *Вибір структури системи керування.* Після опису моделі об'єкту керування та завдання відповідного набору регульованих та керованих змінних треба визначити тип системи керування (з одним входом та одним виходом, з перехресними зв'язками, з декількома входами та виходами).
3. *Розробка алгоритмів для керування* в прямому ланцюгу та ланцюгах обернених зв'язків.

Завершальним етапом проектування є синтез алгоритмів керування у ланцюгах прямих та/або обернених зв'язків, а також настройка з урахуванням конкретних умов функціонування системи.

4. *Фільтрація шумів.* Високочастотні шуми, що є недосяжними для вимірювань, й які вносять перешкоди у вимірювання керованих змінних, мають бути пригнічені за допомогою аналогових та цифрових фільтрів.
5. *Коректуючі алгоритми* в прямих ланцюгах та ланцюгах обернених зв'язків виконавчих пристроїв.

Загальна схема процесу проектування цифрових систем керування наведена на рис.

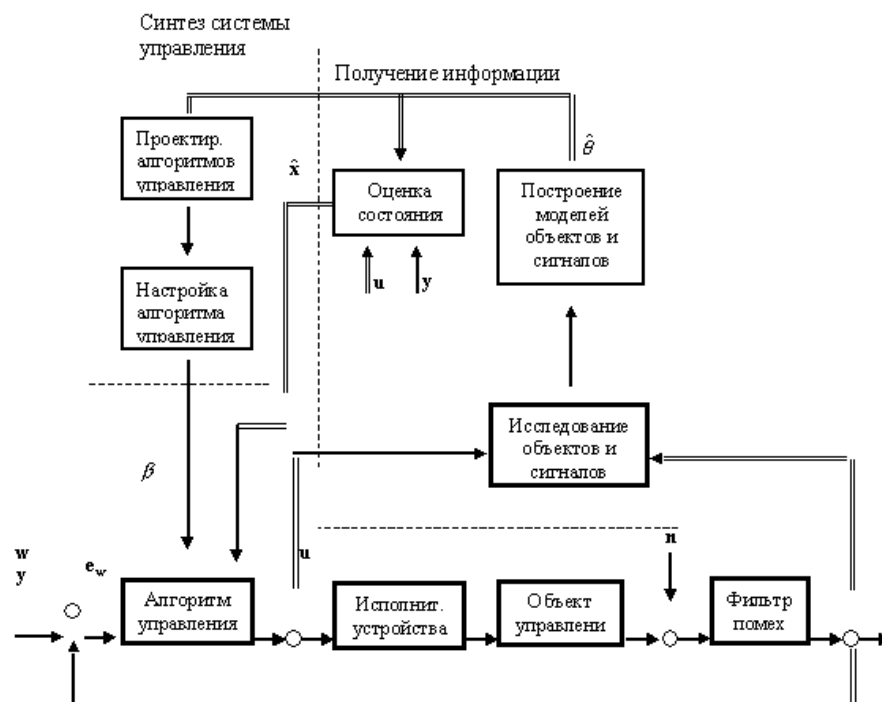


Рис. 1.6. Загальна схема процесу проектування цифрових систем керування

---

### Перетворення та обробка сигналів

---

Сигнал може бути визначений як функція, яка переносить у просторі або часі інформацію про стан або поведінку фізичної системи.

*Математично* сигнали представляються у вигляді функцій однієї або кількох незалежних змінних, які відображують фізичну природу об'єкта або явища. Так, наприклад, мовний сигнал математично представляється як функція часу, а зображення – як залежність яскравості від двох просторових змінних.

Незалежна змінна в математичному поданні сигналу може бути як неперервною, так і дискретною. Сигнали в неперервному часі визначаються на континуумі моментів часу і подаються як функції від неперервної змінної. *Дискретні сигнали* визначаються в дискретні моменти часу і подаються послідовностями чисел. Амплітуда сигналу також може бути як неперервною, так і дискретною.

*Цифрові сигнали* – це сигнали, у яких дискретними є як час, так і амплітуда. Сигнали в неперервному часі та з неперервним діапазоном зміни амплітуд також мають назву *аналогових сигналів*.

З метою полегшення одержання інформації сигнали мають підлягати обробці. Техніка обробки сигналів полягає у перетворенні сигналу в інший сигнал, що є кращим.

Системи обробки сигналів можуть класифікуватися так само, як самі сигнали. Так, системи в неперервному часі – це системи, у яких вхід та вихід є сигналами в неперервному часі, а *дискретні системи* – це системи, у яких на вході та виході сигнали є дискретними. Точно так же *аналогові системи* – це системи із аналоговими сигналами на вході та виході, а *цифрові системи* – системи із цифровими сигналами на вході та виході.

Дискретні сигнали можуть з'являтися при одержанні вибірок із аналогових сигналів або ж вони можуть породжуватися безпосередньо деяким дискретним у часі процесом. Незалежно від походження дискретних сигналів цифрові системи мають низку корисних властивостей. Вони можуть бути реалізовані з більшою гнучкістю на ЕОМ або за допомогою цифрової апаратури. У разі потреби їх можна використовувати для моделювання аналогових систем або для перетворень сигналу, які неможливо здійснити на аналоговій апаратурі.

#### 2.1. Неперервні сигнали

Оскільки методи обробки дискретних сигналів базуються на методах обробки неперервних у часі (та/або просторі) сигналів, зокрема дискретне перетворення Фур'є як основний апарат спектрального аналізу дискретних сигналів, слушно спочатку навести основні відомості про неперервні сигнали та методи їхньої обробки.

### 2.1.1. Класифікація функцій

#### 2.1.1.1. Деякі властивості функцій

У цьому підрозділі будемо розглядати функції у часі  $f(t)$ . Функції  $f(t)$ , які описують деякі фізичні процеси, розділяються за певними ознаками, що сприяє їхньої класифікації та аналізу. Перш за все функції належать двом загальним класам: *детермінованому* і *випадковому* класам. Ми зосередимося на вивченні класу детермінованих функцій.

Функції  $f(t)$  поділяються на *періодичні* і *неперіодичні*. Періодичні функції визначаються так:

$$f(t) = f(t + mT), \quad (2.1)$$

де  $T$  – період повторення значень функції,  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Наступною класифікаційною ознакою неперервних функцій є ознака *скінченності*, коли функція за  $t \rightarrow \infty$  прямує до нуля, та *нескінченності*, коли ця функція за  $t \rightarrow \infty$  не прямує до нуля. Наприклад, ця властивість є характерною для періодичних коливальних функцій.

Розрізняють також функції *парні* і *непарні*, або ж функції, що не належать ні до першого, ні до другого класу. Ознакою парності функції є

$$f(t) = f(-t), \quad (2.2)$$

Ознакою непарності –

$$f(t) = -f(-t), \quad (2.3)$$

Прикладами парної та непарної функцій є косинусоїда та синусоїда.

Розглянемо далі систему нескінченної кількості функцій  $\varphi_k(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , за якими дана функція може бути подана у такому вигляді:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t), \quad (2.4)$$

де  $a_k$  – деякі сталі, що називаються коефіцієнтами розкладання функції у ряд за функціями  $\varphi_k(t)$ . Таке розкладання функції  $f(t)$  називається розкладанням її за системою *базисних функцій*, якщо функції  $\varphi_k(t)$  задовольняють додаткові властивості, що мають назву властивості *ортогональності*.

Система функцій  $\varphi_k(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , які задано на скінченному проміжку  $[T_1, T_2]$ , називається *ортогональною*, якщо виконується умова

$$\int_{T_1}^{T_2} \varphi_k(t) \varphi_m(t) dt = \begin{cases} C = \text{const} \neq 0, & \text{коли } k = m, \\ 0, & \text{коли } k \neq m. \end{cases} \quad (2.5)$$

Якщо для деякого  $k$   $C = 1$ , функцію  $\varphi_k(t)$  називають *нормованою*. Якщо у ортогональній системі всі її складові нормовані, то таку систему називають *ортонормованою*.

Функція  $f(t)$ , яка задовольняє рівняння (2.4), називається поданою у вигляді ряду за ортонормованою системою базисних функцій, якщо система базисних функцій  $\varphi_k(t)$  є ортонормованою.

Наприклад, якщо система базисних функцій визначена у вигляді

$$1, \cos \omega t, \sin \omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \dots, \cos k\omega t, \sin k\omega t, \dots$$

на проміжку  $[-T/2, T/2]$ , яка, як відомо, задовольняє умову (2.5), таку систему базисних функцій називають ортогональною на  $[-T/2, T/2]$ . Якщо  $T$  – період, то така система функцій є ортонормованою на  $[-T/2, T/2]$ .

### 2.1.1.2. Типові впливи на систему

Змінювання вихідної величини системи  $y(t)$  залежить від властивостей системи та від того, як змінюється у часі вхідна змінна  $x(t)$ . Закон змінювання  $x(t)$  може бути будь-яким. За довільного змінювання вхідного сигналу зі змінювання вихідного сигналу  $y(t)$  не можна робити висновки про поведінку системи. Але існують такі вхідні сигнали  $x(t)$ , які називають *типовими* впливами, за якими за відомими відгуками  $y(t)$  системи, тобто за відомою реакцією системи на типові впливи можна судити про властивості системи. Це означає, що за відомими  $y(t)$  як реакцією на типові впливи та характеристиками системи можна робити висновки про характер змінювання  $y(t)$  під впливом будь-яких інших вхідних впливах.

При дослідженні аналогових систем обробки сигналів чи систем керування у якості типових використовуються такі три основні типові впливи. Найпростішим з них є *одинична функція*, що позначається

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Наступним типовим впливом є *одиничний імпульс*  $\delta(t)$ , або  *$\delta$ -функція*, який є штучним, оскільки є математичною ідеалізацією прямокутного імпульсу з основою  $a$  та висотою  $1/a$ . Площа цього прямокутника дорівнює  $a \cdot 1/a = 1$ . Спрямовуючи  $a \rightarrow 0$ , дістанемо нескінченно короткий імпульс із одиничною площею. Це й є одиничним імпульсом. Висота його нескінченно велика (визначення  $\delta$ -функції не відповідає класичним визначенням математичних функцій, але задовольняє вимогам, що відповідають вимогам до так званих *узагальнених функцій*).

Математичним виразом одиничного імпульсу є

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

причому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.8)$$

Одиничний стрибок  $1(t)$  і одиничний імпульс зв'язані між собою залежностями

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) \quad (2.9)$$

та

$$1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau. \quad (2.10)$$

Реакцію системи на одиничний стрибок  $1(t)$  називають *перехідною функцією*, або *часовою характеристикою*, реакцію системи на одиничний імпульс – *імпульсною функцією*.

Якщо прийняти у якості початкової точки на осі  $t$  не  $t = 0$ , а деяке значення  $t = t_0$ , то формули (2.6), (2.7) та (2.8) набудуть вигляду

$$1(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t - t_0 \geq 0, \\ 0, & t - t_0 < 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0, \\ 0, & t \neq t_0, \end{cases} \quad (2.12)$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (2.13)$$

Розглянемо інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt. \quad (2.14)$$

Оскільки згідно з (2.13)  $\delta(t - t_0) = 0$  для всіх  $t \neq t_0$ , межі інтегрування можна замінити на межі  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ , де  $\varepsilon > 0$  – як завгодно мале. Оскільки на малому відрізку  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  функція змінюється несуттєво, її можна розглядати як сталу  $f(t_0)$ . Тоді маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = f(t_0). \quad (2.15)$$

З того, що  $\delta(t - t_0) = 0$  для всіх  $t \neq t_0$ , витікає й

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0). \quad (2.16)$$

Третім типовим впливом є гармонічне коливання.

Одним із основних понять при обробці сигналів є поняття *прямого інтегрального перетворення Фур'є*. Це поняття часто називають просто *перетворенням Фур'є*. Для нього використовуються й інші назви: *комплексний спектр*, *спектральна щільність*, *спектральна функція*, *спектральна характеристика*. Обернене перетворення Фур'є часто називають *інтегралом Фур'є*.

## 2.2. Ряд Фур'є й інтегральне перетворення Фур'є

Будь-яка періодична функція  $f(t)$  є обмеженою, кусково-гладкою і може бути розкладена у ряд Фур'є. Ці умови, сформульовані у більш загальному вигляді, називають умовами Діріхле, згідно з якими сума ряду Фур'є дорівнює  $f(t)$  у точках, де ця функція неперервна, й дорівнює  $[f(t+0) + f(t-0)]/2$  у кожній точці розриву неперервності. Позначення  $f(t+0)$  і  $f(t-0)$  приймаються для значень функції в околі точки розриву, при наближенні до точки розриву відповідно з боку значень  $t$ , більших та менших за  $t$ , яке відповідає точці розриву. Така функція може бути розкладена у ряд Фур'є

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega t + \varphi_k), \quad (2.17)$$

де  $\omega = 2\pi/T$  є основною круговою частотою, що визначається величиною  $T$  періоду повторювання,

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (2.18)$$

є середнім значенням функції  $f(t)$  у відрізку  $[-T/2, T/2]$ .

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \text{tg } \varphi_k = b_k/a_k, \quad (2.19)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt, \quad (2.20)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt. \quad (2.21)$$

Згідно з формулою (2.17) функція  $f(t)$  подається у вигляді суми сталої і гармонік. Кількість гармонік у розкладанні функції  $f(t)$  (2.17) нескінченно велика, але для досить повного подання функції  $f(t)$  досить лише кілька перших гармонік.

Для аперіодичних процесів розкладання у ряд Фур'є замінюється розкладанням у інтеграл Фур'є

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.22)$$

де

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (2.23)$$

Формулами (2.22), (2.23) можна користуватися за умови абсолютної інтегровності функції  $f(t)$ , тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt < \infty. \quad (2.24)$$

Перетворення, що визначаються формулами (2.22), (2.23), є *інтегральними перетвореннями Фур'є*. Часто функцію  $S(\omega)$  просто називають перетворенням Фур'є функції  $f(t)$ , або називають (2.23) виразом спектральної щільності або комплексним спектром цієї функції. Для формул (2.22), (2.23) застосовують також назви: пряме перетворення Фур'є і обернене перетворення Фур'є.

Розглянемо й інші форми запису ряду Фур'є, що застосовуються для періодичних функцій  $f(t)$  та записи інтегральних перетворень Фур'є для аперіодичних функцій  $f(t)$ .

Якщо замінити у формулі (2.17)  $\varphi_k$  на  $\varphi_{k*} + \pi/2$ , матимемо  $\sin(k\omega t + \varphi_{k*}) = \cos(k\omega t + \varphi_k)$ , й отже, можна подати  $f(t)$  у вигляді

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega t + \varphi_{k*}), \quad (2.25)$$

У формулі (2.17) вираз для  $k$ -ї гармоніки можна подати й у вигляді

$$c_k = \cos(k\omega t + \varphi_k) = a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t,$$

де  $a_k = c_k \cos \varphi_k$ ,  $b_k = c_k \sin \varphi_k$ ,  $c_0 = a_0$ .

Формула ряду Фур'є набуває вигляду

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)), \quad (2.26)$$

Застосовується також запис ряду Фур'є у комплексній формі, якщо у (2.26) скористуватися формулами Ейлера

$$e^{ik\omega t} = \cos k\omega t + i \sin k\omega t, \quad e^{-ik\omega t} = \cos k\omega t - i \sin k\omega t, \quad (2.27)$$

із яких маємо

$$\cos k\omega t = \frac{1}{2} [e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}], \quad \sin k\omega t = \frac{1}{2i} [e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}] \quad (2.28)$$

Тоді приходимо до такого ряду Фур'є:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ik\omega t}, \quad (2.29)$$

де

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega t} dt. \quad (2.30)$$

У практичних застосуваннях важливе значення відіграє й така форма подання спектральної щільності і інтегралу Фур'є. Перш за все звернемо увагу на те, що  $S(\omega)$  є комплексною величиною, й отже вона може бути подана у вигляді

$$S(\omega) = P(\omega) + iQ(\omega) \quad (2.31)$$

або

$$S(\omega) = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)}, \quad (2.32)$$

де  $P(\omega)$  і  $Q(\omega)$  – дійсна та уявна частини  $S(\omega)$ , а  $A(\omega)$  і  $\varphi(\omega)$  – її модуль і фаза.

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}. \quad (2.33)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}. \quad (2.34)$$

У тому разі, коли  $f(t) = 0$  за  $t < 0$ , формула (2.23) набуває вигляду

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.35)$$

Таке перетворення Фур'є називають *однобічним* на відміну від перетворення (2.23), що називають *двобічним*.

Якщо  $f(t) = 0$  за  $t < 0$ , можливий запис інтегралу Фур'є також у вигляді

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega, \quad (2.36)$$

або

$$f(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (2.37)$$

### 2.2.1. Властивості перетворення Фур'є

1. За умови, що  $S(\omega)$  є перетворенням Фур'є функції  $f(t)$ , перетворенням Фур'є функції  $f(t - \xi)$ , яка затримується на величину  $\xi$  відносно функції  $f(t)$ , є

$$S_{\xi}(\omega) = e^{-i\omega t} S(\omega). \quad (2.38)$$

Ця рівність відома як *теорема запізнювання*. Відповідно для  $f(t + \xi)$

$$S_{\xi}(\omega) = e^{i\omega t} S(\omega). \quad (2.39)$$

2. Для функції  $e^{-i\eta t} f(t)$  перетворення Фур'є визначається як

$$S(\omega + \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t) e^{-i\eta t}] e^{-i\omega t} dt. \quad (2.40)$$

Тобто, якщо  $S(\omega)$  є перетворенням Фур'є функції  $f(t)$ , то зсув частоти  $\omega$  на величину  $\eta$  приводить до отримання перетворення Фур'є для функції  $f(t)e^{-i\eta t}$ . Формулу (2.40) називають теоремою зсуву.

3. Якщо  $S(\omega)$ ,  $S_1(\omega)$ ,  $S_2(\omega)$  є перетворенням Фур'є функцій  $f(t)$ ,  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ , то для функції  $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$  маємо

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (2.41)$$

Тут

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\xi)S_2(\omega - \xi)d\xi.$$

Вираз вигляду

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\xi)S_2(\omega - \xi)d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega - \xi)S_2(\xi)d\xi. \quad (2.42)$$

називається *згортою* функцій  $S_1(\omega)$  та  $S_2(\omega)$ .

4. *Теорема згортання.* Згортці  $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau$  функцій  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$  відповідає

$$S(\omega) = S_1(\omega)S_2(\omega). \quad (2.43)$$

### 2.2.2. Характеристики спектрального подання функцій

Будемо позначати  $x(t) = f(t)$ , маючи на увазі періодичний процес. Сукупність комплексних величин  $C_k$  при  $k \in (-\infty, \infty)$  утворює комплексний спектр функції  $x(t)$ . Кожна із цих величин, що взята при відповідній частоті  $k\omega$ , визначається амплітудою та фазою вектора  $C_k$ . При використанні для розкладання функції  $x(t)$  у ряд Фур'є формули (2.17) сукупність величин  $c_k$  разом із  $c_0/2$  утворює спектр амплітуд функції, а сукупність величин  $\varphi_k$  утворює спектр фаз. Оскільки у багатьох випадках користуються окремо спектром амплітуд, його часто називають спектром функції  $x(t)$ . У системі координат  $c_k, \omega$  для дискретних значень  $\omega = \omega_1, 2\omega_1, \dots, k\omega_1, \dots$  спектр мав би зображуватися низкою точок на площині. Оскільки таке його зображення є незручним, із кожної точки опускають перпендикуляр на вісь  $\omega$ , отримуючи на графіку множину вертикальних ліній. Тому спектр амплітуд називають *лінійчатим спектром*.

Спектральне подання аперіодичних функцій є більш складним. Величина

$$S(\omega) = \pi \frac{dc}{d\omega}, \quad (2.44)$$

пропорційна похідній від амплітуди по частоті  $\omega$ , називається *спектральною щільністю*, або *спектральною характеристикою* аперіодичної функції.

Нехай  $f(t)$  є аперіодичною функцією у вигляді одного прямокутного імпульсу. Однотипною із цією функцією періодичною функцією будемо вважати нескінченну кількість таких самих імпульсів, які повторюються із періодом  $T$ . Порівняємо формули (2.23) та (2.30) комплексних спектрів аперіодичного і періодичного сигналів. Для  $x(t)$  у вигляді одиничного імпульсу потужності  $m$  маємо

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} me^{-i\omega t} dt = m \int_{-T_d/2}^{T_d/2} e^{-i\omega t} dt = -\frac{m}{i\omega} \left( e^{-i\omega T_d/2} - e^{i\omega T_d/2} \right) = \frac{2m}{\omega} \sin \omega \frac{T_d}{2}.$$

Цей вираз можна подати у дещо зміненому вигляді

$$S(\omega) = mT_d \frac{\sin \frac{\omega T_d}{2}}{\frac{\omega T_d}{2}}. \quad (2.45)$$

У вираз (2.45) в якості множника входить відношення синуса величини до самої величини. Ця функція позначається

$$\text{sinc } \xi = \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad (2.46)$$

Ця функція, графік якої наведено на рис. ??, є парною функцією  $\xi$ . При  $\xi = 0$  маємо  $\text{sinc } \xi = 1$ . У виразі (2.45)  $mT_d$  – величина стала для імпульсу даного вигляду, й дорівнює площі цього імпульсу. Зауважимо, що при  $\omega = 0$  величиною  $S(\omega)$  визначається площа для імпульсів довільної форми.

Окремо зупинимося на спектрі  $\delta$ -функції. Для неї

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \delta(t - T) dt.$$

За всіх значень  $t \neq T$  функція  $\delta(t - T) = 0$ . Тільки за  $t = T$  вона не дорівнює нулю. Зважаючи на це, можна розглядати вузький інтервал в околі точки  $t = T$  і прийняти  $e^{-i\omega t} = e^{-i\omega T}$ . Якщо винести цей множник за знак інтеграла, дістанемо для  $\delta$ -функції

$$S(\omega) = e^{-i\omega T}. \quad (2.47)$$

Отже, виявляється, що модуль спектра  $\delta$ -функції дорівнює одиниці. Ця функція має суцільний спектр, який простягається до нескінченно великих значень частоти  $\omega$ . В усьому діапазоні змінування  $\omega$  спектральна щільність  $\delta$ -функції залишається сталою.

### 2.2.3. Застосування інтегрального перетворення Лапласа

Як вже підкреслювалося, формулами перетворення Фур'є можна користуватися у тому випадку, коли функція  $f(t)$  є абсолютно інтегрованою, тобто має виконуватися умова  $f(t) \rightarrow 0$  за  $t \rightarrow \infty$ . Для деяких функцій, з якими доводиться мати справу при дослідженні сигналів, ця умова не виконується. До таких функцій належить зовнішній вплив у вигляді одиничного стрибка, необмежені у часі функції – гармонічні коливання тощо.

У цьому разі функція тимчасово замінюється іншою, зв'язаною з цією функцією  $f_*(t)$ , яка є абсолютно інтегрованою. Далі для функції  $f_*(t)$  відшукується спектральна щільність  $S_*(\omega)$  і шляхом граничного переходу знаходиться вираз для  $S(\omega)$  для вхідної функції  $f(t)$ . Проілюструємо знаходження у такий спосіб спектральної щільності для функції  $f(t)$ , яка не є абсолютно інтегрованою на прикладі  $f(t) = C$  для  $t \geq 0$ , тобто для одиничної функції, промасштабованої сталою  $C$ . Замінімо цю функцію функцією  $f_*(t) = e^{-\sigma t} f(t)$ , для якої за  $\sigma > 0$  умова абсолютної інтегровності виконується. Для функції  $f_*(t)$  спектральна щільність  $S_*(\omega)$  відшукується за формулою

$$S_*(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} C e^{-i\omega t} dt = C \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+i\omega)t} dt = \frac{C}{\sigma + i\omega} \quad (2.48)$$

Спектральна щільність  $S(\omega)$  тепер відшукується як границя  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} S_*(\omega) = \frac{C}{i\omega}$ . Заміна під знаком інтеграла уявної величини  $i\omega$  на комплексну величину  $p = \sigma + i\omega$  може мати

за відповідного вибору  $\sigma$  більш загальне значення, ніж це впливає із розглянутого прикладу.

Вирази

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (2.49)$$

та

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (2.50)$$

називаються відповідно однобічним та двобічним *перетвореннями Лапласа*. При заміні перетворення Фур'є перетворенням Лапласа в  $p = \sigma + i\omega$  дійсна частина береться такою, щоб існував відповідний вираз (2.49) і (2.50). Основне значення для теорії управління має однобічне перетворення Лапласа.

Вхідну функцію  $f(t)$  називають *оригіналом*, а відповідну функцію  $\mathcal{L}[f(t)] \doteq f(t)$  та  $f(t) \doteq \mathcal{L}[f(t)]$ . Для перетворення, що відповідає функції  $f(t)$  користуються також позначенням  $F(p)$  як функції комплексної змінної  $p$ . Обернене перетворення Лапласа визначається формулою

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) dp. \quad (2.51)$$

Перетворення Лапласа ефективно використовується при вирішенні задач керування та обробки сигналів, коли у якості вхідних для дослідження задаються диференціальні рівняння перехідних процесів в системі або задається передаточна функція, що описує динаміку системи обробки сигналів.

Якщо динаміка системи описується диференціальним рівнянням

$$L[x(t)] = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = f(t) \quad (2.52)$$

із відповідними початковими умовами

$$x(0) = x_0, \frac{dx(0)}{dt} = x_1, \dots, \frac{d^{n-1} x(0)}{dt^{n-1}} = x_{n-1}, \quad (2.53)$$

то

$$\begin{aligned} a_n X(p) - a_n [p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x_1 + \dots] + a_{n-1} p^{n-1} X(p) - a_{n-1} [p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x_1 + \dots] + \\ + \dots + a_1 X(p) + a_1 x_0 + a_0 X(p) = F(p), \end{aligned} \quad (2.54)$$

де  $X(p) = \mathcal{L}[x(t)]$ ;  $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ .

Зберемо всі члени рівняння, які містять початкові умови та приведемо подібні відносно степеня  $p$ , і введемо позначення  $R(p)$ , а також позначимо

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0.$$

Маємо рівняння в операторній формі

$$D(p)X(p) = F(p) + R(p). \quad (2.55)$$

Звідси

$$X(p) = \frac{F(p)}{D(p)} + \frac{R(p)}{D(p)}. \quad (2.56)$$

Зокрема, за нульових початкових умов маємо

$$X(p) = \frac{F(p)}{D(p)}. \quad (2.57)$$

Вираз (2.57) має назву *передаточної функції* системи і позначається  $W(p)$ .

*Приклад.* Нехай маємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 11\frac{dx(t)}{dt} + 6x(t) = 1(t)$$

із початковими умовами

$$x(0) = 5, \quad \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d^2x(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = 0.$$

Згідно з викладеним маємо

$$D(p) = p^3 + 6p^2 + 11p + 6, \quad F(p) = 1/p, \quad R(p) = 5p^2 + 30p + 55.$$

Тоді

$$X(p) = \frac{1/p}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} + \frac{5p^2 + 30p + 55}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння  $D(p)$ :

$$p^3 + 6p^2 + 11p + 6 = (p+1)(p+2)(p+3) = 0.$$

Передаточна функція системи має вигляд

$$W(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{p} - \frac{3}{p+1} + \frac{3}{p+2} - \frac{1}{p+3} \right].$$

Тут ми скористалися розкладанням раціонального дробу на найпростіші. Згідно з визначенням оригіналу для найпростіших раціональних дробів  $\frac{1}{p+\alpha} \rightleftharpoons e^{-\alpha t}$ . Отже маємо для перехідної характеристики системи як реакції на типовий вплив (одиничний стрибок):

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(p)] = \frac{1}{6} [1 + e^{-t} + e^{-2t} + e^{-3t}].$$

Якщо врахувати ненульові початкові умови, то одержимо вираз для вихідного сигналу  $y(t)$  як реакцію на одиничний стрибок.

$$y(t) = \frac{1}{6} [1 + 87e^{-t} - 87e^{-2t} + 29e^{-3t}].$$

Запровадження поняття передаточної функції спрощує аналіз динаміки складних систем. Так, якщо передаточну функцію системи подати у вигляді суми передаточних функцій кількох елементарних ланцюгів  $W_k(p)$

$$W(p) = \sum_{k=1}^M W_k(p), \quad (2.58)$$

то аналіз характеристик системи зводиться до аналізу динаміки кожного окремого ланцюга.

Наостанок у цьому підрозділі зауважимо, що в усіх випадках, замінюючи у виразах для передаточних функцій  $W(p)$  комплексну величину  $p = \sigma + i\omega$  уявною величиною  $i\omega$ , тобто при  $\sigma = 0$ , дістанемо вирази відповідних амплітудно-фазових частотних характеристик, що співпадає із однобічним перетворення Фур'є.

### 2.3. Дискретні сигнали

До дискретних відносять сигнали, дискретизовані за часом та рівнем (квантовані).

### 2.3.1. Квантування сигналів

Під квантуванням аналогового сигналу мається на увазі операція перетворення сигналу, коли здійснюється його дискретизація за рівнем або в часі, або одночасно за рівнем і в часі. При цьому аналоговий сигнал описується неперервною (або кусково-неперервною) функцією часу  $x(t)$ , коли аргумент і сама функція набувають довільні значення у певному проміжку  $t \in [t_1, t_2]$ ,  $x(t) \in [x_1, x_2]$ .

*Квантування в часі* – це перетворення сигналу  $x(t)$  у послідовність імпульсів, що слідують один за одним, амплітуда, тривалість або частота яких залежить від амплітуди вхідного аналогового сигналу. Пристрій, що виконує операцію квантування в часі, називається *переривачем*, або *імпульсним елементом*, який у окремому випадку пропускає вхідний сигнал  $x(t)$  лише протягом деякого часу  $\tau$  (тривалість замикання) і не пропускає його протягом часу  $T_d - \tau$  (тривалість переривання). Величина  $T_d$  називається *періодом квантування (або інтервалом дискретизації)*.

Існують різні способи формування окремих імпульсів, що містяться в дискретизованій послідовності. Вони розрізняються допустимими значеннями амплітуд, шириною імпульсів та частотою їхнього подання. В цифрових системах зазвичай застосовується так звана *амплітудна модуляція* імпульсів, коли висота імпульсу пропорційна поточному значенню неперервного сигналу, ширина ж імпульсу стала, а інтервали між імпульсами однакові й дорівнюють періоду квантування. До таких сигналів можна застосовувати теорему суперпозиції, тому вони описуються лінійними співвідношеннями.

*Квантування за рівнем* означає перетворення сигналу  $x(t)$  шляхом округлення його миттєвого значення до деякої заданої фіксованої величини  $x_d$ , яка називається *рівнем квантування*. Квантування за рівнем є нелінійним перетворенням вхідного сигналу  $x(t)$ . Пристрій, що здійснює операцію квантування за рівнем, називається *квантувателем*. Відстань між сусідніми рівнями квантування називається кроком квантування  $q_d^{(k)} = x_d^{(k+1)} - x_d^{(k)}$ , а похибкою квантування зветься величина  $\varepsilon_d = x(t) - x_d^{(k)}$  коли  $x^{(k)} - d < x(t) \leq x_d^{(k+1)}$ , яка залежить як від характеристик квантувача, так і від самого вхідного аналогового сигналу.

Для з'ясування основних властивостей дискретизованих функцій досить розглянути квантування в часі.

### 2.3.2. Математичний опис дискретних сигналів

Дискретна функція  $x_d(t)$ , що промодульована за амплітудою й одержується шляхом квантування в часі неперервного сигналу  $x(t)$  зі сталим тактом  $T_d$ , математично записується виразом

$$x_d(t) = \begin{cases} x(kT_d) & \text{для } t = kT_d, k = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{при } kT_d < t < (k+1)T_d. \end{cases} \quad (2.59)$$

На рис. 5.8 наведено графічні зображення аналогового сигналу  $x(t) = e^{-\alpha t}$ ,  $\alpha > 0$  та відповідного дискретного сигналу  $x(nT_d) = e^{-\alpha nT_d}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Значення дискретного сигналу  $x(nT_d)$  називаються *відліками* сигналу. Вони є *вибітками* вихідного аналогового сигналу в моменти часу  $t = nT_d$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$x(nT_d) = x(t)|_{t=nT_d}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.60)$$

Оскільки дискретний сигнал описується послідовністю чисел, термін "решіткова функція" замінюється на термін "дискретна послідовність"  $x_n$ :

$$x_n = x(nT_d), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.61)$$

Вибірки сигналу беруться зі сталим інтервалом  $T_d$ , тобто із певною частотою, яка називається *частотою дискретизації*  $f_d$ :  $f_d = 1/T_d$ .



*Приклад.* Аналоговий сигнал має вигляд  $x(t) = e^{-\alpha t} \cos 2\pi t$  (рис. 5.8). Відповідний дискретизований сигнал  $x_d(nT_d)$  при заданій частоті дискретизації  $f_d = 1/T_d$  матиме вигляд

$$x_d(nT_d) = e^{-\alpha nT_d} \cos 2\pi nT_d.$$

Припустимо, що  $\alpha = 0,01$ ,  $f = 0,5$  кГц;  $f_d = 4$  кГц. Тоді  $T_d = 1/f_d = 0,25$  мс й отже,

$$x_d(nT_d) = e^{-0,01 \dots n \dots 0,25} \cos 2\pi n0,25.$$

Дискретні послідовності бувають скінченної та нескінченної довжини. Їх називають відповідно скінченними і нескінченними послідовностями. Крім того, дискретні послідовності можуть бути не затриманими і затриманими на певну кількість інтервалів дискретизації. У першому випадку відліки  $x_n$  фізично реалізуємої скінченної послідовності довжиною  $N$  можуть приймати ненульові значення тільки при  $n = \overline{0, N-1}$ , а для нескінченної послідовності – при всіх  $n$ .

Затриманою на  $m$  інтервалів дискретизації  $T_d$  послідовністю називається послідовність

$$y_n = x_{n-m} = x[(n-m)T_d], \quad y_n = 0 \text{ при } n < m. \quad (2.62)$$

Для опису послідовності використовуються різні способи, як-то:

- *аналітичний*, коли відповідним математичним висловом (формулою) визначаються чисельні значення послідовності;
- *безпосередній*, коли безпосередньо задаються значення відліків послідовності.

Важливе значення в теорії та практиці цифрової обробки сигналів мають два такі сигнали: *одиничний імпульс* і *одиничний стрибок*.

*Одиничним імпульсом* (або дискретною дельта-функцією) є дискретний сигнал, який задовольняє таким умовам:

$$\delta(t - mT_d) = \begin{cases} 1, & \text{за } t = mT_d, \\ 0, & \text{за } t \neq mT_d. \end{cases} \quad (2.63)$$

Це дає змогу дати строгий математичний опис процесу дискретизації як заміні неперервної функції  $x(t)$  решітковою функцією  $x_d(nT_d)$ , яка формується згідно з алгоритмом

$$x_d(nT_d) = x(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_d) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_d) \delta(t - nT_d). \quad (2.64)$$

*Одиничний стрибок* – це дискретний сигнал, який задовольняє умови:

$$u(t - mT_d) = \begin{cases} 1, & \text{за } t \geq mT_d, \\ 0, & \text{за } t < mT_d. \end{cases} \quad (2.65)$$

## 2.4. Лінійні системи зі сталими параметрами

Дискретні системи по суті здійснюють перетворення однієї послідовності (вхідної) в іншу (вихідну). Це перетворення можна в загальному випадку записати у вигляді

$$y(n) = f[x(n)]. \quad (2.66)$$

Вид оператора  $f[\cdot]$  залежить від конкретних властивостей дискретної системи обробки інформації.

Нехай є деякі дві вхідні послідовності  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$ , а  $y_1(n)$  та  $y_2(n)$  – деякі вихідні послідовності. Якщо відгуком  $y(n)$  системи обробки на вхід послідовності  $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$  ( $a$  та  $b$  – довільні сталі) буде послідовність

$$F[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1F[x_1(n)] + a_2F[x_2(n)] = y(n) = ay_1(n) + by_2(n),$$

то така дискретна система називається *лінійною динамічною системою*, або *лінійною системою зі сталими параметрами*.

Система зі *сталими параметрами* характеризується тим, що якщо вхідній послідовності  $x(n)$  відповідає послідовність  $y(n)$ , то вхідній послідовності  $x(n - k)$  за будь-яких  $k$  відповідає послідовність  $y(n - k)$ .

Нехай  $x(n)$  – вхідна,  $y(n)$  – вихідна послідовності лінійної системи зі сталими параметрами і нехай  $h(n)$  – відгук системи на одиничний імпульс (*імпульсна характеристика* системи, або *відгук на одиничний імпульс*). Використовуючи формулу (2.64),  $x(n)$  можна записати у вигляді

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k). \quad (2.67)$$

Оскільки  $h(n)$  є відгуком системи на послідовність  $\delta(n)$ , а параметри системи є сталими величинами,  $h(n - k)$  буде відгуком на послідовність  $\delta(n - k)$ . За властивістю лінійності випливає, що відгуком на послідовність  $x(k)\delta(n - k)$  має бути послідовність  $x(k)h(n - k)$ . Тому відгук на  $x(n)$  дорівнюватиме

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n - k). \quad (2.68)$$

Цей вираз називається співвідношенням типу *згортки*.

Лінійну систему зі сталими параметрами називають *фізично реалізуємою*, якщо величина відгуку при  $n = n_0$  залежить тільки від відліків вхідної послідовності із номерами  $n \leq n_0$ . Це означає, що імпульсна характеристика  $h(n)$  дорівнює нулю при  $n < 0$ .

Лінійна система зі сталими параметрами називається *стійкою*, якщо за будь-якої обмеженої вхідної послідовності вихідна послідовність також обмежена. Необхідною та достатньою умовами стійкості системи є така вимога до імпульсної характеристики:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (2.69)$$

### 2.4.1. Різницеві рівняння

Системи, у яких вхідна та вихідна послідовності  $x(n)$  та  $y(n)$  зв'язані лінійним різницеvim рівнянням зі сталими коефіцієнтами, утворюють клас лінійних систем зі сталими параметрами. Опис систем різницеvими рівняннями дозволяє знайти ефективні засоби побудови таких систем. У загальному випадку лінійне різницеve рівняння  $M$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами, яке відноситься до класу фізично реалізуємих систем, має вигляд

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n - i) - \sum_{i=1}^M a_i y(n - i), \quad n \geq 0, \quad (2.70)$$

де коефіцієнти  $b_i$ ,  $a_i$  описують конкретну систему, причому  $a_M \neq 0$ .

Рівняння (2.70) записано у вигляді, зручному для розв'язання методом прямої підстановки. Справді, маючи набір початкових значень для змінних  $x(i)$ ,  $y(i)$  для  $i = -M, -1$  (так званих початкових умов) та вхідну послідовність  $x(n)$ , за формулою (2.70) можна безпосередньо вирахувати вихідну послідовність  $y(n)$  для  $n \geq 0$ .

Важливе значення різницеvих рівнянь полягає у тому, що вони безпосередньо визначають спосіб побудови цифрової системи. Так, різницеve рівняння першого порядку загального вигляду

$$y(n) = -a_1 y(n - 1) + b_0 x(n) + b_1 x(n - 1) \quad (2.71)$$

можна реалізувати за допомогою схеми, що наведено на рис.

У цій схемі блок “затримка” здійснює затримку на один відлік. Форма побудови системи, що розглянута, в якій для вхідної та вихідної послідовностей використовуються окремі елементи затримки, називається *прямою формою 1*.

Різницеве рівняння другого порядку загального вигляду

$$y(n) = -a_1y(n-1) - a_2y(n-2) + b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) \quad (2.72)$$

може бути реалізовано за допомогою схеми, що наведено на рис.

Системи першого та другого порядку можуть використовуватися при реалізації систем більш високого порядку.

### 2.4.2. Частотна характеристика

Дискретні сигнали і системи можуть бути подані у різній формі, при цьому як і для аналогових сигналів і систем, особливо важливу роль для дискретних сигналів і систем відіграють синусоїдальні та комплексні експоненційні послідовності. Це пояснюється тим, що основна властивість лінійних інваріантних до зсуву систем полягає у тому, що в усталеному стані відгук на синусоїдальний вхідний сигнал є синусоїдою тієї самої частоти, з амплітудою та фазою, які визначаються характеристикою системи. Якраз ця властивість лінійних інваріантних до зсуву систем робить подання сигналів через синусоїди та комплексні експоненти таким корисним.

Розглянемо клас вхідних дискретних послідовностей вигляду

$$x(n) = e^{i\omega n}, \quad -\infty < n < \infty, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (2.73)$$

Якщо така послідовність надходить на вхід системи із імпульсною характеристикою  $h(n)$ , то на виході з'явиться послідовність

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{i\omega(n-k)} = e^{i\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-i\omega k} = x(n)H(e^{i\omega}). \quad (2.74)$$

Таким чином, для вибраного класу вхідних послідовностей відгук системи співпадає із вхідною послідовністю з точністю до комплексного множника  $H(e^{i\omega})$ , який виражається через імпульсну характеристику системи так:

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-i\omega n}. \quad (2.75)$$

Оскільки послідовність вигляду  $e^{i\omega n}$  функціонально є еквівалентною синусоїді із частотою  $\omega$ , то множник  $H(e^{i\omega n})$  називають *частотною характеристикою системи*, оскільки він являє собою комплексний коефіцієнт передачі системи зі сталими параметрами для кожного значення  $\omega$ .

Відзначимо деякі властивості частотної характеристики. Частотна характеристика є періодичною функцією частоти, причому її період дорівнює  $2\pi$ . Іншою важливою властивістю частотної характеристики є симетричність її модуля  $|H(e^{i\omega})|$  та антисиметричність її фази. Тому у разі дійсних імпульсних характеристик інтервал частот, на якому задають частотну характеристику, зазвичай скорочують до  $0 \leq \omega \leq \pi$ .

Подамо  $H(e^{i\omega})$  у вигляді

$$H(e^{i\omega}) = |H(e^{i\omega})| e^{i \arg H(e^{i\omega})}. \quad (2.76)$$

Тоді для системи, яка описується різницеvim рівнянням першого порядку вигляду

$$y(n) = b_0x(n) + a_1y(n-1) \quad (2.77)$$

при  $b_0 = 1$  з початковою умовою  $y(-1) = 0$ , матимемо

$$|H(e^{i\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a_1^2 - 2a_1 \cos \omega}}, \quad (2.78)$$

$$\arg H(e^{i\omega}) = \omega - \operatorname{arctg} \frac{a_1 \sin \omega}{1 - a_1 \cos \omega}. \quad (2.79)$$

Для дискретних систем другого порядку

$$y(n) = b_0 x(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) \quad (2.80)$$

за нульових початкових умов  $y(-1) = 0$ ,  $y(-2) = 0$  та  $b_0 = 1$  імпульсна характеристика може прийняти одну з двох форм:

$$h(n) = \alpha_1 p_1^n + \alpha_2 p_2^n, \quad (2.81)$$

$$h(n) = \alpha_1 r^n \sin(bn + \varphi). \quad (2.82)$$

Частотну характеристику, що відповідає імпульсній характеристиці (2.82), можна записати таким чином:

$$H(e^{i\omega}) = \frac{1}{1 - 2r \cos b e^{-i\omega} + r^2 e^{-2i\omega}}, \quad (2.83)$$

де  $r = \sqrt{-a_2}$ ,  $\cos b = \frac{a_1}{2\sqrt{-a_2}}$ ,  $\varphi = b$ ,  $\alpha_1 = \frac{1}{\sin b}$ .

### 2.4.3. Дискретний ряд Фур'є

Оскільки частотна характеристика дискретної системи є періодичною функцією частоти, рівність (2.75) можна розглядати як розкладання  $H(e^{i\omega})$  в ряд Фур'є, причому коефіцієнти розкладання є одночасно й відліками імпульсної характеристики системи. Згідно теорії рядів Фур'є коефіцієнти  $h(n)$  можна виразити через  $H(e^{i\omega})$  таким чином:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega. \quad (2.84)$$

Отже, рівності (2.75), (2.84) являють собою пару перетворень Фур'є. Зі співвідношення (2.84) видно, що  $h(n)$  по суті є суперпозицією (сумою) синусоїд  $e^{i\omega n}$  із амплітудами  $H(e^{i\omega})$ . Пара перетворень (2.75), (2.84) справедлива для будь-якої послідовності зі скінченною сумою (2.76), тому довільну вхідну послідовність також можна представити у вигляді

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega, \quad (2.85)$$

де

$$X(e^{i\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) e^{-i\omega n}. \quad (2.86)$$

Згідно з формулою (2.75) відгук на послідовність  $e^{i\omega n}$  дорівнює  $H(e^{i\omega}) e^{i\omega n}$ , тому відгук на вхідну послідовність (2.85) буде

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\omega}) H(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega, \quad (2.87)$$

Із рівності

$$Y(e^{i\omega}) = X(e^{i\omega}) H(e^{i\omega}) \quad (2.88)$$

впливає, що (2.87) є одним з двох співвідношень, що являють собою пару перетворень Фур'є для послідовності  $y(n)$ .

Таким чином, показано, що й для дискретних систем згортка в області часу відповідає добутку образів в частотній області. Отже, частотна характеристика  $H(e^{i\omega})$  є відгуком системи на обмежений клас вхідних послідовностей вигляду  $e^{i\omega n}$ ,  $0 \leq \omega \leq 2\pi$ . Але, з урахуванням співвідношення (2.85), яке показує, що довільні послідовності є суперпозицією подібних експонент, вони є важливим засобом опису відгуку системи майже на будь-які вхідні послідовності.

#### 2.4.4. Зв'язок між неперервними та дискретними системами

Пара перетворень Фур'є для неперервної функції (коливання)  $x(t)$  має вигляд

$$X(i\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\Omega t} dt, \quad (2.89)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\Omega)e^{i\Omega t} d\Omega, \quad (2.90)$$

де  $\Omega$  – частота неперервних коливань,  $X(i\Omega)$  – образ неперервного Фур'є-перетворення неперервної функції  $x(t)$ .

Аналогічні співвідношення для дискретизованого коливання  $x(nT_d)$  мають вигляд

$$X(e^{i\omega T_d}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d)e^{-i\omega n T_d}, \quad (2.91)$$

$$x(nT_d) = \frac{T_d}{2\pi} \int_{-\pi/T_d}^{\pi/T_d} X(e^{i\omega T_d}) e^{i\omega n T_d} d\omega. \quad (2.92)$$

Оскільки  $x(nT_d) = x(t)|_{t=nT_d}$ , то можна зв'язати  $X(i\Omega)$  та  $X(e^{i\omega T_d})$ , якщо обчислити інтеграл (2.90) для  $t = nT_d$ . Замінімо інтеграл з нескінченними межами нескінченною сумою інтегралів на інтервалах довжиною  $2\pi/T_d$ . Таким чином,

$$x(nT_d) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi/T_d}^{(2k+1)\pi/T_d} X(i\Omega)e^{i\Omega n T_d} d\Omega. \quad (2.93)$$

Змінюючи в (2.93) порядок дій та замінюючи  $\Omega$  на  $\omega$ , одержимо

$$x(nT_d) = \frac{T_d}{2\pi} \int_{-\pi/T_d}^{\pi/T_d} \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega + \frac{2\pi}{T_d}k\right) e^{i\omega n T_d} d\omega. \quad (2.94)$$

Прирівняємо вирази під інтегралами в (2.94) та (2.92). Шукане співвідношення набуває вигляду

$$X(e^{i\omega T_d}) = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega + \frac{2\pi}{T_d}k\right). \quad (2.95)$$

З цієї формули видно, що періодична частотна функція послідовності складається з суми нескінченного числа частотних компонент неперервного коливання. Якщо спектр неперервного коливання обмежений у смузі діапазоном частот  $|\Omega| \leq \pi/T_d$ , тобто  $X(i\Omega) = 0$  при  $|\Omega| > \pi/T_d$ , то з (2.95) випливає, що в діапазоні частот  $|\omega| \leq \pi/T_d$

$$X(e^{i\omega T_d}) = \frac{1}{T_d} X(i\omega). \quad (2.96)$$

У цьому випадку спектр дискретизованої послідовності безпосередньо пов'язаний зі спектром неперервного коливання, як це показано на рис.

Якщо ж  $X(i\Omega)$  не обмежений діапазоном  $|\Omega| \leq \pi/T_d$ , то співвідношення між спектрами дискретизованого та неперервного коливань виявляється більш складним. Це спричиняється тим, що частоту дискретизації  $1/T_d$  було обрано не досить великою і високочастотні складові спектру  $X(i\Omega)$  опинились в області більш низьких частот в спектрі  $X(e^{i\omega T})$ . Таке зміщення спектральних складових із одного діапазону частот в інший називають *накладанням* спектрів, що приводить до спотворювання спектра дискретизованого сигналу, а у підсумку – і значень відновленого неперервного сигналу  $x_b(t)$ .

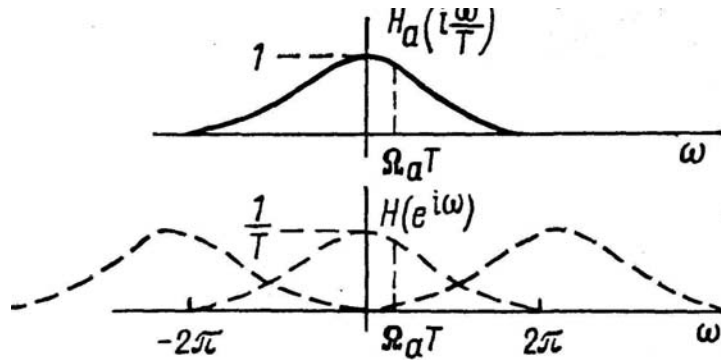


Рис. 2.1. Схема накладання спектрів

## 2.5. Застосування перетворення Лапласа

Перетворення Лапласа

$$x(p) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt, \quad p = \sigma + i\omega, \quad (2.97)$$

одиночного ідеального імпульсу дає

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-pt} dt = 1, \quad (2.98)$$

а його застосування до імпульсу, що зсунутий на  $kT_0$ :

$$\mathcal{L}\{\delta(t - kT_0)\} = e^{-kT_0 p}. \quad (2.99)$$

З урахуванням цих співвідношень рівняння (2.97) набуває вигляду

$$\mathcal{L}\{x^*(t)\} = x^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)e^{-kT_0 p}. \quad (2.100)$$

Звідси випливає, що перетворення Лапласа дискретної функції часу є періодичною функцією із частотою повторення

$$\omega_0 = 2\pi/T_0, \quad (2.101)$$

оскільки  $x^*(p + ik\omega_0) = x^*(p)$ .

Отже, якщо  $x^*(\delta + i\omega)$  відома для всіх значень змінної  $\sigma$  на інтервалі  $-\omega_0/2 \leq \omega \leq \omega_0/2$ , тобто в межах основної смуги площини  $p$ , то вона визначена на всій площині.

### 2.5.1. Фіксатор

Фіксатор (екстраполятор нульового порядку) на період, що дорівнює такту квантування, фіксує миттєве значення дискретного сигналу  $x(kT_0)$ . На виході фіксатора формується ступінчастий сигнал.

Припустимо, що на вхід фіксатора поступає послідовність імпульсів (2.97), перетворення Лапласа якої має вигляд (?). Виходом фіксатора являється ступінчастий сигнал

$$m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)[1(t - kT_0) - 1(t - (k-1)kT_0)].$$

Для нього перетворення Лапласа визначається виразом

$$m(p) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)e^{-kT_0p} \frac{1}{p} [1 - e^{-T_0p}].$$

Звідси одержуємо передаточну функцію екстраполятора нульового порядку

$$H(p) = \frac{m(p)}{x^*(p)} = \frac{1}{p} [1 - e^{-T_0p}]. \quad (2.102)$$

На низьких частотах він поводить себе подібно фільтру з передаточною функцією аперіодичного ланцюга

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H(i\omega) = \frac{T_0}{1 + T_0i\omega}. \quad (2.103)$$

## 2.6. Z-перетворення

Для аналітичного подання та дослідження дискретизованих послідовностей, а також процедур їхньої обробки досить корисним є Z-перетворення. Воно визначається таким чином: для послідовності  $x(n)$ ,  $-\infty < n < \infty$ , її Z-перетворення визначається як

$$X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (2.104)$$

Змінна  $z$  зазвичай запроваджується через оператор Лапласа  $z = e^{pt}$ . Якщо зафіксувати  $t = T_0$ , то

$$z = e^{T_0p} = e^{T_0(\sigma+i\omega)} = e^{T_0\sigma} [\cos T_0\omega + i \sin T_0\omega] \quad (2.105)$$

і замістимо її у рівняння (2.100).

$$X(z) = Z\{x(nT_0)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_0)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \quad (2.106)$$

Вислів  $X(z)$  називається Z-образом послідовності  $x(n)$  і є визначеним тільки для тих значень  $z$ , за яких степеневий ряд (2.106) збігається.

Щоб виявити умову збіжності ряду (2.106), розглянемо таку заміну  $z = re^{i\varphi}$ , що є більш узагальненою порівняно із (2.105).

Умовою збіжності ряду (2.106) є:

$$|X(z)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|r^{-n} < \infty, \quad (2.107)$$

де  $r = |z|$ .

Збіжність цього ряду має місце у таких випадках:

- якщо послідовність  $x(n)$  має обмежену довжину  $N_1 \leq n \leq N_2$ , де  $N_1, N_2$  – скінченні, то її  $Z$ -перетворення збігається скрізь у площині комплексної змінної  $z$  (за винятком, можливо, точок  $z = 0$  та  $z = \infty$ );
- якщо послідовність  $x(n)$  *каузальна*, тобто є фізично реалізуємою,  $x(n) = 0$  при  $0 \leq N_1 \leq n < \infty$ ,  $X(z)$  збігається всюди поза колом деякого радіуса  $R_1$ ;
- якщо послідовність  $x(n)$  *некаузальна*, (фізично нереалізуєма), тобто  $x(n) \neq 0$  лише за  $-\infty \leq n \leq N_2 < 0$ , то її  $Z$ -образ  $X(z)$  збігається в середині круга деякого радіуса  $R_2$ ;
- якщо послідовність  $x(n)$  визначена в інтервалі  $-\infty < N_1 \leq n \leq N_2 < +\infty$ , то  $X(z)$  збігається у кільці, що обмежене колами радіусів  $R_1$  та  $R_2$ ,  $R_1 < R_2$ .

Величини  $R_1$  та  $R_2$  залежать від розташування особливих точок (*полісів*) функції  $X(z)$ . Графічне зображення особливих точок  $z_k^*$ ,  $k = \overline{1, M}$ , разом із нулями  $z_l^0$ ,  $l = \overline{1, N}$  тієї самої функції  $X(z)$  в  $z$ -площині, називається *картою нулів і полісів*.

*Приклад.* Розглянемо послідовність  $x(n) = a^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  при  $|a| < 1$ , яка для  $a = 0,8$  показана на рис.  $Z$ -образ послідовності згідно з ?? буде:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

Для визначення нулів і полісів перетворимо  $X(z)$  до вигляду  $X(z) = \frac{z}{z - a}$ . Функція  $X(z)$  містить один нуль (тобто корінь чисельника виразу)  $z_1^0 = 0$  та один поліс (корінь дільника)  $z_1^* = a$ . Радіус збіжності  $R = |a| = 0,8$ , а область збіжності (оскільки послідовність  $x(n)$  каузальна) міститься поза колом радіуса  $R$ , тобто  $|z| > 0,8$ .

Розглянемо  $Z$ -перетворення типових дискретизованих сигналів  $x(n)$ , які використовуються при аналізі дискретних систем обробки даних.

1. Дана ступінчаста функція  $x(n) = 1(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  (тобто одиничний стрибок). Згідно з (2.106) маємо:

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}, \quad |z| > 1$$

2. Для експоненційної функції  $x(n) = e^{-an}$  ( $a$  – дійсне число) маємо:

$$X(z) = 1 + [e^a \cdot z]^{-1} + [e^a \cdot z]^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - [e^a \cdot z]^{-1}} = \frac{z}{z - e^a} = \frac{z}{z + a_1};$$

$$|e^a \cdot z| > 1, \quad a_1 = -e^{-a}.$$

3.  $Z$ -перетворення комплексної експоненти

$$x(n) = e^{in\omega_0}, \quad n \geq 0, \quad x(n) = 0 \text{ коли } n < 0$$

буде

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\omega_0 n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1} e^{i\omega_0})^n = \frac{1}{1 - z^{-1} e^{i\omega_0}} = \frac{z}{z - e^{i\omega_0}}, \quad |z| > 1.$$

4. Гармонічне (синусоїдальне) коливання  $x(n) = \sin \omega_1 n$ . Запишемо цього у вигляді  $\sin \omega_1 n = \frac{1}{2i} [e^{i\omega_1 n} + e^{-i\omega_1 n}]$ . Враховуючи результат, що отримано у попередньому прикладі, маємо:

$$X(z) = \frac{1}{2i} \left[ \frac{z}{z - e^{i\omega_1 T_0}} - \frac{z}{z - e^{-i\omega_1 T_0}} \right].$$

$$X(z) = \frac{\sin(\omega_1) \cdot z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_1 + z^{-2}} = \frac{z \sin \omega_1}{z^2 - 2z \cos \omega_1 + 1}. \quad (2.108)$$

Аналогічним чином можна одержати  $Z$ -перетворення й інших функцій.



### 2.6.1. Властивості $Z$ -перетворення

Наведемо основні властивості  $Z$ -перетворення, які використовуються при обчисленні  $z$ -перетворень функцій.

1. Лінійність:

$$\mathcal{Z}\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = a\mathcal{Z}\{x_1(n)\} + b\mathcal{Z}\{x_2(n)\} = aX_1(z) + bX_2(z). \quad (2.109)$$

2. Зсув вправо (затримка):

$$\mathcal{Z}\{x(n - m)\} = z^{-m}X(z), \quad m \geq 0. \quad (2.110)$$

3. Зсув вліво (випередження):

$$\mathcal{Z}\{x_1(n + m)\} = z^m \left[ X(z) - \sum_{j=0}^{m-1} x_1(j)z^{-j} \right], \quad m \geq 0. \quad (2.111)$$

4. Масштабування по  $z$ :

$$\mathcal{Z}\{x(n)e^{-an}\} = X(ze^a). \quad (2.112)$$

5. Початкове значення:

$$x(+0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z). \quad (2.113)$$

6. Кінцеве значення:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z). \quad (2.114)$$

7. Згортка послідовностей:

$$\mathcal{Z} \left\{ \sum_{m=0}^n x(m)h(n-m) \right\} = \mathcal{Z} \left\{ \sum_{m=0}^n h(m)x(n-m) \right\} = X(z)H(z). \quad (2.115)$$

#### Приклад.

Використовуючи властивість 4 (масштабування), знайти  $z$ -перетворення функції  $x(t) = e^{-at} \sin \omega t$ . Її дискретизоване подання має вигляд  $x(n) = e^{-an} \sin \omega n$ . Замістимо  $ze^a$  у вираз (2.112):

$$\mathcal{Z}\{e^{-an} \sin \omega n\} = \frac{ze^{-a} \sin \omega T_0}{z^2 - 2ze^{-aT_0} \cos \omega T_0 + e^{-2aT_0}}. \quad (2.116)$$

Визначимо скінчене значення функції  $f(kT_0)$  для заданого  $z$ -перетворення

$$F(z) = \frac{0,792z^2}{(z-1)(z^2 - 0,416z + 0,208)}.$$

Перед тим, як застосовувати теорему про скінченне значення, треба переконатись, що функція

$$(1 - z^{-1})F(z) = \frac{0,792z^2}{z^2 - 0,416z + 0,208}$$

не має полюсів на одиничному колі  $|z| = 1$  або за його межами. Це дійсно так, тож

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT_0) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0,792z}{z^2 - 0,416z + 0,208} = 1.$$

### 2.6.2. Обернене $Z$ -перетворення

На відміну від перетворення Лапласа, для якого прямий та обернений переходи  $x(t) \rightarrow X(p)$  та  $X(p) \rightarrow x(t)$  виконуються однозначно,  $z$ -перетворення  $x(t) \rightarrow X(z)$  та  $X(z) \rightarrow x(t)$  цієї властивості не має. Це пов'язано з тим, що  $z$ -перетворення не враховує поведінку функції  $x(t)$  в проміжках між моментами квантування  $nT_d$ . Однак перетворення  $x(n) \rightarrow X(z)$  та обернене перетворення  $X(z) \rightarrow x(n)$  взаємно однозначні.

Формально обернене  $Z$ -перетворення визначається співвідношенням

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{n-1} dz. \quad (2.117)$$

де  $C$  – замкнений контур, що обходиться у додатному (проти стрілки годинника) напрямку і який міститься в області збіжності  $X(z)$  та охоплює початок координат  $z$ -площини. Таким контуром інтегрування може слугувати коло радіуса  $C > R_1$ , де  $R_1$  – радіус збіжності ряду  $X(z)$  (тобто припускається, що послідовність  $x(n)$  є фізично реалізуємою).

Інтеграл такого типу обчислюється кількома способами, серед яких найбільш поширеними є такі:

- пряме обчислення з використанням теореми про лишки;
- розкладанням  $X(z)$  на прості дроби та використанням таблиць перетворень.

Перший спосіб ґрунтується на відомій у теорії функцій комплексної змінної теоремі, яка стверджує, що контурний інтеграл (2.117) можна знайдено безпосередньо через лишки підінтегральної функції:

$$x(n) = \sum \text{res} X(z) z^{n-1}. \quad (2.118)$$

Другий спосіб ґрунтується на припущенні, що  $X(z)$  можна надати вигляд

$$X(z) = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - q_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})} = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{1 - p_i z^{-1}}, \quad (2.119)$$

де  $q_i$ ,  $i = \overline{1, M}$  – нулі функції  $X(z)$ ,  $p_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  – полюси функції  $X(z)$ ,  $A$  – довільна стала.

На практиці обернене  $Z$ -перетворення обчислюють шляхом запису функції  $X(z)$  як суми елементарних членів, які містяться в таблицях  $Z$ -перетворень, або поділивши чисельник функції  $X(z)$  на її знаменник. У цьому випадку одержуємо ряд за степенями  $z^{-k}$ :

$$X(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots$$

Порівнюючи цей вираз із (2.106), одержуємо:

$$x(0) = c_0; \quad x(1) = c_1; \quad x(2) = c_2; \dots$$

## 2.7. Дискретна передаточна функція

Припустимо, що квантувальний розташовано на вході лінійної системи з передаточною функцією  $G(p)$  або імпульсною перехідною функцією  $g(t)$ , яка визначає реакцію системи на стрибок  $\delta(t)$ .

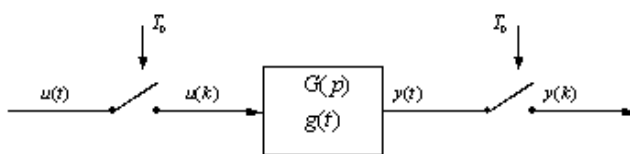


Рис. 2.2. Структурна схема лінійної системи з імпульсним входом та виходом

Імпульсний вхідний сигнал, що надходить в систему, описується виразом

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)\delta(t - kT_0). \quad (2.120)$$

Звідси, вихідний сигнал виражається згорткою

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)g(t - kT_0). \quad (2.121)$$

У випадку синхронного квантування вхідного та вихідного сигналів при  $t = nT_0$

$$y(nT_0) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)g[(n - k)T_0] = \sum_{k=0}^{\infty} u[(n - k)T_0]g(kT_0). \quad (2.122)$$

Використаємо властивість (2.121) згортки та рівняння (2.122):

$$y^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT_0)e^{-nT_0p} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)g[(n - k)T_0]e^{-nT_0p}. \quad (2.123)$$

Підставимо  $q = n - k$ .

$$\begin{aligned} y^*(p) &= \sum_{q=-k}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)g[qT_0]e^{-qT_0p}e^{-kT_0p} = \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_0)e^{-qT_0p} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)e^{-kT_0p}; \\ y^*(p) &= G^*(p)u^*(p). \end{aligned} \quad (2.124)$$

Звідси дискретну передаточну функцію можна визначити як

$$G^*(p) = \frac{y^*(p)}{u^*(p)} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_0)e^{-qT_0p}. \quad (2.125)$$

Переходячи до змінної  $z = e^{T_0p}$ , одержимо:

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_0)z^{-q} = \mathcal{Z}\{g(q)\}. \quad (2.126)$$

Таке перетворення можна умовно виразити як перехід

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(p)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{K'}{p + a}\right\} = \frac{K'z}{z - e^{-aT_0}}. \quad (2.127)$$

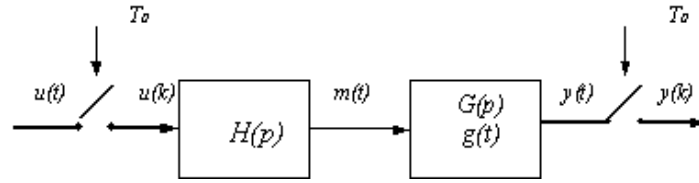


Рис. 2.3. Структурна схема лінійної системи з екстраполятором нульового порядку

Якщо на вході неперервної системи розташовано екстраполятор нульового порядку, дискретна передаточна функція імпульсної системи набуває вигляду

$$HG(z) = \mathcal{Z}\{H(p)G(p)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1 - e^{-T_0 p}}{p}G(p)\right\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(p)}{p}\right\}. \quad (2.128)$$

**Приклад 1.** Розглянемо аперіодичний ланцюг із передаточною функцією (без екстраполятора на вході).

$$G(p) = \frac{K}{Tp + 1} = \frac{K'}{p + a}.$$

Імпульсна перехідна функція  $g(t) = K'e^{-at}$ . Підставимо  $t = kT_0$ .

$$g(kT_0) = K'e^{-akT_0}.$$

Використовуючи визначення (2.127), одержимо

$$G(z) = \frac{K'z}{z - e^{-aT_0}} = \frac{b_0}{1 + a_1z^{-1}}.$$

Обчислимо параметри цієї передаточної функції при  $K = 1$ ;  $T = 7,5\text{с}$ ;  $T_0 = 4\text{с}$ .

$$b_0 = K' = K/T = 0,1333; \quad a_1 = -e^{-aT_0} = -0,5866.$$

**Приклад 2.** Додамо на вхід системи екстраполятор.

$$\begin{aligned} HG(z) &= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{K'}{p(p+a)}\right\} = \frac{z-1}{z}\frac{(1 - e^{-aT_0})z}{(z-1)(z - e^{-aT_0})}\frac{K'}{a} = \\ &= \frac{(1 - e^{-aT_0})K'}{(z - e^{-aT_0})a} = \frac{b_0z^{-1}}{1 - a_1z^{-1}}. \end{aligned}$$

Підставимо у цей вираз ті ж значення параметрів, що й у попередньому прикладі:

$$a_1 = -e^{-aT_0} = -0,5866; \quad b_0 = (1 - e^{-aT_0})\frac{K'}{a} = 0,4134.$$

### 2.7.1. Побудова дискретних моделей на основі неперервних моделей

Динамічні властивості лінійної стаціонарної системи з зосередженими параметрами сповна визначаються її диференціальним рівнянням

$$\begin{aligned} a_m y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + y(t) = \\ = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + u(t). \end{aligned} \quad (2.129)$$

В результаті застосування до цього рівняння (за нульових початкових умов) перетворення Лапласа одержимо передаточну функцію системи у вигляді

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_{m-1} p^{m-1} + b_m p^m}{1 + a_1 p + \dots + a_{m-1} p^{m-1} + a_m p^m} = \frac{B(p)}{A(p)}. \quad (2.130)$$

Аналогічним чином, за наявності різницевого рівняння системи

$$\begin{aligned} y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_my(k-m) &= \\ &= b_0u(k) + b_1u(k-1) + \dots + b_mu(k-m), \end{aligned} \quad (2.131)$$

можна побудувати дискретну передаточну функцію за допомогою теореми про зсув вправо:

$$Y(z)[1 + a_1z^{-1} + \dots + a_mz^{-m}] = U(z)[b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m}]. \quad (2.132)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_mz^{-m}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}. \quad (2.133)$$

За наявності в системі ланцюга із запізненням  $D(p) = e^{-T_t p}$  згідно теоремі про зсув вліво йому відповідає передаточна функція  $D(z) = z^{-d}$ , якщо  $T_t = dT_0$ ,  $d = 1, 2, \dots$

Імпульсну перехідну функцію дискретної системи можна визначити за різницеvim рівнянням, поклавши

$$u(0) = 1, \quad u(k) = 0 \text{ при } k > 0.$$

Згідно (2.131) це означає, що на вхід системи подано одиничний імпульс. Замістивши ці величини в різницеве рівняння, що записане в формі

$$y(k) = b_0u(k) + \dots + b_mu(k-m) - a_1y(k-1) - \dots - a_ny(k-n),$$

одержимо послідовність значень імпульсної перехідної функції:

$$\left. \begin{aligned} g(0) &= b_0; \\ g(1) &= b_1 - a_1g(0), \\ g(2) &= b_2 - a_1g(1) - a_2g(0), \\ &\vdots \\ g(k) &= b_k - a_1g(k-1) - \dots - a_kg(0) \text{ при } k \leq m, \\ g(k) &= b_k - a_1g(k-1) - \dots - a_kg(0) \text{ при } k > m \end{aligned} \right\} \quad (2.134)$$

При малих тактах квантування різницеві рівняння можна одержати шляхом дискретизації диференціальних рівнянь, замінюючи відповідні похідні різницеvими формулами.

## 2.8. Дискретне перетворення Фур'є

Ми вже розглядали неперервне перетворення Фур'є та його властивості.

Нагадаємо, що перетворення Фур'є неперервної функції  $f(t)$  має вигляд

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (2.135)$$

Основною властивістю перетворення Фур'є являється його спроможність розрізняти коливання різних частот в адитивних комбінаціях. В термінах, що застосовуються при обробці сигналів, перетворення Фур'є запроваджується для того, щоб представити сигнал у частотній області, коли аргумент  $\omega$  сприймається як частота. Перетворення (2.135) є лінійним й існує обернене перетворення

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.136)$$

Спектральна функція  $F(i\omega)$  є комплексозначною функцією з дійсною та уявною частинами, яку у експоненційній формі можна подати як

$$F(i\omega) = |F(i\omega)|e^{i\varphi(\omega)}, \quad (2.137)$$

де  $|F(i\omega)|$  називається амплітудним спектром, а  $\varphi(\omega) = \arg F(i\omega)$  називається фазовим спектром.

Хоча говорити про перетворення Фур'є від послідовності відліків безглуздо, можна зв'язати дискретну послідовність чисел  $f(nT)$  із функцією в часі:

$$f^*(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(nT)1(t - nT), \quad (2.138)$$

яка має перетворення Фур'є

$$F^*(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-i\omega nT} = F(e^{i\omega T}). \quad (2.139)$$

Вочевидь, послідовність рівновіддалених імпульсів (2.137) має спектр, який є *періодичним* відносно частоти з періодом  $2\pi/T$ .

### 2.8.1. Теорема відліків

При дискретизації сигналів актуальним є питання вибору оптимальних інтервалів дискретизації.

Якщо  $x(t)$  - сигнал протяжністю  $T$ , для якого  $S(\omega) = 0$  при  $\omega > \omega_0$ , то

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} S(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.140)$$

Його  $T = 2\omega_0$ -періодичне подовження можна подати у вигляді ряду Фур'є

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in2\pi\omega/(2\omega_0)}, \quad (2.141)$$

де

$$C_n = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} S(\omega)e^{-in2\pi\omega/(2\omega_0)} d\omega. \quad (2.142)$$

Заміщення виразу (2.141) у (2.140) дає

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in2\pi\omega/(2\omega_0)} \right) e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega(t+n\pi/\omega_0)} d\omega. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Виконуючи операцію інтегрування, дістаємо

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \frac{[e^{i\omega(t+k\pi/\omega_0)}]_{-\omega_0}^{\omega_0}}{i(t+k\frac{\pi}{\omega_0})}. \quad (2.144)$$

Позначимо  $t_* = t + k\frac{\pi}{\omega_0}$ . Перетворимо вираз  $e^{i\omega t_*} |_{-\omega_0}^{\omega_0}$ , використовуючи формулу Ейлера. Маємо

$$e^{i\omega t_*} |_{-\omega_0}^{\omega_0} = \cos(\omega_0 t_*) - \cos(-\omega_0 t_*) + i \sin(\omega_0 t_*) - i \sin(-\omega_0 t_*) = i2 \sin \omega_0 t_*.$$

Маючи на увазі заміну  $t_* = t + k\frac{\pi}{\omega_0}$ , дістаємо

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \frac{\sin \omega_0 \left( t + k\frac{\pi}{\omega_0} \right)}{t + k\frac{\pi}{\omega_0}}. \quad (2.145)$$

Рівняння (2.143) справджується для різних значень  $t$ . При  $t = -k\pi/\omega_0$  воно набуває вигляду:

$$x\left(-k\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\omega_0}^{\omega_0} S(\omega) e^{-i\omega k\pi/\omega_0} d\omega. \quad (2.146)$$

Оскільки в рівнянні (2.146) вираз інтегралу такий же, як і в рівнянні (2.142), то поділивши відповідно ліві і праві частини цих рівнянь, доходимо до того, що

$$C_k = \frac{\pi}{\omega_0} x\left(-k\frac{\pi}{\omega_0}\right). \quad (2.147)$$

Позначимо величину  $\pi/\omega_0$ , яка має розмірність часу, як

$$\tau = \pi/\omega_0 = 1/(2f_*). \quad (2.148)$$

При цьому  $C_k = \tau x(-k\tau)$ . Замістимо це значення у рівняння (2.145) й також замінімо  $\pi/\omega_0$  на  $\tau$ :

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tau x(-k\tau) \frac{\sin \omega_0(t + k\tau)}{t + k\tau}. \quad (2.149)$$

Враховуючи, що  $\pi/\tau = \omega_0$  і змінюючи знак біля  $k$  на обернений, оскільки підсумовування виконується у нескінченних межах, дістаємо такий вираз для розкладання функції  $x(t)$  у ряд

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\tau) \frac{\sin \omega_0(t - k\tau)}{\omega_0(t - k\tau)}. \quad (2.150)$$

Цей ряд називають *рядом Котельникова*.

Оскільки згідно з (2.148)  $\tau = 1/(2f_*)$ , із рівняння (2.150) випливає, що функція  $x(t)$ , спектр якої обмежено круговою частотою  $\omega_0$  і відповідно частотою  $f_* = \omega_0/(2\pi)$ , однозначно визначається її відліками, що беруться через інтервали часу  $\tau$ . Зменшення інтервалів дискретизації порівняно із  $\tau = 1/(2f_*)$  нічого не дає, оскільки функція  $x(t)$  згідно з висновками сповна подана її відліками. Але на практиці інтервал між точками відліків (подекуди його називають *інтервалом Найквіста*) обирають дещо меншим за  $\tau = 1/(2f_*)$ .

**Теорема відліків.** Якщо  $x(t)$  такий сигнал протяжністю  $T$ , що розкладання в ряд Фур'є його  $T$ -періодичного подовження не містить гармонік вище номера  $N/2$ , то  $x(t)$  сповна визначається множиною значень

$$x\left(\frac{kT}{N+1}\right), \quad k = \overline{1, N}. \quad (2.151)$$

Крім того, він може бути відтворений за цими значеннями таким чином:

$$x(t) = \sum_{k=1}^N x\left(\frac{kT}{N+1}\right) \frac{\sin\left[\frac{(N+1)\pi}{T}\left(t - \frac{kT}{N+1}\right)\right]}{\frac{(N+1)\pi}{T}\left(t - \frac{kT}{N+1}\right)}, \quad 0 \leq t < T. \quad (2.152)$$

Таким чином, можна стверджувати, що:

1. Теорема відліків встановлює мінімальну частоту відліків, яка гарантує збереження всієї інформації, що міститься в сигналі  $x(t)$ ; будь-яка частота відліків, що є вищою за мінімальну, також зберігає інформацію. Оскільки мінімальна кількість відліків на інтервалі часу  $T$  дорівнює  $(N+1)$ , то інтервал  $T_d$  між двома сусідніми відліками має задовольняти умову

$$T_d \leq \frac{T}{N+1}. \quad (2.153)$$

2. Оскільки  $B = Nf_0/2$  Гц – смуга сигналу, де  $f_0 = 1/T$  – основна частота, то нерівність (2.153) можна записати у такому вигляді

$$T_d \leq \frac{N}{2B(N+1)}. \quad (2.154)$$

3. Вираз (2.154) означає, що частота відліків  $f_s = 1/T_d$  має задовольняти умову  $f_s \geq 2B(1+1/N)$ , яка при  $N \gg 1$  приймає вигляд:  $f_s \geq 2B$  вибірок в секунду.

### 2.8.2. Дискретне перетворення Фур'є

Розглянемо способи обчислення Фур'є-перетворення для функції  $f(t)$ , що подана послідовністю  $N$  відліків  $f(nT_d)$ ,  $0 \leq n \leq N-1$ , де  $T_d$  – період дискретизації, тобто маємо обмежений у часі дискретизований сигнал. Тоді загальний інтервал часу спостереження за сигналом буде дорівнювати  $T = NT_d$ .

Для того, щоб дістати відповідне співвідношення для обчислення шуканого Фур'є-образу заданої функції, яке називається *дискретним* перетворенням Фур'є (ДПФ), необхідно у формулі (2.136) виконати такі зміни:

1. Замінити  $t$  на  $nT_d$ ;  $f(t)$  на  $f(nT_d)$ , а  $e^{-i\omega t}$  на  $e^{-i\omega nT_d}$ .
2. Інтеграл подати як суму прямокутників з висотою  $f(nT_d)$  і шириною  $T_d$ , тобто у вигляді

$$\int f(t)dt \approx T_d \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_d). \quad (2.155)$$

3. Якщо не враховувати у визначенні ДПФ операцію множення на сталу величину інтервалу дискретизації  $T_d$ , отримуємо таке співвідношення для визначення ДПФ:

$$F_d(i\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_d)e^{-i\omega nT_d}, \quad (2.156)$$

а із урахуванням формули Ейлера для експоненціальної функції  $e^{i\omega nT_d}$  маємо:

$$F_d(i\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_d) \cos(\omega nT_d) - i \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_d) \sin(\omega nT_d); \quad (2.157)$$

Таким чином, дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) можна сприймати як оцінку  $Z$ -перетворення скінченної послідовності  $f(nT)$  в  $N$  точках на  $z$ -площині, які рівномірно розташовано вздовж одиничного кола під кутами  $k\Omega$  радіан.



### 2.8.2.1. Властивості ДПФ

Ряд властивостей, які має ДПФ, є спільними з неперервним Фур'є-перетворенням, а саме:

1. Якщо вихідна дискретизована функція  $f(nT_d)$  парна, тобто  $f(nT_d) = f(-nT_d)$ , то спектральна функція  $F(i\omega)$  є також парною і визначається формулою

$$F(i\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_d) \cos(\omega nT_d). \quad (2.158)$$

2. Якщо вихідна дискретизована функція  $f(nT_d)$  непарна, тобто  $f(nT_d) = -f(-nT_d)$ , то спектральна функція  $F(i\omega)$  є також непарною і визначається співвідношенням

$$F(i\omega) = i \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_d) \sin(\omega nT_d). \quad (2.159)$$

3. Має місце властивість комплексної сполученості ДПФ.

Інші властивості притаманні лише ДПФ і є такими:

1. ДПФ періодична відносно змінної  $\omega$  із періодом  $\omega_d = 2\pi/T_d$ .

Справді, експоненційна функція, що входить у (2.156), періодична із періодом  $2\pi$ :

$$e^{-i\omega nT_d} = e^{-in(\omega T_d + 2\pi)} = e^{-inT_d(\omega + 2\pi/T_d)}.$$

Звідси випливає, що

$$F_d(i\omega) = F_d \left[ i \left( \omega + \frac{2\pi}{T_d} \right) \right],$$

що вказує на те, що спектр дискретизованого сигналу  $f(nT_d)$  періодично повторюється із періодом  $\omega_d = 2\pi/T_d$ . Це створює нескінченну послідовність копій спектра вихідної неперервної функції  $f(t)$ , яка будується на системі значень аргументу

$$\omega = \pm z\omega_d = \pm z \frac{2\pi}{T_d}, \quad z = 1, 2, \dots$$

Періодичність ДПФ обумовлює вимоги до частоти дискретизації  $\omega_d = 2\pi/T_d$ , з якою формуються вибірки функції  $f(nT_d)$ . Ця частота має бути такою, щоб спектри ДПФ, які повторюються, не перекривалися один із одним. Це має місце, коли найбільша частотна складова  $\omega_{\max}$  сигналу  $f(t)$  не перевищує половини частоти дискретизації  $\omega_d$ , тобто

$$\omega_{\max} < 0,5\omega_d = 0,5 \frac{2\pi}{T_d}. \quad (2.160)$$

2. Значення ДПФ співпадає зі значенням неперервного Фур'є-перетворення лише після його множення на інтервал дискретизації  $T_d$ .
3. ДПФ обчислюється лише для дискретних значень частоти  $\omega_k$ , які визначаються таким співвідношенням:

$$\omega_k = \frac{\omega_d}{N} k = \frac{2\pi}{NT_d} k, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Тепер, якщо у рівнянні (2.159) замінити аргумент  $\omega$  на  $\omega_k$ , то отримуємо стандартну форму запису ДПФ

$$F_d(i\omega_k) = F_d \left( i \frac{\omega_d k}{N} \right) = F_d \left( i \frac{2\pi k}{NT_d} \right) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_d) e^{-i\omega_k nT_d}. \quad (2.161)$$

Якщо в правій частині (2.161) замість  $\Omega_k$  підставити його значення із (2.160), то буде

$$F_d(i\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_d) e^{-i2\pi/Nkn},$$

або із урахуванням (2.157)

$$F_d(i\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_d) \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_d) \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right). \quad (2.162)$$

Отже, спектр функції  $f(nT_d)$ , що отримана дискретизацією із періодом  $T_d$  відповідної неперервної функції  $f(t)$ , є решітковою функцією, значення якої подано в точках  $\omega_k$  із кроком

$$\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{NT_d}(k+1-k) = \frac{2\pi}{NT_d}.$$

4. *Теорема лінійності.* Якщо  $X(m) \doteq C_x(k)$  і  $Z(m) = aX(m) + bY(m)$ , то

$$C_z(k) = aC_x(k) + bC_y(k). \quad (2.163)$$

5. *Теорема комплексної сполученості.* Якщо  $\{X(m)\} = \{X(0)X(1)\dots X(N-1)\}$  – така послідовність дійсних чисел, що  $N/2$  – ціле число і  $X(m) \doteq C_x(k)$ , то

$$C_x(N/2 + l) = \bar{C}_x(N/2 - l), \quad l = \overline{0, N/2}. \quad (2.164)$$

6. *Теорема зсуву.* Якщо  $X(m) \doteq C_x(k)$  і  $Z(m) = X(m+h)$ ,  $h = \overline{0, N-1}$ , то

$$C_z(k) = W^{-kh} C_x(k). \quad (2.165)$$

$$W = e^{-i\Omega T} = e^{-i(2\pi/N)}. \quad (2.166)$$

7. *Теорема згортки.* Якщо  $\{X(m)\}$  і  $\{Y(m)\}$  – послідовності дійсних чисел, для яких

$$X(m) \doteq C_x(k), \quad Y(m) \doteq C_y(k), \quad (2.167)$$

а згортки цих послідовностей визначаються як

$$Z(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y(m-k), \quad m = \overline{0, N-1}, \quad (2.168)$$

то

$$C_z(k) = C_x(k)C_y(k). \quad (2.169)$$

8. *Теорема кореляції.* Якщо  $\{X(m)\}$  та  $\{Y(m)\}$  – послідовності дійсних чисел, для яких  $X(m) \doteq C_x(k)$ ,  $Y(m) \doteq C_y(k)$ , а їхня функція кореляції визначається співвідношенням

$$\hat{Z}(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N_1} X(k)Y(m+k), \quad m = \overline{0, N-1}, \quad (2.170)$$

то

$$C_{\hat{z}}(k) = \bar{C}_x(k)C_y(k). \quad (2.171)$$

Обернене дискретне перетворення Фур'є (ОДПФ), яке дозволяє сформулювати дискретну послідовність вигляду  $x(nT_d)$  на основі відповідного ДПФ-зображення, дається співвідношенням

$$x(nT_d) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(i\omega_k) e^{i2\pi kM/N}. \quad (2.172)$$

*Приклад.* Знайти амплітудний спектр, використовуючи ДПФ спадаючого у часі сигналу  $\varphi(t)$ , який розглядався у прикладі 4 при таких значеннях частоти дискретизації:  $f_d = 4c^{-1}$  (або  $\omega_d = 2\pi f_d = 2\pi$ ).

Розрахунки спектра виконуємо у такій послідовності:

1. Період дискретизації:  $T_d = 1/f_d = 0,25c$ ;

Обсяг вибірки: при інтервалі спостереження  $T = 10c$   $N = T/T_d = 10/0,25 = 40$ ;

Значення вибірок обчислюємо згідно з такою формулою:

$$\varphi(nT_d) = 3e^{-\alpha nT_d} \sin(2\pi f_n T_d) = 3e^{-0,5n \cdot 0,25} \sin(2n\pi \frac{1}{\pi} 0,25) = 3e^{-0,125n} \sin 0,5n.$$

Використовуючи для обчислення функції  $\varphi(nT_d)$  формулу (2.162), записуємо

$$|\Phi(i\omega_k)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 \Phi(i\omega_k) + \operatorname{Im}^2 \Phi(i\omega_k)} = \sqrt{\left[ \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_d) \cos \frac{2\pi k}{N} n \right]^2 + \left[ \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_d) \sin \frac{2\pi k}{N} n \right]^2}. \\ k = \overline{0, N-1}.$$

Значення кругової частоти:  $\omega_k = 2\pi k / (NT_d) = \frac{2\pi}{40 \cdot 0,25} k = 0,628 \cdot k$ .

### 2.8.2.2. Обчислення дискретної згортки

Поняття дискретної згортки відіграє таку ж роль при аналізі дискретних сигналів, яку відіграє неперервна згортка при аналізі неперервних сигналів. Згортка відіграє фундаментальну роль при аналізі систем в частотній області (в просторі зображень).

Існує два типи дискретної згортки: *кругова* та *лінійна*.

Нехай  $x(nT)$  та  $y(nT)$  – дві періодичні послідовності з періодами по  $N$  відліків.

*Круговою згорткою* (періодичною або циклічною) таких послідовностей називається послідовність  $z(nT)$ , що визначається співвідношенням

$$z(nT_d) = \sum_{m=0}^{N-1} x(mT_d) y[(n-m)T_d], \quad n = 0, 1, \dots, N-1, N, N+1, \dots, 2(N-1). \quad (2.173)$$

Якщо тепер розглянути ДПФ-образи для кожної із вхідних та вихідних послідовностей  $x(mT_d)$  та  $y(nT_d)$ , які визначаються згідно з (2.161) як  $X(i\omega_k)$  і  $Y(i\omega_k)$  відповідно, то  $N$ -точкове ДПФ послідовності  $z(nT_d)$  дорівнюватиме

$$Z(i\omega_k) = X(i\omega_k) Y(i\omega_k), \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (2.174)$$

Для обчислення кругової згортки двох послідовностей необхідно:

1. Обчислити ДПФ послідовності  $x(nT)$ :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) W^{nk}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (2.175)$$

2. Обчислити ДПФ послідовності  $y(nT)$ :

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(nT) W^{nk}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (2.176)$$

3. Перемножити коефіцієнти ДПФ, що одержано:

$$Z(k) = X(k)Y(k). \quad (2.177)$$

4. Обчислити ОДПФ послідовності  $Z(k)$ :

$$z(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Z(k)W^{-nk}, \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (2.178)$$

Ця послідовність і буде шуканою згорткою.

*Лінійною згорткою* (аперіодичною) двох скінченних послідовностей  $x(nT_d)$  та  $y(nT_d)$  по  $N_1$  та  $N_2$  відліків відповідно називається послідовність  $z(nT_d)$ , що визначається співвідношенням

$$z(nT_d) = \sum_{l=0}^n y(lT_d)x[(n-l)T_d], \quad n = \overline{0, N_1 + N_2 - 2}, \quad (2.179)$$

або

$$z(nT_d) = \sum_{l=0}^n x(lT_d)y[(n-l)T_d], \quad n = \overline{0, N_1 + N_2 - 2}. \quad (2.180)$$

При цьому  $y(mT_d)$  і  $x[(n-m)T_d]$  дорівнюють нулю поза своїх інтервалів визначення  $[0, N_2 - 1]$  та  $(0, N_1 - 1]$  відповідно. Отримана в результаті виконання операції (2.180) послідовність  $z(nT_d)$  є скінченною і має довжину в  $(N_1 + N_2 - 1)$  відліків.

Вочевидь, якщо представити послідовності  $x(nT_d)$  та  $y(nT_d)$  як послідовності, що визначені на періоді  $N_1 + N_2 - 2$  шляхом їхнього подовження на цьому інтервалі  $x(nT_d) = 0, n = N_1, N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2 - 2, y(nT_d) = 0, n = N_2, N_2 + 1, \dots, N_2 + N_1 - 2$ , то згортка стане круговою з періодом  $N_1 + N_2 - 2$ .

Алгоритм обчислення лінійної згортки  $z(nT_d)$  двох скінченних послідовностей  $x(nT_d)$  та  $y(nT_d)$  на основі кругової згортки виглядає так:

1. Оскільки період згортки  $z(nT_d)$  дорівнює  $(N_1 + N_2 - 1)$  відліків, то для отримання такого періоду при круговій згортці необхідно, щоб  $x(nT_d)$  та  $y(nT_d)$  мали по  $(N_1 + N_2 - 1)$  відліків, що досягається доповненням розмірів кожної з двох послідовностей відповідною кількістю нульових відліків.
2. Обчислюються  $(N_1 + N_2 - 1)$ -точкові ДПФ доповнених послідовностей  $x(nT_d)$  та  $y(nT_d)$  відповідно.
3. Здійснюється перемноження отриманих ДПФ-зображень  $X(i\omega_k)$  та  $Y(i\omega_k)$ .

$$Z(i\omega_k) = X(i\omega_k) \cdot Y(i\omega_k).$$

4. Обчислюється зворотне ДПФ для  $Z(i\omega_k)$ , що у підсумку дає шукану згортку  $z(nT_d)$ .

Розглянутий метод обчислення згортки двох скінченних послідовностей із використанням процедур ДПФ називається швидкою згорткою на протилежність методу прямого обчислення суми (2.180). Вислів “швидка” обумовлений тим, що для виконання ДПФ можна використати один із алгоритмів так званого *швидкого перетворення Фур’є (ШПФ)*, який буде розглянуто нижче.

Позначимо коефіцієнти перетворення Фур’є послідовності  $\{x(m)\}$  як  $C_x(k) = F_d(i\omega_k)$ .

**Спектр потужності.** Спектр потужності ДПФ визначається як

$$P(k) = |C_x(k)|^2, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (2.181)$$

Звідси витікає, що у наявності є тільки  $(N/2 + 1)$  незалежних спектральних точок ДПФ, коли  $\{X(m)\}$  є послідовністю дійсних чисел, що витікає з властивості комплексної сполученості (2.156). Цими точками є:

$$P(k) = |C_x(k)|^2, \quad k = \overline{0, N/2}. \quad (2.182)$$

З теореми зсуву (2.157) витікає, що спектр потужності є інваріантним до зсувів  $N$ -періодичної часової послідовності  $\{X(m)\}$ .

Спектр потужності (2.181) являє собою парну відносно точки  $k = N/2$  функцію. Амплітудний спектр визначається як

$$P(k) = |C_x(k)|, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (2.183)$$

**Фазовий спектр** для заданої часової послідовності визначається виразом

$$\Psi(k) = \arctg \left\{ \frac{I_x(k)}{R_x(k)} \right\}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (2.184)$$

Як й у випадку спектру потужності, у виразі (2.182) в наявності є тільки  $(N/2 + 1)$  незалежних точок фазового спектру ДПФ. Фундаментальною властивістю фазового спектру є інваріантність щодо множення  $\{X(m)\}$  на константу. Крім того, точки фазового спектру  $\Psi(k)$  відображають орієнтацію  $C_x(k)$  у двовимірному просторі.

Фазовий спектр, що визначається виразом (2.184), являє собою непарну відносно точки  $k = N/2$  функцію.

Обернене ДПФ-перетворення, яке переводить дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) в послідовність, із якої воно було обчислено, визначається за формулою

$$f(lT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k\Omega) e^{iTk/\Omega}, \quad (2.185)$$

Воно відрізняється від (2.156) тільки масштабним множником та знаком експоненти, як й у випадку неперервного перетворення Фур'є.

### 2.8.3. Швидке перетворення Фур'є

Набір алгоритмів, які називаються алгоритмами швидкого перетворення Фур'є, включає різноманітні методи зменшення часу обчислення ДПФ. Це, по суті, є детальним описом обчислювальних процедур, які не є очевидними способами обчислення значення на виході за даними на вході. Як правило, швидкі алгоритми не мають концептуальної простоти обчислювань на відміну від прямих алгоритмів, які записані у вигляді математичних формул і обчислюються згідно із цим записом.

Існує дві основні стратегії в побудові алгоритмів ШПФ, коли перша використовує перехід від ДПФ до згортки, яка потім обчислюється, а друга базується на переході від одновимірного перетворення Фур'є до двовимірного, яке обчислюється простішими способами.

Пряме обчислення за формулою (2.156) для всіх частот потребує  $N^2$  комплексних множень та додавань. Методи, що економлять машинний час, використовують деякі штучні засоби, які ґрунтуються на тому, що суму добутків можна спростити, якщо виконати додавання перед множенням, або на тому, що *комплексні операції* можуть бути замінені *дійсними операціями*.

Спільним для цих методів є те, що повне перетворення  $rN$  точок потребує в  $r^2$  більше часу, ніж перетворення  $N$  точок. У випадку, коли кількість точок у послідовності є не простим числом, економія операцій може бути досить значною. Так, коли  $N$  є степнем числа 2 (складається із максимальної кількості множників), алгоритми швидкого

перетворення Фур'є (ШПФ) потребують кількості обчислень не  $N^2$ , а  $N \log_2 N$ , що, наприклад, при  $N = 2^{10}$  дає 99% економію в обчисленнях.

Нехай  $\{X(m), m = \overline{0, N-1}\}$  – послідовність, що одержано внаслідок дискретизації сигналу  $x(t)$  із обмеженою смугою частот.

Коефіцієнти дискретного перетворення Фур'є послідовності  $\{x(n), n = \overline{0, N-1}\}$  позначимо  $C_x(k) = F_d(i\omega_k)$ , тобто

$$C_x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{kn}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (2.186)$$

де  $W = e^{-i\Omega T} = e^{-i(2\pi/N)}$ . Передбачається, що  $N = 2^n$ ,  $n = \overline{1, n_{\max}}$ ,  $N \geq 2BL$ ,  $B$  – смуга частот сигналу  $x(t)$ ,  $\Gamma_c$ ,  $L$  – його протяжність.  $N$  може бути представленим й за іншою основою  $N = r^n$ .

Треба одержати алгоритм для обчислення ДПФ послідовності  $\{x(m)\}$ .

Розглянемо випадок послідовності  $\{x(m)\}$  із дійсними коефіцієнтами при  $N = 8 = 2^3$ . Із властивості  $C_x(4+l) = \overline{C_x(4-l)}$ ,  $l = 1, 2, 3$ . Тому в (2.186) досить обчислити

$$C_x(k) = \frac{1}{8} \sum_{m=0}^7 X(m)W^{km}, \quad k = \overline{0, 4}, \quad (2.187)$$

де  $W = e^{-i\pi/4}$ .

Із (2.187) маємо

$$8C_x(k) = \sum_{m=0}^7 x(m) \cos\left(\frac{mk\pi}{4}\right) - i \sum_{m=0}^7 x(m) \sin\left(\frac{mk\pi}{4}\right) = A(k) - iB(k),$$

де

$$A(k) = \sum_{m=0}^7 x(m) \cos\left(\frac{mk\pi}{4}\right); \quad B(k) = \sum_{m=0}^7 x(m) \sin\left(\frac{mk\pi}{4}\right), \quad k = \overline{0, 4}. \quad (2.188)$$

Якщо ввести у розгляд такі матриці:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.189)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

вирази (2.188) можна записати у вигляді  $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{X}$ , де  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  – вектори розмірності 5,  $\mathbf{X}$  – вектор розмірності 8, елементами якого є значення послідовності  $\{x(m)\}$ ,  $\mathbf{C}$  і  $\mathbf{S}$  – матриці розмірності  $5 \times 8$ , елементи яких визначаються згідно з (2.188) тригонометричними функціями косинуса та синуса відповідно при різних значеннях  $k$  ( $k = \overline{0, 4}$ ) та  $m$  ( $m = \overline{0, 7}$ ).

Аналіз матриць  $C$  і  $S$  показує, що їхні елементи у своїй більшості повторюються. Причиною цього є такі обставини:

1) властивості (періодичність) тригонометричних функцій, значення яких формують матриці  $C$  і  $S$  можна використати при визначенні відліків сигналу;

2) якщо  $N$  визначає число рівновіддалених відліків сигналу  $x(t)$ , то повторюваність елементів у матрицях  $C$  і  $S$  збільшується відповідно до кількості множників в  $N$ .

Подання  $N$  у вигляді  $N = 2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2$  називається зображенням  $N$  у вигляді добутку множників, що дає змогу значно скоротити час обчислень ДПФ.

Найбільш відомими алгоритмами ШПФ є алгоритми з проріджуванням за часом та за частотою.

#### 2.8.4. Алгоритм ШПФ з основою 2 (алгоритм Кулі-Тьюкі)

Основою для пошуку бажаного алгоритму є виявлення зв'язку між загальним виглядом матриць  $C$  та  $S$  та степенями  $W$ , а також використання такого подання чисел, яке допускає подальше узагальнення алгоритму ШПФ.

Кожне десяткове число  $m$ ,  $0 \leq m \leq N - 1$ , виражається у двійковому коді

$$m = m_{n-1}2^{n-1} + m_{n-2}2^{n-2} + \dots + m_12^1 + m_02^0, \quad (2.190)$$

де  $n = \log_2 N$ ,  $m_\nu = 0$  або  $m_\nu = 1$ ,  $\nu = \overline{0, n-1}$ .

Таким же чином кожне десяткове число  $k$ ,  $0 \leq k \leq N/2$ , записується як

$$k = k_{n-1}2^{n-1} + k_{n-2}2^{n-2} + \dots + k_12^1 + k_02^0.$$

Позначимо двійкове подання  $x(m)$  як  $\tilde{x}(m)$ :

$$x(m) = \tilde{x}(m_{n-1}2^{n-1} + m_{n-2}2^{n-2} + \dots + m_12^1 + m_02^0) = \tilde{x}(m_{n-1}, m_{n-2}, \dots, m_1, m_0). \quad (2.191)$$

Цей вираз приводить до такого важливого співвідношення:

$$\sum_{m=0}^{N-1} x(m)W^{km} = \sum_{m_0} \sum_{m_1} \dots \sum_{m_{n-1}} \tilde{x}(m_{n-1}, m_{n-2}, \dots, m_0)W^{k(m_{n-1}2^{n-1} + m_{n-2}2^{n-2} + \dots + m_12^1 + m_02^0)}. \quad (2.192)$$

Наприклад, для  $N = 4$  вираз (2.192) набуває вигляду

$$\sum_{m_0} \sum_{m_1} \tilde{x}(m_1, m_0)W^{k(2m_1 + m_0)} = \sum_{m=0}^3 x(m)W^{km}.$$

Подальше виведення алгоритму проводимо для  $N = 8$ .

$$C_x(k) = \frac{1}{8} \sum_{m=0}^7 x(m)W^{km}, \quad k = \overline{0, 7}, \quad (2.193)$$

де  $m = m_22^2 + m_12^1 + m_02^0$ .

З (2.192) та (2.193) маємо

$$\begin{aligned} 8C_x(k) &= \sum_{m_0} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \tilde{x}(m_2, m_1, m_0)W^{k[4m_2 + 2m_1 + m_0]} = \\ &= \sum_{m_0} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \tilde{x}(m_2, m_1, m_0)W^{4km_2} W^{2km_1} W^{km_0}. \end{aligned} \quad (2.194)$$

Позначимо

$$M_2 = \sum_{m_2} \tilde{x}(m_2, m_1, m_0)W^{4(km_2)}.$$

Замість у цей вираз двійкове подання  $k$  із урахуванням  $W^4 = -1$ . Дістанемо

$$M_2 = \sum_{m_2} \tilde{x}(m_2, m_1, m_0) (-1)^{m_2[4k_2+2k_1+k_0]}.$$

Оскільки  $(-1)^{m_2(4k_2+2k_1)} = 1$ , то  $M_2$  можна записати у вигляді

$$M_2 = \sum_{m_2} \tilde{x}(m_2, m_1, m_0) (-1)^{k_0 m_2}. \quad (2.195)$$

У цьому виразі підсумовування по  $m_2$  приводить до величини, яка є функцією  $k_0, m_1, m_0$ . Тож можна позначити

$$M_2 = \tilde{x}_1(k_0, m_1, m_0). \quad (2.196)$$

Це дозволяє замість (2.194) дістати

$$8C_x(k) = \sum_{m_0} \sum_{m_1} \tilde{X}_1(k_0, m_1, m_0) W^{2km_1} W^{km_0}. \quad (2.197)$$

Тепер знову позначимо внутрішню суму через  $M_1$ :

$$M_1 = \sum_{m_1} \tilde{X}_1(k_0, m_1, m_0) W^{2km_1} = \sum_{m_1} \tilde{X}_1(k_0, m_1, m_0) (-i)^{[4k_2+2k_1+k_0]m_1}.$$

Оскільки  $(-i)^{4k_2 m_1} = 1$ , то

$$M_1 = \sum_{m_1} \tilde{X}(k_0, m_1, m_0) (-i)^{m_1(2k_1+k_0)}. \quad (2.198)$$

Підсумовування по  $m_1$  у (2.198) дає функцію, яка залежить від  $k_0, k_1$  та  $m_0$ , тобто

$$M_1 = \tilde{X}_2(k_0, k_1, m_0). \quad (2.199)$$

Замість (2.197) маємо:

$$8C_x(k) = \sum_{m_0} \sum_{m_1} \tilde{X}_2(k_0, k_1, m_0) W^{km_0}.$$

Позначимо підсумовування по  $m_0$  через  $M_0 = \sum_{m_0} \tilde{X}_2(k_0, k_1, m_0) W^{km_0}$ , або

$$M_0 = \sum_{m_0} \tilde{X}(k_0, k_1, m_0) \left( \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^{(4k_2+2k_1+k_0)m_0}. \quad (2.200)$$

Підсумовування по  $m_0$  приводить до функції, яка залежить від  $k_0, k_1, k_2$ :

$$M_0 = \tilde{X}_3(k_0, k_1, k_2). \quad (2.201)$$

Це означає, що

$$8C_x(k) = 8\tilde{C}_x(k_2, k_1, k_0) = \tilde{X}_3(k_0, k_1, k_2), \quad (2.202)$$

Отже, формули (2.196), (2.198) та (2.201) задають операції, необхідні для обчислення коефіцієнтів ДПФ  $C_x(k)$ .

При  $N = 8$ ,  $\log_2 N = 3$  маємо такі формули:

Коефіцієнти  $(-1)$ ,  $(-i)$  та  $(1-i)/\sqrt{2}$  в цих формулах виражаються через корінь із одиниці,  $e^{-i2\pi}$ . Вочевидь,  $(-1)$ ,  $(-i)$  та  $(1-i)/\sqrt{2}$  є корені 2, 4 та 8-го степеня із одиниці. Тому позначимо

$$A_{2^r} = e^{-i2\pi/2^r}, \quad r = \overline{1, \log_2 N}. \quad (2.203)$$



$A_2^r$  є  $2^r$ -м корінь із одиниці.

$$A_{2^r} = W^{N/2^r}, \quad W = e^{-i2\pi/N}, \quad r = \overline{1, \log_2 N}, \quad (2.204)$$

$$(A_2)^{\lambda+l} = -(A_{2^r})^l, \quad \lambda = 2^{r-1}; \quad r = \overline{1, \log_2 N}, \quad l = \overline{0, 2^{r-1}}; \quad (A_N)^{N/2} = -1. \quad (2.205)$$

Тепер вираз (2.196) можна записати за допомогою  $A_{2^r}$ :

$$\tilde{X}_1(k_0, m_1, m_0) = \sum_{m_2} \tilde{X}(m_2, m_1, m_0) A_2^{k_0 m_2}. \quad (2.206)$$

Звідси

$$\tilde{X}_1(k_0, m_1, m_0) = \tilde{X}(0, m_1, m_0) + \tilde{X}(1, m_1, m_0) A_2^{k_0}. \quad (2.207)$$

Тут  $k_0$  може набувати значення 0 або 1. Відповідно для кожного значення  $k_0$  запишемо по чотири рівняння відносно змінних  $m_1$  та  $m_0$ :

*Випадок 1:*  $k_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(0, 0, 0) &= \tilde{X}(0, 0, 0) + \tilde{X}(1, 0, 0) \rightarrow X_1(0) = X(0) + X(4); \\ \tilde{X}_1(0, 0, 1) &= \tilde{X}(0, 0, 1) + \tilde{X}(1, 0, 1) \rightarrow X_1(1) = X(1) + X(5); \\ \tilde{X}_1(0, 1, 0) &= \tilde{X}(0, 1, 0) + \tilde{X}(1, 1, 0) \rightarrow X_1(2) = X(2) + X(6); \\ \tilde{X}_1(0, 1, 1) &= \tilde{X}(0, 1, 1) + \tilde{X}(1, 1, 1) \rightarrow X_1(3) = X(3) + X(7). \end{aligned} \quad (2.208)$$

*Випадок 2:*  $k_0 = 1$ :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(1, 0, 0) &= \tilde{X}(0, 0, 0) + A_2 \tilde{X}(1, 0, 0) \rightarrow X_1(4) = X(0) - X(4); \\ \tilde{X}_1(1, 0, 1) &= \tilde{X}(0, 0, 1) + A_2 \tilde{X}(1, 0, 1) \rightarrow X_1(5) = X(1) - X(5); \\ \tilde{X}_1(1, 1, 0) &= \tilde{X}(0, 1, 0) + A_2 \tilde{X}(1, 1, 0) \rightarrow X_1(6) = X(2) - X(6); \\ \tilde{X}_1(1, 1, 1) &= \tilde{X}(0, 1, 1) + A_2 \tilde{X}(1, 1, 1) \rightarrow X_1(7) = X(3) - X(7). \end{aligned} \quad (2.209)$$

Ця послідовність додавань та віднімань, що показана на рис. , позначена як ітерація 1, що відповідає  $r = 1$ . Формула (2.198) за допомогою  $A_4$  також записується у вигляді

$$\tilde{X}_2(k_0 k_1, m_0) = \tilde{X}_1(k_0, 0, m_0) + \tilde{X}_1(k_0, 1, m_0) A_4^{(2k_1 + k_0)}.$$

Оскільки  $(k_1, k_0)$  приймає чотири значення, то розглянемо такі чотири випадки:

*Випадок 1:*  $(k_1, k_0) = (0, 0)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2(0, 0, 0) &= \tilde{X}_1(0, 0, 0) + \tilde{X}_1(0, 1, 0) \rightarrow X_2(0) = X_1(0) + X_1(2); \\ \tilde{X}_2(0, 0, 1) &= \tilde{X}_1(0, 0, 1) + \tilde{X}_1(0, 1, 1) \rightarrow X_2(1) = X_1(1) + X_1(3). \end{aligned} \quad (2.210)$$

*Випадок 2:*  $(k_1, k_0) = (0, 1)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2(1, 0, 0) &= \tilde{X}_1(1, 0, 0) + A_4 \tilde{X}_1(1, 1, 0) \rightarrow X_2(4) = X_1(4) + X_1(6); \\ \tilde{X}_2(1, 0, 1) &= \tilde{X}_1(1, 0, 1) + A_4 \tilde{X}_1(1, 1, 1) \rightarrow X_2(5) = X_1(5) + X_1(7). \end{aligned} \quad (2.211)$$

*Випадок 3:*  $(k_1, k_0) = (1, 0)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2(0, 1, 0) &= \tilde{X}_1(0, 0, 0) + A_4^2 \tilde{X}_1(0, 1, 0) \rightarrow X_2(2) = X_1(0) - X_1(2); \\ \tilde{X}_2(0, 1, 1) &= \tilde{X}_1(0, 0, 1) + A_4^2 \tilde{X}_1(0, 1, 1) \rightarrow X_2(3) = X_1(1) - X_1(3). \end{aligned} \quad (2.212)$$

*Випадок 4:*  $(k_1, k_0) = (1, 1)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2(1, 1, 0) &= \tilde{X}_1(1, 0, 0) + A_4^3 \tilde{X}_1(1, 1, 0) \rightarrow X_2(6) = X_1(4) - A_4 X_1(6); \\ \tilde{X}_2(1, 1, 1) &= \tilde{X}_1(1, 0, 1) + A_4^3 \tilde{X}_1(1, 1, 1) \rightarrow X_2(7) = X_1(5) - A_4 X_1(7). \end{aligned} \quad (2.213)$$

Цей випадок відповідає  $r = 2$ . Послідовність арифметичних операцій позначена як ітерація 2. Формулу (2.201) за допомогою  $A_8$  запишемо у вигляді

$$\tilde{X}_3(k_0, k_1, k_2) = \tilde{X}_2(k_0, k_1, 0) + \tilde{X}_2(k_0, k_1, 1)A_8^{(4k_2+2k_1+k_0)}, \quad (2.214)$$

що приводить до таких випадків:

*Випадок 1:*  $(k_2, k_1, k_0) = (0, 0, 0)$ :

$$\tilde{X}_3(0, 0, 0) = \tilde{X}_2(0, 0, 0) + \tilde{X}_2(0, 0, 1) \rightarrow X_3(0) = X_2(0) + X_2(1). \quad (2.215)$$

*Випадок 2:*  $(k_2, k_1, k_0) = (0, 0, 1)$ :

$$\tilde{X}_3(1, 0, 0) = \tilde{X}_2(1, 0, 0) + A_8\tilde{X}_2(1, 0, 1) \rightarrow X_3(4) = X_2(4) + A_8X_2(5). \quad (2.216)$$

*Випадок 3:*  $(k_2, k_1, k_0) = (0, 1, 0)$ :

$$\tilde{X}_3(0, 1, 0) = \tilde{X}_2(1, 0, 0) + A_8^2\tilde{X}_2(1, 0, 1) \rightarrow X_3(2) = X_2(2) + A_8^2X_2(3). \quad (2.217)$$

*Випадок 4:*  $(k_2, k_1, k_0) = (0, 1, 1)$ :

$$\tilde{X}_3(0, 1, 1) = \tilde{X}_2(0, 1, 1) + A_8^3\tilde{X}_2(1, 1, 1) \rightarrow X_3(6) = X_2(6) + A_8^3X_2(7). \quad (2.218)$$

*Випадок 5:*  $(k_2, k_1, k_0) = (1, 0, 0)$ :

$$\tilde{X}_3(0, 0, 1) = \tilde{X}_2(0, 0, 0) + A_8^4\tilde{X}_2(0, 0, 1) \rightarrow X_3(1) = X_2(0) - X_2(1). \quad (2.219)$$

Ця послідовність арифметичних операцій позначена як ітерація 3, що відповідає  $r = 3$ . Щоб одержати бажані значення  $C_x(k)$ , скористаємось (2.202)

$$8\tilde{C}_x(k_2, k_1, k_0) = \tilde{X}_3(k_0, k_1, k_2).$$

Бачимо, що двійкові коефіцієнти  $k_0, k_1, k_2$  з'являються в  $\tilde{X}_3(\cdot)$  у інвертованому порядку (що називається *двійковою інверсією*). Отже,  $X_3(\cdot)$  зв'язані із  $C_x(\cdot)$  таким чином:

$$X_3(0) = 8C_x(0), \quad X_3(4) = 8C_x(1), \quad X_3(2) = 8C_x(2), \quad X_3(6) = 8C_x(3), \quad X_3(1) = 8C_x(4). \quad (2.220)$$

Решту коефіцієнтів  $C_x(k)$ ,  $k = 5, 6, 7$  можна одержати як  $C_x(4+l) = \bar{C}_x(4-l)$ ,  $l = 1, 2, 3$ , тобто  $C_x(5) = \bar{C}_x(3)$ ,  $C_x(6) = \bar{C}_x(2)$ ,  $C_x(7) = \bar{C}_x(1)$ .

Відносно наведеного на рис. 2.4 графа ШПФ можна зробити такі висновки:

1. Максимальне значення індексу ітерації  $r$  визначається як  $n = \log_2 N = 3$  для  $N = 8$ .

2. На  $r$ -й ітерації ( $r = \overline{1, \log_2 N}$ ) використовуються такі множники:

$$A_{2^r}^s, \quad s = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1. \quad (2.221)$$

Для  $r = 1$  на ітерації 1 використовуються множники  $A_2^0$ . Оскільки  $A_2^0 = 1$ , то на цій ітерації здійснюються тільки операції додавання. При  $r = 2$  в ітерації 2 використовуються множники  $A_4^0$  та  $A_4^1$ ; при  $r = 3$  в ітерації 3 – множники  $A_8^0, A_8^1, A_8^2, A_8^3$ .

3. На  $r$ -й ітерації проміжний масив містить  $2^{r-1}$  груп по  $N/2^{r-1}$  величин у кожній групі. Для кожної групи використовується один множник вигляду  $A_{2^r}^s$ .

4. Перший елемент  $X_r(k) = \tilde{X}_r(k_0, k_1, k_2)$  кожної групи, який зв'язаний із множителем  $A_{2^r}^s$  на  $r$ -й ітерації може бути одержаний з таблиці.

5.  $C_x(k)$ , що відповідає кожному  $X_3(l)$ , одержують таким чином:

а) виражають послідовність  $l = \overline{0, 7}$  у двійковій формі 000, 010, 011, 100, 101, 110, 111;

б) здійснюють двійкову інверсію кожної трьохрозрядної двійкової послідовності: 000, 100, 010, 110, 001, 101, 011, 111;

в) записують двійкову послідовність у вигляді десяткових чисел: 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7.

Таким чином одержуємо взаємно однозначну відповідність між послідовностями  $k = 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7$  та  $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ .

6. Усі операції, що пов'язані із обчисленням  $C_x(0)$  та  $C_x(4)$  є дійсними. Таким чином,  $C_x(0)$  та  $C_x(4)$  є дійсними числами, що узгоджується з властивістю комплексної сполученості.

7. Якщо дійсні та уявні частини обчислювати окремо, то кількості величин вхідного масиву даних  $X(m)$  при  $N = 8$  буде точно відповідати 8 незалежних величин, які входять у  $C_x(k)$ .

8. Вихідні величини  $r$ -ї ітерації можна зберігати у тих же комірках пам'яті, що і величини вхідного проміжного масиву даних. Ця властивість графа ШПФ називається "обчисленням на місці". Загальна кількість комірок оперативної пам'яті, що необхідні для здійснення ШПФ, дорівнює  $2N$ , якщо вхідний масив є комплексним. Крім того, потрібно ще  $2N$  комірок для виконання двійкової інверсії.

9. Загальна кількість арифметичних операцій, необхідних для одержання всіх  $C_x(k)$ ,  $k = 0, \overline{N_1}$ , дорівнює приблизно  $N \log_2 N$ .

10. Алгоритм ШПФ не залежить від того, чи є вхідні величини дійсні чи комплексні. Отже, він може бути використаний для обчислення ОДПФ:

$W$  замінюється на  $\overline{W}$ ;

не враховується множник  $1/N$ , що міститься після останньої ітерації.

Така модифікація алгоритму ШПФ називається оберненим швидким перетворенням Фур'є (ОШПФ).

11. Множники, що використовуються в графі ШПФ, можуть бути виражені через степені  $W$  у відповідності з тим, що  $A_{2^r} = W^{N/2^r}$ .

*Приклад 1.* Для заданої послідовності  $X(0) = 1; X(1) = 2; X(3) = 1; X(4) = 3; X(5) = 2; X(6) = 1$  та  $X(7) = 2$  обчислити коефіцієнти ДПФ  $C_x(k)$ ,  $k = 0, \overline{7}$ , за допомогою ШПФ.

*Розв'язання.* Маємо  $N = 8$ , тож можна використати граф ШПФ на рис. 2.4  $A_{2^r} = e^{-i2\pi/2^r}$ ,  $r = 1, 2, 3$ , тобто  $A_2 = -1$ ,  $A_4 = -1$ ,  $A_8 = (1 - i)/\sqrt{2}$ ,  $A_8^2 = -i$ ,  $A_8^3 = -(1 + i)/\sqrt{2}$ .

У відповідності із послідовністю обчислень, що позначені на графі, маємо:

$$X(0) = 1; X_1(0) = 4; X_2(0) = 6; X_3(0) = 1; \rightarrow C_x(0);$$

$$X(1) = 2; X_1(1) = 4; X_2(1) = 7; X_3(1) = -1 \rightarrow C_x(4);$$

$$X(2) = 1; X_1(2) = 2; X_2(2) = 6; X_3(2) = 6 - i \rightarrow C_x(2);$$

$$X(3) = 1; X_1(3) = 2; X_2(3) = 1; X_3(3) = 6 + i; \rightarrow C_x(6) = \overline{C_x(2)};$$

$$X(4) = 3; X_1(4) = -2; X_2(4) = -2; X_3(4) = -1, 293 + i0, 707 \rightarrow C_x(1);$$

$$X(5) = 2; X_1(5) = 0; X_2(5) = i; X_3(5) = -2, 707 - i0, 707 \rightarrow C_x(5) = \overline{C_x(3)};$$

$$X(6) = 1; X_1(6) = 0; X_2(6) = -2; X_3(6) = -2, 707 + i0, 707 \rightarrow C_x(3);$$

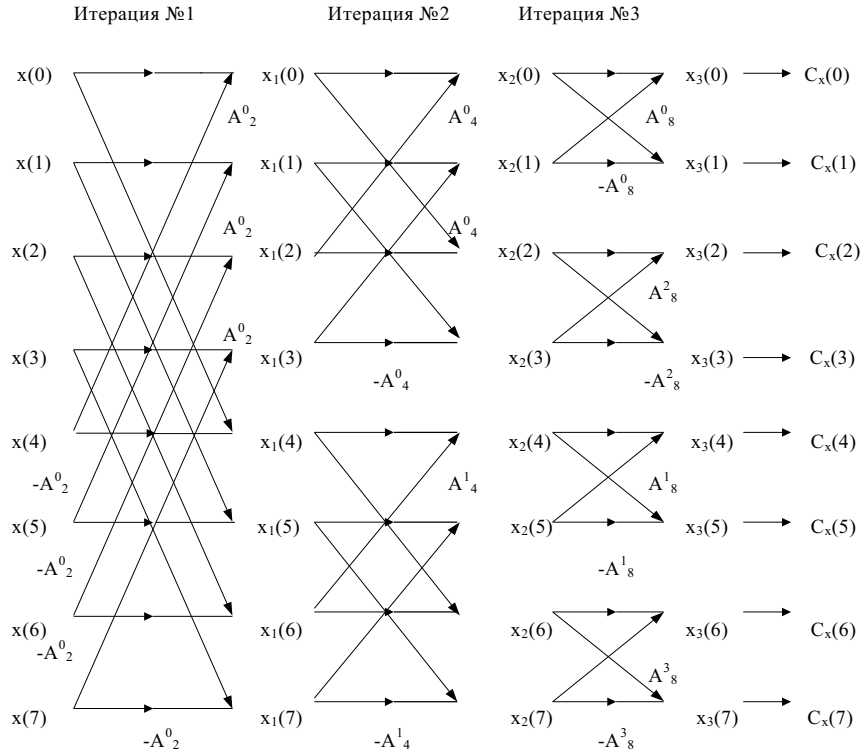
$$X(7) = 2; X_1(7) = -1; X_2(7) = -i; X_3(7) = -1, 293 - i0, 707 \rightarrow C_x(7) = \overline{C_x(1)}.$$

#### 2.8.4.1. Проріджування за часом

Вочевидь, проріджування за часом застосовується до відліків послідовності у часі.

Припустимо, що кількість відліків  $N$  є парна. Тоді послідовність  $\{x(n)\}$  можна розділити на дві підпослідовності  $\{g(n)\}$  та  $\{h(n)\}$ :

$$\{g(n)\} = \{x(2n)\}; \quad \{h(n)\} = \{x(2n + 1)\} \quad (2.222)$$

Рис. 2.4. Граф ШПФ для  $N = 8$ 

Дискретне перетворення Фур'є цих підпослідовностей можна записати у такому вигляді:

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} g(n)(W^2)^{nk}; \quad (2.223)$$

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)(W^2)^{nk}; \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (2.224)$$

ДПФ від повної послідовності  $\{x(n)\}$  виражається через  $g(n)$  та  $h(n)$ :

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (g(n)W^{2nk} + h(n)W^{(2n+1)k}) = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} g(n)(W^2)^{nk} + W^k \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)(W^2)^{nk} = G(k) + W^k H(k). \end{aligned} \quad (2.225)$$

Видно, що на відміну від прямого обчислення Фур'є-зображення  $F(k)$  для комплексної послідовності  $\{x(n)\}$ , яке потребує  $N^2$  операцій комплексного множення та додавання, обчислення за (2.225) потребує  $N^2/2 + N$  операцій, що у випадку великих  $N$  приводить до майже подвійної економії обчислень.

Оскільки  $G(k)$  та  $H(k)$  обчислюються в діапазоні від 0 до  $N/2 - 1$ , то

$$F(k) = \begin{cases} G(k) + W^k H(k), & 0 \leq k \leq N/2 - 1, \\ G(k - N/2) + W^k H(k - N/2 - 1), & N/2 \leq k \leq N - 1. \end{cases} \quad (2.226)$$

У випадку парного  $N/2$  для обчислення  $G(k)$  та  $H(k)$  застосовуються формули (2.223), (2.224) із кількістю точок  $N/4$  тощо. У цьому й полягає сутність методу ШПФ.

Якщо  $N$  являється степенем 2, то для обчислення ДПФ послідовності з  $N$  точок треба  $N \log_2 N$  додавань та не більше ніж  $N/2 \log_2 N$  множень.

Подання числа  $N$  як степеня 2 пов'язано із двійковим представленням інформації в ЕОМ. Однак, можна розглядати й інші дільники числа  $N$ . Якщо дільником  $N$  є число  $p$ , то одержимо формули, аналогічні (2.223), (2.224), в яких 2 заміщується на  $p$ . У цьому випадку кожна підпослідовність складається тільки з  $p$ -ї точки вихідної послідовності. Звідси й походить назва методу "проріджування за часом".

#### 2.8.4.2. Проріджування за частотою

За аналогією з проріджуванням у часі проріджування за частотою виконується по відношенню до ДПФ-зображення  $F(k)$  сигналу  $x(n)$ .

Нехай функція  $f(n)$  із парним числом  $N$  точок відокремлена на дві послідовності по  $N/2$  точок кожна

$$g(n) = f(n); \quad h(n) = f(n + N/2); \quad n = \overline{0, N/2 - 1}. \quad (2.227)$$

$N$ -точкове ДПФ  $F(k)$  вихідної функції  $x(n)$  можна записати у вигляді

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} (g(n) + e^{i\pi k} h(n)) W^{nk}. \quad (2.228)$$

Тепер розглянемо парні та непарні відліки  $F(k)$  окремо (проріджування за частотою).

$$F(2k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} (g(n) + h(n))(W^2)^{nk}; \quad (2.229)$$

$$F(2k + 1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [(g(n) - h(n))W^n] (W^2)^{nk}. \quad (2.230)$$

Вирази (2.229), (2.230) являють собою  $(N/2)$ -точкові ДПФ від функцій  $(g(n) + h(n))$  і  $(g(n) - h(n))W^n$ . Як й у попередньому випадку кількість обчислень є пропорційною  $N \log_2 N$ .

Алгоритми ШПФ можна використати для синтезу  $T$ -періодичного подовження сигналу  $x^*(t)$  за його заданими амплітудним та фазовим спектрами.

## 2.9. Дискретне перетворення Фур'є типових сигналів

При проведенні спектрального аналізу реальних сигналів досить корисним є уміння визначати функціональний склад сигналу за його спектральним поданням. При цьому виконання ДПФ дискретизованих сигналів не викликає особливих труднощів. Але при гармонічному аналізі необмежених у часі сигналів, коли інтеграл у прямому перетворенні Фур'є при  $t \rightarrow \infty$  є розбіжним, не все так просто. Цьому можна запобігти, якщо розглядати сигнал лише на скінченному інтервалі, або, як кажуть, через спеціальне "вікно", в межах якого сигнал існує, а поза нього – дорівнює нулю. Формально це відповідає множенню необмеженого у часі сигналу на відповідну функцію вікна, яка робить вихідний сигнал обмеженим у часі. Очевидно, це впливає на спектр сигналу, оскільки множення у часовій області відповідає згортці спектра сигналу зі спектром вікна. Зрозуміло, що при цьому треба прагнути досягти найменшого спотворення спектра сигналу, що реалізується вибором відповідної функції вікна, тобто власне його виду.

У подальшому при відшуванні ДПФ будемо вважати типовими такі елементарні сигнали:

- сталий необмежений у часі сигнал;
- періодичний сигнал;
- синусоїдальний сигнал.

**Одиничний сталий сигнал.** Нехай значення сигналу визначається функцією часу вигляду  $f(t) = 1, -\infty < t < +\infty$ . На цей сигнал накладається прямокутне вікно, яке задано на обмеженому інтервалі часу і описується функцією  $h(t)$ , що визначає характеристику вікна. Відліки сигналу беруться в  $N$  дискретних точках інтервалу спостереження  $T$ , який дорівнює ширині вікна, тобто  $T = NT_d$ , де  $T_d$  – період дискретизації. Таким чином, сигнал дискретизується, приймаючи вигляд обмеженої решіткової функції:

$$f(nT_d) = \begin{cases} 1, & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 0, & n < -\frac{N-1}{2}, \quad n > \frac{N-1}{2}. \end{cases} \quad (2.231)$$

Це, як і збіжність інтеграла Фур'є, досягається за допомогою спеціального виду функції вікна  $h(t)$ , а саме:

$$h(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{N-1}{2}T_d \leq t \leq \frac{N-1}{2}T_d, \\ 0, & t \notin \left[-\frac{N-1}{2}T_d, \frac{N-1}{2}T_d\right]. \end{cases} \quad (2.232)$$

Знаходимо дискретне Фур'є-перетворення для сигналу  $f(nT_d)$  згідно з формулою (2.156), яка із урахуванням співвідношень (2.231), (2.232) дає:

$$F_d(i\omega) = \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} f(nT_d)h(nT_d)e^{-i\omega nT_d} = \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{-i\omega nT_d} \quad (2.233)$$

Бачимо, що у правій частині цього виразу міститься сума геометричного ряду з  $N$  складовими, дістаємо:

$$F_d(i\omega) = \exp\left[-i\omega T_d \frac{N-1}{2}\right] \cdot \frac{1 - \exp[-i\omega T_d N]}{1 - \exp[-i\omega T_d]}. \quad (2.234)$$

Домножуючи чисельник та знаменник у (2.234) на  $\exp[-i\omega T_d/2]$ , маємо

$$F_d(i\omega) = \frac{e^{i\omega NT_d/2} - e^{-i\omega NT_d/2}}{e^{i\omega T_d/2} - e^{-i\omega T_d/2}} \quad (2.235)$$

або, після перетворення за формулою Ейлера, дістаємо:

$$F_d(i\omega) = \frac{\sin(N\omega T_d/2)}{\sin(\omega T_d/2)}. \quad (2.236)$$

Отже, ДПФ одиничного сигналу, заданого у межах прямокутного вікна, із часом спостереження  $T = T_d N$  подається функцією типу  $\sin Nx / \sin x$ , де  $x = \omega T_d/2$ . Зрозуміло, що значення спектра обчислюються тільки для дискретних значень частот  $\omega_k$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ , тому рівняння (2.236) дає обвідну амплітуд ліній спектра, що визначаються для частот  $\omega_k$ . Графік цих ліній наведено на рис.

Аналізуючи функцію (2.236), приходимо до висновку, що вона:

1. Має максимум за кругової частоти  $\omega = 0$ , який дорівнює

$$F_d(i\omega)|_{\omega=0} = \frac{\sin(N\omega T_d/2)}{\sin(\omega T_d/2)} \Big|_{\omega=0} = \frac{2NT_d \cdot \cos 0}{2T_d \cdot \cos 0} = N. \quad (2.237)$$

2. Проходить через нуль, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю, що має місце при таких значеннях аргумента  $\omega NT_d/2$ :

$$\frac{\omega NT_d}{2} = \pm z\pi, z = 1, 2, \dots, \quad (2.238)$$

тобто при

$$\omega_z = \pm z \frac{2\pi}{NT_d}. \quad (2.239)$$

3. Є періодичною функцією із періодом  $T = 2\pi T_d$ , як й будь-яке ДПФ.

Порівнюючи співвідношення (2.239), яке визначає нулі функції  $\frac{\sin(N\omega T_d/2)}{\sin(\omega T_d/2)}$  з формулою (2.160), що задає значення частот  $\omega_k$ , у яких обчислюється ДПФ, знаходимо, що вони всі співпадають, крім нульової точки, тобто всі лінії спектра, як кажуть, “гасяться” (обнуляються) нулями функції ДПФ, крім значення  $\omega = 0$ , де амплітуда спектра дорівнює  $N$ .

**Періодичний сигнал.** У якості періодичного сигналу з круговою частотою  $\omega_0$  беремо функцію  $f(t) = e^{i\omega_0 t}$ , яка знову перемножується на функцію прямокутного вікна  $h(nT_d)$  вигляду (2.231). Підставивши отриманий добуток  $f(nT_d) \dots h(nT_d)$  у рівняння ДПФ (2.156), маємо

$$\begin{aligned} F_d(i\omega) &= \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} f(nT_d)h(nT_d)e^{-i\omega nT_d} = \\ &= \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{-i\omega_0 nT_d} \cdot 1 \cdot e^{-i\omega nT_d} = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{-i(\omega - \omega_0)nT_d}. \end{aligned} \quad (2.240)$$

Порівнюючи (2.240) з (2.233), знаходимо, що вони мають однакову форму, відрізняючись лише тим, що у рівнянні (2.240) замість  $\omega$  міститься  $\omega - \omega_0$ . Повторюючи ті самі перетворення, що й у (2.233), остаточно отримуємо:

$$F_d(i\omega) = \frac{\sin[N(\omega - \omega_0)T_d/2]}{\sin[(\omega - \omega_0)T_d/2]}. \quad (2.241)$$

Ця функція має максимум у точці  $\omega = \omega_0$  і значенням, яке знову ж таки дорівнює  $N$  і яка показана на рис.

Нулі ДПФ тепер містяться у точках

$$\omega_z - \omega_0 = \pm z \frac{2\pi}{NT_d}. \quad (2.242)$$

**Синусоїдальний сигнал.** Цей сигнал подається згідно з формулою Ейлера як різниця експоненціальних функцій із круговою частотою  $\omega_0$ , тобто у вигляді

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2i} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}). \quad (2.243)$$

ДПФ для функції (2.243) обчислюється для кожної складової окремо, оскільки функція (2.243) лінійна. Для першої складової спектр вже знайдено, а друга складова відрізняється від першої тільки знаком експоненти. Її ДПФ можна знайти за допомогою (2.240), якщо поміняти знак у синусі на протилежний, тобто як

$$F_{d2}(i\omega) = \frac{\sin[(\omega + \omega_0)NT_d/2]}{\sin[(\omega + \omega_0)T_d/2]}. \quad (2.244)$$

Отже, спектр синусоїди, відліки якої обрано в точках у межах прямокутного вікна, визначається як різниця співвідношень (2.241) та (2.244), що дає:

$$F_d(i\omega) = \frac{1}{2i} \left[ \frac{\sin[(\omega - \omega_0)NT_d/2]}{\sin[(\omega - \omega_0)T_d/2]} - \frac{\sin[(\omega + \omega_0)NT_d/2]}{\sin[(\omega + \omega_0)T_d/2]} \right]. \quad (2.245)$$

Рівняння (2.245) визначає обвідну для спектральних ліній, які обчислюються у точках  $\omega_k$  згідно з (2.156), що ілюструється відповідними графіками на рис.

**Приклад.** Розглянемо на конкретному прикладі вплив на подання спектра гармонічного (синусоїдального) коливання на інтервалі спостереження. Нехай маємо гармонічне коливання  $\varphi(t) = \sin(2\pi f_0 t)$  з круговою частотою  $\omega_0 = 2\pi f_0$  (1/с) із циклічною частотою  $f_0 = 50$  Гц. Дискретизація сигналу здійснюється з частотою  $f_d = 500$  Гц (або круговою частотою  $\omega_d = 2\pi f_d$  (1/с) на інтервалі спостереження довжиною  $T=0,05$  с=50 мс. В процесі гармонічного (спектрального) аналізу виконуємо такі дії:

- 1) перевіряємо виконання вимог теореми відліків при заданій частоті дискретизації;
- 2) будуємо амплітудний спектр дискретизованого сигналу з метою виявлення єдиної частоти  $f_0$ , що міститься у сигналі.

Щодо п.1 не виникає ніяких проблем, оскільки відношення  $f_d/f_0 = 10$ , що значно перевершує 2, як цього вимагає теорема відліків.

При виконанні п.2 виникають певні ускладнення, оскільки при заданому інтервалі спостереження на  $T = 50$  мс періоді дискретизації  $T_d = 1/f_d = 1/500 = 0,002$  с = 2 мс маємо таку кількість точок відліків:  $N = T/T_d = 50/2 = 25$ .

ДПФ, як відомо, дає амплітуди спектра для дискретних частот, які визначаються згідно з (2.161) й у даному випадку це будуть  $f_k = k \cdot f_d/N$ ,  $k = \overline{1, N-1}$ , тобто

$$\{f_k\} = \{0, 2, 20, 40, 60, \dots, 480\},$$

що ілюструється відповідними графіками на рис.

Обвідна цих ліній задається рівнянням (2.244), але проміж ліній спектра відсутня складова на частоті  $f_0 = 50$  Гц. Це зумовлено здійсненим квантуванням, коли у послідовність частот спектра не потрапила шукана частота  $f_0$ . Нулі обвідної, що задається рівнянням (2.245), містяться в точках  $f_0 \pm z20$  Гц, тому в спектрі присутні так звані “хибні” лінії спектра, що відповідають не існуючим гармонічним складовим. Спектральний аналіз відразу стає коректним, коли скориставшись інформацією про значення  $f_0$  (або про період  $T_0 = 1/f_0$ ), вибрати відповідний період спостереження сигналу  $T = mT_0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , тобто період спостереження  $T$  вибирати кратним періоду гармонічного сигналу  $T_0$ . Так, у нашому випадку приймаємо  $T = mT_0 = 40$  мс, коли  $m = 2$ , а  $T_0 = 1/50 = 0,02 = 20$  мс. рис.

Спектральні лінії у даному випадку будуть розміщені в точках частот

$$\{f_k\} = \{0, 25, 50, \dots, 450, 470\},$$

які скрізь співпадають із нулями обвідної цих ліній, крім  $f = 50$  Гц. Ця точка відповідає максимуму зі значень обвідної, яка задається рівнянням (2.245) і визначає єдину частоту, що є у синусоїдальному сигналі. Спектр повторюється із частотою  $f_d = 50$  Гц.

### 2.9.1. Обчислення згортки

$$Z(m) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y(m-k), \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (2.246)$$

Із теореми про згортку одержуємо

$$C_z(k) = C_x(k)C_y(k), \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (2.247)$$

Після застосування алгоритму ШПФ до послідовностей  $\{X(m)\}$ ,  $\{Y(m)\}$  та визначення  $C_z(k)$   $Z(m)$  обчислюється за допомогою ОШПФ.

Розглянемо випадок, коли послідовності, відносно яких застосовується операція згортки, є аперіодичні.  $\tilde{X}(m)$ ,  $m = \overline{0, M}$ ,  $\tilde{Y}(m)$ ,  $m = \overline{0, P}$ . Згортка цих послідовностей



визначається виразом

$$\tilde{Z}(m) = \frac{1}{M+P+1} \sum_{k=0}^{M+P} \tilde{X}(k)\tilde{Y}(m-k), \quad m = \overline{0, M+P}. \quad (2.248)$$

Послідовність  $\tilde{Z}(m)$  можна одержати за допомогою ШПФ так:

1. Нехай  $N$  – є найменший степінь 2 більший, ніж  $(M+P)$ .
2. Утворимо такі послідовності  $\{X(m)\}$  та  $\{Y(m)\}$  із періодом  $N$ , що

$$X(m) = \begin{cases} \tilde{X}(m), & m = \overline{0, M}; \\ 0, & m = M+1, M+2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2.249)$$

$$Y(m) = \begin{cases} \tilde{Y}(m), & m = \overline{0, P}; \\ 0, & m = P+1, P+2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2.250)$$

3. Застосуємо ШПФ для обчислення згортки – послідовності  $\{Z(m)\}$  – періодичних послідовностей  $\{X(m)\}$  та  $\{Y(m)\}$ , де

$$Z(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)\tilde{Y}(m-k), \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (2.251)$$

4. Одержуємо потрібну послідовність  $\tilde{Z}(m)$  за допомогою співвідношення

$$\tilde{Z}(m) = \frac{N}{M+P+1} Z(m), \quad m = \overline{0, M+P}. \quad (2.252)$$

Нехай  $M=3$ ,  $P=2$ , тоді  $N=8$  і

$$X(m) = \begin{cases} \tilde{X}(m), & m = \overline{0, 3}; \\ 0, & m = \overline{4, 7} \end{cases} \quad (2.253)$$

$$Y(m) = \begin{cases} \tilde{Y}(m), & m = \overline{0, 2}; \\ 0, & m = \overline{3, 7} \end{cases} \quad (2.254)$$

Замістимо ці формули у формулу (2.246). Одержимо матричний вираз

$$\begin{bmatrix} Z(0) \\ Z(1) \\ Z(2) \\ Z(3) \\ Z(4) \\ Z(5) \\ Z(6) \\ Z(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \tilde{X}(0) & \tilde{X}(1) & \tilde{X}(2) & \tilde{X}(3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{X}(1) & \tilde{X}(2) & \tilde{X}(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{X}(0) \\ \tilde{X}(2) & \tilde{X}(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{X}(0) & \tilde{X}(1) \\ \tilde{X}(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{X}(0) & \tilde{X}(1) & \tilde{X}(2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{X}(0) & \tilde{X}(1) & \tilde{X}(2) & \tilde{X}(3) \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{X}(0) & \tilde{X}(1) & \tilde{X}(2) & \tilde{X}(3) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{X}(0) & \tilde{X}(1) & \tilde{X}(2) & \tilde{X}(3) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{X}(0) & \tilde{X}(1) & \tilde{X}(2) & \tilde{X}(3) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Y}(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{Y}(2) \\ \tilde{Y}(1) \end{bmatrix} \quad (2.255)$$

## 2.10. Клас ортогональних функцій

Розглянемо клас несинусоїдальних ортогональних функцій, до яких відносяться функції Радемахера, Хаара та Уолша. Ці функції складаються з квадратних або прямокутних хвиль.

При гармонічних (синусоїдальних, косинусоїдальних) впливах коливання зберігають свою форму при проходженні через будь-яку лінійну систему. Вихідні коливання можуть відрізнятися від вхідних тільки за амплітудою та фазою. На цьому побудовано частотний метод дослідження.

Але перетворенню Фур'є притаманний недолік, який полягає у тому, що існує необхідність у виконанні великої кількості операцій множення, на що витрачається більша частина часу обчислень. Ці операції виконуються як при розкладанні функцій у ряд Фур'є, так і при виконанні інтегрального перетворення Фур'є. Наприклад, при розкладанні функції  $f(t)$  у ряд Фур'є із застосуванням формули

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)$$

коефіцієнт  $a_k$  обчислюється по формулі

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega_1 t dt.$$

При наближеній апроксимації функції  $f(t)$  тригонометричними рядами Фур'є, а також інших видах обробки інформації операцію множення доводиться виконувати мільйони раз і на це витрачається основна частка машинного часу.

Кусково-стала базисна функція на відокремленому інтервалі є сталою величиною. Тож для тієї самої функції  $f(t)$  замість  $\cos k\omega_1 t$  у інтеграл входить базисна функція 1 або -1. Отже, замість операцій множення виконуються значно простіші операції додавання та віднімання. Для того, щоб кусково-сталі базисні ортогональні функції могли використовуватися для обробки інформації, потрібно, щоб вони набували як додатні, так і від'ємні значення.

### 2.10.1. Визначення частоти

Поняття частоти може бути застосовано до множини синусних (періодичних) функцій, точки перетинання нульового рівня яких рівномірно розподілено по інтервалу. Цей параметр позначається як  $f$  й інтерпретується як число повних періодів (або половина числа перетинання нульового рівня) синусоїдальної функції в секунду.

Узагальнена частота може визначатись як половина середнього числа перетинів нульового рівня в секунду. Поняття частоти запроваджено Хармутом для розрізнення функцій, точки перетинання нульового рівня яких розподілено нерівномірно по інтервалу й які необов'язково є періодичними. У випадку синусоїдальних функцій поняття частоти співпадає з поняттям частоти.

Частість неперіодичної функції дорівнює половині числа перетинів нульового рівня в секунду, якщо таке число існує.

### 2.10.2. Функції Радемахера та Хаара

Функції Радемахера являють собою *неповну систему ортонормованих функцій* і позначаються  $\text{rad}(m, t)$ . Вони мають вигляд прямокутних імпульсів й містять  $2^{m-1}$  періодів на напіввідкритому інтервалі  $[0; 1)$  та приймають значення  $+1$  або  $-1$ . Виняток складає функція  $\text{rad}(0, t)$ , яка має вигляд одиничного імпульсу. Функції Радемахера – періодичні з періодом 1, тобто  $\text{rad}(m, t) = \text{rad}(m, t + 1)$ . Крім того, їм властива періодичність на більш коротких інтервалах  $\text{rad}(m, t + n2^{1-m}) = \text{rad}(m, t)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ;  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Ці функції є непарними, що не дозволяє використовувати їх для апроксимації парних функцій, ось чому вони утворюють неповну систему.

Функції Радемахера можна одержати за допомогою рекурентного співвідношення

$$\text{rad}(m, t) = \text{rad}(1, 2^{m-1}t); \quad (2.256)$$

$$\text{rad}(1, t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2), \\ -1, & t \in [1/2, 1). \end{cases} \quad (2.257)$$

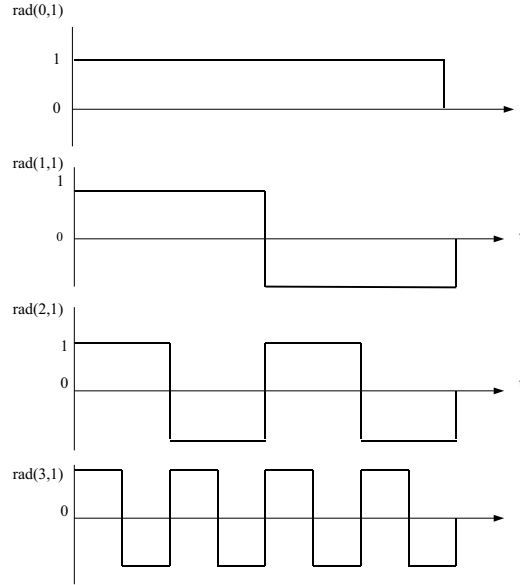


Рис. 2.5. Функції Радемахера

Множина функцій **Хаара**  $\{\text{har}(n, m, t)\}$  утворює *періодичну, ортонормовану та повну систему функцій*.

Дискретизація системи функцій Хаара призводить до матриці, кожний рядок якої є дискретною функцією Хаара  $\text{Har}(n, m, t)$ . Одержані у такий спосіб матриці використовуються для перетворення Хаара і позначаються  $\mathbf{H}^*(n)$ , де  $n = \log_2 N$ .

Приведемо матрицю Хаара для перших восьми функцій Хаара.

$$\mathbf{H}^*(3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (2.258)$$

Якщо розглянути матрицю  $H^*(3)$ , то побачимо, що  $N/2$  коефіцієнтів перетворення Хаара відповідають кореляції двох сусідніх точок у просторі вхідних послідовностей,  $N/4$  – зв'язків чотирьох сусідніх точок тощо до  $N/N$  коефіцієнтів, які відповідають всім  $N$  координатам простору вхідних послідовностей. Це означає, що області перетворення у випадку перетворення Хаара характерні як локальні так й глобальні властивості чутливості. При ДПФ та ПУА кожний коефіцієнт перетворення є функцією всіх координат вхідних послідовностей (властивість глобальної чутливості), а в перетворенні Хаара це стосується перших двох коефіцієнтів.

Рекурентне співвідношення, яке дозволяє одержати  $\{\text{har}(n, m, t)\}$ , має вигляд

$$\begin{aligned} \text{har}(0, 0, t) &= 1; \quad t \in [0, 1); \\ \text{har}(r, m, t) &= \begin{cases} 2^{r/2}, & \frac{m-1}{2^r} \leq t < \frac{m-1/2}{2^r}; \\ -2^{r/2}, & \frac{m-1}{2^r} \leq t < \frac{m}{2^r}; \\ 0, & \text{для решти } t \in [0, 1), \end{cases} \end{aligned} \quad (2.259)$$

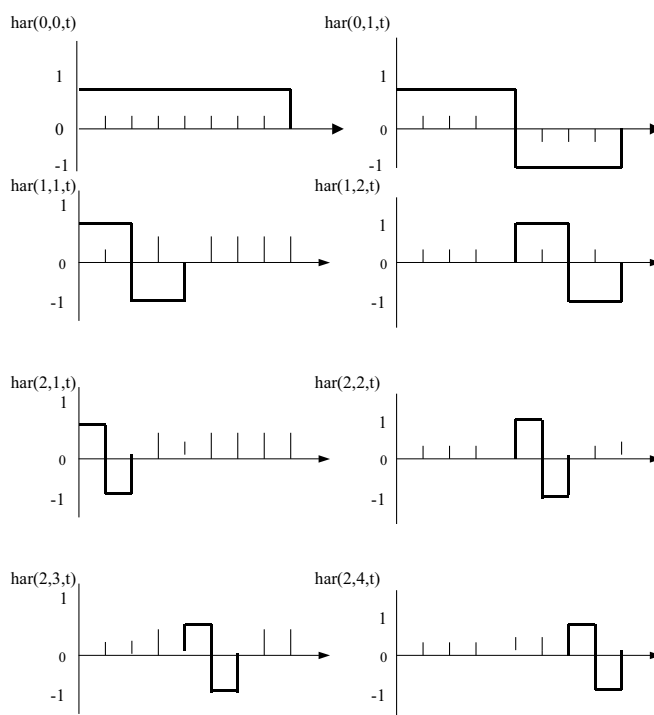


Рис. 2.6. Неперервні функції Хаара

де  $0 \leq t < \log_2 N$  та  $1 \leq m \leq 2^t$ .

### 2.10.2.1. Алгоритм для перетворення Хаара

Для виконання перетворення Хаара (ПХ) потрібно  $2(N - 1)$  операцій додавання/віднімання та  $N$  операцій множення.

Матриця Хаара (2.258) перестановкою її стовпців приводиться до вигляду

$$\mathbf{H}_8^*(3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (2.260)$$

Матриця, що одержана, ідентична матриці модифікованого перетворення Уолша - Адамара.

### 2.10.3. Функції Уолша

Система функцій Уолша  $\{\text{wal}(i, t)\}$  доповнює систему функцій Радемахера до повної ортонормованої системи функцій. Множина функцій Уолша зазвичай поділяється на три групи, які відрізняються порядком розташування окремих функцій в системі. Загальноприйнятними є такі упорядкування: 1) упорядкування за частістю (за Уолшем); 2) діадичне упорядкування (за Пелі); 3) природне упорядкування (за Адамаром). Ми розглянемо упорядкування за Адамаром як найбільш вживане в прикладеннях та природне (за визначенням).

Властивостями системи функцій Уолша, які використовуються при розв'язанні практичних задач, є такі:

1. Функції Уолша набувають тільки двох значень  $+1$  і  $-1$  для будь-якого  $i$ , функція  $wal(i, t)$  на відрізку  $t \in [-1/2; 1/2]$  дорівнює одиниці.
2. Добуток двох функцій Уолша є також функцією Уолша, ця властивість називається *мультиплікативністю* і визначається співвідношенням

$$wal(i, t) \times wal(p, t) = wal(i + p, t),$$

де цілі числа  $i, p = 0, 1, 2, \dots$  додаються у двійковій системі числення без перенесення одиниці у старший розряд.

3. Середнє значення функції Уолша при  $i \neq 0$  дорівнює нулю, а для функції  $wal(0, t)$  – одиниці.

Множина функцій Уолша, яка упорядкована за Адамаром, позначається як:

$$S_h\{wal_h(i, t), i = \overline{0, N-1}\}, \quad (2.261)$$

де  $h$  – позначення упорядкування за Адамаром.

Перші вісім неперервних функцій Уолша виглядають так, як це показано на рис. 2.7

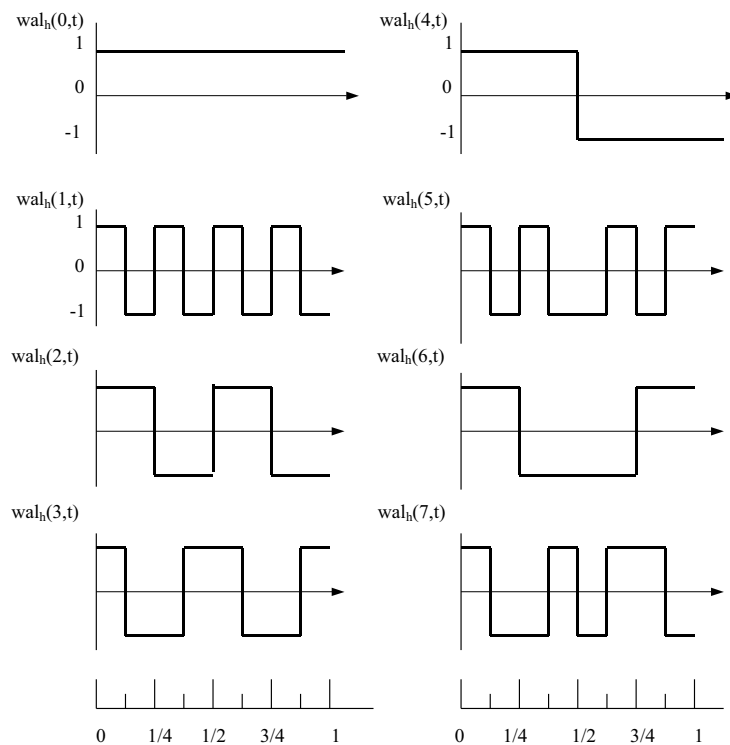


Рис. 2.7. Неперервні функції Уолша, упорядковані за Адамаром

**Дискретний випадок.** Дискретизація функцій Уолша приводить до матриці Ада-

мара розмірності  $(8 \times 8)$ .

$$\mathbf{H}_h^*(3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.262)$$

У загальному випадку дістаємо матрицю  $H_h(n)$  розмірності  $(N \times N)$ , де  $n = \log_2 N$ . Для цього класу матриць Адамара справедливе розбивання на підматриці вигляду

$$\mathbf{H}_h(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_h(n-1) & \mathbf{H}_h(n-1) \\ \mathbf{H}_h(n-1) & -\mathbf{H}_h(n-1) \end{bmatrix} \quad (2.263)$$

Такі матриці відповідають природному упорядкуванню.

Знаменною властивістю матриць Хаара та Адамара є те, що рядки цих матриць слугують базисними векторами при визначенні перетворень Хаара та Уолша - Адамара.

### 2.10.3.1. Представлення сигналів у вигляді функцій Уолша

Розглянемо деякі питання, що пов'язані з представленням неперервного сигналу  $x(t)$  у вигляді функцій Уолша. Передбачається, що сигнал  $x(t)$  визначений на напіввідкритому інтервалі  $t \in [0; 1)$ .

Множина функцій Уолша замкнена, тобто будь-який сигнал  $x(t)$ , який є абсолютно інтегровним при  $t \in [0; 1)$ , можна представити у вигляді ряду за функціями Уолша

$$x(t) = \sum_{k=0}^n d_k \text{wal}_w(k, t). \quad (2.264)$$

Оскільки множина функцій  $\{\text{wal}_w(k, t)\}$  утворює ортонормовану систему в замкненому інтервалі  $t \in [0; 1]$ , то коефіцієнти розкладання  $d_k$  визначаються як

$$d_k = \int_0^1 x(t) \text{wal}_w(k, t) dt, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.265)$$

При цьому,

$$\begin{aligned} \text{wal}_w(k, t) &= \text{cal}(s_k, t), \quad k - \text{парне}, \\ \text{wal}_w(k, t) &= \text{sal}(s_k, t), \quad k - \text{непарне}, \end{aligned}$$

де  $s_k$  – частість функції  $\text{wal}_w(k, t)$ , що визначається як

$$s_k = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ k/2, & k - \text{парне}, \\ (k+1)/2, & k - \text{непарне}. \end{cases} \quad (2.266)$$

Якщо функції Уолша, що упорядковані за Уолшем, виразити через парні та непарні складові, то вираз (2.265) прийме вигляд

$$x(t) = a_0 \text{wal}_w(0, t) + \sum_{k=1}^n [a_k \text{cal}(k, t) + b_k \text{sal}(k, t)], \quad (2.267)$$

де  $a_0 = d_0$ ;  $a_k = d_{2k}$ ;  $b_k = d_{2k-1}$ .

Щоб одержати скінченний ряд, який містить  $N = 2^n$  складових, де цей ряд обривається, маємо:

$$x(t) \approx a_0 \text{wal}_w(0, t) + \sum_{k=1}^{N/2-1} [a_k \text{cal}(k, t) + b_k \text{sal}(k, t)] + b_{N/2} \text{sal}(N/2, t). \quad (2.268)$$

Бачимо, що представлення сигналу у вигляді ряду Уолша є аналогічним представленням їх у вигляді ряду Фур'є.

### 2.10.3.2. Перетворення Уолша–Адамара

Перетворення Уолша–Адамара являється найбільш розповсюдженим серед несинусоїдальних ортогональних перетворень сигналів. Перетворення Уолша - Адамара (ПУА) широко застосовується при цифровій обробці сигналів, оскільки може бути обчислено тільки із використанням операцій додавання та віднімання.

Перетворення Уолша–Адамара (ПУА) можна записати в матричних або еквівалентних показникових виразах. Воно іноді називається також двійковим поданням Фур'є. Розглянемо матричне визначення. Нехай  $\{X(m)\}$  – послідовність з періодом  $N$ ,  $m = \overline{0, N-1}$ , що складається із скінченних дійсних чисел, яку можна записати у вигляді  $N$ -вимірному вектора  $X(n)$ :

$$\{X(n)\} = \{X(0) \ X(1) \ \dots \ X(N-1)\}, \quad (2.269)$$

де  $n = \log_2 N$ ,  $X^T(n)$  – означає транспонований вектор  $X(n)$ .

Перетворення Уолша–Адамара, яке упорядковано за Адамаром і позначається  $(WHT)_h$ , послідовності  $\{X(n)\}$  визначається як

$$\mathbf{C}_x(k) = \frac{1}{N} \mathbf{H}_h(n) \mathbf{X}(n), \quad (2.270)$$

де  $C_x(k)$  – позначає  $k$ -й коефіцієнт  $(WHT)_h$ . Із (2.268) та (2.270) витікає, що обернене перетворення Уолша–Адамара, яке упорядковано за Адамаром, визначається таким чином:

$$\mathbf{X}(n) = \mathbf{H}_h(n) \mathbf{C}_x(n). \quad (2.271)$$

Оскільки формули (2.270), (2.271) утворюють пару перетворень, то представлення  $\{X(m)\}$  за допомогою  $(WNT)_h$  є однозначним.

*Приклад.*

Нехай  $\{X(n)\} = \{1 \ 2 \ -1 \ 3\}$ .  $n = 2$ ,  $N = 4$ .

$$\mathbf{C}_x(2) = \frac{1}{4} \mathbf{H}_h(2) \mathbf{X}(2) \quad (2.272)$$

Замістивши у явному вигляді  $\mathbf{H}_h(2)$ , одержимо

$$\begin{bmatrix} C_x(0) \\ C_x(1) \\ C_x(2) \\ C_x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ -5/4 \\ 1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix} \quad (2.273)$$

Щоб переконатися у однозначності перетворення, які описується (2.272), підставимо  $C_x(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  в (2.270). В результаті одержимо

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5/4 \\ -5/4 \\ 1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2.274)$$

### 2.10.3.3. Швидке перетворення Уолша–Адамара

Аналогічно ШПФ, яке використовується для ефективного обчислення ДПФ, швидке перетворення Уолша-Адамара (ШПУА) з упорядкуванням за Адамаром є алгоритмом для ефективного обчислення ПУА. Швидке перетворення Уолша-Адамара з упорядкуванням за Адамаром можна одержати або за допомогою факторизації матриць, або за допомогою розбиття матриць. Розглянемо виведення алгоритму за допомогою розбиття матриць для випадку  $N = 8$ . При  $N = 8$  формула (2.270) записується як

$$\mathbf{V}_x(3) = \frac{1}{8} \mathbf{H}_h(3) \mathbf{X}(3). \quad (2.275)$$

Користуючись виразом (2.272),  $\mathbf{H}_h(3)$  можна виразити через  $\mathbf{H}_x(2)$ , що приводить до формул

$$\begin{bmatrix} C_x(0) \\ C_x(1) \\ C_x(2) \\ C_x(3) \\ \dots \\ C_x(4) \\ C_x(5) \\ C_x(6) \\ C_x(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_h(2) & \mathbf{H}_h(2) \\ \mathbf{H}_h(2) & -\mathbf{H}_h(2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ \dots \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix}. \quad (2.276)$$

Із розбиття матриці, яке наведено в (2.276), витікає, що

$$\begin{bmatrix} C_x(0) \\ C_x(1) \\ C_x(2) \\ C_x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{H}_h(2) \cdot \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_1(1) \\ X_1(2) \\ X_1(3) \end{bmatrix} \quad (2.277a)$$

$$\begin{bmatrix} C_x(4) \\ C_x(5) \\ C_x(6) \\ C_x(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{H}_h(2) \cdot \begin{bmatrix} X_1(4) \\ X_1(5) \\ X_1(6) \\ X_1(7) \end{bmatrix}, \quad (2.277b)$$

де

$$\begin{aligned} X_1(l) &= X(l) + X(4+l), \quad l = 0, 1, 2, 3; \\ X_1(l) &= X(l-4) - X(l), \quad l = 4, 5, 6, 7. \end{aligned}$$

Послідовність додавань та віднімань в (2.277) показана на прикладі графа БПУА, наведеного на рис. 2.8

Якщо застосувати ще раз (2.276) до формул (2.277), одержимо

$$\begin{bmatrix} C_x(0) \\ C_x(1) \\ \dots \\ C_x(2) \\ C_x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_h(1) & \mathbf{H}_h(1) \\ \mathbf{H}_h(1) & -\mathbf{H}_h(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \dots \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix}; \quad (2.278a)$$

$$\begin{bmatrix} C_x(4) \\ C_x(5) \\ \dots \\ C_x(6) \\ C_x(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_h(1) & \mathbf{H}_h(1) \\ \mathbf{H}_h(1) & -\mathbf{H}_h(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X(4) \\ X(5) \\ \dots \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix} \quad (2.278b)$$



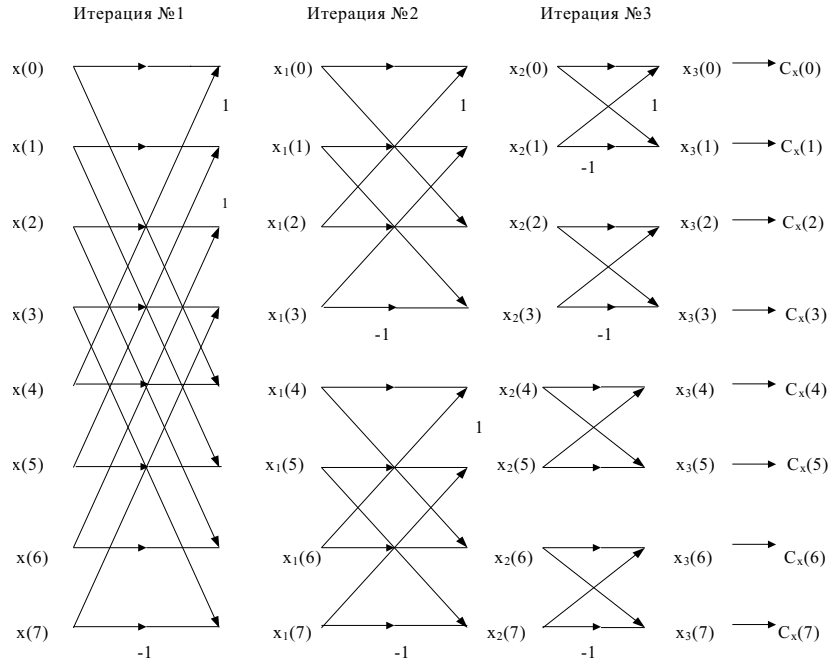


Рис. 2.8. Граф ШПУА з упорядкуванням за Адамаром при  $N = 8$

Із (2.278) одержуємо такі вирази:

$$\begin{bmatrix} C_x(0) \\ C_x(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{H}_h(1) \begin{bmatrix} X_1(0) + X_1(2) \\ X_1(1) + X_1(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{H}_h(1) \begin{bmatrix} X_2(0) \\ X_2(1) \end{bmatrix}; \quad (2.279a)$$

$$\begin{bmatrix} C_x(2) \\ C_x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{H}_h(1) \begin{bmatrix} X_1(0) - X_1(2) \\ X_1(1) - X_1(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{H}_h(1) \begin{bmatrix} X_2(2) \\ X_2(3) \end{bmatrix}; \quad (2.279b)$$

$$\begin{bmatrix} C_x(4) \\ C_x(5) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{H}_h(1) \begin{bmatrix} X_1(4) + X_1(5) \\ X_1(5) + X_1(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{H}_h(1) \begin{bmatrix} X_2(4) \\ X_2(5) \end{bmatrix}; \quad (2.279c)$$

$$\begin{bmatrix} C_x(6) \\ C_x(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{H}_h(1) \begin{bmatrix} X_1(4) - X_1(5) \\ X_1(5) - X_1(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \mathbf{H}_h(1) \begin{bmatrix} X_2(6) \\ X_2(7) \end{bmatrix}. \quad (2.279d)$$

Оскільки

$$\mathbf{H}_h(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

то ці формули призводять до

$$\begin{aligned} 8C_x(0) &= X_2(0) + X_2(1) = X_3(0); \\ 8C_x(1) &= X_2(0) - X_2(1) = X_3(1); \\ 8C_x(2) &= X_2(2) + X_2(3) = X_3(2); \\ 8C_x(3) &= X_2(2) - X_2(3) = X_3(3); \\ 8C_x(4) &= X_2(4) + X_2(5) = X_3(4); \\ 8C_x(5) &= X_2(4) - X_2(5) = X_3(5); \\ 8C_x(6) &= X_2(6) + X_2(7) = X_3(6); \\ 8C_x(7) &= X_2(6) - X_2(7) = X_3(7). \end{aligned} \quad (2.280)$$

Послідовність додавань та віднімань в (2.278) позначається як ітерація  $\neq 3$ . Із графу ШПУА з упорядкуванням за Адамаром витікає, що для його реалізації за винятком нормування за допомогою множника  $1/8$ , потрібні тільки операції додавання та віднімання. Число операцій додавання та віднімання, які необхідні для обчислення восьми коефіцієнтів  $(WHT)_h$ , дорівнює  $8 \times \log_2 8 = 24$ .

У загальному випадку  $N = 2^n$  загальна кількість ітерацій дорівнює  $n = \log_2 N$ . Індекс ітерації приймає значення  $r = \overline{1, n}$ . В  $r$ -й ітерації приймають участь  $2^{r-1}$  груп по  $N/2^{r-1}$  елементів у кожній групі. Загальна кількість арифметичних операцій, що необхідна для обчислення всіх коефіцієнтів перетворення, дорівнює наближено  $N \log_2 N$  порівняно із  $N^2$  операціями, що відповідають (2.270). Алгоритм ШПУА можна застосовувати для обчислення оберненого перетворення Уолша–Адамара за формулою (2.271).

#### Приклад.

Для послідовності  $\{X(m)\} = \{1\ 2\ 1\ 1\ 3\ 2\ 1\ 2\}$ , користуючись ШПУА з упорядкуванням за Адамаром, обчислити коефіцієнти ПУА  $C_x(k)$ ,  $k = \overline{0, 7}$ .

$$\begin{aligned} X(0) &= 1; X_1(0) = X(0) + X(4) = 4; X_2(0) = X_1(0) + X_1(2) = 6; \\ X_3(0) &= X_2(0) + X_2(1) = 13 \rightarrow C_x(0); \\ X(1) &= 2; X_1(1) = X(1) + X(5) = 4; X_2(1) = X_1(1) + X_1(3) = 7; \\ X_3(1) &= X_2(0) - X_2(1) = -1 \rightarrow C_x(1); \\ X(2) &= 1; X_1(2) = X(2) + X(6) = 2; X_2(2) = X_1(0) - X_1(2) = 2; \\ X_3(2) &= X_2(2) + X_2(3) = 3 \rightarrow C_x(2); \\ X(3) &= 1; X_1(3) = X(3) + X(7) = 3; X_2(3) = X_1(1) - X_1(3) = 1; \\ X_3(3) &= X_2(2) - X_2(3) = 1 \rightarrow C_x(3); \\ X(4) &= 3; X_1(4) = X(0) - X(4) = -2; X_2(4) = X_1(4) + X_1(6) = -2; \\ X_3(4) &= X_2(4) + X_2(5) = -3 \rightarrow C_x(4); \\ X(5) &= 2; X_1(5) = X(1) - X(5) = 0; X_2(5) = X_1(5) + X_1(7) = -1; \\ X_3(5) &= X_2(4) - X_2(5) = -1 \rightarrow C_x(5); \\ X(6) &= 1; X_1(6) = X(2) - X(6) = 0; X_2(6) = X_1(4) - X_1(6) = -2; \\ X_3(6) &= X_2(6) + X_2(7) = -1 \rightarrow C_x(6); \\ X(7) &= 2; X_1(7) = X(3) - X(7) = -1; X_2(7) = X_1(5) - X_1(7) = 1; \\ X_3(7) &= X_2(6) - X_2(7) = -3 \rightarrow C_x(7). \end{aligned}$$

Отже,

$$\{C_x(k)\} = [18/8 \quad -1/8 \quad 3/8 \quad -3/8 \quad -1/8 \quad -1/8 \quad -3/8].$$

#### 2.10.4. Спектр ПУА з упорядкуванням за Адамаром

Енергетичний спектр ПУА з упорядкуванням за Адамаром має властивість інваріантності відносно циклічних зсувів вихідної послідовності.

Загалом, енергетичний спектр визначається так:

$$P_h(0) = C_x^2(0); \quad P_h(r) = \sum_{k=2^{r-1}}^{2^r-1} C_x^2(k); \quad r = \overline{1, n}; \quad n = \log_2 N. \quad (2.281)$$

Згідно (2.281) маємо

$$P_h(0) = \frac{1}{N^2} X_n^2(0); \quad P_h(k) = \frac{2^{r-1}}{N^2} \sum_{m=2^{k-1}}^{2^k-1} X_{n+1-k}^2(m); \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.282)$$

Тобто енергетичний спектр ПУА з упорядкуванням за Адамаром обчислюється через елементи вихідної послідовності.

Фазовий спектр ПУА з упорядкуванням за Адамаром визначається так:

$$\Psi_h(0) = \frac{C_x(0)}{|\sqrt{P_h(0)}|}; \quad \Psi_h(k) = \frac{\sum_{m=-2^{k-1}}^{2^k-1} C_x(m)}{2(k-1)/2|\sqrt{P_h(k)}|}; \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.283)$$

Для  $N = 8$ :

$$\begin{aligned} \Psi_h(0) &= \frac{C_x(0)}{|\sqrt{P_h(0)}|}; & \Psi_h(1) &= \frac{C_x(1)}{|\sqrt{P_h(1)}|}; \\ \Psi_h(2) &= \frac{\sum_{k=2}^3 C_x(k)}{|\sqrt{P_h(2)}|}; & \Psi_h(3) &= \frac{\sum_{k=4}^7 C_x(k)}{|\sqrt{P_h(3)}|}. \end{aligned}$$

На відміну від фазового спектра ДПФ, кожна складова спектру якого визначається по відношенню до однієї частоти, фазовий спектр ПУА, упорядкованого за Адамаром, визначається по відношенню до групи частот. З цієї причини послідовність  $\{X(m)\}$  не може бути відновлена за заданими енергетичним та фазовим спектрами ПУА з упорядкуванням за Адамаром.

### 2.11. Дискретне косинусне перетворення

Дискретне косинусне перетворення (ДКП) вихідного масиву даних  $X(m)$ ,  $m = \overline{0, N-1}$ , визначається як

$$L_x(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} X(m); \quad (2.284)$$

$$L_x(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) \cos \frac{(2m+1)k\pi}{2N}; \quad k = \overline{1, N-1}. \quad (2.285)$$

Множина базисних векторів

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{N}}, \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{(2m+1)k\pi}{2N} \right\}$$

фактично утворює клас дискретних многочленів Чебишова:

$$T_0(p) = 1/\sqrt{N}; \quad T_k(Z_m) = \sqrt{2/N} \cos[k \arccos(Z_m)]; \quad k, m = \overline{1, N-1}. \quad (2.286)$$

Вони еквівалентні множині векторів дискретного косинусного перетворення. Обернене дискретне косинусне перетворення визначається як

$$X(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} L_x(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} L_x(k) \cos \frac{(2m+1)k\pi}{2N}, \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (2.287)$$

Якщо подати  $\cos x$  в комплексній формі, то ДКП можна записати у вигляді

$$L_x(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} X(m); \quad (2.288)$$

$$L_x(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Re} \left\{ e^{-ik\pi/(2N)} \sum_{m=0}^{2N-1} X(m) W^{km} \right\}, \quad k = \overline{1, N-1}, \quad (2.289)$$

де  $W = e^{-i2\pi/(2N)}$ ;  $i = \sqrt{-1}$ ,  $X(m) = 0$ ;  $m = \overline{N, 2N-1}$ . З цього виразу витікає, що  $N$  коефіцієнтів ДКП можна обчислити за допомогою  $2N$ -точкового алгоритму ШПФ.

## 2.12. Стискання даних

Важливою областю застосування ортогональних перетворень є стискання даних. Стискання даних ґрунтується на теорії сигналів, яка розглядає методи ефективного подання сигналів даного класу. Якщо дискретний сигнал містить  $N$  відліків, то його можна розглядати як точку  $N$ -вимірного простору. Тоді кожний відлік є координатою  $N$ -вимірного вектору даних  $\mathbf{X}$ , що являє собою сигнал у цьому просторі. Для більш ефективного подання можна здійснити ортогональне перетворення  $\mathbf{X}$ , що приводить до рівняння  $\mathbf{Y} = \mathbf{T}\mathbf{X}$ , де  $\mathbf{Y}$  – вектор коефіцієнтів перетворення,  $\mathbf{T}$  – матриця перетворення. Метою стискання даних є вибір підмножини  $M$  координат вектора  $\mathbf{Y}$ , де  $M$  є суттєво меншим за  $N$ . Решту  $(N - M)$  координат можна відкинути, не спричиняючи суттєвої похибки при відновленні сигналу по  $M$  координатам вектора  $\mathbf{Y}$ . Отже, порівнювати ортогональні перетворення слід відповідно до деякого критерія похибки. Одним із найбільш поширених критеріїв є критерій середньоквадратичної похибки.

Природним наслідком є стискання даних, яке полягає у тому, що подання сигналу можна використати для зменшення кількості надлишкової інформації.

### 2.12.1. Пошук оптимального перетворення

Знайдемо ортогональне перетворення, яке, з одного боку, забезпечуватиме подання сигналу, а з іншого – буде оптимальним у сенсі середньоквадратичного критерія. Нехай  $\mathbf{T}$  – ортогональне перетворення, задане у вигляді

$$\mathbf{T}^T = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_N], \quad (2.290)$$

де  $\varphi$  –  $N$ -вектори. Для зручності базисні вектори  $\{\varphi_m\}$  вважатимемо дійсними і ортонормованими, тобто

$$\varphi_i^T \varphi_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (2.291)$$

Для кожного вектора  $\mathbf{X}$ , що належить до даного класу векторів вхідних даних, маємо

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}\mathbf{X}, \quad (2.292)$$

де  $\mathbf{X}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]$  і  $\mathbf{Y}^T = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N]$ . Оскільки вектори  $\varphi_m$  ортонормовані,  $\mathbf{T}^T\mathbf{T} = \mathbf{E}$  й отже,

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}^T\mathbf{Y} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]\mathbf{Y},$$

або

$$\mathbf{X} = y_1\varphi_1 + y_2\varphi_2 + \dots + y_N\varphi_N = \sum_{i=1}^N y_i\varphi_i. \quad (2.293)$$

Бажано зберегти підмножину  $\{y_1 \ y_2 \ \dots \ y_M\}$  і при цьому знайти оцінку вектора  $\mathbf{X}$ . Це можна здійснити шляхом заміни решти  $N - M$  координат  $\mathbf{Y}$  заздалегідь обраними сталими  $b_i$ , що дає

$$\tilde{\mathbf{X}}(M) = \sum_{i=1}^M y_i\varphi_i + \sum_{i=M+1}^N b_i\varphi_i, \quad (2.294)$$

де  $\tilde{\mathbf{X}}$  – оцінка  $\mathbf{X}$ . Похибку, що виникає внаслідок відкидання  $N - M$  координат, можна подати у вигляді  $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}(M)$ , де  $\Delta\mathbf{X}$  – вектор похибки, тобто

$$\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \sum_{i=1}^M y_i\varphi_i - \sum_{i=M+1}^N b_i\varphi_i. \quad (2.295)$$

Враховуючи (2.293), дістаємо

$$\Delta\mathbf{X} = \sum_{i=1}^N (y_i - b_i)\varphi_i. \quad (2.296)$$

Отже, середньоквадратична похибка  $\varepsilon(M)$  визначається у вигляді

$$\varepsilon(M) = \mathcal{E}\{\|\Delta\mathbf{X}\|^2\} = \mathcal{E}\{(\Delta\mathbf{X})^T(\Delta\mathbf{X})\}. \quad (2.297)$$

де  $\mathcal{E}\{\cdot\}$  – символ математичного сподівання. Заміщення (2.296) у (2.297) приводить до

$$\varepsilon(M) = \mathcal{E}\left\{\sum_{i=M+1}^N \sum_{j=M+1}^N (y_i - b_i)(y_j - b_j)\varphi_i^T \varphi_j\right\},$$

або у спрощеному вигляді

$$\varepsilon(M) = \sum_{i=M+1}^N \mathcal{E}\{(y_i - b_i)^2\}. \quad (2.298)$$

Необхідно вибрати таку комбінацію величин  $\varphi_i$  і  $b_i$ , щоб мінімізувати  $\varepsilon(M)$ .

Процедура вибору оптимальних величин  $\varphi_i$  і  $b_i$  складається відповідно із двох етапів.

*Перший етап.* Оптимальне значення  $b_i$  визначаємо із виразу

$$\frac{\partial}{\partial b_i} \mathcal{E}\{(y_i - b_i)^2\} = -2[\mathcal{E}\{y_i\} - b_i] = 0, \quad (2.299)$$

що приводить до

$$b_i = \mathcal{E}\{y_i\}. \quad (2.300)$$

Потім із виразів (2.291) і (2.293) дістаємо

$$y_i = \varphi_i^T \mathbf{X}. \quad (2.301)$$

Отже,  $b_i = \varphi_i^T \mathcal{E}\{\mathbf{X}\} = \varphi_i^T \bar{\mathbf{X}}$ , де  $\bar{\mathbf{X}} = \mathcal{E}\{\mathbf{X}\}$ . Оскільки різниця  $(y_i - b_i)$  є скалярною величиною, то  $\varepsilon(M)$  можна записати як

$$\varepsilon(M) = \sum_{i=M+1}^N \mathcal{E}\{y_i - b_i\}(y_i - b_i)^T. \quad (2.302)$$

Підстановка  $y_i = \varphi_i^T \mathbf{X}$  та  $b_i = \varphi_i^T \bar{\mathbf{X}}$  у вираз (2.302) приводить до

$$\varepsilon(M) = \sum_{i=M+1}^N \varphi_i^T \mathcal{E}\{(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T\} \varphi_i.$$

Оскільки  $C_x = \mathcal{E}\{(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T\}$  є коваріаційною матрицею  $\mathbf{X}$ , то

$$\varepsilon(M) = \sum_{i=M+1}^N \varphi_i^T C_x \varphi_i. \quad (2.303)$$

*Другий етап.* Для відшукування оптимального  $\varphi_i$  слід не тільки мінімізувати  $\varepsilon(M)$ , але й задовольнити обмеження  $\varphi_i^T \varphi_i = 1$ . Скористаємося методом множників Лагранжа і мінімізуємо

$$\hat{\varepsilon}(M) = \varepsilon(M) - \sum_{i=M+1}^N \beta_i [\varphi_i^T \varphi_i - 1] = \sum_{i=M+1}^N \{\varphi_i^T C_x \varphi_i - \beta_i [\varphi_i^T \varphi_i - 1]\} \quad (2.304)$$

по відношенню до  $\varphi_i$ , де  $\beta_i$  – множники Лагранжа.

Оскільки

$$\nabla \varphi_i [\varphi_i^T C_x \varphi_i] = 2C_x \varphi_i \text{ і } \nabla \varphi_i [\varphi_i^T \varphi_i] = 2\varphi_i,$$

то

$$\nabla \varphi_i [\hat{\varepsilon}(M)] = 2C_x \varphi_i - 2\beta_i \varphi_i = 0,$$

що дає

$$C_x \varphi_i = \beta_i \varphi_i. \quad (2.305)$$

За визначенням цей вираз означає, що  $\varphi_i$  – власний вектор коваріаційної матриці  $C_x$ , а  $\beta_i$  – відповідне власне значення. Позначивши  $\beta_i$  через  $\lambda_i$  і підставляючи (2.305) у (2.303), дістаємо мінімальне значення середньоквадратичної похибки у вигляді

$$\varepsilon_{\min}(M) = \sum_{i=M+1}^N \lambda_i. \quad (2.306)$$

Таким чином, розкладання (2.293) є розкладанням за власними векторами коваріаційної матриці. Це розкладання називається *розкладанням Карунена-Лоева*. Вектори  $\varphi_i$ , що утворюють матрицю  $\mathbf{T}$  у (2.290), є власними векторами матриці  $C_x$ . Перетворення  $\mathbf{Y} = \mathbf{T}\mathbf{X}$  називається **перетворенням Карунена-Лоева (ПКЛ)**.

Із наведеного можна зробити два важливих висновки:

1. Перетворення Карунена-Лоева є оптимальне перетворення для подання сигналів по відношенню до критерія середньоквадратичної похибки.

2. Оскільки  $\mathbf{Y} = \mathbf{T}\mathbf{X}$ , то коваріаційна матриця в області зображень  $C_y$  визначається як

$$C_y = \mathbf{T}C_x\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}C_x\mathbf{T}^T.$$

Оскільки  $\mathbf{T}$  складається із власних векторів  $C_x$ , то

$$C_y = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N), \quad (2.307)$$

де  $\lambda_i, i = \overline{1, N}$  – власні значення  $C_x$ . Оскільки  $C_y$  є діагональною матрицею, то робимо висновок, що перетворення даних  $y_i$  у виразі (2.301) некорельовані.

### 2.12.2. Дисперсійний критерій

Із (2.306) випливає, що ефективність коефіцієнта перетворення  $y_i$  для подання вектора даних  $\mathbf{X}$  визначається відповідним до нього власним значенням. Якщо коефіцієнт  $y_k$  не враховується, середньоквадратична похибка збільшується на відповідне власне значення  $\lambda_k, k \neq i$ . Отже, потрібно обрати множину  $\{y_i\}$ , яка відповідає  $M$  найбільшим власним значенням, а решту  $y_i$  відкинути, оскільки їх можна замінити сталими  $b_i, i = \overline{M+1, N}$ .

Оскільки власні значення є елементами коваріаційної матриці  $C_y$ , які містяться на головній діагоналі, то вони відповідають дисперсіям коефіцієнтів перетворення  $y_i, i = \overline{1, N}$ . Для решти перетворень матриця  $C_y$  містить ненульові позадіагональні елементи. Тому природним критерієм при виборі множини коефіцієнтів перетворення, що утримуються, є збереження  $M$  коефіцієнтів із найбільшими дисперсіями. Наведений критерій можна визначити як дисперсійний критерій.

### 2.12.3. Основні поняття стискання зображень

При цифровій обробці сигналів зображень зазвичай мають справу із значною кількістю даних, які у загальному випадку суттєво корельовані за рядками та стовпцями. Кожний елемент зображення зазвичай кодується у вигляді слова, що містить шість біт. Таким чином елемент зображення можна подати десятковим числом від 1 до 64 або від 0 до 63 (тобто 64-ма рівнями). Закодовані таким чином дані зазвичай обробляються блоками розміром  $(N \times N)$ .

Елемент зображення у  $i$ -му рядку та  $j$ -му стовпці можна подати у вигляді випадкової величини  $f(i, j)$ , а матрицю  $(N \times N)$  випадкових величин як  $[f(i, j)]$ . Тоді двовимірне перетворення  $[f(i, j)]$  та обернене перетворення можна записати як

$$[F(u, v)] = \mathbf{T}[f(i, j)]\mathbf{T}^T \text{ та } [f(i, j)]\mathbf{T}^T[F(u, v)]\mathbf{T},$$

де  $[F(u, v)]$  – матриця коефіцієнтів перетворення, а  $\mathbf{T}$  – матриця перетворення. Нехай  $\mathbf{T}$  є матрицею із дійсними елементами і  $\mathbf{T}^T\mathbf{T} = \mathbf{I}$ .

Позначимо через  $\sigma^2(i, j)$  та  $\tilde{\sigma}^2(u, v)$  дисперсії  $f(i, j)$  та  $F(u, v)$  відповідно. Якщо функція розподілу дисперсії  $\tilde{\sigma}^2(u, v)$  невідома для зображення або класу зображень, які підлягають перетворенню, її знаходять шляхом моделювання. Один із підходів полягає у тому, що зображення описується статистично, як марковський процес першого порядку, а рядки та стовпці обробляються незалежно. Нехай, також, дисперсія кожного стовпця і рядку випадкових величин дорівнює  $\sigma^2$ . Тоді коваріаційні матриці для рядків і стовпців можна записати як

$$C_k = \sigma^2 R_k, \quad (2.308)$$

де

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho_k & \rho_k^2 & \dots & \rho_k^{N-1} \\ \rho_k & 1 & \rho_k & \dots & \rho_k^{N-2} \\ \rho_k^2 & \rho_k & 1 & \dots & \rho_k^{N-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \rho_k^{N-1} & \rho_k^{N-2} & \rho_k^{N-3} & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

а  $\rho_1$  і  $\rho_2$  – коефіцієнти кореляції для рядків ат стовпців випадкових величин відповідно. Коваріаційні матриці в області перетворень, що відповідають  $C_k$ , записуються як

$$\tilde{C}_k = \sigma^2[\mathbf{TR}_k|bfT^T], \quad k = 1, 2. \quad (2.309)$$

Потім обчислюється функція розподілу дисперсії  $\tilde{\sigma}^2(u, v)$  як функція величин  $\tilde{C}_1(s, s)$  і  $\tilde{C}_2(s, s)$ , які є діагональними елементами матриць  $\tilde{C}_1$  і  $\tilde{C}_2$  відповідно. На рис. ?? наведено графіки  $\tilde{C}_k(s, s)/\sigma^2$  при  $N = 16$  і  $\rho_1 = \rho_2 = 0,95$  у порядку спадання. Із рис. ?? випливає, що дискретне косинусне перетворення (ДКП) майже співпадає із перетворенням Карунена-Лоева (ПКЛ), що також справджується для двовимірних дисперсій  $\tilde{\sigma}^2(u, v)$ . Функція розподілу дисперсії  $\tilde{\sigma}^2(u, v)$  визначається як

$$\tilde{\sigma}^2(u, v) = \tilde{C}_1(u, u)\tilde{C}_2(v, v). \quad (2.310)$$

Після визначення  $\tilde{\sigma}^2(u, v)$  при  $N = 16$  і  $\rho_1 = \rho_2 = 0,9$  здобуємо матрицю, елементи якої обчислювалися з точністю до двох десяткових знаків після коми. Оскільки ця матриця симетрична, то наведено тільки її верхня трикутна частина. З наведеної матриці випливає, що двовимірні дисперсії у разі ДКП являють собою функцію розподілу дисперсії, яка має максимум у початку координат, їй властива кругова симетрія та монотонне спадання за величиною разом із збільшенням просторових частот.

$$\frac{1}{\sigma^4}[\tilde{\sigma}^2(u, v)] =$$





1. Знаходять двовимірне перетворення зображення шляхом обробки блоками ( $N \times N$ ).
2. Із  $N^2$  коефіцієнтів перетворення зберігають  $N^2/m$  коефіцієнтів із найбільшими двовимірними дисперсіями  $\tilde{\sigma}^2(u, v)$ .  $m = r/q$ , де  $r$  – число біт у коді вхідного зображення,  $q$  – число біт у коді перетвореного зображення. Решту коефіцієнтів прирівнюють до нуля.
3. Кожний із  $N^2/m$  збережених коефіцієнтів кодується за допомогою  $k$  біт. Потім відновлюється відповідний блок за допомогою оберненого перетворення.

Середнє число біт на елемент відновленого зображення, вочевидь, дорівнює  $k/m$ .

## 2.13. Узагальнена вінеровська фільтрація

### 2.13.1. Неперервна оцінка форми сигналу

Задача оцінки параметрів полягає у наступному. Сигнал  $\mathbf{x}(t)$ , що передається, підлягає перетворенню  $T_1$ , яке описує вплив каналу передачі. При цьому  $\mathbf{x}(t)$  перетворюється у свій образ  $\mathbf{z}(t)$  – сигнал, що приймається, який далі проходить через фільтр із імпульсною характеристикою  $h(t, p)$ . Імпульсна характеристика має обиратися так, щоб на виході в момент  $t$  одержати мінімум середньоквадратичної похибки оцінки параметру  $\omega(t)$ , який міститься в сигналі  $\mathbf{x}(t)$ .

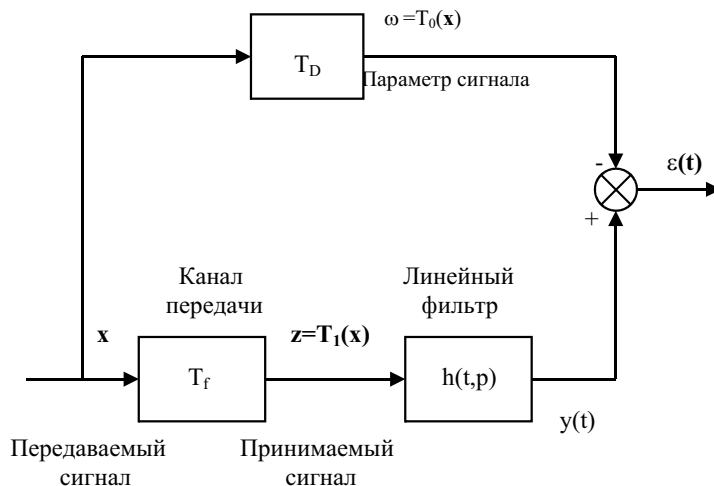


Рис. 2.9. Структурна схема оцінки параметрів сигналу

Параметр сигналу, що оцінюється, може бути охарактеризований відображенням  $T_0$ . Іноді корисно вважати, що  $T_0$  – опис ідеального каналу і задача полягає у тому, щоб знайти лінійний фільтр, який підключено послідовно із реальним каналом  $T_1$ , який забезпечує відображення, близьке до  $T_0$ .

За припущення, що сигнал є дійсним, запишемо функціонал середнього квадрату похибки для моменту  $t$  у вигляді

$$I = M\{|\mathbf{y}(t) - \omega(t)|^2\} = M\{\mathbf{y}(t)^2\} - 2M\{\mathbf{y}(t)\omega(t)\} + M\{|\omega(t)|^2\}. \quad (2.313)$$

Використовуючи зв'язок виходу із входом фільтра

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, p)\mathbf{z}(p)dp, \quad (2.314)$$

представимо функціонал у вигляді

$$I = \iint_{-\infty}^{\infty} k_{zz}(p, \tau)h(t, \tau)h(t, p)d\tau dp - 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(t, p)k_{z\omega}(p, t)dp + K_{\omega\omega}(t, t). \quad (2.315)$$

Цей функціонал повна визначається через автокореляцію та кореляцію процесів  $\mathbf{z}(t)$  і  $\omega(t)$ . Прирівнявши до нуля градієнт функціоналу (2.315), одержимо рівняння

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)k_{zz}(s, \tau)d\tau = k_{z\omega}(t, t) \quad (2.316)$$

Іншу трактовку оптимальної фільтрації одержимо, якщо функціонал похибки розглядати в просторі випадкових величин. Нехай  $\mathcal{L}_0$  – лінійний оператор фільтра, що задовольняє рівняння (2.316). Тоді (2.315) можна переписати в еквівалентній формі

$$M\{[\mathcal{L}_0\mathbf{z}(t) - \boldsymbol{\omega}(t)]\mathbf{z}(p)\} = 0. \quad (2.317)$$

Це означає, що  $\mathcal{L}$  треба вибирати так, щоб випадкова похибка  $\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\omega}(t)$  була ортогональною до всіх випадкових величин  $\{\mathbf{z}(p), -\infty < p < \infty\}$  із процесу  $\mathbf{z}$ , який відповідає сигналу, що приймається.

Умова (2.317) для стаціонарних процесів приймає форму

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_{zz}(\tau)h(t - \tau)d\tau = k_{z\omega}(t). \quad (2.318)$$

Шукана передаточна функція оптимального фільтру знаходиться шляхом перетворення Фур'є:

$$H(f) = K_{z\omega}(f)K_{zz}(f). \quad (2.319)$$

Вираз для оптимального значення квадрату похибки в частотній формі приймає вигляд

$$I_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{\omega\omega}(f)K_{zz}(f) - |K_{\omega z}(f)|^2}{K_{zz}(f)} df. \quad (2.320)$$

Розглянемо канал, який можна представити у вигляді лінійного фільтру зі сталими параметрами та дисперсійною (частотною) характеристикою  $G(f)$ , а також врахуємо вплив адитивного стаціонарного шуму із нульовим середнім, для чого запровадимо еквівалентний генератор шуму на вході приймача. Таким чином,

$$T_0 : \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{x}(t - T), T_1 : \mathbf{z}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)\mathbf{x}(\tau)d\tau + \mathbf{u}(t). \quad (2.321)$$

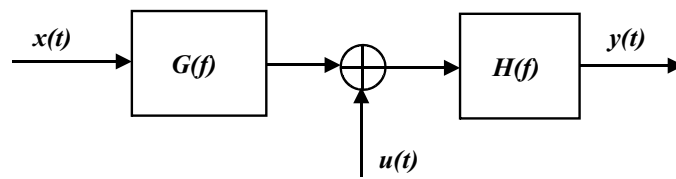


Рис. 2.10. Фільтр Вінера

Для статистично незалежних шуму та сигналу одержимо

$$k_{\omega z}(\tau) = M\{\mathbf{x}(t) + \tau - T)\mathbf{z}(t)\} = k_{xz}(\tau - T). \quad (2.322)$$

Перетворення Фур'є дає

$$\begin{aligned} K_{zz}(f) &= |G(f)|^2 K_{xx}(f) + K_{uu}(f), \\ K_{xz}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(f)g(\tau)e^{i2\pi f\tau} d\tau = K_{xx}(f)G^*(f), \end{aligned} \quad (2.323)$$

де  $G^*(f)$  – оператор, сполучений із оператором  $G(f)$ , або обернений до нього.

Замість цих значень в (2.319). Приходимо до передаточної функції оптимального фільтра Вінера.

$$H(f) = K_{xx}(f)G^*(f)e^{-i2\pi T f}|G(f)|^2 K_{xx}(f) + K_{uu}(f). \quad (2.324)$$

Щоб краще усвідомити фізичну сутність одержаного результату, розглянемо вираз для функціонала  $I$  в комплексній області.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(f)|1 - G(f)H(f)|^2 df + \int_{-\infty}^{\infty} K_{uu}(f)|H(f)|^2 df. \quad (2.325)$$

Перший член у цьому виразі – це похибка, яка обумовлена недостатньою компенсацією дисперсії в каналі передачі, другий – похибка, що обумовлена шумом, який залишається на виході фільтра. В тих частотних ділянках, де щільність сигналу  $K_{xx}(f)|G(f)|^2$ , що приймається, велика порівняно із щільністю шуму  $K_{uu}(f)$ , оптимальний фільтр слугує в основному для компенсації дисперсії каналу, в цих областях  $H(f) \approx G^{-1}(f)$ . В областях, де щільність шуму не є малою, оптимальний фільтр вносить додаткове згасання. Якщо ж щільність шуму є малою по відношенню до щільності сигналу на всіх частотах, характеристика оптимального фільтра є оберненою до дисперсійної характеристики каналу  $G(f)$ ; такий фільтр називається фільтром, що вирівнює, або *компенсатором*.

За наявності шуму компенсатор є квазіоптимальним. Дійсно, маємо для нього

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{uu}(f)}{|G(f)|^2} df,$$

в той час, як згідно (2.324) та (2.325)

$$I_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{xx}(f)}{|G(f)|^2 + [K_{uu}(f)/K_{xx}(f)]} df. \quad (2.326)$$

У якості приклада оптимальної фільтрації неперервних сигналів розглянемо задачу *спільної оптимізації передаючого та приймального фільтрів*.

Параметри системи можна покращити, якщо змінити  $G(f)$  шляхом “передспотворенням” у передатчику (рис. ).

Розглянемо задачу про пошук найкращої пари  $H(f)$  та  $G(f)$ , яка мінімізує середній квадрат похибки при оцінці форми сигналу. Якщо  $G(f)$  є дуже великою, розв’язок є очевидним:  $H(f) = G^{-1}(f)$ . Сигнал в таких умовах просто “пригнічує” шум. Зазвичай допустима потужність сигналу обмежена. Треба знайти стаціонарні точки функціонала  $I + \lambda P_S$ , змінюючи одночасно  $G(f)$  та  $H(f)$ , де  $\lambda$  – множник Лагранжа.

$$P_S = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(f)|G(f)|^2 df - \quad (2.327)$$

потужність сигналу, що приймається.

Якщо при варіації  $H(f)$  вважати градієнт  $I + \lambda P_S$  рівним нулю, одержимо рівняння

$$2K_{xx}(f)|G(f)|^2 - 2K_{xx}(f)H(f) = 0. \quad (2.328)$$

Аналогічно, якщо обчислити градієнт по  $G(f)$  та вважати його рівним нулю, будемо мати:

$$2K_{xx}(f)|H(f)|^2 G(f) - 2K_{xx}(f)H^*(f) + 2\lambda K_{uu}(f)G(f) = 0. \quad (2.329)$$

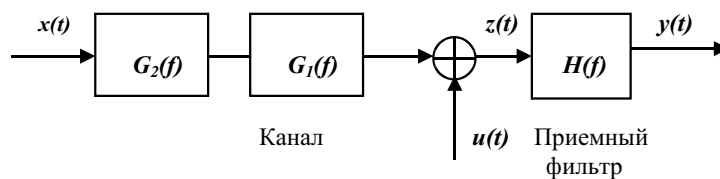


Рис. 2.11. Фільтр Вінера із передспотворюванням

Щоб знайти сумісний розв'язок цих рівнянь, помножимо (2.328) на  $H^*(f)$ , а (2.329) – на  $G^*(f)$  і віднімемо одне із іншого. Одержимо

$$K_{uu}(f)|H(f)|^2 = \lambda K_{xx}(f)|G(f)|^2. \quad (2.330)$$

Позначимо  $B$  – область частот, в якій відношення щільності сигналу до щільності шуму перевищує деякий поріг:

$$B = \left\{ f; \frac{K_{xx}(f)}{K_{uu}(f)} > \lambda \right\}. \quad (2.331)$$

Тоді, вирішуючи (2.330) спільно спочатку із (2.328), а потім із (2.329), приходимо до виразів

$$\left. \begin{aligned} |H(f)|^2 &= \sqrt{\lambda K_{xx}(f) K_{uu}(f) - \lambda}, \\ |G(f)|^2 &= \sqrt{\frac{\lambda K_{uu}(f)}{K_{xx}(f)\lambda} - \frac{K_{uu}(f)}{K_{xx}(f)}}} \end{aligned} \right\} f \in B. \quad (2.332)$$

Параметр  $\lambda$  вибирається так, щоб задовольнити умову обмеження потужності (2.327), звідки

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\int_B \sqrt{K_{xx}(f) K_{uu}(f)} df}{P_S + P_N}. \quad (2.333)$$

$P_N = \int_B K_{uu}(f) df$  – потужність шуму, що міститься у смузі пропускання фільтрів.

### 2.13.2. Цифрова вінерівська фільтрація

На рис. наведено структурну схему одновимірної узагальненої цифрової системи вінерівської фільтрації. Через  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{W}$  позначено вхідний  $N$ -вектор, який являє собою суму вектора даних та шумового вектора. Вінерівський фільтр  $\mathbf{A}$  представляється у вигляді  $N \times N$ -матриці. Ортогональне перетворення  $\mathbf{T}$  та обернене для нього  $\mathbf{T}^{-1}$  також записуються у вигляді  $N \times N$ -матриці. Вектор  $\hat{\mathbf{X}}$  являє собою оцінку вектора  $\mathbf{X}$ . Основна задача полягає у тому, щоб створити такий фільтр  $\mathbf{A}$ , для якого математичне сподівання середньоквадратичного відхилення  $\hat{\mathbf{X}}$  від  $\mathbf{X}$  було мінімальним. Випадок  $\mathbf{T} = \mathbf{E}$  відповідає тотожному перетворенню, і модель, що представлена на рис. , відповідає фільтру, запропонованому Вінером.

Задача оптимальної фільтрації сигналу в класичній постановці полягає у відновленні із достатньою точністю форми сигналу, що передається, причому, якщо цей сигнал випадковий, то необхідно забезпечити мінімальне відхилення вихідного сигналу від вхідного.

Оскільки сигнал випадковий, то треба зробити визначені припущення щодо статистичних властивостей цього сигналу. Будемо вважати, що:

1. Сигнал та шум мають нульові математичні сподівання:  $\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{W}} = 0$ . Звідси витікає, що  $\bar{\mathbf{Z}} = 0$ ;  $\mathbf{V}_X = M\{\mathbf{X}\mathbf{X}'\}$ ;  $\mathbf{V}_W = M\{\mathbf{W}\mathbf{W}'\}$  і  $\mathbf{V}_Z = M\{\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\}$ .

2. Сигнал та шум некорельовані, тобто  $M\{\mathbf{X}\mathbf{W}'\} = M\{\mathbf{W}\mathbf{X}'\} = 0$ .

3. При  $\mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{E}$

$$\tilde{V}_{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{V}_{\mathbf{x}}\mathbf{T}'; \quad \tilde{V}_{\mathbf{w}} = \mathbf{T}\mathbf{V}_{\mathbf{w}}\mathbf{T}'; \quad \tilde{V}_{\mathbf{z}} = \mathbf{T}\mathbf{V}_{\mathbf{z}}\mathbf{T}'. \quad (2.334)$$

### 2.13.2.1. Визначення матриці фільтру

Оскільки  $\hat{\mathbf{X}}$  являється вектором оцінки  $\mathbf{X}$ , то відповідний вектор похибки визначається як

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}. \quad (2.335)$$

Отже, загальна середньоквадратична похибка при оцінюванні дорівнює

$$\boldsymbol{\varepsilon} = M\{\|\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}\|^2\} = M\{(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X})(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X})\}. \quad (2.336)$$

Зі структурної схеми рис. витікає, що

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{Z}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}'. \quad (2.337)$$

Оскільки  $\mathbf{T}\mathbf{T}' = \mathbf{I}$  та  $\mathbf{F} = \mathbf{T}\mathbf{Z}$ , вираз 2.336) може бути записано у вигляді

$$\boldsymbol{\varepsilon} = M\{\mathbf{F}'\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{F}\} - 2M\{\mathbf{F}'\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{X}\} + M\{\|\mathbf{X}\|^2\}. \quad (2.338)$$

Тепер матриця  $\mathbf{A}$  має обиратися так, щоб  $\boldsymbol{\varepsilon}$  була мінімальною. Для цього вона має задовольняти необхідну умову  $\nabla_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ , тобто

$$M\{\nabla_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}'\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{F})\} - 2M\{\nabla_{\mathbf{A}}\mathbf{F}'\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{X}\} + M\{\nabla_{\mathbf{A}}(\|\mathbf{X}\|^2)\} = 0. \quad (2.339)$$

Звідси витікає, що

$$\nabla_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}'\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{F}) = 2\mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{F}'; \quad \nabla_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}'\mathbf{A}'\mathbf{T}\mathbf{X}) = \mathbf{T}\mathbf{X}\mathbf{F}'; \quad \nabla_{\mathbf{A}}(\|\mathbf{X}\|^2) = 0. \quad (2.340)$$

Таким чином, вираз 2.339) можна привести до вигляду

$$\mathbf{A}M\{\mathbf{F}\mathbf{F}'\} = \mathbf{T}M\{\mathbf{X}\mathbf{T}'\},$$

із якого, оскільки  $\mathbf{F} = \mathbf{T}\mathbf{Z}$ , одержуємо

$$\mathbf{A}\mathbf{T}M\{\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\}\mathbf{T}' = \mathbf{T}M\{\mathbf{X}\mathbf{Z}'\mathbf{T}\}. \quad (2.341)$$

Враховуючи, що  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{W}$ , та (2.334) маємо:

$$\mathbf{A}\mathbf{T}(\tilde{V}_{\mathbf{x}} + \tilde{V}_{\mathbf{w}})\mathbf{T}' = \mathbf{T}\mathbf{V}_{\mathbf{x}}\mathbf{T}'. \quad (2.342)$$

Це рівняння дозволяє визначити шукану матрицю оптимального фільтру двома способами:

1. Через коваріаційні матриці

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{A}_r\mathbf{T}', \quad (2.343)$$

де  $\mathbf{A}_r = \mathbf{V}_{\mathbf{x}}(\mathbf{V}_{\mathbf{x}} + \mathbf{V}_{\mathbf{w}})^{-1}$ . Матриця  $\mathbf{A}_r$  називається матрицею відгуку за аналогією із імпульсним відгуком лінійної системи.

2. Через коваріаційні матриці  $\tilde{V}_{\mathbf{x}}$  та  $\tilde{V}_{\mathbf{w}}$  в області зображень

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\tilde{V}_{\mathbf{x}}}{\tilde{V}_{\mathbf{x}} + \tilde{V}_{\mathbf{w}}}, \quad (2.344)$$

де  $\tilde{V}_{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{V}_{\mathbf{x}}\mathbf{T}'$  і  $\tilde{V}_{\mathbf{w}} = \mathbf{T}\mathbf{V}_{\mathbf{w}}\mathbf{T}'$

Для обчислення мінімальної середньоквадратичної похибки, яка зв'язана із описаним оптимальним фільтром, виразимо  $\varepsilon$  у вигляді

$$\varepsilon = \text{tr}\{M[(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X})(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X})']\}. \quad (2.345)$$

Після виконання відповідних перетворень із 2.345) і мінімізації похибки, приходимо до такого виразу

$$\varepsilon_{\min} = \text{tr} \left[ \tilde{V}_x - \frac{\tilde{V}_x}{\tilde{V}_x + \tilde{V}_w} \tilde{V}_x \right]. \quad (2.346)$$

Звідси витікає, що мінімальна середньоквадратична похибка не залежить від ортогонального перетворення.

Виходячи з цього факту, вигляд перетворення можна вибрати вільно, прагнучи при цьому скоротити число обчислювальних операцій, які пов'язані із реалізацією процесу фільтрації. Задача розрахунку субоптимального вінеровського фільтра може бути сформульована як задача оптимізації, в якій матриця фільтра  $\mathbf{A}$  вибирається, виходячи з мінімізації (2.338) за обмеження, що визначені вибрані елементи матриці  $\mathbf{A}$  дорівнюють нулю.

Матриця  $\mathbf{A}$  вибирається: а) діагональною, б) такою, що містить елементи в рядку, що не дорівнюють нулю; в) матрицю субоптимального фільтра одержують з матриці оптимального фільтра, залишаючи тільки ті елементи, які мають відносно велику величину.

---

## Цифрові фільтри

---

Проміж всіх методів, що використовуються при цифровій обробці сигналів, найбільш важливою є цифрова фільтрація. Цифрова фільтрація використовується в багатьох важливих практичних прикладаннях для обробки одновимірних та двовимірних сигналів. Цей факт пояснюється такими причинами:

- по-перше, наявністю ефективних та відносно простих методів побудови фільтрів;
- по-друге, значними успіхами в області технології мікросхем із високим ступенем інтеграції для запам'ятовуючих пристроїв зі збільшеною робочою частотою та розробки нових елементів.

- по-третє, успіхами в розробці технічних засобів та програмного забезпечення ЕОМ, особливо у розробці мікропроцесорів та мікро-ЕОМ і матричних процесорів, що використовуються у якості периферійних пристроїв обчислювальних систем або у якості основної системи, що обробляє інформацію.

Внаслідок цих досягнень техніка фільтрації стала використовуватись в різних галузях, таких, як радіозв'язок, радіо- та гідролокація, фізичний експеримент, біомедичні дослідження, аерокосмічні системи, супутниковий зв'язок тощо.



---

## Вступ в цифрову фільтрацію

---

У загальному випадку під *фільтрацією* мається на увазі перетворення визначеним чином деякого вхідного сигналу у вихідний з метою отримання певних якісних показників цього сигналу. У найпростішому випадку, коли розглядається певний корисний сигнал, який спотворений деякою регулярною (або випадковою) перешкодою, метою фільтрації є виділення із такої суміші корисного сигналу.

По суті під час фільтрації здійснюється перетворення вхідних сигналів у вихідні таким чином, що певні корисні особливості вхідного сигналу зберігаються у вихідному сигналі, а небажані властивості пригнічуються.

*Фільтр* узагальнено являє собою або фізичний пристрій (систему), або програму для ЕОМ, які здійснюють потрібне перетворення вхідного сигналу у вихідний. Залежно від виду вхідних сигналів (неперервний чи дискретний) розрізняють *аналогові фільтри*, які обробляють неперервні сигнали, і *цифрові фільтри*, що обробляють цифрові сигнали, тобто дискретні у часі і квантовані за амплітудою сигнали.

Існують дві основні математичні (абстрактні) форми опису фільтрів (як аналогових, так і цифрових). Розглянемо спочатку клас аналогових лінійних інваріантних у часі фільтрів, для яких існують такі математичні моделі:

– у вигляді інтегралу згортки

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_0^t x(t - \tau)h(\tau)d\tau = h(t) * x(t), \quad (3.1)$$

де  $x(t)$ ,  $y(t)$  – відповідно вхідна та вихідна змінні фільтру;  $h(t)$  – імпульсна (вагова) характеристика фільтру,  $*$  – символ згортки. Ця модель відповідає фізично реалізуемому фільтру з одним входом і виходом.

– у вигляді диференціального рівняння  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t) \quad (3.2)$$

з початковими умовами

$$y^{(n-1)}(0) = y_{n-1,0}; y^{(n-2)}(0) = y_{n-2,0}; \dots; y(0) = y_{0,0}, \quad (3.3)$$

де  $y_{k,0}$ ,  $k = \overline{0, n-1}$  – відомі початкові значення.

Для лінійного інваріантного у часі цифрового фільтру ці математичні моделі набувають такого вигляду:

– лінійної дискретної згортки вхідної послідовності  $\{x(n)\}$  та імпульсної характеристики  $\{h(n)\}$ :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n - k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(n - k)x(k); \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.4)$$

що зазвичай записують як

$$y(n) = h(n) * x(n); \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (3.5)$$

– скінченно-різницевого рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N-1} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^{N-1} a_k y_{n-k}; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.6)$$

де  $\{x(n)\}$ ,  $\{y(n)\}$  – вибірки вхідної і вихідної послідовностей відповідно,  $a_k$ ,  $b_k$  – сталі коефіцієнти, які визначають властивості фільтра,  $N$ ,  $M$  – сталі числа.

Як й у випадку диференціальних рівнянь (3.2) для вирішення рівняння (3.6) необхідна наявність початкових умов, які б дали змогу визначити значення вихідних відліків через значення попередніх відліків або через початкові умови.

В окремому випадку, коли значення вихідних відліків залежать тільки від попередніх та поточних значень вхідних відліків, рівняння (3.6) може бути подано у такому вигляді:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x_{n-k}; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.7)$$

тобто за умови  $a_k = 0$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ .

Рівняння (3.6), коли значення вихідних відліків визначаються через значення попередніх вихідних та вхідних відліків, називають *рівнянням рекурсивного типу*. Рівняння (3.7) називають *рівнянням нерекурсивного типу*.

Відповідно до цього розрізняють два основних типи цифрових лінійних, інваріантних у часі фільтрів: *рекурсивні фільтри* і *нерекурсивні фільтри*.

### 3.0.3. Імпульсна характеристика фільтра

*Імпульсною (ваговою) характеристикою  $h(t)$  лінійного інваріантного у часі фільтру є його реакція (відгук) на вплив одиничного імпульсу*

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{за } t = 0, \\ 0, & \text{за } t > 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

за нульових початкових умов.

Імпульсна характеристика є часова і використовується для визначення вихідного сигналу фільтра з довільним вхідним сигналом.

Для цифрового фільтра *імпульсною характеристикою  $h(n)$  (або  $h_n$ )* називають реакцію лінійної дискретної системи зі сталими коефіцієнтами (параметрами) на одиничний імпульс  $u(n)$  (або  $u_n$ )

$$u(n) = \begin{cases} 1, & \text{за } n = 0, \\ 0, & \text{за } n > 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

за нульових початкових умов. Вона використовується у дискретній згортці (3.5) для визначення значень вихідної послідовності  $\{y(n)\}$  для будь-якої вхідної послідовності  $\{x(n)\}$ .

Імпульсна характеристика  $h(t)$  або  $h(n)$ , що визначається рівнянням (3.2) або (3.6), коли  $x(t) \equiv u(t)$  або  $x(n) \equiv u(n)$ , може бути нескінченною ( $a_k \neq 0$ ) чи скінченною ( $a_k = 0$ ). Відповідні фільтри, як аналогові, так і дискретні, прийнято поділяти на такі два класи

– фільтри зі скінченною імпульсною характеристикою (так звані СІХ-фільтри, або FIR-фільтри (finite impulse response filter));

– фільтри із нескінченною імпульсною характеристикою (так звані НІХ-фільтри, або ІІР-фільтри (infinite impulse response filter)).

Вочевидь, нерекурсивні фільтри мають скінченну імпульсну характеристику, а рекурсивні – нескінченну імпульсну характеристику.

*Приклад.* Цифровий фільтр описується різницевою рівнянням  $y_n = x_n - a_1 y_{n-1}$ . Знайти імпульсну характеристику (ІХ) цього фільтра.

*Розв'язання.* Оскільки імпульсна характеристика – це реакція системи на одиничний імпульс  $u_n$  за нульових початкових умов, треба припустити, що  $x_n = u_n$ ,  $y(-1) = y_{-1} = 0$ . Обчислення відліків вихідного сигналу  $y_n = h_n$  наведені у табл. 5.1.

Табл. 3.1. Визначення ІХ рекурсивного фільтра

$n$	$x_n$	Рівняння	$y_n$
0	1	$y_0 = x_0 - a_1 y_{-1} = 1 - a_1 \cdot 0$	1
1	0	$y_1 = x_1 - a_1 y_0 = 0 - a_1 \cdot 1$	$-a_1$
2	0	$y_2 = x_2 - a_1 y_1 = 0 - a_1 \cdot (-a_1)$	$(-a_1)^2$
3	0	$y_3 = x_3 - a_1 y_2 = 0 - a_1 \cdot (-a_1)^2$	$(-a_1)^3$
·	·	· · ·	·
n	0	$y_n = x_n - a_1 y_{n-1} = 0 - a_1 \cdot (-a_1)^{n-1}$	$(-a_1)^n$

Коли  $0 \leq a_1 \leq 1$ , значення виходу (тобто ІХ) асимптотично наближається до нуля.

*Приклад.* Цифровий фільтр описується різницевою рівнянням  $y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2}$ . Знайти імпульсну характеристику (ІХ) цього фільтра.

*Розв'язання.* Обчислення значень відліків вихідного сигналу  $y_n = h_n$  наведено у табл. 3.2.

Табл. 3.2. Визначення ІХ нерекурсивного фільтра

$n$	$x_n$	Рівняння	$y_n$
0	1	$y_0 = b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0$	$b_0$
1	0	$y_1 = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0$	$b_1$
2	0	$y_2 = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 1$	$b_2$
3	0	$y_3 = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0$	0

Отже, за  $b_k \neq 0$  ( $k = \overline{0, M}$ ) імпульсна характеристика нерекурсивного фільтра має скінченну кількість відліків, значення яких дорівнюють *коефіцієнтам різницевого рівняння*.

### 3.0.4. Передаточна функція фільтра

Іншим важливим поняттям, яке використовують під час аналізу та синтезу (побудові) фільтрів, є *передаточна функція* фільтра. Розглянемо спочатку аналогові фільтри. Визначення передаточної функції ґрунтується на застосуванні інтегрального перетворення Лапласа до інтеграла згортки (3.1):

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p) = \mathcal{L} \left\{ \left[ \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right] \right\} = H(p) \cdot X(p), \quad (3.10)$$

де  $\mathcal{L}\{\cdot\}$  – символ перетворення за Лапласом;  $Y(p)$ ,  $X(p)$ ,  $H(p)$  – відповідно перетворення за Лапласом функцій  $y(t)$ ,  $x(t)$ ,  $h(t)$ ,  $p$  – комплексний оператор Лапласа.

За визначенням передаточна функція системи управління є відношення перетворення за Лапласом вихідного сигналу до перетворення за Лапласом вхідного сигналу за нульових початкових умов. Зі співвідношення (3.10) випливає, що передаточна функція фільтра є

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (3.11)$$

Інакше кажучи, передаточна функція  $H(p)$  аналогового фільтра – це перетворення за Лапласом імпульсної (вагової) характеристики  $h(t)$ , коли як вхідний сигнал використовується  $\delta$ -функція ( $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ ).

Передаточну функцію аналогового фільтра можна отримати, якщо застосувати інтегральне перетворення Лапласа до диференціального рівняння (3.1), що описує динаміку аналогового фільтра за нульових початкових умов. Маємо:

$$\mathcal{L}\left\{a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_0 x(t)\right\}. \quad (3.12)$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k p^k}{\sum_{k=0}^N a_k p^k} \quad (3.13)$$

за умови  $M \leq N$ .

Для лінійного цифрового фільтра зі сталими параметрами його дискретна передаточна функція  $H(z)$  є  $\mathcal{Z}$ -перетворення відповідної імпульсної характеристики  $h(n)$ , тобто

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\} \quad (3.14)$$

і визначається як відношення  $\mathcal{Z}$ -образів вихідного сигналу  $Y(z)$  та вхідного сигналу  $X(z)$ , тобто

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (3.15)$$

Використовуючи це визначення і застосовуючи  $\mathcal{Z}$ -перетворення до різницевого рівняння (3.6), що описує динаміку цифрового фільтра, отримуємо вираз для передаточної функції цифрового фільтра.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y(n)\} &= \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)\right\} - \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=1}^{N-1} a_k y(n-k)\right\}. \\ H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Максимальне значення, що набувають числа  $M$  або  $N$ , визначає *порядок* фільтра.

Якщо застосувати  $\mathcal{Z}$ -перетворення до скінченно-різницевого рівняння нерекурсивного типу, можна отримати передаточну функцію нерекурсивного фільтра у такому вигляді:

$$\mathcal{Z}\{y(n)\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)\right\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)\right\}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}. \quad (3.18)$$

Передаточні функції є основний апарат під час аналізу та структурного перетворення фільтрів.

Важливу роль у цифрових системах обробки сигналів відіграють фільтри першого та другого порядків, що обумовлює необхідність їхнього окремого розглядання.

*Базовий рекурсивний фільтр першого порядку.*

Базовим рекурсивним фільтром першого порядку називають фільтр, що описують різницевою рівнянням

$$y(n) = x(n) - a_1 y(n-1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

Використовуючи  $\mathcal{Z}$ -перетворення до лівої та правої частин рівняння (3.19), отримаємо

$$Y(z) = X(z) - a_1 z^{-1} Y(z),$$

звідки

$$Y(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}}.$$

*Рекурсивний фільтр першого порядку.*

Різницева рівняння має вигляд

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1), \quad n = 0, 1, 2.$$

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) - a_1 z^{-1} Y(z),$$

звідки

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}.$$

*Нерекурсивний фільтр першого порядку.*

Різницева рівняння та передаточна функція мають вигляд:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$Y(z) = b_0 + b_1 z^{-1}.$$

*Базовий рекурсивний фільтр другого порядку.*

Різницева рівняння та передаточна функція мають вигляд:

$$y(n) = x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

*Рекурсивний фільтр другого порядку.*

Різницева рівняння та передаточна функція мають вигляд:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

*Нерекурсивний фільтр другого порядку.*

Різницева рівняння та передаточна функція мають вигляд:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$Y(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}.$$

Отже, на основі наведених прикладів можна зробити висновок, що у загальному випадку передаточна функція рекурсивного фільтра відповідатиме виразу (3.19), а нерекурсивного фільтра:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}, \quad (3.20)$$

де коефіцієнти фільтрів  $a_k$ ,  $b_k$  – коефіцієнти відповідних різницевої рівнянь, що описують динаміку цих фільтрів.

### 3.0.5. Частотні характеристики фільтрів

Модель у часі цифрового фільтру у вигляді імпульсної (вагової) характеристики є зручна для її використання у алгоритмі дискретної згортки. Але у цьому разі досить важко пов'язати бажані кількісні показники фільтрації з виглядом і параметрами шуканої імпульсної характеристики фільтра.

З цієї точки зору більш конструктивним є подання фільтра у частотному просторі, що досить просто можна виконати, маючи передаточну функцію фільтра.

Для аналогового фільтра, передаточна функція якого є функція комплексної змінної  $p$  вигляду (3.13), це досягається заміною змінної  $p$  на  $i\omega$ .

Оскільки  $p$  або  $i\omega$  – комплексні змінні, то функція  $H(i\omega)$  є функція комплексної змінної

$$H(i\omega) = \operatorname{Re}H(i\omega) + i\operatorname{Im}H(i\omega) = |H(i\omega)|e^{i\varphi(\omega)}, \quad (3.21)$$

$$\varphi(i\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}H(i\omega)}{\operatorname{Re}H(i\omega)}, \quad (3.22)$$

де  $|H(i\omega)|$  та  $\varphi(i\omega)$  – *модуль* і *фазовий кут* або амплітудно-частотна та фазо-частотна (фазова) характеристики фільтра відповідно.

Якщо тепер, використовуючи (3.10), що зв'яже у просторі зображень за Лапласом вхід і вихід фільтра, виконати заміну  $p$  на  $i\omega$ , то отримуємо

$$|Y(\omega)| = |H(i\omega)||X(i\omega)|; \quad (3.23)$$

$$\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}Y(i\omega)}{\operatorname{Re}Y(i\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}H(i\omega)}{\operatorname{Re}H(i\omega)} + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}X(i\omega)}{\operatorname{Re}X(i\omega)}, \quad (3.24)$$

Із виразу (3.23) випливає, що значення вихідного сигналу є добуток вхідного сигналу на амплітудну характеристику фільтра. Це означає, що коли амплітудно-частотна характеристика фільтра  $|H(i\omega)|$  дорівнює нулю або прямує до нуля для певного діапазону частот, наприклад,  $\omega \in [\omega_{s1}, \omega_{s2}]$ , то вихідний сигнал матиме нульові значення (або наблизатиметься до нуля) при всіх частотах з цього діапазону. Такий діапазон частот  $\omega \in [\omega_{s1}, \omega_{s2}]$  називають *смугою затримки (пригнічення)* вхідного сигналу, або просто фільтра. Якщо ж значення амплітудної характеристики  $|H(i\omega)|$  у діапазоні частот  $\omega \in (\omega_{p1}, \omega_{p2})$  є близькі до одиниці, то цей інтервал називають *смугою пропускання* фільтра. Крім цього, існує *перехідна смуга* частот між зазначеними діапазонами пропускання та затримання сигналу, що обумовлюється неможливістю миттєвого змінювання значення амплітудно-частотної характеристики від одиниці до нуля. Тепер якісні показники процесу фільтрації можна формулювати як відповідні вимоги до параметрів амплітудно-частотної характеристики у смузі пропускання, затримання (пригнічення) та перехідної смуги.

Виходячи зі співвідношення (3.23), можна визначити такі основні типи частотно-вибіркових фільтрів:

1. Фільтр *нижніх частот* (ФНЧ) – фільтр зі смугою пропускання  $[0, \omega_p)$  та смугою затримання від  $\omega_s$  до  $\infty$ , де  $\omega_p < \omega_s$ .
2. Фільтр *верхніх частот* (ФВЧ) – фільтр зі смугою пропускання  $\omega \in (\omega_p, \infty)$  та смугою затримання  $[0, \omega_s < \omega_p]$ .
3. *Смугастий фільтр* (СЧ) – фільтр зі смугою пропускання від деякої частоти  $\omega_{p1}$  до іншої частоти  $\omega_{p2}$  та смугами затримання від  $[0, \omega_{s1}]$  та  $[\omega_{s2}, \infty)$ ,  $\omega_{s1} < \omega_{p1} < \omega_{p2} < \omega_{s2}$ .
4. Фільтр, що *загороджує*, – фільтр зі смугами пропускання  $\omega \in [0, \omega_{p1}]$  та  $\omega \in [\omega_{p2}, \infty)$  й смугою затримання від  $\omega_{s1}$  до  $\omega_{s2}$ ,  $\omega_{p1} < \omega_{s1} < \omega_{s2} < \omega_{p2}$ .

5. Фільтр, що пропускає все – фільтр із одиничним коефіцієнтом передачі для всіх частот ( $\omega \in [0, \infty)$ ), тобто смугою пропускання від 0 до  $\infty$ . Цей тип фільтрів використовують, в основному, для забезпечення фазової корекції та фазового зсуву.

Характеристики перелічених п'яти основних типів частотно-вибіркових фільтрів наведені на рис.



Рис. 3.1. Усікнена імпульсна характеристика ідеального ФНЧ

### 3.0.6. Фазова характеристика та характеристика групового часу

Дослідимо тепер іншу складову частотної характеристики фільтру – її фазо-частотну характеристику (або так званий фазовий кут)  $\varphi(\omega)$ , яку визначають згідно зі співвідношенням (3.24). В теорії фільтрації широко використовують характеристику *групового часу*  $\tau(\omega)$ , яка пов'язана з фазо-частотною характеристикою залежністю

$$\tau(\omega) = \frac{d}{d\omega} \varphi(\omega) = \frac{d}{d\omega} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} H(i\omega)}{\operatorname{Re} H(i\omega)} \quad (3.25)$$

і визначає швидкість змінювання фазового кута  $\varphi(\omega)$  від частоти  $\omega$ . Фізичний зміст групового часу уповільнення імпульсної характеристики фільтра можна проілюструвати таким прикладом.

Розглянемо аналоговий фільтр, що описується передаточною функцією

$$H(p) = K e^{-pt_0}. \quad (3.26)$$

Частотна характеристика цього фільтра:

$$H(i\omega) = K e^{-i\omega t_0},$$

де  $A(\omega) = K$ ,  $\varphi(\omega) = -\omega t_0$ . Характеристика групового часу цього фільтра буде

$$\tau(\omega) = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{d(-\omega t_0)}{d\omega} = -t_0. \quad (3.27)$$

Якщо на цей фільтр подати вхідний вплив

$$x(t) = 1(t - T_0), \quad (3.28)$$

де  $1(t)$  – функція одиничного стрибка, то вихідний сигнал  $y(t)$ , який затримано на час  $T_0$ , визначиться таким чином:

$$y(t) = K \cdot 1[t - (t_0 + T_0)], \quad (3.29)$$

Це означає, по-перше, що вихідний сигнал, який вже затримано на час  $t_0 + T_0$ , тобто тепер вже із урахуванням групового часу фільтра, а по-друге, що груповий час фільтра фактично дорівнює  $t_{\text{вих}} - t_{\text{вх}}$ , де  $t_{\text{вх}}$  – час, за яким вхідний сигнал досягає свого усталеного значення,  $t_{\text{вих}} - t_{\text{вх}}$  – час усталеності вихідного сигналу.

Для цифрового фільтра можна також визначити частотні характеристики. Розглянемо лінійну дискретну систему зі сталими параметрами, яка має імпульсну характеристику  $h(n)$ . Для опису фільтра у частотній області використовують спеціальний клас вхідних послідовностей, які мають вигляд  $x(n) = e^{i\omega n}$ ,  $-\infty < \omega < +\infty$ , що є дискретизовані синусоїдальні функції у експоненційній формі. Дійсно, якщо  $x(t) = e^{i\omega t}$  є неперервна синусоїда, то, здійснивши дискретизацію цієї функції за  $t = nT_d$ , де  $T_d$  – інтервал дискретизації, маємо

$$x(n) = x(nT_d) = e^{i\theta nT_d} = e^{i\omega n}, \quad (3.30)$$

де  $\omega = \theta T_d$  – цифрова частота дискретизованої послідовності  $x(n)$ .

Визначивши вихідну послідовність фільтра  $y(n)$  за допомогою дискретної згортки вигляду (3.3) за нульових початкових умов, отримуємо

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{i\omega(n-k)} = e^{i\omega n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-i\omega k} = \\ &= H(e^{i\omega}) e^{i\omega n} = H(e^{i\omega}) x(n). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Множник  $H(e^{i\omega})$  у (3.31), який визначається через імпульсну характеристику  $h(n)$  фільтра:

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-i\omega k}$$

і який перетворює синусоїдальну вхідну послідовність  $x(n)$  у вихідну  $y(n)$ , називають *частотною характеристикою цифрового фільтра*, що є по суті спектром імпульсної характеристики і задає значення коефіцієнта передачі фільтра для кожного значення частоти  $\omega$ .

Можна також надати визначення частотної характеристики цифрового фільтра як відношення перетворення Фур'є вхідної послідовності за нульових початкових умов таким чином:

$$H(e^{i\omega}) = \frac{\mathcal{F}\{y(n)\}}{\mathcal{F}\{x(n)\}} = \frac{Y(e^{i\omega})}{X(e^{i\omega})}. \quad (3.32)$$

Порівняння цього виразу з виразом (3.11), який визначає передаточну функцію фільтра, дозволяє зробити висновок, що частотна характеристика фільтра дорівнює передаточній функції, визначеній на одиничному колі  $z$ -площини, тобто за  $z = e^{i\omega}$  для  $0 \leq \omega \leq 2\pi$ .

$$H(e^{i\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{i\omega}}. \quad (3.33)$$

Частотна характеристика  $H(e^{i\omega})$  є комплексна функція, що може бути подана у двох основних формах:

з використанням дійсної та уявної складових

$$H(e^{i\omega}) = \operatorname{Re}H(e^{i\omega}) + i\operatorname{Im}H(e^{i\omega}) \quad (3.34)$$

у експоненціальному вигляді

$$H(e^{i\omega}) = \left| H(e^{i\omega}) \right| e^{i\varphi(\omega)} = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}, \quad (3.35)$$



де

$$A(\omega) = \left| H(e^{i\omega}) \right| = \sqrt{[\operatorname{Re}H(e^{i\omega})]^2 + [\operatorname{Im}H(e^{i\omega})]^2} \quad (3.36)$$

– амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) фільтра;

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\operatorname{Im}H(e^{i\omega})}{\operatorname{Re}H(e^{i\omega})} \right] \quad (3.37)$$

– фазо-частотна характеристика фільтра.

Основними властивостями частотних характеристик цифрових фільтрів є такі:

– частотна характеристика є періодична функція частоти з періодом, рівним частоті дискретизації  $\omega_d = 2\pi f_d = 2/T_d$ ;

– АЧХ та ФЧХ також є періодичні функції з тем же періодом;

– для фільтрів з дійсними коефіцієнтами АЧХ – парна функція, а ФЧХ – непарна функція;

– для повного опису частотної характеристики фільтра з дійсними коефіцієнтами досить задати її у основній смузі частот  $\omega \in [0, 2\pi]$ .

### 3.0.7. Перетворення Гільберта

Співвідношення між дійсною та уявною частинами передаточної функції фільтра, що є фізично реалізуєма система, можна висловити через перетворення Гільберта.

Припустимо, що передаточна функція  $H(p)$  є аналітична в замкненій правій половині  $p$ -площини (разом із уявною віссю). Запишемо співвідношення ( $p = i\omega$ )

$$H(i\omega) = R(i\omega) + iX(i\omega), \quad (3.38)$$

де  $R(\omega) = \operatorname{Re}H(i\omega)$ ,  $X(\omega) = \operatorname{Im}H(i\omega)$ .

Якщо  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(i\omega) = R(\infty) = C$ , то  $R(\omega)$  та  $X(\omega)$  зв'язані співвідношеннями:

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\xi)}{\omega - \xi} d\xi, \quad (3.39)$$

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\xi)}{\omega - \xi} d\xi + R(\infty), \quad (3.40)$$

Це перетворення – *перетворення Гільберта* (одна з його форм). Якщо задано уявну частину  $X(i\omega)$ , можна одержати дійсну частину  $R(\omega)$  за допомогою (3.40) і навпаки – уявну частину  $X(\omega)$  за допомогою (3.39). Далі, на основі  $R(\omega)$  та  $X(\omega)$  можна сформувати функцію  $H(i\omega)$  і отримати функцію  $H(p)$  шляхом заміни  $\omega \rightarrow p/i$ .

Наприклад,

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \xi^2} \frac{1}{\omega - \xi} d\xi = -\frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

То ж,

$$H(i\omega) = R(\omega) + iX(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - i\frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{1}{\alpha + i\omega} \rightarrow H(p) = \frac{1}{p + \alpha}.$$

Якщо придивитися уважніше до інтегралів (3.39),(3.40), то побачимо, що вони представляються у вигляді інтегралу згортки

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)h(\omega - \xi)d\xi = g(\omega) * h(\omega), \quad (3.41)$$

де  $h(\omega) = 1/(\pi\omega)$ , а  $g(\omega)$  – це  $R(\omega)$  або  $X(\omega)$ .

Запишемо

$$F(i\omega) = e^{-\alpha(\omega)} e^{-i\varphi(\omega)} = e^{-\alpha(\omega) - i\varphi(\omega)}. \quad (3.42)$$

У цьому співвідношенні логарифмічну функцію  $\alpha(\omega) = -\ln |F(i\omega)|$  називають *згасанням* або *функцією витрат*, а  $\varphi(\omega)$  – *фазою* фільтру (точніше – фазовою затримкою фільтру). Якщо прологарифмувати вираз (3.42), то одержимо

$$\gamma(\omega) = -\ln F(i\omega) = \alpha(\omega) + i\varphi(\omega). \quad (3.43)$$

Функції  $\alpha(\omega)$  та  $\varphi(\omega)$  є дійсна та уявна частини функції  $\gamma(\omega)$  й зв'язані перетворенням Гільберта:

$$\varphi(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(\xi)}{\omega - \xi} d\xi, \quad (3.44)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\omega - \xi} d\xi. \quad (3.45)$$

*Приклад.* Фазову характеристику фільтра задано у вигляді

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -(k\pi/2) & \text{для } \omega < -\omega_c, \\ (k\pi/2)(\omega/\omega_c) & \text{для } -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c, \\ (k\pi/2) & \text{для } \omega > \omega_c. \end{cases} \quad (3.46)$$

Знайти відповідне згасання, або функцію витрат  $\alpha(\omega)$  цього фільтру.

*Розв'язання.* Оскільки  $\tau(\omega) = d\varphi(\omega)/d\omega$  має більш просту форму, ніж  $\varphi(\omega)$ , то маємо

$$\frac{d\alpha(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(\omega)/d\omega}{\omega - \xi} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{k\pi}{2\omega_c} \frac{1}{\omega - \xi} d\xi = \frac{k}{2\omega_c} \ln \left| \frac{\omega - \omega_c}{\omega + \omega_c} \right|.$$

Інтегрування цього рівняння дає

$$\alpha(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{k}{2\omega_c} \ln \left| \frac{x - \omega_c}{x + \omega_c} \right| dx = \frac{k}{2} \left[ \ln \left| \frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1 \right| - \frac{\omega}{\omega_c} \ln \left| \frac{(\omega/\omega_c) - 1}{(\omega/\omega_c) + 1} \right| \right].$$

Ідеально сталий груповий час  $\tau(\omega) = k\pi/(2\omega_c)$  в інтервалі частот  $[-\omega_c, \omega_c]$  являє значний інтерес для проектування фільтрів. То ж, відповідна до нього функція згасання за умови мінімальної фази має велике практичне значення.

Для того, щоб можна було застосовувати перетворення Гільберта до фази та модуля функції  $H(i\omega)$ , має виконуватись вимога аналітичності функції  $\gamma(\omega) = -\ln |H(i\omega)|$  у правій половині  $p$ -площини. Тобто, має бути аналітичною й функція, що є обернена до  $H(p)$ ,  $-1/H(p)$ , а це, своєю чергою, означає відсутність нуля або полюсу функції  $H(p)$  у правій половині  $p$ -площини. Така функція називається *мінімально-фазовою*.

Сутність перетворення Гільберта полягає у тому, що воно використовується скоріш для пояснення, а не для розрахунків. На основі перетворення Гільберта: якщо визначено дійсну або парну частини (уявну або непарну), які задовольняють визначеним вимогам до обробки сигналу, то відповідний фільтр описано сповна. Аналогічно, якщо відомі або фаза, або модуль мінімально-фазової функції фільтра, що обчислено уздовж уявної осі  $p$ -площини, то такий фільтр сповна охарактеризовано. Іншими словами, фільтр можна спроектувати для забезпечення вимог або до фази, або до модуля, а не до обох одночасно. У цьому сенсі перетворення Гільберта встановлює теоретичні обмеження робочих характеристик фільтра.

### 3.1. Вимоги до побудови фільтрів

У найбільш загальному сенсі цифровий фільтр являє собою інваріантну до зсуву дискретну систему, яка реалізується на основі використання арифметичного пристрою з обмеженою точністю.

Проектування цифрового фільтру складається з трьох етапів:

- 1) визначення потрібних властивостей системи;
- 2) апроксимації цих вимог на основі дискретних систем, що є фізично реалізуємими;
- 3) реалізацією системи з використанням арифметики із обмеженою точністю.

Незважаючи на те, що ці три етапи не є незалежними, основну увагу будемо приділяти другому етапу, оскільки перший етап залежить від конкретного прикладання. Третій етап розглянемо пізніше.

При формулюванні практичних задач найбільш типовим є випадок коли потрібний цифровий фільтр спрямовано для фільтрації цифрового сигналу, який одержано із аналогового сигналу шляхом утворення періодичних вибірок. Вимоги як до аналогових, так і до цифрових фільтрів часто задаються в частотній області, як, наприклад, у випадку частотно-вибіркових фільтрів, таких, як фільтри нижніх або верхніх частот та смугасті фільтри.

За заданою частотою дискретизації структуру фільтра можна одержати шляхом перетворення частотних вимог для аналогового фільтра у частотні вимоги для цифрового фільтра. При цьому аналогові частоти визначаються в герцах, а дискретні частоти – в одиницях частоти в радіанах або кутах одиничного кола із точкою  $z = -1$ , яка відповідає половині частоти дискретизації. Існують, однак, прикладання, в яких цифровий сигнал, що підлягає фільтрації, не формується шляхом утворення періодичних вибірок аналогової функції часу.

Визначення відповідного набору вимог для конкретного цифрового фільтра є окрема проблема. Наприклад, у випадку фільтра нижніх частот такі вимоги часто приймають вигляд допусків на похибки апроксимації. Є смуга пропускання, в межах якої характеристика має апроксимуватись величиною, що дорівнює одиниці з похибкою  $\pm\delta_1$ ,  $1 - \delta_1 \leq |H(e^{i\omega})| \leq 1 + \delta_1$ ,  $|\omega| \leq \omega_p$ . Є смуга непропускання (затримування), в якій характеристика має апроксимуватись нульовим значенням із похибкою, що є меншою за  $\delta_2$ , тобто  $|H(e^{i\omega})| \leq \delta_2$ ,  $\omega_s \leq |\omega| \leq \pi$ . Проміжок між  $\omega_p$  та  $\omega_s$  є перехідною смугою. Частота зрізу  $\omega_c$  для смуги пропускання  $\omega_p$  та для смуги непропускання  $\omega_s$  задана кутовою частотою  $z$ -площини.

Щоб забезпечити можливість апроксимації ідеального фільтра у такий спосіб, треба також знайти перехідну смугу ненульової ширини, в якій характеристика плавно спадає від значення у смузі пропускання до значення у смузі непропускання. Більшість фільтрів, що використовуються на практиці, задаються такою сукупністю допусків (але без обмежень на фазову характеристику), крім тих, що накладаються вимогами стійкості та фізичної реалізуємості.

Після визначення вимог наступним етапом є відшукання (побудова) лінійної дискретної системи, характеристика якої змінюється у межах визначених допусків. З цієї точки зору проблема розрахунку фільтра стає проблемою апроксимації. У випадку НІХ-фільтрів ми повинні апроксимувати потрібну частотну характеристику за допомогою раціональної функції, а у випадку СІХ-фільтра ми маємо справу із поліноміальною апроксимацією.

### 3.2. Форми реалізації цифрових фільтрів

Структурні схеми апаратної реалізації цифрових фільтрів являють собою упорядковане з'єднання типових функціональних елементів (суматор, підсилювач, елемент затримки, інвертор тощо).

Структура цифрового фільтра відображає структуру алгоритму обробки сигнала.

лу у фільтрі і відповідає вигляду різницевого рівняння або передаточної функції, що описують динаміку цифрового фільтра.

Розглянемо рекурсивні фільтри, динаміка яких описується різницеvim рівнянням

$$y_n = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^{N-1} a_k y_{n-k} \quad (3.47)$$

або передаточною функцією

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (3.48)$$

Існує декілька різних форм реалізації рекурсивних фільтрів. Відзначимо таке:

**1. Прямая форма**, яка відповідає безпосередній реалізації (3.47) або (3.48).

Апаратна реалізація прямої форми може бути подана у вигляді схеми рис. 5.2.

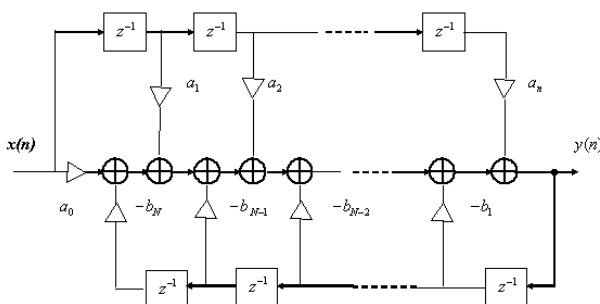


Рис. 3.2. Прямая форма рекурсивного фільтра

**2. Канонічна форма** (канонічна структура), яку отримують перетворенням передаточної функції рекурсивного фільтра (3.48) до вигляду

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) = \frac{1}{A(z)} \cdot B(z). \quad (3.49)$$

Таке подання  $H(z)$  відповідає послідовному з'єднанню (рис. 3.3) рекурсивного фільтра з передаточною функцією

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k z^{-k}}$$

з нерекурсивним фільтром з передаточною функцією

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}.$$

Передаточним функціям  $H_1(z)$  і  $H_2(z)$  відповідають різницеві рівняння

$$\left. \begin{aligned} v_n &= x_n - \sum_{k=1}^{N-1} a_k v_{n-k}, \\ y_n &= \sum_{k=0}^{M-1} b_k v_{n-k}, \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

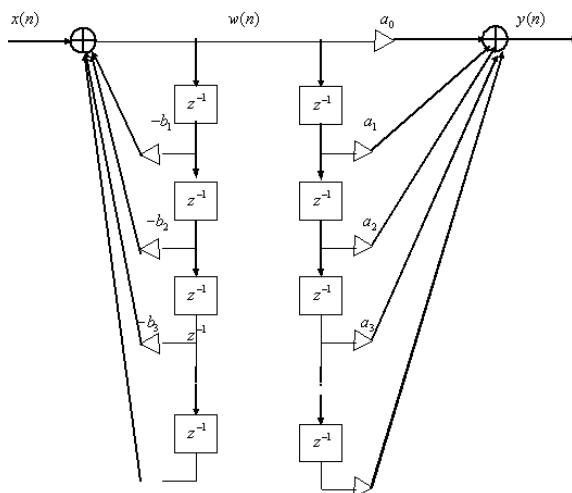


Рис. 3.3. Канонічна форма рекурсивного фільтра

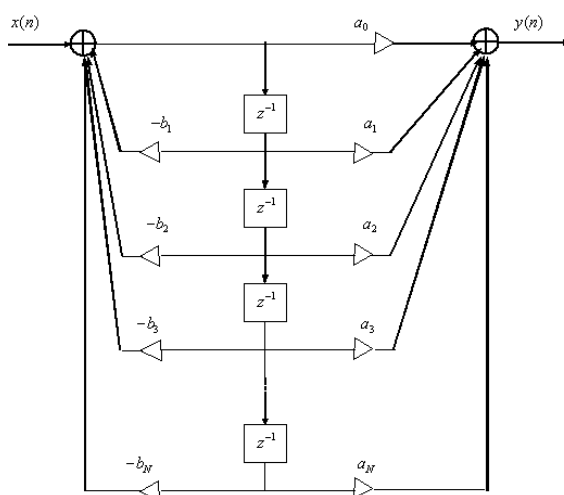


Рис. 3.4. Канонічна форма рекурсивного фільтра

які описують канонічну структуру рекурсивного фільтра.

Цю форму (структуру) називають канонічною, оскільки вона має мінімальну кількість дискретних елементів затримки, що реалізується за допомогою пристроїв пам'яті.

**3. Каскадна (послідовна) форма** рекурсивного фільтра ґрунтується на поданні передаточної функції (3.50) рекурсивного фільтра у вигляді

$$H(z) = \prod_{k=1}^{L_1} \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2}}{1 + \alpha_{1k}z^{-1} + \alpha_{2k}z^{-2}} = \prod_{k=1}^R H_k(z). \quad (3.51)$$

Кожний з ланцюгів в (3.51) називається біквдратним блоком. Біквдратний блок є універсальний ланцюг для побудови будь-яких фільтрів.

На рис. 3.5 наведено каскадну форму реалізації рекурсивного фільтра третього порядку, яка є послідовним з'єднанням фільтра другого порядку з фільтром першого порядку. Кожний з фільтрів реалізовано у вигляді канонічної форми.

**4. Паралельна форма** реалізації фільтра являє собою паралельне з'єднання, що

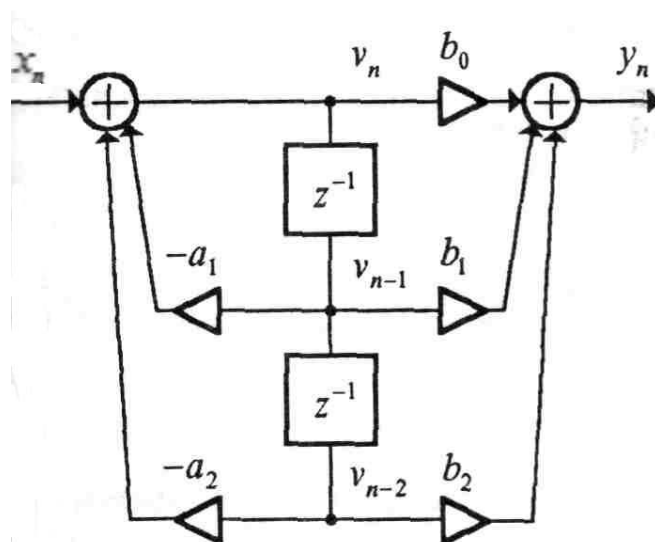


Рис. 3.5. Каскадна форма рекурсивного фільтра третього порядку

відповідає поданню  $H(z)$  у вигляді суми

$$H(z) = \sum_{k=1}^{L_2} \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1}}{1 + \alpha_{1k}z^{-1} + \alpha_{2k}z^{-2}} = \sum_{k=1}^{L_2} H_k(z). \quad (3.52)$$

Каскадна форма реалізації рекурсивних фільтрів забезпечує найменший рівень власних шумів фільтра.

Нерекурсивні фільтри, динаміка яких описується різницевиими рівняннями вигляду

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x_{n-k} \quad (3.53)$$

або передаточною функцією

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k} \quad (3.54)$$

найчастіше реалізуються у прямій формі (прямій структурі), що наведена на рис. 5.4

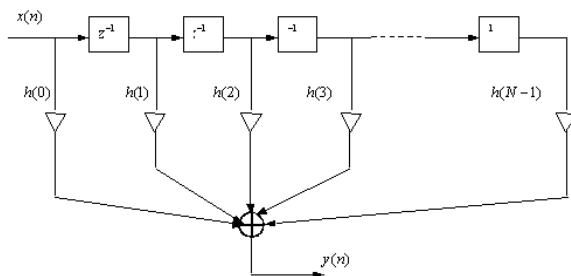


Рис. 3.6. Прямая форма нерекурсивного фільтра

### 3.3. Критерії стійкості цифрових фільтрів

Для практичного застосування цифровий фільтр має бути стійким, або, принаймні, потрібно знати варіант стійкого виконання фільтра.

Для характеристики стійкості можна навести кілька визначень, залежно від того, яка математична модель цифрового фільтра використовується для опису динаміки фільтра. Умови, яким має задовольняти та чи інша модель стійкого цифрового фільтра, називають *критеріями стійкості*.

Розглянемо лінійний цифровий фільтр зі сталими параметрами у часовій області, де його моделлю є імпульсна характеристика  $h(n)$ . Широко використовується *критерій стійкості типу ОВОВ* (обмежений вихід за обмеженого входу).

Фільтр називають стійким, якщо за будь-яких початкових умов та будь-якому обмеженому вхідному сигналі  $x(n)$  вихідний сигнал  $y(n)$  також залишається обмеженим, тобто з умови  $|x(n)| \leq B$  для всіх  $n$  випливає, що  $|y(n)| \leq D$ ,  $B, D < \infty$ .

Необхідною та достатньою умовою стійкості типу ОВОВ є обмеженість імпульсної характеристики  $h(n)$  цифрового фільтра:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty, \quad (3.55)$$

тобто абсолютна збіжність ряду відліків імпульсної характеристики.

Цей критерій стійкості завжди задовольняється, якщо послідовність  $\{h(n)\}$  містить скінченну кількість членів.

Наведений критерій стійкості можна зв'язати із областю аналітичності передаточної функції системи (фільтра).

Передаточна функція фільтра визначена в частині I як  $z$ -перетворення  $H(p)$ :

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}, \quad (3.56)$$

де  $A(z)$ ,  $B(z)$  – поліноми від  $z$ .

Фільтр  $H(z)$  можна розглядати як послідовне з'єднання двох фільтрів  $H(z) = H_1(z)H_2(z)$ ,  $H_1(z) = A(z)$  і  $H_2(z) = 1/B(z)$ , що відповідає послідовному з'єднанню СІХ-фільтра  $H_1(z)$  із НІХ-фільтром  $H_2(z)$ .

Стійкість фільтра  $H(z)$  залежить тільки від стійкості фільтра  $H_2(z)$ , оскільки фільтр  $H_1(z)$  завжди стійкий. Якщо позначити через  $\{h_2(n)\}$  імпульсну характеристику фільтра  $H_2(z)$ , то для визначення імпульсної характеристики передаточної функції можна використати таке співвідношення:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_2(n)z^{-n} = \frac{1}{B(z)}, \quad (3.57)$$

і  $h_2(n)$  можна одержати шляхом обернення

$$B(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b(n)z^{-n}.$$

Розглянемо спочатку випадок  $B(z) = 1 + kz^{-1}$ . Маємо

$$\frac{1}{B(z)} = \frac{1}{1 + kz^{-1}} = 1 - kz^{-1} + k^2z^{-2} - k^3z^{-3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (kz^{-1})^n. \quad (3.58)$$

Порівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів  $z$  в (?), можна отримати  $\{h_2(n)\}$  у вигляді

$$h_2(n) = (-k)^n. \quad (3.59)$$

Ряд (?) збігається, якщо  $|k| < 1$ , і розбігається за  $|k| > 1$ .

Якщо визначити випадок  $|k| < 1$  як *мінімально-фазовий*, а  $|k| > 1$  як *максимально-фазовий*, то фільтр першого порядку  $1/(1 + kz^{-1})$  стійкий, якщо він є мінімально-фазовий, і не стійкий, якщо він максимально-фазовий фільтр. Зазначимо, що якщо заданий максимально-фазовий фільтр першого порядку, можна записати

$$\frac{1}{1 + kz^{-1}} = \frac{k^{-1}z}{1 + k^{-1}z} \quad (3.60)$$

$$\frac{1}{B(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (k^{-1}z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} h_2(-n)z^n, \quad (3.61)$$

де ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |h_2(-n)|$  є збіжний. Отже, максимально-фазовий фільтр є нестійкий, якщо він використовується для фільтрації у напрямку зростання  $n$  і стійкий – у напрямку спадання  $n$ . Такий фільтр належить до класу фільтрів, що названі *некаузальними*. Цей результат можна сформулювати так: каузальний ланцюг першого порядку є стійкий, якщо  $|k| < 1$ , тоді як некаузальний ланцюг першого порядку стійкий, коли  $|k| > 1$ .

У загальному випадку  $B(z)$  є поліном степеня  $N$ , який можна розкласти на множники першого порядку  $1/(1 + k_i z^{-1})$ , де  $k_i$  комплексні величини. У разі коли  $B(z)$  містить тільки дійсні коефіцієнти, комплексний корінь може з'являтися тільки у парі із комплексно-сполученим, тож два множники будуть мати однакову фазу, тобто вони обидва будуть або мінімально-фазовими, або обидва будуть максимально-фазовими.

У загальному випадку є три різні можливості:

1. Всі множники – мінімально-фазові. Отже,  $B(z)$  – мінімально-фазова й фільтр є стійкий, оскільки він є послідовне з'єднання стійких фільтрів;  $\{h_2(n)\}$  – каузальна послідовність.
2. Всі множники – максимально-фазові й, отже,  $B(z)$  – максимально-фазова, тож  $1/B(z)$  – нестійкий фільтр. Але некаузальний фільтр, який містить у якості імпульсної характеристики цього нестійкого фільтра версію вигляду  $\{h_2(-n)\}$ , тобто характеристику із оберненим часом, буде стійким.
3. Деякі множники – мінімально-фазові, а деякі – максимально-фазові. У цьому разі фільтр можна розкласти на два, один із яких залишається стійким для додатних  $n$ , а другий – для від'ємних  $n$ .

Все сказане легко пояснити, якщо розглянути розташування полюсів  $H(z)$  (нулів  $B(z)$ ) у площині змінної  $z$ . Якщо розглянути множник першого порядку вигляду  $1/(1 + kz^{-1})$ , його знаменник містить нуль у точці  $z = -k$ . Якщо  $|k| < 1$ , він є стійкий, якщо ж  $|k| > 1$ , він нестійкий. Іншими словами, якщо полюс цього множника міститься усередині одиничного кола у площині змінної  $z$ , він є стійкий, якщо ж полюс міститься поза одиничного кола, він є нестійкий.

Оскільки будь-яку функцію  $H(z)$  можна розкласти на множники першого порядку, це означає, що каузальний фільтр є стійкий тоді й тільки тоді, коли всі полюси містяться всередині одиничного кола  $z$ -площини, й нестійкий, коли його полюси містяться поза одиничного кола. У цьому випадку буде стійким некаузальний фільтр.

Обговорення каузальних і некаузальних систем та їхньої стійкості дозволяє розглянути можливість одержання процедури СІХ-фільтрації без викривлення фази. Каузальний НІХ-фільтр не може мати лінійну фазу. Дійсно, фільтр з лінійною фазою повинен мати дійсну частотну характеристику з лінійно-фазовим множником. Це означає, що імпульсна характеристика має бути симетричною відносно загальної точки  $n_0$ . Цю умову не може задовольнити каузальний фільтр, імпульсна характеристика якого простягається лише у одному напрямку.



Але якщо процедура фільтрації здійснюється не у реальному часі, а виконується як дія над даними скінченної довжини, що зберігаються в пам'яті комп'ютера, то можна реалізувати фільтр із нульовою фазою у вигляді послідовного з'єднання каузального стійкого фільтра  $H(z)$  та некаузального фільтра  $H(z^{-1})$ . Справді, відповідно до вищевикладеного, якщо у фільтрі  $H(z)$  всі полюси містяться всередині одиничного кола й, отже, він є стійкий до каузальної форми, то фільтр  $H(z^{-1})$  має всі полюси поза одиничним колом і тому є стійким, якщо його виконано у некаузальній формі. На одиничному колі маємо  $H(z^{-1})|_{z=e^{i\omega}} = H^*(z)|_{z=e^{i\omega}}$ . Отже, каскадне з'єднання двох фільтрів дає частотну характеристику

$$H(e^{i\omega})H^*(e^{i\omega}) = |H(e^{i\omega})|^2, \quad (3.62)$$

тобто частотну характеристику із нульовою фазою, що дорівнює квадрату амплітудної характеристики фільтра  $H(z)$ .

### 3.3.0.1. Методи забезпечення стійкості систем

Принципально існує кілька методів збільшення стійкості. Найбільш зручним є підхід, що ґрунтується на визначенні розташування полюсів. Функцію  $H(z)$  можна здобути шляхом вибору коренів всередині одиничного кола, а для  $H(z^{-1})$  використати полюси поза одиничного кола. Крім того, задачу забезпечення стійкості можна вирішити заміною полюсів в області нестійкості полюсами, що є симетрично-сполучені відносно до одиничного кола.

Останній метод забезпечення стійкості можна перевірити на прикладі всепропускаючих фільтрів, для яких частотна характеристика дорівнює одиниці для всіх значень  $\omega$ . Їх можна побудувати, використовуючи каскадне з'єднання ланцюгів із характеристикою вигляду

$$H(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}. \quad (3.63)$$

Вони мають взаємно сполучені полюси і нулі.

Тепер розглянемо немінімально-фазову систему  $H(z)$ , яка має, приміром, два полюси поза одиничного кола у точках  $z_0$  та  $z_0^*$ , де  $|z_0| > 1$ . Тоді  $H(z)$  можна записати у вигляді

$$H(z) = \frac{H_m(z)}{(1 - z_0z^{-1})(1 - z_0^*z^{-1})}, \quad (3.64)$$

де  $H_m(z)$  – мінімально-фазовий множник.  $H(z)$  можна також виразити у вигляді

$$H(z) = H_m(z) \frac{1}{1 - z_0z^{-1}} \frac{1}{1 - z_0^*z^{-1}} \frac{z^{-1} - z_0}{z^{-1} - z_0} \frac{z^{-1} - z_0^*}{z^{-1} - z_0^*} = H_{\min}(z) \frac{z^{-1} - z_0}{1 - z_0^*z^{-1}} \frac{z^{-1} - z_0^*}{1 - z_0z^{-1}}, \quad (3.65)$$

де  $H(z)$  реалізується у вигляді каскадного з'єднання мінімально-фазового ланцюга  $H_{\min}(z)$  та двох всепропускаючих ланцюгів. Можна бачити, що ця мінімально-фазова функція має таку саме амплітудну характеристику на одиничному колі, що й  $H(z)$ , і що вона одержується заміною полюсів поза одиничного кола симетрично-сполученими полюсами.

---

## Нерекурсивні фільтри

---

Однією із основних особливостей цифрових СІХ-фільтрів є можливість побудувати їх так, щоб вони мали лінійну фазу. Це означає, що їхню частотну характеристику можна розглядати як добуток множника, який відповідає чистій затримці, та множника, який є дійсний або чисто уявний. Розглянемо тепер умови, яким має задовольняти дійсна імпульсна характеристика  $\{h(n)\}$ , щоб мати фільтри із лінійною фазою.

### 4.1. Характеристики нерекурсивних фільтрів

Перелічимо основні переваги СІХ-фільтрів, які сприяють їх вивчення та застосування:

1. СІХ-фільтри легко створювати з лінійною фазовою характеристикою. В багатьох випадках, коли проектується фільтр з довільною амплітудною характеристикою, це спрощує задачу апроксимації. Фільтри з лінійною фазовою характеристикою особливо важливі у тих випадках, коли є потреба враховувати дисперсійні викривлення, які пов'язані із нелінійністю фазової характеристики (наприклад, при передачі даних).

2. СІХ-фільтри можна ефективно будувати як за рекурсивною, так й за нерекурсивною схемами.

3. СІХ-фільтри, що реалізуються нерекурсивно, тобто за допомогою прямої згортки, завжди стійкі.

4. При нерекурсивній реалізації СІХ-фільтрів шуми округлення, що виникають внаслідок арифметичних операцій зі скінченною точністю, легко мінімізувати.

Перелічимо й недоліки СІХ-фільтрів.

1. Для апроксимації фільтрів, частотні характеристики яких мають гострі зрізи, потрібна імпульсна характеристика з великою кількістю відліків  $N$ . Тому при використанні звичайної згортки треба виконувати великий обсяг обчислень.

2. Затримка в СІХ-фільтрах з лінійною фазовою характеристикою не завжди дорівнює цілому числу інтервалів дискретизації.

Згідно з представленням лінійної дискретної системи у вигляді (??), вихідний сигнал нерекурсивного фільтру залежить тільки від вхідного сигналу й не залежить від попередніх значень виходу, тобто

$$y_n = \sum_{k=0}^N a_k x_{n-k}. \quad (4.1)$$

Якщо на вхід нерекурсивного фільтра подати один імпульс  $x_n = 1$  коли  $n = 0$  та  $x_n = 0$  коли  $n \neq 0$ , то вагові коефіцієнти фільтра з'являються як вихідний сигнал  $y_n$ . Після  $(2N + 1)$  тактів вплив вхідного сигналу на вихідний зникає. Нерекурсивний фільтр має скінченний імпульсний відгук.

Передаюча функція нерекурсивного фільтра має вигляд

$$H_H(z) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l z^{-l}. \quad (4.2)$$

Частотну характеристику нерекурсивного фільтра одержимо, якщо в передаючій функції (4.2) виконаємо заміну  $z = e^{i\omega T}$ .

$$H_H(e^{i\omega T}) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l e^{-il\omega T}. \quad (4.3)$$

Модуль комплексної частотної характеристики

$$A(\omega) = |H_H(e^{i\omega T})|,$$

що має назву амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) фільтра, визначає амплітуду вихідного сигналу стійкого фільтра в усталеному режимі при вхідному сигналі  $x(nT) = e^{in\omega T}$ .

Аргумент комплексної частотної характеристики

$$\Phi(\omega) = \arg[H_H(e^{i\omega T})],$$

що має назву фазочастотної характеристики (ФЧХ) фільтра, визначає фазу вихідного сигналу стійкого фільтра при вхідному сигналі  $x(nT) = e^{in\omega T}$ .

Очевидно, що для фільтра з дійсними коефіцієнтами справедливі співвідношення:

$$\begin{aligned} A_H(\omega) = |H_H(e^{i\omega T})| &= \sqrt{\left(\sum_{l=0}^{N-1} b_l \cos(l\omega T)\right)^2 + \left(\sum_{l=0}^{N-1} b_l \sin(l\omega T)\right)^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} b_m b_k \cos((m-k)\omega T);} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\Phi_H(\omega) = \arg[H_H(e^{i\omega T})] = -\arctg \frac{\sum_{l=0}^{N-1} b_l \sin l\omega T}{\sum_{l=0}^{N-1} b_l \cos l\omega T}. \quad (4.5)$$

Груповий час уповільнення, який дорівнює часу затримки в усталеному режимі вихідного сигналу фільтра відносно вхідного сигналу  $x(nT) = e^{in\omega T}$ , визначається за формулою

$$\tau(\omega) = -\frac{d\Phi}{d\omega}. \quad (4.6)$$

На практиці під час розрахунку СІХ-фільтрів необхідна строго лінійна фазова характеристика. Це означає, що фазова характеристика повинна мати вигляд

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega, \quad (4.7)$$

де  $\alpha$  – стала затримка, що виражається через число інтервалів дискретизації. Тоді можна записати:

$$H(e^{i\omega}) = \pm |H(e^{i\omega})| e^{-i\alpha\omega}. \quad (4.8)$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини, одержимо:

$$\pm |H(e^{i\omega})| \cos(\alpha\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega n); \quad (4.9)$$

$$\pm |H(e^{i\omega})| \sin(\alpha\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n). \quad (4.10)$$

Поділимо першу рівність на другу:

$$\frac{\sin(\alpha\omega)}{\cos(\alpha\omega)} = \operatorname{tg}(\alpha\omega) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega n)}. \quad (4.11)$$

Це рівняння є еквівалентним такому:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[(\alpha - n)\omega] = 0. \quad (4.12)$$

Розв'язок цього рівняння задовольняє умовам:

$$\alpha = \frac{N-1}{2}. \quad (4.13)$$

$$h(n) = h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (4.14)$$

Умова (4.13) означає, що для кожного  $N$  існує тільки одна затримка  $\alpha$ , коли може досягатись строга лінійність фазової характеристики фільтра. Із умови (4.14) витікає, що при заданому  $\alpha$ , яке задовольняє умову (4.13), імпульсна характеристика має бути симетричною.

Використання умов (4.13) та (4.14) слушно розглянути окремо для випадків парного та непарного  $N$ . Якщо  $N$  непарне, то  $\alpha$  – ціле, тобто затримка фільтра дорівнює цілому числу інтервалів дискретизації. Центр симетрії характеристики дорівнює  $\alpha$  (цілому числу інтервалів дискретизації). У випадку парного  $N$   $\alpha$  буде нецілим і центр симетрії буде міститись всередині інтервалу дискретизації.

Згідно умові (4.7) для лінійності фазової характеристики фільтра потрібно, щоб фільтр мав сталими як групову, так і фазову затримки. Часто буває досить, щоб тільки групова затримка була сталою, фазова характеристика якого являється кусочно-лінійною функцією частоти, тобто

$$\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega. \quad (4.15)$$

У цьому випадку новий єдиний розв'язок задовольняє таким умовам:

$$\alpha = \frac{N_1}{2}, \quad (4.16)$$

$$\beta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad (4.17)$$

$$h(n) = -h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (4.18)$$

Фільтри, що задовольняють умовам (4.18), знову створюють затримку в  $\frac{N-1}{2}$  інтервалів дискретизації, але їхні імпульсні характеристики антисиметричні відносно центру.

Отже, залежно від значення  $N$  та виду симетрії імпульсної характеристики можливі чотири різних види СІХ-фільтрів з лінійними фазовими характеристиками.

**Приклад.** Нехай  $H(z) = 2 + 0,5z^{-1} - z^{-2}$ .

$$H_H(e^{i\omega T}) = 2 + 0,5e^{-i\omega T} - e^{-i2\omega T}.$$

$$A_H(\omega) = \sqrt{(2 + 0,5 \cos \omega T - \cos 2\omega T)^2 + (0,5 \sin \omega T - \sin 2\omega T)^2}.$$

$$\Phi_H(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{0,5 \sin \omega T - \sin 2\omega T}{2 + 0,5 \cos \omega T - \cos 2\omega T};$$

$$\tau(\omega) = \frac{1}{A_H^2(\omega)} [(2 + 0,5 \cos \omega T - \cos 2\omega T)(0,5T \cos \omega T - 2T \cos 2\omega T) - (0,5 \sin \omega T - \sin 2\omega T)(-0,5T \sin \omega T + 2T \sin 2\omega T)].$$

З формул (4.2)–(4.6) витікають такі основні властивості частотних характеристик фільтрів з дійсними коефіцієнтами.

1. Усі частотні характеристики являють собою періодичні функції частоти  $\omega$  з періодом  $\omega_D = 2\pi/T$ .
2. Амплітудно-частотна характеристика  $A(\omega)$  та груповий час затримки  $\tau(\omega)$  є парними функціями частоти  $\omega$ , а фазочастотні характеристики  $\Phi(\omega)$  – непарною функцією частоти.

З цих властивостей витікає, що вимоги до частотних характеристик при сталому  $T$  слід задавати лише на проміжку  $[0, \pi/T]$ .

## 4.2. Нерекурсивні фільтри з лінійною ФЧХ

Для фільтрів виду 1 (симетрична імпульсна характеристика; непарне  $N$ ) справедливі співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} H_{H1}(e^{i\omega T}) &= e^{-iK\omega T} \sum_{l=0}^K c_l \cos l\omega T; \\ A_{H1}(\omega) &= \left| \sum_{l=0}^K c_l \cos l\omega T \right|, \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

де  $K = (N - 1)/2$ ,  $c_0 = b_K$ ,  $c_l = 2b_{K-l}$ ,  $l = \overline{1, K}$ .  $c_l = 2h[(N - 1)/2 - l]$ ,  $c_0 = h[(N - 1)/2]$ .

Для фільтрів виду 2 (симетрична імпульсна характеристика; парне  $N$ ) справедливі співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} H_{H2}(e^{i\omega T}) &= e^{-i(K+1/2)\omega T} \sum_{l=0}^K c_l \cos(l + 1/2)\omega T; \\ A_{H2}(\omega) &= \left| \sum_{l=0}^K c_l \cos(l + 1/2)\omega T \right|, \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

де  $K = (N - 1)/2$ ,  $c_l = 2b_{K-l}$ ,  $l = \overline{0, K}$ ;  $c_l = 2h[N/2 - l]$ ,  $l = \overline{1, N/2}$ .

Відзначимо, що  $H^*(e^{i\omega}) = 0$  коли  $\omega = \pi$  незалежно від значень  $c(n)$  (або  $h(n)$ ). Звідси витікає, що фільтри цього типу не можна використовувати для апроксимації частотної характеристики, яка відрізняється від нуля коли  $\omega = \pi$  (наприклад, при проектуванні фільтрів верхніх частот).

Для фільтрів виду 3 (антисиметрична імпульсна характеристика; непарне  $N$ ) справедливі співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} H_{H3}(e^{i\omega T}) &= e^{-iK\omega T} \sum_{l=0}^K c_l \sin l\omega T; \\ A_{H3}(\omega) &= \left| \sum_{l=0}^K c_l \sin l\omega T \right|, \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

де  $K = (N - 1)/2$ ,  $c_0 = b_K = 0$ ,  $c_l = 2b_{K-l}$ ,  $l = \overline{1, K}$ .

$H^*(e^{i\omega}) = 0$  коли  $\omega = 0$  і  $\omega = \pi$  незалежно від значень  $h(n)$ . Більш того, множник  $e^{i\pi/2} = i$  показує, що без урахування множника із лінійним змінюванням фази частотна характеристика являється чисто уявною функцією. Тому цей вид фільтрів більше за все годиться для проектування перетворювачів Гільберта та диференціаторів.

Для фільтрів виду 4 (антисиметрична імпульсна характеристика; парне  $N$ ) справедливі співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} H_{H4}(e^{i\omega T}) &= e^{-i(K+1/2)\omega T} \sum_{l=0}^K c_l \sin(l + 1/2)\omega T; \\ A_{H4}(\omega) &= \left| \sum_{l=0}^K c_l \sin(l + 1/2)\omega T \right|, \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

де  $K = (N - 2)/2$ ,  $c_l = 2b_{K-l}$ ,  $l = \overline{0, K}$ .

Передаточні функції  $H(z)$  фільтрів усіх чотирьох видів можуть мати нулі, що містяться всередині, на та зовні одиничного кола на  $z$ -площині.

*Основна властивість передаточної функції  $H_{Hk}(z)$ :*

$$\left. \begin{aligned} H_{Hk}(z) &= H_1(z)H_2(z)H_3(z); \\ |H_1(e^{i\omega T})| &= |H_2(e^{i\omega T})|. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Нулі  $H_1(z)$  співпадають або із нулями  $H_{Hk}(z)$ , які містяться всередині одиничного кола, або з нулями  $H_{Hk}(z)$ , що містяться на колі і мають парну кратність; нулі  $H_2(z)$  співпадають або з нулями  $H_{Hk}(z)$ , які містяться поза одиничного кола, або з нулями  $H_{Hk}(z)$ , що містяться на одиничному колі і мають парну кратність;  $H_3(z) = \text{const}$  або нулі  $H_3(z)$  співпадають із нулями  $H_{Hk}(z)$ , що містяться на одиничному колі і мають непарну кратність.

### 4.3. Основні етапи проектування нерекурсивних фільтрів

Перший етап – формулювання задачі апроксимації – складається з таких кроків:

- вибір типу фільтра (з лінійною ФЧХ визначеного типу або мінімально-фазового);
- вибір апроксимуючої функції  $\Phi(w, \mathbf{c})$ , значення якої визначають потрібну характеристику фільтра, наприклад, АЧХ.  $w = \omega T/2\pi$  – нормована частота,  $\mathbf{c}$  – вектор коефіцієнтів, який співпадає із вектором коефіцієнтів  $\mathbf{b}$ , або досить просто зв'язаний з ним;
- визначення функції  $B(w)$ , що апроксимується, яка задає вимоги до заданої характеристики;
- вибір критерію апроксимації, тобто уточнення змісту наближеної рівності

$$\Phi(w, \mathbf{c}) \approx B(w) \quad (4.24)$$

за заданими значеннями  $w$ ;

- визначення вагової функції апроксимації  $q(w)$ , яка задає вимоги до точності формулювання задачі наближеного розв'язку (4.24).

Метою першого етапу є математичне формулювання задачі обчислення вектора  $\mathbf{c}$  за заданими вимогами до характеристик фільтра.

Другий етап – розв'язання задачі апроксимації – складається з таких кроків:

- оцінки необхідного порядку фільтра  $N$ ;
- обчислення вектору коефіцієнтів  $\mathbf{c}$ ;

- перевірки критерію одержання розв'язку (виконання заданих вимог до характеристик фільтра). Якщо вимоги до характеристик виконуються, то за вектором коефіцієнтів  $\mathbf{c}$  визначається вектор  $\mathbf{b}$  і другий етап завершується. Якщо ж вимоги до характеристик не виконуються, то необхідно повернутися до другого кроку і обчислити вектор  $\mathbf{c}$  для більшого значення  $N$ .

Метою другого етапу є визначення вектору коефіцієнтів фільтра  $\mathbf{b}$ .

Наступні етапи стосуються апаратної реалізації фільтра.

Третій етап – обчислення розрядності  $s_k$  коефіцієнтів (або розрядності регістрів ПЗП) – залежить від вибраної елементної бази. При реалізації фільтра на спеціалізованому мікропроцесорі типу DSP значення  $s_k$  задано і залишається перевірити, чи виконуються вимоги, що задано до характеристик фільтра. Якщо вони виконуються, то слід перейти до четвертого етапу, якщо ні – то повернутися до другого етапу й збільшити  $N$ . Якщо фільтр реалізується на ВІС загального призначення або на універсальних мікропроцесорах, то необхідно мінімізувати значення  $s_k$  шляхом його зменшення доти, доки задані вимоги до характеристик перестануть виконуватись.

На четвертому етапі обчислюються розрядності регістрів оперативної пам'яті таким чином, щоб потужність власних шумів фільтру була менше за потужність шуму на вході.

На п'ятому етапі здійснюється схемна реалізація фільтру на обраній елементній базі.

## 4.4. Формулювання задач апроксимації

### 4.4.1. Критерії апроксимації

Метою вирішення задачі апроксимації є визначення коефіцієнтів  $b_k$  передаточної функції фільтра. Апроксимуюча функція  $\Phi(w, \mathbf{c})$  має задовольняти вимогам:

- вектор  $\mathbf{c}$  має бути зв'язаним залежністю, що є найпростішою з можливих, із вектором коефіцієнтів  $\mathbf{b}$ ;
- залежність функції  $\Phi(w, \mathbf{c})$  із вектором  $\mathbf{c}$  має бути досить простою;
- для заданих значень  $w$  має виконуватись (4.24).

Найбільш простою й зручною для вирішення апроксимації є лінійна залежність функції  $\Phi(w, \mathbf{c})$  від вектора  $\mathbf{c}$ :

$$\Phi(w, \mathbf{c}) = \mathbf{c}\boldsymbol{\varphi}(w) = \sum_{l=0}^K c_l \varphi_l(w). \quad (4.25)$$

Таке подання функції, що апроксимує, називається розкладанням *Карунена-Лоева*.

Існують два основних критерії, що уточнюють зміст (4.24):

- середньоквадратичний критерій

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(w) [B(w) - \Phi(w, \mathbf{c})]^2 dw \rightarrow \min \quad (4.26)$$

- найкращий рівномірний (чебишовський) критерій

$$\max_{\alpha_1 \leq w \leq \alpha_2} q(w) |B(w) - \Phi(w, \mathbf{c})| \rightarrow \min. \quad (4.27)$$

Ці критерії можуть застосовуватись і разом – кожний для відповідної області частот.

Загальний принцип визначення функції ваги  $q(w)$  полягає у такому: чим точніше має виконуватись (4.24) коли  $w = w_d$ , тим більшим має бути значення  $q(w)$ . При використанні критерія (4.26) для окремих підінтервалів частот  $\alpha_{1j} \leq w \leq \alpha_{2j}$  задаються значення  $\varepsilon_j$  такі, щоб на цих підінтервалах виконувалась нерівність

$$|B(w) - \Phi(w, \mathbf{c})| \leq \varepsilon_j. \quad (4.28)$$

Тоді для  $j$ -го підінтервалу

$$q(w) = R/\varepsilon_j, \quad (4.29)$$

де  $R$  – довільна стала (множник, що нормує), загальна для всіх підінтервалів.

#### 4.4.2. Вибіркові фільтри з лінійною ФЧХ

Для цих фільтрів функції, що апроксимують, мають вигляд: в смугах пропускання  $B(w) = 1$ ; в смугах затримування  $B(w) = 0$ ; в проміжних смугах значення  $B(w)$  не задано і може бути прийнято будь-яким в межах від 0 до 1.

**Приклад.** Для ФНЧ

$$B(w) = \begin{cases} 1 & \text{коли } 0 \leq w \leq w_p \text{ – смуга пропускання} \\ 0 & \text{коли } w_z \leq w \leq 0,5 \text{ – смуга затримування.} \end{cases}$$

Апроксимуюча функція має вигляд:  
за непарного  $N$

$$\Phi(w, \mathbf{c}) = \sum_{l=0}^K c_l \cos l2\pi w, \quad (4.30)$$

причому  $K = (N - 1)/2$ ,  $b_l = c_{K-l}/2$ ,  $l = \overline{0, K-1}$ ,  $b_K = c_0$  (згідно (4.19));  
за парного  $N$

$$\Phi(w, \mathbf{c}) = \sum_{l=0}^K c_l \cos(2l+1)\pi w, \quad (4.31)$$

причому  $K = (N - 2)/2$ ,  $b_l = c_{K-l}/2$ ,  $l = \overline{0, K}$  (згідно (4.20)).

#### 4.4.3. Фільтри із рівними смугами з лінійною ФЧХ

Якщо для ФНЧ  $w_p + w_z = 0,5$ ,  $q(w) = q(0,5 - w)$ , що означає, що вимоги до точності апроксимації в смугах пропускання та затримування однакові, та  $N$  – непарне, то при вирішенні задачі апроксимації відповідно до критерію (4.26) або (4.27) частина коефіцієнтів  $c_l$  виявляється відомою заздалегідь:

$$c_0 = 0,5; \quad c_{2l} = 0; \quad 2 \leq 2l \leq K. \quad (4.32)$$

Такі фільтри називають рівносмугастими або напівсмугастими, у цих фільтрів  $N = 3 + 4l$ ,  $l = 0, 1, \dots$  й характеристики, які реалізуються, є кращими, ніж у звичайних вибіркових фільтрів з лінійною ФЧХ:

$$L_0 = N - 1; \quad L_n = (N - 3)/4 + 1; \quad V_y = (N - 3)/4 + 1; \quad V_c = (N + 1)/2.$$

(При визначенні значень  $V_y$   $c_0 = 0,5$  не враховувалось, оскільки множення на це число є еквівалентним одному зсуву).



#### 4.4.4. Мініально-фазові фільтри

Для мініально-фазових фільтрів формулюються дві основні задачі апроксимації. В першій задачі задано АЧХ  $A(w)$  та ФЧХ  $\Phi(w)$  фільтра; треба визначити  $H(z)$  так, щоб виконувались наближені рівності

$$\left. \begin{aligned} |H(e^{i2\pi w})| &\approx A(w); \\ \arg [H(e^{i2\pi w})] &\approx \Phi(w). \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

При цьому запроваджуються функції, що апроксимуються:

$$B_1(w) = A(w) \cos \Phi(w); \quad B_2(w) = A(w) \sin \Phi(w). \quad (4.34)$$

та функції, що апроксимують:

$$\Phi_1(w, \mathbf{b}) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l \cos l2\pi w; \quad (4.35)$$

$$\Phi_2(w, \mathbf{b}) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l \sin l2\pi w. \quad (4.36)$$

Тобто замість (4.33) розглядаються еквівалентні їм наближені рівності

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(w, \mathbf{b}) &\approx B_1(w); \\ \Phi_2(w, \mathbf{b}) &\approx B_2(w) \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

В другій задачі розглядається завдання лише АЧХ  $A(w)$ , а ФЧХ може бути довільною. У цьому випадку функції, що апроксимуються та апроксимують, мають вигляд:

$$B(w) \approx A^2(w); \quad (4.38)$$

$$\Phi(w, \mathbf{c}) = \sum_{l=0}^K c_l \cos l2\pi w. \quad (4.39)$$

Причому функція  $\Phi(w, \mathbf{c})$  не повинна мати дійсних коренів непарної кратності. Тоді, використовуючи (4.19), можна побудувати функцію

$$H'(z) = \sum_{l=0}^{N-1} b'_l z^{-l} \quad (4.40)$$

( $N$  – непарне), обчислити корені  $H'(z)$  та побудувати передаточну функцію  $H(z)$  шуканого мініально-фазового фільтра так, щоб корені  $H(z)$  співпадали із коренями  $H'(z)$ , які містяться всередині та на колі одиничного радіусу в комплексній  $z$ -площині. Тоді з (4.24) витікає, що

$$|H(e^{i2\pi w})| \approx A(w). \quad (4.41)$$

#### 4.5. Методи вирішення задач апроксимації

Методи вирішення тісно зв'язані з критеріями апроксимації. Залежно від критерію, що використовується, їх можна розділити на три групи. Перша група відповідає середньоквадратичному критерію і полягає у використанні методу розкладання в ряд Фур'є та методу найменших квадратів, друга – найкращому рівномірному (чебишовському) критерію, що реалізується алгоритмом Ремеза або деякими іншими алгоритмами, які використовуються порівняно рідко. До третьої групи належать методи, що ґрунтуються на використанні інших критеріїв апроксимації, які порівняно рідко використовуються при проектуванні фільтрів.

### 4.5.1. Метод зважування

Найпростіший підхід до розрахунку СІХ-фільтрів зводиться до одержання імпульсної характеристики скінченної довжини шляхом усікнення послідовності імпульсної характеристики нескінченної довжини.

Якщо припустити, що  $H_d(e^{i\omega})$  є ідеальною потрібною частотною характеристикою, то

$$H_d(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)e^{-i\omega n}, \quad (4.42)$$

де  $h_d(n)$  – відповідна послідовність відліків імпульсної характеристики, тобто

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega. \quad (4.43)$$

Загалом,  $H_d(e^{i\omega})$  для частотно-вибіркового фільтра може бути кусково-сталою з розривами на межах між смугами. У таких випадках послідовність  $h_d(n)$  має нескінченну довжину і має бути усікнена для одержання імпульсної характеристики  $H_d(e^{i\omega})$  за допомогою рядів Фур'є, де послідовність  $h_d(n)$  виконує роль “коефіцієнтів Фур'є”. Таким чином, апроксимація заданих вимог ідеального фільтра за допомогою усікнення ідеальної імпульсної характеристики є тотожною дослідженню збіжності рядів Фур'є. Добре відомим поняттям цієї теорії є *явище Гіббса* – явище нерівномірної збіжності рядів Фур'є.

Якщо  $h_d(n)$  має нескінченну довжину, то єдиним шляхом одержання імпульсної характеристики, що є фізично реалізуємою, є просто усікнення  $h(n)$ :

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & \text{в решті випадків.} \end{cases} \quad (4.44)$$

Взагалі  $h(n)$  можна представити у вигляді добутку потрібної імпульсної характеристики та “вікна” скінченної довжини  $w(n)$ , тобто

$$h(n) = h_d(n)w(n), \quad (4.45)$$

де

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & \text{в решті випадків.} \end{cases} \quad (4.46)$$

При використанні теореми про комплексну згортку видно, що

$$H(e^{i\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{i\theta}) W(e^{i(\omega-\theta)}) d\theta. \quad (4.47)$$

Це означає, що  $H(e^{i\omega})$  є круговою згорткою потрібної частотної характеристики із перетворенням Фур'є “вікна”. Тому частотна характеристика  $H(e^{i\omega})$  буде “розмитою” версією потрібної характеристики  $H_d(e^{i\omega})$  по ширині вікна. На рис. 4.1 наведені типові функції  $H_d(e^{i\omega})$  та  $W(e^{i\omega})$  (для зручності відображення процесу згортки вони показані як дійсні функції).

Із (4.47) видно, що якщо  $W(e^{i\omega})$  являється вузькою порівняно зі змінюваннями  $H_d(e^{i\omega})$ , то  $H(e^{i\omega})$  буде “подібною” до  $H_d(e^{i\omega})$ .

Отже, вибір вікна визначається вимогою мати  $w(n)$  мінімально можливої довжини для того, щоб мінімізувати обчислення під час виконання фільтра, й одночасно забезпечити  $W(e^{i\omega})$  мінімально вузькою за частотою так, щоб точно відновити задану

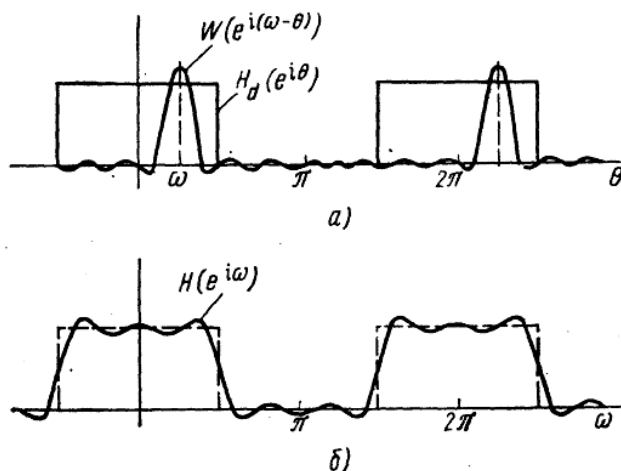
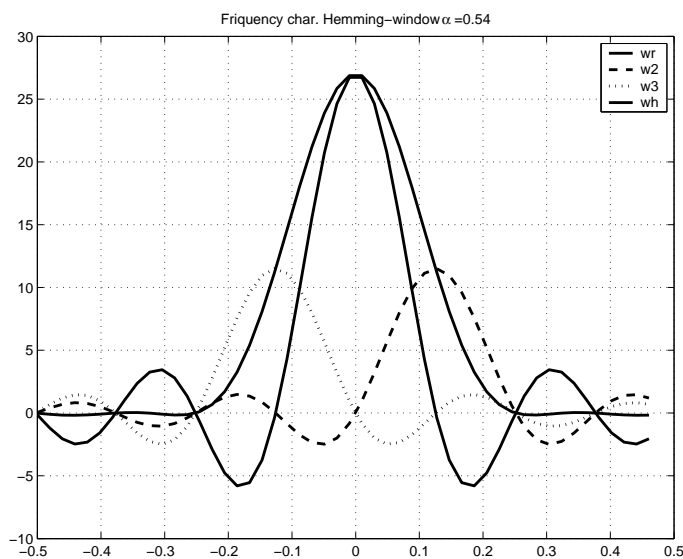


Рис. 4.1. Процес згортки за допомогою вікна

частотну характеристику. Ці вимоги являються суперечливими, що можна побачити у випадку прямокутного вікна (4.46), для якого

$$W(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\omega n} = \frac{1 - e^{-i\omega N}}{1 - e^{-i\omega}} = e^{-i\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}. \quad (4.48)$$

Рис. 4.2. АЧХ для прямокутного вікна,  $N = 8$ 

Частотна характеристика  $W(e^{i\omega})$  показана на рис. (4.2) для  $N = 8$ ; фазова характеристика, як видно з (4.48), є лінійною. Із зростанням  $N$  ширина "головного пелюстка" зменшується. Головний пелюсток визначається як область між значеннями  $\omega = -2\pi/N$  та  $\omega = +2\pi/N$ .

Незважаючи на те, що для прямокутного вікна бічні пелюстки є незначними, в дійсності із зростанням  $N$  пікові амплітуди головного та бічних пелюстків збільшуються таким чином, що площа під кожним пелюстком залишається сталою, а ширина кожного пелюстка зменшується. Як наслідок, зі збільшенням частоти  $\omega$  по мірі того,

як  $W(e^{i(\omega-\theta)})$  наближається до точки свого різкого змінювання  $H_d(e^{i\theta})$ , величина інтегралу від  $W(e^{i(\omega-\theta)})H_d(e^{i\theta})$  буде змінюватись у коливальному режимі відповідно до змінювання кожного пелюстка  $W(e^{i(\omega-\theta)})$  після цієї точки різкого змінювання.

Оскільки зі збільшенням  $N$  площа під кожним пелюстком залишається сталою, то коливання здійснюються тільки швидше, але не зменшуються за амплітудою. В теорії рядів Фур'є добре відомо, що ця нерівномірна збіжність (явище Гіббса) може бути зменшена шляхом використання менш різкого усікнення рядів Фур'є. Завдяки поступовому звужуванню вікна до нуля з обох боків можна зменшити висоту бічних пелюстків шляхом збільшення ширини головного пелюстка й, таким чином, створення більш широкої перехідної смуги у точці різкого переходу.

Розглянемо види вікон, що найчастіше застосовуються для побудови СІХ-фільтрів.

#### 4.5.1.1. Прямокутне вікно

$N$ -точкове прямокутне вікно, яке відповідає простому усікненню ряду Фур'є, описується функцією ваги

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & -\left(\frac{N-1}{2}\right) \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 0 & \text{за інших } n. \end{cases} \quad (4.49)$$

Передбачається, що  $N$  – непарне, а також, що послідовність вікна має нульову затримку. Частотна характеристика прямокутного вікна описується рівнянням

$$W_R(e^{i\omega}) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{-i\omega n} = \frac{e^{i\omega(N-1)/2} (1 - e^{i\omega N})}{1 - e^{i\omega}} = \frac{e^{i\omega(N/2)} - e^{-i\omega(N/2)}}{e^{i(\omega/2)} - e^{-i(\omega/2)}} = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}. \quad (4.50)$$

Графік частотної характеристики (4.50) ( $N = 25$ ) наведено на рис.(4.3)

**Вікно Бартлета.** Для вікна *Бартлета* (Bartlett)

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1. \end{cases} \quad (4.51)$$

**Вікно Хеннінга.** Для вікна *Хеннінга* (Hanning)

$$w(n) = \begin{cases} 0,5 \left[ 1 - \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{в решті випадків.} \end{cases} \quad (4.52)$$

#### 4.5.1.2. Вікно Хеммінга

Для вікна *Хеммінга* (Hamming)

$$w_H(n) = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi n}{N-1}, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{в решті випадків.} \end{cases} \quad (4.53)$$

“Узагальнене” вікно Хеммінга описується функцією ваги

$$w_H(n) = \begin{cases} \alpha - (1 - \alpha) \cos \frac{2\pi n}{N-1}, & -0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & \text{для інших } n. \end{cases} \quad (4.54)$$

Причому  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Випадок  $\alpha = 0,54$  відповідає вікну Хеммінга.

Частотну характеристику вікна Хеммінга можна одержати, якщо прийняти до уваги, що воно може бути представлено у вигляді добутку прямокутного вікна та вікна, що визначається формулою (4.54), але для всіх  $n$ :

$$w_H(n) = w_R(n) \cdot \left[ \alpha - (1 - \alpha) \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right], \quad (4.55)$$

Отже, частотна характеристика узагальненого вікна Хеммінга дорівнює круговій згортці частотної характеристики прямокутного вікна  $W_R(e^{i\omega})$  із послідовністю імпульсів і може бути записана у вигляді

$$W_H(e^{i\omega}) = W_R(e^{i\omega}) * \left[ \alpha u_0(\omega) + \frac{1-\alpha}{2} u_0\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + \frac{1-\alpha}{2} u_0\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) \right]. \quad (4.56)$$

звідки

$$W_H(e^{i\omega}) = \alpha W_R(e^{i\omega}) + \frac{1-\alpha}{2} W_R\left[e^{i\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right)}\right] + \frac{1-\alpha}{2} W_R\left[e^{i\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right)}\right]. \quad (4.57)$$

#### 4.5.1.3. Вікно Блекмана

Для вікна *Блекмана* (Blackman)

$$w(n) = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0,08 \cos \frac{4\pi n}{N-1}, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{в решті випадків.} \end{cases} \quad (4.58)$$

Функцію  $20 \lg |W(e^{i\omega})|$  наведено на рис. (4.3) для кожного з цих вікон при  $N = 51$ .

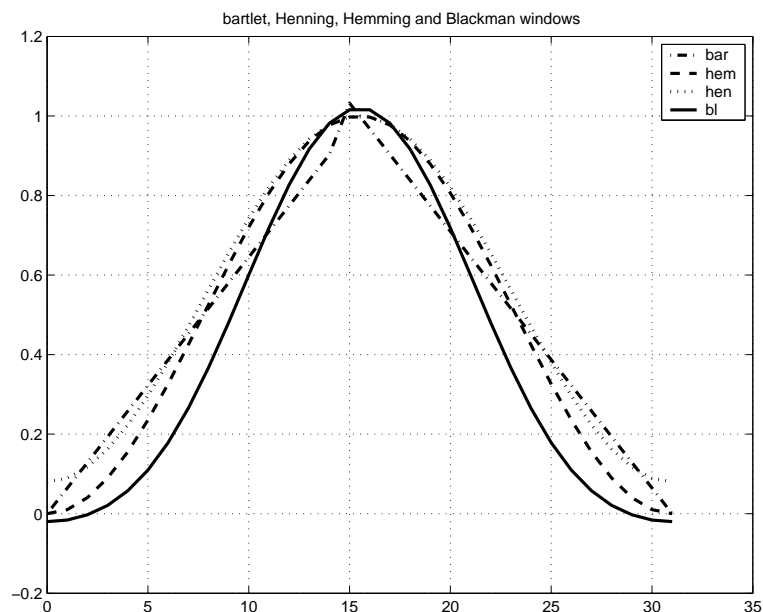


Рис. 4.3. Перетворення Фур'є для вікон (4.49) – (4.58).

Відзначимо, що оскільки ці вікна є симетричними, то фазова характеристика виявляється лінійною. Вочевидь, що прямокутне вікно має найвузький головний пелюсток і, таким чином, для заданої довжини  $N$  має забезпечувати найкрутіше спадання характеристики перехідних смуг  $H(e^{i\omega})$  в точках різкого змінювання  $H_d(e^{i\omega})$ . Але, оскільки перший бічний пелюсток виявляється нижче головного піку тільки приблизно на 13 дБ, то виникають коливання  $H(e^{i\omega})$  значної величини за різкого змінювання

$H_d(e^{i\omega})$ . Завдяки поступовому звужуванню вікна до нуля бічні пелюстки значно понижуються, але при цьому з'являються значно ширший головний пелюсток та ширші перехідні смуги в точках різких змінювань  $H_d(e^{i\omega})$ .

Наведені функції прості для розрахунків, але не дуже ефективні для побудови СІХ-фільтрів.

Грунтуючись на класичних працях по обчисленню сум рядів Фур'є, що пов'язані із збільшенням швидкості збіжності рядів Фур'є, можна визначити інші вікна. Метод Феєра підсумовування ряду Фур'є призводить до трикутного вікна або вікна Феєра вигляду

$$w(n) = (1 - |2n/(N - 1)|), \quad n = -(N - 1)/2, \dots, (N - 1)/2. \quad (4.59)$$

Метод Ланцоша породжує вікно вигляду

$$w_L(n) = \left[ \frac{\sin(2\pi n/(N - 1))}{2\pi n/(N - 1)} \right]^L, \quad (4.60)$$

де  $L > 0$  – ціле.

Узагальнення вікна Ланцоша за рахунок використання замість  $L$  будь-якого додатного числа  $m$  виконано Капеліні. За допомогою параметра  $m$  можна легко керувати співвідношенням між шириною головного пелюстка передаточної функції та площиною під бічними пелюстками. За зростання  $m$  зменшується амплітуда бічних пелюстків, а ширина головного пелюстка збільшується. Тому за будь-яких значень  $N$  можна одержати різні перехідні смуги та амплітуди бічних пелюстків.

Капеліні винайшов досить гарну апроксимацію функції

$$w_C(t) = at^3 + bt^2 + ct + d, \quad (4.61)$$

де для  $0 \leq t < 0,75$   $d = 0,99938$ ,  $c = 0,041186$ ,  $b = -1,637363$ ,  $a = 0,828217$ . Для  $0,75 \leq t < 1,5$   $d = 1,496611$ ,  $c = -1,701521$ ,  $b = 0,372793$ ,  $a = 0,065062$ .

Функція вікна, що має таке досить просте визначення, є ефективною і досить гнучкою, якщо розглядати  $w_C(t_1)$ ,  $t_1 = at$ ,  $a$  – додатний коефіцієнт розтягування (стиску) шкали часу.

#### 4.5.1.4. Вікно Кайзера

Задача розрахунку гарних вікон фактично зводиться до математичної задачі відшукування обмежених у часі функцій, перетворення Фур'є яких найкращим чином апроксимують функції, що обмежені за частотою, тобто мають мінімальну енергію за межами заданого інтервалу частот. При вирішенні цієї задачі в замкненій формі для неперервних функцій запроваджується клас так званих *витягнутих сфероїдальних хвильових функцій*. Ці функції мають досить складний вигляд. Тому Кайзер у якості найкращого вікна запропонував відносно просту апроксимацію цих функцій, які називаються вікном Кайзера:

$$w_K(n) = \frac{J_0(\beta\sqrt{1 - [2n/(N - 1)]^2})}{J_0(\beta)}, \quad -\left(\frac{N - 1}{2}\right) \leq n \leq \frac{N - 1}{2}, \quad (4.62)$$

де  $\beta = \omega_a(N - 1)T$  – стала, яка визначає компроміс між максимальним рівнем бічних пелюстків та шириною головного пелюстка (або долею загальної енергії в головному пелюстку),  $\omega_a$  – параметр форми вікна, а  $J_0(x)$  – функція Бесселя першого роду нульового порядку.  $D = \Delta F \cdot N$ ,  $\Delta F$  – ширина перехідної смуги. Дані, що наведено в таблиці 5.2, одержано шляхом ідеального інтегрування неперервного вікна Кайзера й при великих  $N$  є досить гарним наближенням до дискретного випадку.

Частотна характеристика дискретного вікна Кайзера в замкнутій формі не знайдена, але Кайзер показав, що для неперервної функції вікна частотна характеристика є

Табл. 4.1. Таблиця

$\beta$	$D$	Пульсації	Пульсації
2,120	1,50	$\pm 0,27$	-30
3,384	2,23	$\pm 0,084$	-40
4,538	2,93	$\pm 0,0274$	-50
5,658	3,62	$\pm 0,00868$	-60
6,764	4,32	$\pm 0,00275$	-70
7,865	5,0	$\pm 0,00087$	-80
8,960	5,7	$\pm 0,000275$	-90
10,056	6,4	$\pm 0,000087$	-100

пропорційною

$$\frac{\sin[\beta\sqrt{(\omega/\omega_\beta)^2 - 1}]}{\sqrt{(\omega/\omega_\beta)^2 - 1}},$$

де  $\omega_\beta$  наближено дорівнює ширині головного пелюстка частотної характеристики.

Вікно Кайзера є по суті оптимальним вікном у тому сенсі, що воно представляє послідовність скінченної довжини, яка має мінімум енергії спектру за межами деякої заданої частоти. Ще одним оптимальним вікном являється вікно Дольфа - Чебишова, яке забезпечує мінімальну ширину головного пелюстка частотної характеристики при фіксованому рівні бічних пелюстків. Усі бічні пелюстки в спектрі цього вікна мають однаковий рівень.

Функція Дольфа-Чебишова має частотну характеристику вигляду

$$W_d(\omega) = \frac{\cos[(N-1)\arccos[\alpha \cos(\omega T/2)]]}{\text{ch}[(N-1)\text{arccch } \alpha]}, \quad (4.63)$$

де  $\alpha$  – додатне число,  $T$  – інтервал дискретизації за часом.

Розглянемо розрахунок фільтра нижніх частот. Для виконання умови потрібної затримки при одержанні фізично реалізуемого фільтра з лінійною фазовою характеристикою задана частотна характеристика визначається як

$$H_d(e^{i\omega}) = \begin{cases} e^{-i\omega\alpha}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{в решті випадків.} \end{cases} \quad (4.64)$$

Відповідна імпульсна характеристика має вигляд

$$h_d(n) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-i\omega(n-\alpha)} d\omega, \\ \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)}, & n \neq \alpha. \end{cases} \quad (4.65)$$

Вочевидь, що  $h_d(n)$  має нескінченну довжину. Щоб створити фізично реалізуемий фільтр зі скінченною довжиною  $N$  імпульсної характеристики та лінійною фазою, позначимо

$$h(n) = h_d(n)w(n),$$

де  $\alpha = (N-1)/2$ . Якщо  $w(n)$  симетрична, то такий вибір  $\alpha$  приводить до послідовності  $h(n)$ , яка задовольняє

$$h(n) = h(N-1-n), \quad (4.66)$$

що має лінійну фазову характеристику.

На рис. (4.4) наведено графік  $h_d(n)$  для прямокутного вікна при  $N = 51$  та  $\omega_c = \pi/2$ . На рис. (4.5) наведено залежності  $20 \lg |H(e^{i\omega})|$  для імпульсної характеристики рис. (4.4) з урахуванням зваження для кожного з п'яти вікон рис. (4.3).

Видно, що збільшення ширини перехідної смуги відповідає збільшенню ширини головного пелюстка, а збільшення ослаблення в смузі непропускання відповідає зменшенню амплітуди бічного пелюстка.

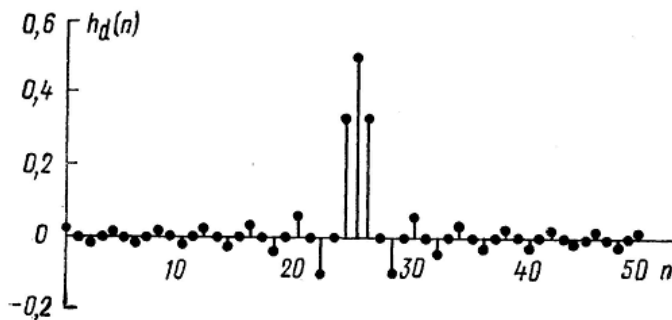


Рис. 4.4. Усікнена імпульсна характеристика ідеального ФНЧ

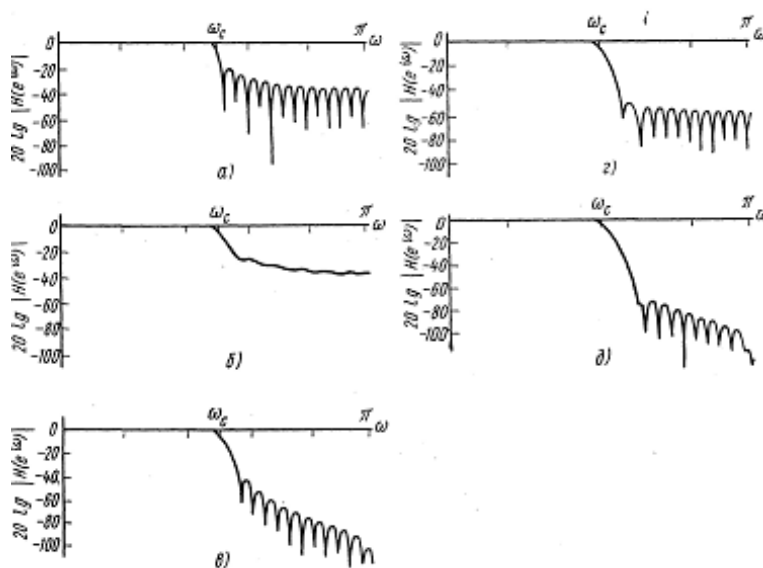
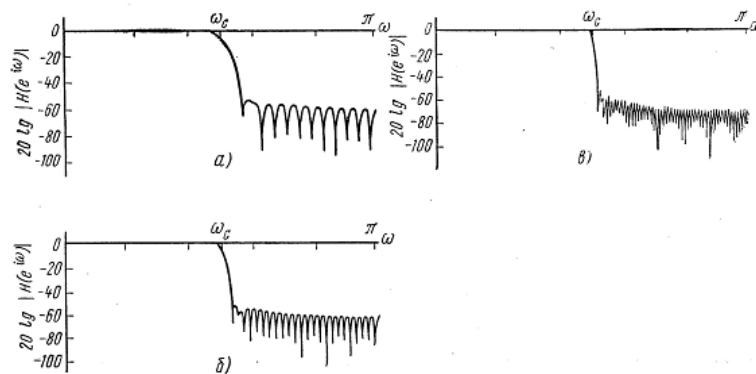


Рис. 4.5. Імпульсні характеристики для прикладу рис. 4.4

З (4.48) витікає, що ширина центрального пелюстка є обернено пропорційною до  $N$ . На рис. (4.6) наведено залежність ширини центрального пелюстка при перетворенні Фур'є для вікна Хеммінга від довжини вікна: а)  $N = 51$ ; б)  $N = 101$ ; в)  $N = 201$ . Видно, що при збільшенні  $N$  вдвічі ширина центрального пелюстка зменшується на половину. На рис. (4.6) (фільтр нижніх частот,  $\omega_c = \pi/2$  та вікно Хеммінга при тих же  $N$ ) наведено вплив збільшення  $N$  на перехідну смугу при проектуванні фільтра нижніх частот. Вочевидь, що мінімальне послаблення в смузі непропускання залишається, по суті, сталим, будучи залежним від форми вікна, в той час як ширина перехідної області при різкому змінюванні  $H_d(e^{i\omega})$  залежить від довжини вікна.

Наведені приклади ілюструють основні принципи методу використання вікон при проектуванні СІХ-фільтрів. За рахунок вибору форми вікна та його довжини можна здійснити деяке керування процесом розрахунку. Наприклад, для заданого ослаблення



Рис. 4.6. Вплив довжини вікна Хеммінга при  $\omega_c = \pi/2$ .

в смузі непропускання, як правило, виявляється справедливою умова типу  $N = A/\Delta\omega$ , де  $\Delta\omega$  – ширина перехідної смуги (приблизно ширина головного пелюстка  $W(e^{i\omega})$ ),  $A$  – стала, що залежить від форми вікна. Форма вікна являється суттєвою у визначенні мінімального ослаблення в смузі пропускання. Для вікон, які розглядаються, основні параметри для розрахунку фільтра нижніх частот зібрано в табл. , де запроваджено скорочення: Ампл. – амплітуда піку бічного пелюстка, в дБ; Шир. – ширина перехідної смуги головного пелюстка; Мін. – мінімальне згасання в смузі непропускання, дБ.

Табл. 4.2. Таблиця

вікно	Ампл.	Шир	Мін.
Прямокутне	-13	$4\pi/N$	-21
Бартлета	-25	$8\pi/N$	-25
Хеннінга	-31	$8\pi/N$	-44
Хеммінга	-41	$8\pi/N$	-53
Блекмана	-57	$12\pi/N$	-74

Вікна Кайзера мають параметр  $\omega_a$ , що змінюється, вибором якого визначається компроміс між амплітудою бічного пелюстка та його шириною.

Основні принципи, які проілюстровано наведеними прикладами, справджуються у загальному випадку і можуть застосовуватись для розрахунку будь-якого фільтра, для якого можна задати потрібну частотну характеристику. В цьому сенсі метод має властивості узагальнення. Але складність методу полягає в оцінці інтегралу (4.43). Якщо  $H_d(e^{i\omega})$  не можна виразити через прості функції, для яких можна виконати інтегрування, то апроксимація для  $h_d(n)$  має бути одержана шляхом дискретизації  $H_d(e^{i\omega})$  та використанням оберненого дискретного перетворення Фур'є з метою обчислення

$$\bar{h}_d(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_d(e^{i(2\pi/M)k}) e^{i(2\pi/N)kn}.$$

Інше обмеження полягає у тому, що деякою мірою важко заздалегідь визначити тип вікна та довжину  $N$ , які необхідні для задоволення вимогам, що задані до частотної характеристики.

На рис. наведено графіки трьох компонент характеристики  $W_H(e^{i\omega})$  і результуюча частотна характеристика при  $\alpha = 0,54$  та  $N = 25$ . З порівняння рис. та рис. видно, що ширина головного пелюстка частотної характеристики вікна Хеммінга вдвічі більше, ніж для прямокутного вікна. Але рівень бічних пелюстків у випадку вікна Хеммінга

значно нижче, ніж для прямокутного вікна. При  $\alpha = 0,54$ , тобто для звичайного вікна Хеммінга, 99,96% загальної енергії спектра міститься в головному пелюстку, а максимуми бічних пелюстків на 40 дБ нижче головного максимуму. В спектрі прямокутного вікна максимум бічних пелюстків нижче головного максимуму лише на 14 дБ. На рис. добре видно, яким чином при використанні вікна Хеммінга досягається пригнічення бічних пелюстків за одночасного розширення головного пелюстка.

При розрахунку фільтра нижніх частот розширення головного пелюстка відповідає розширенню перехідної смуги між смугами пропускання та непропускання, а зменшення рівня бічних пелюстків відповідає меншим пульсаціям в смузі пропускання та кращому пригніченню в смузі непропускання фільтра.

Але жодне з цих вікон не дозволяє одержати оптимальну в мінімаксному сенсі апроксимацію довільної ідеальної частотної характеристики, оскільки в дійсності характеристика фільтра є результатом згортки частотних характеристик вікна та ідеального фільтра.

Таким чином, незважаючи на наявність оптимальних вікон, оптимальних фільтрів, що вираховуються за їхньою допомогою, не існує.

#### 4.5.2. Особливості використання метода зважування

Метод зважування ввижається досить зручним для проектування СІХ-фільтрів, але йому властиві деякі особливості, що в багатьох випадках перешкоджають використанню вікон. Перш за все необхідно мати вирази для коефіцієнтів ряду Фур'є:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega. \quad (4.67)$$

Якщо характеристика  $H(e^{i\omega})$  має складний вигляд або не може бути просто перетворена в замкнений математичний вираз, ця формула часто виявляється громіздкою й незручною для інтегрування.

Ще одна особливість методу зважування – це відсутність достатньої гнучкості під час виконання проектування фільтра. Наприклад, під час розрахунку фільтра нижніх частот важко, як правило, точно визначити межову частоту смуги пропускання, оскільки вікно “розмиває” розрив ідеальної характеристики.

При застосуванні методу зважування завжди треба мати на увазі існування обмежень на його застосування, й розуміти характер тих наближень, що доводиться виконувати для їх подолання.

Для визначення незважених коефіцієнтів Фур'є у тому випадку, коли аналітичний вираз для  $h(n)$  є громіздким або незручним для інтегрування, інтеграл можна апроксимувати сумою.

#### 4.5.3. Метод частотної вибірки

Метод розрахунку фільтра з використанням вікон за своїм застосуванням є прямим й у цьому сенсі виявляється досить загальним, але часто бажано спроектувати фільтр, який є “найкращим” з тих, що можуть бути створені для даної величини  $N$ .

При проектуванні фільтрів з використанням вікон із основних результатів теорії рядів Фур'є витікає, що прямокутне вікно забезпечує найкращу середньоквадратичну апроксимацію для потрібної частотної характеристики при даній величині  $N$ . Це означає, що

$$h(n) = h_d(n), \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

мінімізує вираз

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_d(e^{i\omega}) - H(e^{i\omega})|^2 d\omega.$$

Але ж цей критерій приводить до небажаного режиму за різких змінювань  $H_d(e^{i\omega})$ . Для багатьох типів фільтрів кращим критерієм є мінімум максимальної абсолютної похибки.

Основна ідея методу частотної вибірки полягає у тому, що шукану частотну характеристику можна апроксимувати її відліками в  $N$  рівновіддалених точках, а потім шляхом *інтерполяції одержати результуючу частотну характеристику, яка буде проходити через вхідні відліки*.

СІХ-фільтр може бути однозначно заданий як коефіцієнтами імпульсної характеристики  $\{h(n)\}$ , так й коефіцієнтами ДПФ імпульсної характеристики  $\{H(k)\}$ . Обидві послідовності зв'язані співвідношеннями

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-i(2\pi/N)nk}, \quad k = \overline{0, N-1} \text{ (ДПФ)}, \quad (4.68)$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)e^{i(2\pi/N)nk}, \quad n = \overline{0, N-1} \text{ (ОДПФ)}, \quad (4.69)$$

Крім того, відомо, що коефіцієнти ДПФ СІХ-послідовності, що дорівнюють  $H(k)$ , можна розглядати як значення  $z$ -перетворення імпульсної характеристики фільтра, які одержано в  $N$  рівновіддалених точках на одиничному колі.

$$H(k) = H(z) \Big|_{z=e^{i(2\pi/N)k}} \quad (4.70)$$

Таким чином,  $z$ -перетворення імпульсної характеристики СІХ-фільтра можна легко виразити через коефіцієнти ДПФ його імпульсної характеристики, якщо замістити (4.69) у вираз для  $z$ -перетворення:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)e^{i(2\pi/N)nk} \right] z^{-n}. \quad (4.71)$$

Якщо змінити порядок додавання та виконати додавання по  $n$ , одержимо

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ e^{i(2\pi/N)k} z^{-1} \right]^n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{N} \frac{1 - e^{i(2\pi/N)k} z^{-N}}{1 - e^{i(2\pi/N)k} z^{-1}}. \quad (4.72)$$

Оскільки  $e^{i2\pi k} = 1$ , то маємо

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{H}(k)}{1 - z^{-1}e^{i(2\pi/N)k}}. \quad (4.73)$$

Із співвідношення (4.73) випливає, що для апроксимації довільної неперервної частотної характеристики слід виконати її дискретизацію по частоті в  $N$  рівновіддалених точках на одиничному колі (взяти частотну вибірку) і знайти неперервну частотну характеристику шляхом інтерполяції відліків частотної характеристики. У цьому випадку похибка апроксимації на частотах, на яких береться вибірка, буде в точності дорівнювати нулю і мати скінченну величину в проміжних точках.

Вираз (4.73) слугує основою для побудови СІХ-фільтрів при використанні частотної вибірки. Щоб з'ясувати, чому за такої методики оптимізації часто лише декілька з  $N$  частотних відліків можуть суттєво зменшити похибку апроксимації, треба обчислити значення  $H(z)$  на одиничному колі. Інтерполяційна формула, що одержується при цьому для розрахунку частотної характеристики фільтра як функції неперервної

частоти, має вигляд ( $z = e^{i\omega}$ )

$$\begin{aligned} H(e^{i\omega}) &= \frac{1 - e^{-i\omega N}}{N} \sum \frac{\tilde{H}(k)}{1 - e^{i(2\pi/N)k} e^{-i\omega}} = \\ &= \frac{e^{-i\omega(N-1)/2}}{N} \sum \tilde{H}(k) e^{i\pi k(1-1/N)} \frac{\sin[N(\omega - (2\pi/N)k)/2]}{\sin[(\omega - (2\pi/N)k)/2]} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Звідси, частотна характеристика фільтра є лінійною комбінацією частотних функцій, що інтерполюють,

$$S(\omega, k) = e^{-i(\pi k/N)} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)} = \pm e^{-i(\pi k/N)} \frac{\sin N(\omega/2 - \pi k/N)}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)} \quad (4.75)$$

із значеннями частотних відліків  $\tilde{H}(k)$  у якості коефіцієнтів.

Таким чином, внесок кожного частотного відліку у загальну частотну характеристику є пропорційним його значенню  $\tilde{H}(k)$ , помноженому на функцію  $\sin(N\omega/2)/\sin(\omega/2)$ , яку зміщено по частоті на  $\pi k/N$ . Виявляється, що функції, які інтерполюють і зв'язані з частотними відліками із перехідної смуги, забезпечують гарне пригнічення пульсацій в прилеглих частотних смугах.

З метою зменшення похибки апроксимації частину частотних відліків слушно зробити незалежними змінними. Значення цих незалежних змінних зазвичай вираховують методами оптимізації так, щоб мінімізувати деяку просту функцію похибки апроксимації, наприклад, найбільшу похибку апроксимації. За незалежні змінні можна вибрати частотні відліки, які розташовані в перехідній смузі між двома смугами, знутри яких визначено частотну характеристику (тобто у випадку фільтра нижніх частот між смугами пропускання та непропускання).

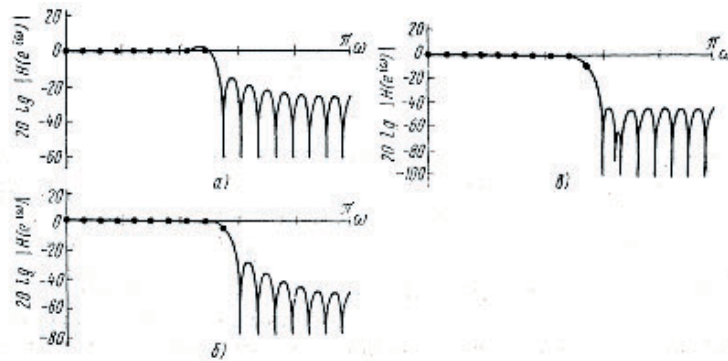


Рис. 4.7. Вплив одного відліку з перехідної смуги: а)  $H_1 = 0$ ; б)  $H_1 = 0,5$ ; в)  $H_1 = 0,3904$

З метою ілюстрації цього підходу розглянемо апроксимацію ідеального фільтра нижніх частот з частотою зрізу  $\omega_c = \pi/2$ . На рис. 4.7а наведено потрібну частотну характеристику  $H(e^{i\omega})$  та відліки  $\tilde{H}(k)$  для  $N = 33$ . Бачимо, що частотна характеристика задається відліками з частотою, що кратна  $2\pi/33$  рад, із частотою зрізу  $16\pi/33 \leq \omega_c \leq 18\pi/33$ . Фазова характеристика вибирається лінійною при затримці, що дорівнює  $(N - 1)/2$  відліків. Імпульсну характеристику можна одержати на основі оберненого дискретного перетворення Фур'є (4.69). Але при цьому виникають небажані ефекти, що зменшують мінімальне ослаблення в смузі непропускання (рис. 4.49а). Такий фільтр був би непридатним для більшості прикладень. Єдиним шляхом збільшення послаблень в смузі непропускання є розширення перехідної смуги. У даному випадку це можна здійснити, якщо взяти відлік частотної характеристики на межі між смугою пропускання та смугою непропускання зі значенням між 0 та 1. На (рис. 4.49б)

наведено частотну характеристику для  $H_1 = 0,5$ . Перехідна смуга при цьому збільшується приблизно вдвічі, але мінімальне послаблення в смузі непропускання значно збільшилось.

З (4.74) витікає, що  $H(e^{i\omega})$  являється лінійною функцією від параметрів  $\tilde{H}(k)$ . Таким чином, можна використати методи лінійної оптимізації для такого змінювання цих параметрів, щоб забезпечити найкращу апроксимацію для потрібного фільтра.

В нашому випадку можна використати простий градієнтний метод пошуку для вибору такого значення  $H_1$ , щоб максимальна похибка була мінімальною або в смузі пропускання, або в смузі непропускання. На (рис. 4.49в) показана характеристика для  $H_1 = 0,3904$  – значення, яке мінімізує похибку (максимізує послаблення) в смузі непропускання  $20\pi/33 \leq |\omega| \leq \pi$ .

Якщо виникає необхідність у ще більшому ослабленні, то можна ще розширити перехідну смугу, взявши другий відлік, що відрізняється від 0 або 1. При цьому якщо число  $N$  залишається тим же, то ширина перехідної смуги збільшується вдвічі.

Таким чином, шляхом оптимізації значень тільки тих частотних відліків, що не задано й які містяться у завчасно вибраних перехідних смугах, можна одержати фільтри з дуже гарними характеристиками.

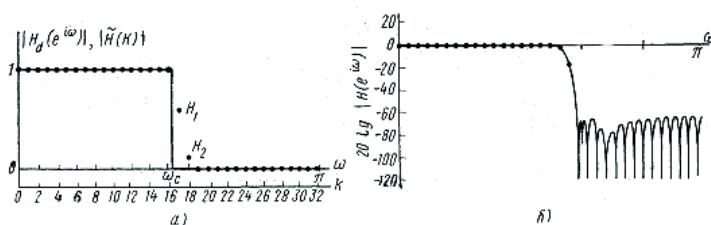


Рис. 4.8. Розрахування методом частотної вибірки при двох відліках

На рис. 4.8 наведено потрібні частотна характеристика при фіксованій загальній кількості відліків в двох точках в перехідній смузі та результуюча оптимальна частотна характеристика при двох відліках в перехідній смузі. На рис. 4.8б наведено  $20 \lg |H(e^{i\omega})|$  при  $N = 65$  та  $H_1 = \tilde{H}(17) = H(e^{i34\pi/65}) = 0,5886$ ,  $H_2 = \tilde{H}(18) = H(e^{i36\pi/65}) = 0,1065$ . Ці значення дуже близькі до оптимальних відліків перехідної смуги, що мінімізують максимальну абсолютну похибку (максимізують ослаблення) в смузі непропускання. Порівняння з рис 4.7в свідчить, що при використанні двох відліків в перехідній смузі та збільшенні  $N$  приблизно в два рази ослаблення в смузі непропускання збільшується приблизно на 24 дБ. При цьому перехідна смуга стає дещо вужчою ( $6\pi/65$  порівняно з  $8\pi/66$ ), ніж у випадку одного відліку в перехідній смузі при  $N = 33$ .

Розрахунки за методом частотної вибірки особливо ефективні у випадку вузько-смугових частотно-вибіркових фільтрів, коли лише декілька відліків частотної характеристики є ненульовими.

До недоліків цього методу слід віднести відсутність гнучкості в точному визначенні частот зрізу, оскільки розміщення одиниць, нулів та відліків в перехідній смузі обмежено цілочисловими значеннями, *кратними*  $2\pi/N$ .

Сформулюємо тепер процедуру розрахунку СІХ-фільтра по методу частотної вибірки.

1. Задано потрібну частотну характеристику  $H(e^{i\omega})$ , яка має бути одержана в результаті розрахунку за методом частотної вибірки.
2. знайти відповідну імпульсну характеристику  $h(n)$  чи то на основі рівняння (4.68), чи (4.69) де  $H(z)$  одержується з функції  $H(e^{i\theta})$ .
3. Використати підходящу функцію вікна  $w(n)$  для модифікації послідовності  $h(n)$

і одержання імпульсної характеристики  $h_D(n)$  цифрового СІХ-фільтра на основі співвідношення  $h_D(n) = h(n)w(n)$ .

Оскільки множення двох послідовностей у часі є еквівалентним згортці двох частотних характеристик в частотній області, метод зважування забезпечує згладжування викидів первісної частотної характеристики, тобто пригнічення її відхилень та пульсацій.

#### 4.5.4. Розв'язання задачі оптимізації

Для пошуку оптимальних значень частотних відліків, що не задані, треба скласти та розв'язати систему рівнянь, які математично описують задачу оптимізації.

При розрахунку фільтрів методом частотної вибірки використовуються відліки заданої частотної характеристики в  $N$  рівновіддалених точках на одиничному колі. Використовувались відліки в точках

$$f_k = \frac{k}{N}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (4.76)$$

що відповідали  $N$  частотам, для яких обчислювалось  $N$ -точкове ДПФ. Можливий й інший набір рівновіддалених частот у вигляді такої рівності:

$$f_k = \frac{k + 1/2}{N}, \quad k = \overline{0, N-1} \quad (4.77)$$

При оптимізації розташування відліків є несуттєвим, тому для обчислення коефіцієнтів фільтра можна використовувати як фільтр виду 1, так і фільтр виду 2, за умови, що для кожного з них маємо дійсну функцію  $H^*(e^{i\omega})$ .

Виразимо  $H(e^{i\omega})$  у вигляді

$$H(e^{i\omega}) = e^{-i\omega(N-1)/2} \sum_{k=0}^M H(k)S(\omega, k) = e^{-i\omega(N-1)/2} H^*(e^{i\omega}). \quad (4.78)$$

$M + 1$  дорівнює числу частотних відліків, які треба визначити.

Частотна характеристика **фільтру 1** описується виразом (4.74). Для фільтрів з лінійною фазою (з затримкою на  $(N-1)/2$  відліків) частотні відліки  $H(k)$  можна записати у вигляді

$$H(k) = |H(k)|e^{i\theta(k)}, \quad |H(k)| = |H(N-k)|, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (4.79)$$

Крім того, за парного  $N$

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N}k \left( \frac{N-1}{2} \right), & k = \overline{0, N/2-1}, \\ \frac{2\pi}{N}(N-k) \left( \frac{N-1}{2} \right), & k = \overline{N/2+1, N-1}, \quad H(N/2) = 0, \\ 0, & k = N/2. \end{cases} \quad (4.80)$$

а за непарного  $N$

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N}k \left( \frac{N-1}{2} \right), & k = \overline{0, (N-1)/2}, \\ \frac{2\pi}{N}(N-k) \left( \frac{N-1}{2} \right), & k = \overline{(N+1)/2, N-1}. \end{cases} \quad (4.81)$$

Приведемо (4.79) до вигляду

$$H(k) = \begin{cases} |H(k)|e^{-i(2\pi/N)k(N-1)/2}, & k = \overline{0, N/2-1}, \\ 0, & k = N/2, \\ |H(k)|e^{i(2\pi/N)(N-k)(N-1)/2}, & k = \overline{N/2+1, N-1}. \end{cases} \quad (4.82)$$

Замістимо цей вираз у (4.74) та виконаємо відповідні перетворення; одержимо для фільтра 1 та парного  $N$ :

$$H^*(e^{i\omega}) = e^{-i\omega(N-1)/2} \left( \frac{|H(0)| \sin(\omega N/2)}{N \sin(\omega/2)} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \frac{|H(k)|}{N} \left\{ \frac{\sin[N(\omega/2 - \pi k/N)]}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)} + \frac{\sin[N(\omega/2 + \pi k/N)]}{\sin(\omega/2 + \pi k/N)} \right\} \right). \quad (4.83)$$

Для фільтра 1 та непарного  $N$ :

$$H^*(e^{i\omega}) = \frac{|H(0)| \sin(\omega N/2)}{N \sin(\omega/2)} + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{|H(k)|}{N} \left\{ \frac{\sin[N(\omega/2 - \pi k/N)]}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)} + \frac{\sin[N(\omega/2 + \pi k/N)]}{\sin(\omega/2 + \pi k/N)} \right\}. \quad (4.84)$$

Для фільтрів виду 2 з частотною вибіркою значення частотних відліків  $H(k)$  дорівнюють

$$H(k) = h(z) \Big|_{z=e^{i(2\pi/N)(k+1/2)}}. \quad (4.85)$$

Це співвідношення можна використовувати для визначення зв'язку між частотними відліками  $H(k)$  та імпульсною характеристикою фільтра  $h(n)$ :

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-i(2\pi/N)n(k+1/2)} = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-i(2\pi/N)nk}. \quad (4.86)$$

Тобто відліки  $H(k)$  дорівнюють ДПФ послідовності

$$g(n) = h(n) e^{-i(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{i(2\pi/N)nk}. \quad (4.87)$$

Таким чином,  $g(n)$  являє собою обернене ДПФ від  $H(k)$  або

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{i(2\pi/N)(k+1/2)n}. \quad (4.88)$$

Цей вираз можна використовувати для розрахунку  $z$ -перетворення імпульсної характеристики фільтра:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{i(2\pi/N)(k+1/2)n} \right] z^{-n}. \quad (4.89)$$

Звідси, змінюючи порядок підсумовування та обчисливши суму по  $n$ , одержимо

$$H(z) = \frac{1 + z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - z^{-1} e^{i(2\pi/N)(k+1/2)}}. \quad (4.90)$$

Обчислимо значення  $H(z)$  на одиничному колі:

$$H(e^{i\omega}) = \frac{e^{-i\omega \frac{N-1}{2}}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k) e^{-i\frac{\pi}{N}(k+1/2)} \cos(\omega N/2)}{i \sin[\omega/2 - \frac{\pi}{N}(k+1/2)]}. \quad (4.91)$$

Для фільтра 2 з лінійною фазою (з затримкою на  $(N-1)/2$  відліків) частотні відліки  $H(k)$  можна записати у вигляді

$$H(k) = \begin{cases} |H(k)| e^{-i(2\pi/N)[(N-1)/2](k+1/2)}, & k = \overline{0, N/2 - 1}, \\ |H(k)| e^{i(2\pi/N)[(N-1)/2](N-k-1/2)}, & k = \overline{N/2, N-1} \end{cases} \quad (4.92)$$

для парного  $N$  та

$$H(k) = \begin{cases} |H(k)|e^{-i(2\pi/N)[(N-1)/2](k+1/2)}, & k = \overline{0, (N-3)/2}, \\ |H[(N-1)/2]|, & k = (N-1)/2, \\ |H(k)|e^{i(2\pi/N)[(N-1)/2](N-k-1/2)}, & k = \overline{(N+1)/2, N-1} \end{cases} \quad (4.93)$$

для непарного  $N$ .

$$|H(k)| = |H(N-1-k)|, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (4.94)$$

Вирази (4.91)–(4.93) можна підставити в формулу (4.90).

$$H^*(e^{i\omega}) = \sum_{k=0}^{N/2-1} \frac{|H(k)|}{N} \left( \frac{\sin[N(\omega/2 - \pi/N(k+1/2))]}{\sin[\omega/2 - \pi/N(k+1/2)]} + \frac{\sin[N(\omega/2 + \pi/N(k+1/2))]}{\sin[\omega/2 + \pi/N(k+1/2)]} \right); \quad (4.95)$$

для фільтра 2 та парного  $N$  і

$$H^*(e^{i\omega}) = \frac{|H[\frac{N-1}{2}]| \sin(\omega N/2)}{N \sin(\omega/2)} + \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \left[ \frac{|H(k)|}{N} \left( \frac{\sin[N(\omega/2 - \pi/N(k+1/2))]}{\sin[\omega/2 - \pi/N(k+1/2)]} + \frac{\sin[N(\omega/2 + \pi/N(k+1/2))]}{\sin[\omega/2 + \pi/N(k+1/2)]} \right) \right]. \quad (4.96)$$

для непарного  $N$ .

Таким чином, кожен із чотирьох формул (4.83), (4.84) та (4.95), (4.96) можна використовувати при виконанні процедури оптимізації в процесі розрахунку цифрових СІХ-фільтрів з лінійною фазою. Вибір виду фільтра з частотною вибіркою парного або непарного  $N$  виконується розробником і залежить від призначення фільтра, що проектується.

Метод частотної вибірки можна використовувати для розрахунку широкого класу фільтрів. Критерій оптимізації зазвичай полягає у мінімізації максимуму пульсацій в смузі непропускання.

Загалом при проектуванні фільтрів нижніх частот з одним відліком, що підбирається, в перехідній смузі можна досягти пригнічення поза смугою пропускання від 44 до 54 дБ. З двома відліками, що підбираються, в перехідній смузі – від 65 до 75 дБ тощо.

Смугасті фільтри можна розраховувати практично так же, як фільтри нижніх частот. У цьому випадку часткові відліки підбираються з обох боків від смуги пропускання.

**Приклад.** Розрахувати коефіцієнти двох ФНЧ з лінійною ФЧХ (рівносмугасті фільтри).  $N = 11$ ;  $N = 15$  при  $w_{\text{п}} = 0,125$ ;  $w_{\text{з}} = 0,375$ . Розрахувати ФЧХ кожного з фільтрів для п'яти рівновіддалених значень  $w$ , починаючи з  $w = 0$  для кроку  $\Delta w = 0,125$ .

Довизначимо  $B(w)$  в проміжній смузі:

$$B(w) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq w \leq w_{\text{п}}; \\ (w - w_{\text{з}})/(w_{\text{п}} - w_{\text{з}}) & \text{для } w_{\text{п}} \leq w \leq w_{\text{з}}; \\ 0 & \text{для } w_{\text{з}} \leq w \leq 0,5. \end{cases}$$

Приймаючи до уваги, що  $\varphi_l(w) = \cos l 2\pi w$ , з (4.32) одержуємо:  $c_0 = w_{\text{п}} + w_{\text{з}}$ .

$$c_l = \frac{2 \sin(l2\pi w_{\text{п}})}{k\pi} - \frac{2w_{\text{п}}(\sin(l2\pi w_{\text{з}}) - \sin(l2\pi w_{\text{п}}))}{(w_{\text{п}} - w_{\text{з}})l\pi} + \frac{1}{(w_{\text{п}} - w_{\text{з}})l\pi} \left( \frac{\cos(l2\pi w_{\text{з}}) - \cos(l2\pi w_{\text{п}})}{l\pi} + 2[w_{\text{з}} \sin(l2\pi w_{\text{з}}) - w_{\text{п}} \sin(l2\pi w_{\text{п}})] \right)$$



при  $l > 0$ .

Підставимо значення  $c_l$  при  $\mathbf{w} = [0; 0, 125; 0, 250; 0, 375; 0, 500]$  в (4.30) або (4.31). Знаходимо значення коефіцієнтів ( $b_l = b_{N-l-1}$ ).

При  $N = 11$ :

$$\mathbf{b} = [-0,0114632 \ 0 \ -0,0318422 \ 0 \ 0,286577 \ 0,50000];$$

$$A(w) = [0,98655485 \ 0,9665376 \ 0,500000 \ 0,0334722 \ 0,014514].$$

При  $N = 15$ :

$$\mathbf{b} = [0,0058486 \ 0 \ -0,0114632 \ 0 \ -0,0318422 \ 0 \ 0,286577 \ 0,50000];$$

$$A(w) = [0,9982456 \ 0,9747989 \ 0,500000 \ 0,0252012 \ 0,0017544].$$

#### 4.5.5. Метод найменших квадратів

Цей метод точно відповідає критерію (4.26) – для заданих значень  $\alpha_1, \alpha_2$  і функціях  $q(w), \Phi(w, \mathbf{c})$  та  $B(w)$  треба визначити вектор  $\mathbf{c}$ , що мінімізує функцію мети

$$G(\mathbf{c}) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(w)[B(w) - \Phi(w, \mathbf{c})]^2 dw. \quad (4.97)$$

Необхідні та достатні умови мінімуму (4.97) мають вигляд

$$\frac{\partial G(\mathbf{c})}{\partial c_m} = 0; \quad m = \overline{0, K} \quad (4.98)$$

і з урахуванням (4.24) зводяться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{l=0}^K d_{m,l} c_l = d_{m,K+1}, \quad (4.99)$$

де

$$d_{m,l} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(w) \varphi_m(w) \varphi_l(w) dw, \quad l = \overline{0, K}; \quad (4.100)$$

$$d_{m,K+1} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q(w) B(w) \varphi_m(w) dw. \quad (4.101)$$

**Приклад.** Нехай  $\alpha_1 = 0; \alpha_2 = 0,5$ .

$$B(w) = \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq w \leq w_\pi; \\ 0 & \text{для } w_3 \leq w \leq 0,5. \end{cases}$$

$$q(w) = \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq w \leq w_\pi; \\ 0 & \text{для } w_\pi \leq w \leq w_3; \\ g & \text{для } w_3 \leq w \leq 0,5. \end{cases}$$

$$\Phi(w, \mathbf{c}) = \sum_{l=0}^K c_l \cos l2\pi w.$$

для  $g = \text{const}$ . Тоді маємо

$$d_{m,K+1} = \begin{cases} w_\pi & \text{для } m = 0; \\ \sin(m2\pi w_\pi)/(2m\pi) & \text{для } m \neq 0; \end{cases}$$

$$d_{m,l} = \begin{cases} w_\pi + g/2 - gw_3 & \text{для } m = l = 0; \\ \frac{1}{2} \left[ w_\pi + \frac{g}{2} - gw_3 + \frac{\sin(m+l)4\pi w_\pi}{4(m+l)\pi} - g \frac{\sin(m+l)4\pi w_3}{4(m+l)\pi} \right] & \text{для } m = l \neq 0; \\ \frac{\sin(m \pm l)2\pi w_\pi}{4(m \pm l)\pi} - g \frac{\sin(m \pm l)2\pi w_3}{4(m \pm l)\pi} & \text{для } m \neq l. \end{cases}$$

Для  $w_n = 0,125$  та  $w_s = 0,375$ ,  $g = 1$  обчислити коефіцієнти рівносмугастих ФНЧ для  $N = 11$ ,  $N = 15$  та значення АЧХ для рівновіддалених значень  $w$  з кроком  $\Delta w = 0,125$ .

Обчисливши інтеграли (4.100), (4.101) та розв'язавши систему лінійних алгебраїчних рівнянь (4.99), знаходимо  $c_l$ . Потім згідно наближеній рівності (4.40) обчислюємо  $B_l$  та  $A(w)$ . Для  $N = 11$ :

$$\mathbf{b} = [0,0118786 \quad -0,0000003 \quad -0,0621937 \quad 0,0000008 \quad 0,3007862 \quad 0,50000];$$

$$A(w) = [1,0009418 \quad 0,996532 \quad 0,4999968 \quad 0,0034674 \quad 0,0009420].$$

Для  $N = 15$ :

$$\mathbf{b} = [-0,00339 \quad 0,000002 \quad 0,01973 \quad -0,000007 \quad -0,071328 \quad 0,000014 \quad 0,30492 \quad 0,49998];$$

$$A(w) = [0,9998589 \quad 0,9993988 \quad 0,4999387 \quad 0,0005983 \quad 0,0001417].$$

Видно, що похибка апроксимації є суттєво меншою, ніж похибка апроксимації за методом розкладання в ряд Фур'є.

#### 4.5.6. Апроксимація із рівновеликими пульсаціями

При розрахунку фільтрів за методом частотної вибірки похибка апроксимації має тенденцію бути найбільшою біля перехідної смуги та мати меншу величину в областях, що віддалені від тієї, в якій розташовано відліки перехідної смуги. Видається слушним, що якщо похибка апроксимації буде розподілена рівномірно по частоті, то вимоги, що задано при проектуванні, мають задовольнятися для фільтра більш низького порядку, ніж у випадку, якщо апроксимація задовольняє вимогам тільки на одній частоті і значно перевищує їх на решті частот.

Будемо розглядати СІХ-фільтри з нульовою фазою та частотними характеристиками вигляду

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-i\omega n}.$$

Довжина імпульсної характеристики дорівнює  $N + 2M + 1$ . Для нульової фазової характеристики  $h(n) = h(-n)$ . Завдяки умові симетрії  $h(n)$  можна записати

$$H(e^{i\omega}) = h(0) + \sum_{n=1}^M 2h(n) \cos(\omega n). \quad (4.102)$$

Звідси витікає, що  $H(e^{i\omega})$  являється дійсною. Припустимо, що нам необхідно розрахувати фільтр нижніх частот у відповідності зі схемою допусків на похибки апроксимації рис. 4.9а, тобто апроксимувати частотну характеристику, яка має значення 1 в смузі частот  $0 \leq |\omega| \leq \omega_c$  з максимальною похибкою  $\delta_1$  і апроксимувати її нульове значення в діапазоні частот  $\omega_s \leq |\omega| \leq \pi$  з максимальною похибкою  $\delta_2$ . Задача апроксимації полягає у визначенні параметрів  $M$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\omega_c$  та  $\omega_s$ .

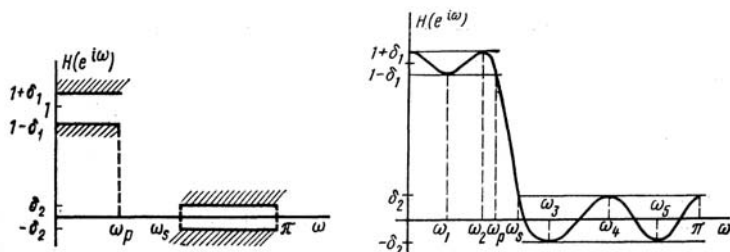


Рис. 4.9. Апроксимація з рівновеликими пульсаціями ФНЧ

Важливим параметром апроксимації з рівновеликими пульсаціями є низка локальних максимумів та мінімумів в смузі частот  $0 \leq \omega \leq \pi$ . При дослідженні залежності

цього параметру від довжини імпульсної характеристики враховується той факт, що  $\cos \omega k$  можна виразити у вигляді суми степенів  $\cos \omega$ . При цьому

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{k=0}^M a_k (\cos \omega)^k, \quad (4.103)$$

де  $a_k$  – сталі, що зв'язані зі значеннями імпульсної характеристики. На інтервалі  $0 < \omega < \pi$  може існувати не більше  $M - 1$  локальних мінімумів та максимумів. Якщо продиференціювати (4.103) по  $\omega$ , то одержимо:

$$H'(e^{i\omega}) = -\sin \omega \left( \sum_{k=0}^M k a_k (\cos \omega)^{k-1} \right), \quad (4.104)$$

Звідси бачимо, що  $H(e^{i\omega})$  буде мати або максимум, або мінімум в точках  $\omega = 0$  та  $\omega = \pi$ . Таким чином, будемо мати не більше  $M + 1$  локальних екстремумів в  $0 \leq \omega \leq \pi$ . Згідно рис. 4.9b  $\delta_1, \delta_2$  та  $M$  являються фіксованими, а  $H(e^{i\omega_c}) = 1 - \delta_1$ ,  $H(e^{i\omega_s}) = \delta_2$ . Для апроксимації можна записати:

$$\begin{aligned} H(e^{i0}) &= 1 + \delta_1; & H(e^{i\pi}) &= \delta_2; \\ H(e^{i\omega_1}) &= 1 - \delta_1; & H'(e^{i\omega_1}) &= 0; \\ H(e^{i\omega_2}) &= 1 + \delta_1; & H'(e^{i\omega_2}) &= 0; \\ H(e^{i\omega_3}) &= -\delta_2; & H'(e^{i\omega_3}) &= 0; \\ H(e^{i\omega_4}) &= \delta_2; & H'(e^{i\omega_4}) &= 0; \\ H(e^{i\omega_5}) &= -\delta_2; & H'(e^{i\omega_5}) &= 0. \end{aligned}$$

У такому випадку існують три екстремуми в смузі пропускання та чотири екстремуми в смузі непропускання, тобто маємо  $M + 1 = 4 + 3 = 7$  ( $N = 2M + 1 = 13$ ) невідомих коефіцієнтів та п'ять невідомих частот, на яких є екстремуми, утворюючи разом 12 невідомих, які мають бути визначені у якості розв'язку для системи наведених 12 рівнянь.

Загалом можна мати  $N_c$  екстремумів в смузі пропускання та  $N_s$  екстремумів в смузі непропускання, де  $N_c + N_s = M + 1$ , і можна записати  $2M$  рівнянь, які зв'язані з  $M + 1$  коефіцієнтами фільтра та  $M - 1$  частот, на яких існують ці екстремуми. Ці рівняння є нелінійними і можуть розв'язуватись за допомогою ітераційної процедури.

Замість того, щоб записувати і розв'язувати систему нелінійних рівнянь, можна використати ітераційний метод для одержання тригонометричного полінома, що має у наявності екстремум потрібної величини. Процедура починається з вибору  $N_c$  та  $N_s$ , а потім оцінюються частоти, на яких існують екстремуми. Після цього використовуються стандартні методи інтерполяції для обчислення полінома, який забезпечує задані екстремальні значення ( $1 \pm \delta_1$  в смузі пропускання та  $\pm \delta_2$  в смузі непропускання на частотах, що оцінюються). Якщо значення максимуму та мінімуму задано, то процедура завершується, інакше обчислюється новий поліном і знову оцінюються екстремальні частоти.

#### 4.5.7. Метод найкращої рівномірної (чебишовської) апроксимації

Нехай задано: клас  $\Gamma$  функцій  $\Phi_K(w, \mathbf{c}) = \sum_{l=0}^K c_l \varphi_l(w)$ , функція  $B(w)$ , що апроксимується, функція ваги  $q(w)$  та замкнений інтервал  $[\alpha_1, \alpha_2]$ . Тоді функцією найкращого рівномірного (чебишовського) наближення в класі  $\Gamma$  називають функцію  $\Phi_K(w, \mathbf{c})$  з такими значеннями коефіцієнтів  $c_l$ , які відповідають мінімальному значенню

$$\varepsilon(\mathbf{c}) = \max |\Delta(w, \mathbf{c})|, \quad \alpha_1 \leq w \leq \alpha_2, \quad (4.105)$$

де  $\Delta(w, \mathbf{c}) = q(w)[B(w) - \Phi_K(w, \mathbf{c})]$ ,  $\varepsilon(\mathbf{c})$  – максимальна похибка апроксимації на  $[\alpha_1, \alpha_2]$  для визначеного набору значень коефіцієнтів апроксимуючої функції.

Функція найкращого рівномірного наближення точно відповідає критерію (4.27). Узагальнена теорема Чебишова встановлює ознаку, яка відокремлює функцію найкращого рівномірного наближення з проміж усіх функцій даного класу:

для того, щоб функція  $\Phi_K(w, \mathbf{c})$  була функцією найкращого рівномірного наближення до функції  $B(w)$  з функцією ваги  $q(w)$ , необхідно та достатньо, щоб функція  $\Delta(w, \mathbf{c})$  приймала найбільші значення, що дорівнюють одне одному за абсолютною величиною та по черзі змінюють знак в  $K+2$  послідовно розташованих точках (точках альтернансу)  $w_1, w_2, \dots, w_{K+2}$  інтервалу  $[\alpha_1, \alpha_2]$ , тобто

$$\Delta(w_1, \mathbf{c}) = -\Delta(w_2, \mathbf{c}) = \dots = (-1)^{K+1} \Delta(w_{K+2}, \mathbf{c}); \quad (4.106)$$

$$\alpha_1 \leq w_1 < w_2 < \dots < w_{K+2} \leq \alpha_2;$$

$$|\Delta(w_j, \mathbf{c})| \geq |\Delta(w, \mathbf{c})|, \quad j = \overline{1, K+2}.$$

Останнє співвідношення є істинним за будь-якого значення  $w$ , яке належить інтервалу  $[\alpha_1, \alpha_2]$ .

Як правило, аналітично функцію найкращого рівномірного наближення визначити неможливо. Одним з найбільш ефективних методів чисельного визначення функцій чебишовського наближення є алгоритм Ремеза. Сутність алгоритму, що реалізується на ЕОМ, полягає у послідовній модифікації коефіцієнтів апроксимуючої функції доти, доки із заданою точністю не виконаються умови узагальненої теореми Чебишова, тобто одержаться чебишовське наближення.

Теорема про чебишовський альтернанс стверджує, що у випадку оптимального розв'язку похибка має не менше за  $N+1$  екстремумів. Нехай множина  $\{w_k\}$ ,  $k = \overline{0, N}$  таких екстремумів в області апроксимації є такою, що можна записати такі  $N+1$  співвідношень

$$\hat{q}(w_k)[\hat{B}(w_k) - \Phi_K(w_k, \mathbf{c})] = (-1)^k \delta. \quad (4.107)$$

Це – система  $N+1$  лінійних рівнянь з  $N$  невідомими коефіцієнтами апроксимуючої функції та однією змінною, яка являє собою похибку апроксимації  $\delta$ . Ця система має єдиний розв'язок, оскільки матриця коефіцієнтів системи рівнянь є обратимою, що є наслідком того, що базисні функції задовольняють умову Хаара.

Сутність алгоритму Ремеза можна сформулювати таким чином.

Вибирають  $N+1$  значень  $w_k$  і розв'язують систему рівнянь (4.107). Після визначення коефіцієнтів  $c_l$  та похибки  $\delta$ , одержують тригонометричний поліном по косинусам, який в точках  $w_k$  відрізняється від функції мети на величину  $\delta$ .

Аналізують похибку  $\Delta(e^i w)$ . Якщо  $\Delta(e^i w) \leq \delta$  в усій області апроксимації, то розв'язок є оптимальним. Якщо ж в деяких точках  $\Delta(e^i w) \geq \delta$ , то вибирають нову множину екстремальних частот шляхом розглядання  $N+1$  точок, в яких похибка апроксимації є максимальною і по черзі змінює знак. Початкову множину можна вибирати довільно. В описаній процедурі похибка  $\delta$  на кожному кроці збільшується і збігається до своєї верхньої грані, яка й є розв'язком задачі.

В дійсності нема потреби у вирішенні на кожному кроці ітераційного процесу системи лінійних рівнянь, досить оцінити  $\delta$  за допомогою формули

$$\delta = \frac{\sum_{k=0}^N a_k \hat{B}(w_k)}{\sum_{k=0}^N (-1)^k a_k / \hat{q}(w_k)}, \quad (4.108)$$

де

$$a_k = \prod_{l=0}^N \frac{1}{\cos w_k - \cos w_l}; \quad l \neq k.$$

Замістивши цю формулу в (4.107), одержуємо

$$\Phi(w, \mathbf{c}) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} [\beta_k / (\cos w - \cos w_k)] \Phi(w_k, \mathbf{c})}{\sum_{k=0}^{N-1} [\beta_k / (\cos w - \cos w_k)]}, \quad (4.109)$$

де

$$\beta_k = \prod_{l=0}^{N-1} [1 / (\cos w - \cos w_l)]; \quad l \neq k.$$

#### 4.5.8. Вирішення задачі чебишовської апроксимації для фільтра з лінійною ФЧХ

Нехай треба визначити коефіцієнти ФНЧ з лінійною ФЧХ мінімального порядку  $N = N_{\min}$ , АЧХ якого задовольняє умову типу (4.24). Для того, щоб зменшити обсяг обчислень, можна орієнтовно визначити значення  $N = N_{\min}$  за такою емпіричною формулою, яка справджується для ФНЧ:

$$N_1 = \frac{D_1(\varepsilon_{\Pi}, \varepsilon_3)}{w_3 - w_{\Pi}} - D_2(\varepsilon_{\Pi}, \varepsilon_3)(w_3 - w_{\Pi}) + 1, \quad (4.110)$$

де

$$\begin{aligned} D_1(\varepsilon_{\Pi}, \varepsilon_3) &= [0,00531(\lg \varepsilon_{\Pi})^2 + 0,07114 \lg \varepsilon_{\Pi} - 0,4761] \lg \varepsilon_{\Pi} - \\ &\quad - [0,00266(\lg \varepsilon_{\Pi})^2 + 0,5941 \lg \varepsilon_{\Pi} + 0,4278]; \\ D_2(\varepsilon_{\Pi}, \varepsilon_3) &= 11,01217 + 0,51244(\lg \varepsilon_{\Pi} - \lg \varepsilon_3). \end{aligned}$$

$\varepsilon_{\Pi}, \varepsilon_3$  – максимально допустимі відхилення АЧХ від функції  $B(w)$ , що апроксимується, відповідно у смугах пропускання та затримування.

Вочевидь, що фільтру найменшого порядку ( $N \approx N_{\min}$  (оптимальному фільтру) відповідає оптимальна функція  $\Phi^{(0)}(w, \mathbf{c})$ . Для того, щоб визначити функцію  $\Phi^{(0)}(w, \mathbf{c})$ , треба побудувати декілька функцій найкращого рівномірного наближення до функції  $B(w)$  з вагою, що визначається (4.28), різних порядків, починаючи з  $K = K_{\Pi} = (N_1 - 1)/2$  для непарних  $N_1$  або  $K = K_{\Pi} = (N_1 - 2)/2$  для парних  $N_1$ .

Якщо при  $K = K_{\Pi}$  умови (4.28) не виконуються бодай для однієї функції, необхідно збільшити  $K$ . Якщо ж (4.28) виконується, треба зменшити  $K$ . Процес обчислень завершується тоді, коли  $\Phi_K(w, \mathbf{c})$  задовольняє (4.28), а  $\Phi_{K-1}(w, \mathbf{c})$  (або  $\Phi_{K-2}(w, \mathbf{c})$  для рівносмугастих фільтрів) не задовольняє. Потім  $\Phi^{(0)}(w, \mathbf{c}) = \Phi_K(w, \mathbf{c})$ .

**Приклад.** Нехай  $w_{\Pi} = 0.125$ ;  $w_3 = 0.375$ ;  $\varepsilon_{\Pi}, \varepsilon_3 = 0,3 \cdot 10^{-3}$ . Тоді із (4.110)  $N_1 = 14$ . Для рівносмугастих фільтрів маємо  $K = K_{\Pi} = 8$ .

За допомогою алгоритму Ремеза будемо функції найкращого рівномірного наближення  $\Phi_8(w, \mathbf{c})$  та  $\Phi_6(w, \mathbf{c})$ , які апроксимують функцію

$$B(w) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq w \leq 0,125; \\ 0 & \text{при } 0,375 \leq w \leq 0,5. \end{cases}$$

з ваговою функцією

$$q(w) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq w \leq 0,125; \\ 0 & \text{при } 0,375 \leq w \leq 0,5. \end{cases}$$

Покладемо  $R = \varepsilon_3 = 0,3 \cdot 10^{-3}$ .

Вимоги до АЧХ для  $K = 8$  виконуються:  $|1 - \Phi_8(w, \mathbf{c})| \leq 0,3 \cdot 10^{-3}$  при  $0 \leq w \leq 0,125$  та  $|\Phi_8(w, \mathbf{c})| \leq 0,3 \cdot 10^{-3}$  при  $0,375 \leq w \leq 0,5$ . Для  $K = 6$  ці вимоги не виконуються. То ж,  $N = 15$ .

Для коефіцієнтів  $b_l = b_{N-l-1}$  передаточної функції  $H(z)$  ФНЧ одержано такі значення:

$$\mathbf{b} = [-0,00374 \quad 0 \quad 0,02057 \quad 0 \quad -0,07232 \quad 0 \quad 0,30537 \quad 0,500].$$

Максимальне значення похибки апроксимації

$$\varepsilon_{\text{м.п}} = \varepsilon_{\text{м.з}} = \max |B(w) - \Phi(w, \mathbf{c})| \quad (4.111)$$

при  $0 \leq w \leq w_{\text{п}}$  та  $w_{\text{з}} \leq w \leq 0,5$ .

#### 4.5.9. Вирішення задачі чебишовської апроксимації для мінімально-фазового фільтра

Нехай треба побудувати мінімально-фазовий ФНЧ мінімального порядку  $N$  за заданою АЧХ, причому задано умови типу (4.27):

$$\left. \begin{aligned} |1 - A(w)| &\leq \varepsilon_{\text{п1}} \text{ при } 0 \leq w \leq w_{\text{п}}; \\ |A(w)| &\leq \varepsilon_{\text{з1}} \text{ при } w_{\text{з}} \leq w \leq 0,5. \end{aligned} \right\} \quad (4.112)$$

Точний алгоритм розв'язання полягає у такому.

1. Необхідно побудувати оптимальну функцію  $\Phi^{(0)}(w, \mathbf{c})$ , яка задовольняє співвідношенням:

$$\left. \begin{aligned} |1 + \varepsilon_{\text{п1}}^2 - \varepsilon_{\text{з1}}^2/2 - \Phi_K(w, \mathbf{c})| &\leq 2\varepsilon_{\text{п1}} \text{ при } 0 \leq w \leq w_{\text{г.п.}}; \\ |\Phi_K(w, \mathbf{c})| &\leq \varepsilon_{\text{з1}}^2/2 \text{ при } w_{\text{з}} \leq w \leq 0,5, \end{aligned} \right\}$$

де  $\Phi_K(w, \mathbf{c}) = \sum_{l=0}^K c_l \cos 2\pi w$ .

Кожна функція послідовності, яку слід побудувати для визначення  $\Phi^{(0)}(w, \mathbf{c})$ , будується як функція найкращого рівномірного наближення до функції, що апроксимується,

$$B(w) = \begin{cases} 1 + \varepsilon_{\text{п1}}^2 - \varepsilon_{\text{з1}}^2/2 & \text{при } 0 \leq w \leq w_{\text{п}}; \\ 0 & \text{при } w_{\text{з}} \leq w \leq 0,5 \end{cases} \quad (4.113)$$

з ваговою функцією

$$q(w) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq w \leq w_{\text{п}}; \\ 4\varepsilon_{\text{п1}}/\varepsilon_{\text{з1}}^2 & \text{при } w_{\text{з}} \leq w \leq 0,5 \end{cases} \quad (4.114)$$

Орієнтовну оцінку величини початкового порядку  $K_{\text{п}}$  функції  $\Phi_K(w, \mathbf{c})$  можна одержати за допомогою (4.110), причому  $K_{\text{п}} = (N_1 - 1)/2$  та

$$\varepsilon_{\text{п}} = 2\varepsilon_{\text{п1}}; \quad \varepsilon_{\text{з}} = \varepsilon_{\text{з1}}^2.$$

2. Будується функція  $\hat{\Phi}(w, \mathbf{c}) = \Phi^{(0)}(w, \mathbf{c}) + M + \varepsilon_m$ , яка не містить дійсних коренів. Величина  $M = \max |\Phi(w, \mathbf{c})|$  при  $w_{\text{з}} \leq w \leq 0,5$ ;  $\varepsilon_M = (10^{-2} \dots 10^{-3})M$ .
3. За коефіцієнтами функції  $\hat{\Phi}(w, \mathbf{c})$  будується функція  $H'(z) = \sum_{l=0}^{2K} b_l' z^{-l}$ .
4. Обчислюються корені цієї функції.
5. Будується функція  $H''(z) = \sum_{l=0}^{K-1} b_l'' z^{-l} + z^{-K}$ , корені якої співпадають із коренями функції  $H'(z) = \sum_{l=0}^{2K} b_l' z^{-l}$ , які містяться всередині та на одиничному колі.

6. Будується передаточна функція вихідного мінімально-фазового фільтра

$$H(z) = b_K H''(z) = \sum_{l=0}^K b_l z^{-l}, \quad b_l = b_l'' b_K. \quad (4.115)$$

Коефіцієнт  $b_K$  визначається за умови

$$|H(e^{i\omega T})| = \sqrt{|H'(e^{i\omega T})|},$$

що еквівалентна рівності

$$\sum_{l=0}^K b_l = \sqrt{\sum_{l=0}^{2K} b_l'}.$$

З останньої рівності і виразів для  $H''(z)$  та  $H(z)$  випливає, що

$$b_K = \frac{\sqrt{\sum_{l=0}^{2K} b_l'}}{\sum_{l=0}^K b_l'' + 1}.$$

*Приклад.* Нехай треба побудувати мінімально-фазовий ФНЧ найменшого порядку  $N$ , АЧХ якого задовольняє (4.112) при  $w_{\text{п}} = 0, 125$ ;  $w_{\text{з}} = 0, 375$ ;  $\varepsilon_{\text{п1}} = 0, 02$  і  $\varepsilon_{\text{з1}} = 0, 0003$ . За формулами (4.115) знаходимо:  $\varepsilon_{\text{п}} = 0, 04$ ;  $\varepsilon_{\text{з}} = 0, 45 \cdot 10^{-7}$ . За формулою (4.110) визначаємо  $K_{\text{п}} = 6$ . За формулою (4.113) визначаємо функцію, що апроксимує:

$$B(w) = \begin{cases} 1 + 0, 399995 \cdot 10^{-3} \approx 1 & \text{при } 0 \leq w \leq 0, 125, \\ 0 & \text{при } 0, 375 \leq w \leq 0, 5. \end{cases}$$

За формулою (4.114) визначаємо вагову функцію

$$q(w) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq w \leq 0, 125, \\ 888889 & \text{при } 0, 375 \leq w \leq 0, 5. \end{cases}$$

За допомогою алгоритму Ремеза визначається  $\Phi^{(0)}(w, \mathbf{c})$ . Для цього побудуємо функції  $\Phi_6(w, \mathbf{c})$ ,  $\Phi_7(w, \mathbf{c})$ ,  $\Phi_8(w, \mathbf{c})$  та  $\Phi_9(w, \mathbf{c})$ . Потім визначаємо максимальні похибки апроксимації. Із урахуванням цих максимальних похибок покладаємо  $\Phi^{(0)}(w, \mathbf{c}) = \Phi_9(w, \mathbf{c})$  та  $\hat{\Phi}^{(0)}(w, \mathbf{c}) = \Phi^{(0)}(w, \mathbf{c}) + \varepsilon_{\text{м.з}}$ . За коефіцієнтами  $\hat{\Phi}^{(0)}(w, \mathbf{c})$  будуються функції  $H'(z) = \sum_{l=0}^{18} b_l' z^{-l}$  та  $H(z) = \sum_{l=0}^{18} b_l z^{-l}$ .

#### 4.5.10. Порівняння можливостей фільтрів з лінійною ФЧХ та мінімально-фазових фільтрів

Якщо вимоги пред'являються тільки до АЧХ фільтра і фільтр не може бути рівносмугастим, то слушно використовувати мінімально-фазовий фільтр, оскільки його краще реалізувати. За однакових вимог до АЧХ значення  $L_{\text{п}}$  та  $V_{\text{у}}$  виявляються приблизно однаковими, а  $L_0$  та  $V_c$  – приблизно вдвічі меншими для мінімально-фазових фільтрів.

Якщо фільтр може бути рівносмугастим, то при виборі мінімально-фазового фільтра або рівносмугастого фільтра із лінійною ФЧХ необхідно мати на увазі, що за однакових вимог до АЧХ значення  $L_{\text{п}}$  та  $V_{\text{у}}$  для рівносмугастого фільтра виявляються приблизно вдвічі меншими,  $V_c$  – приблизно однакові, а  $L_0$  – приблизно вдвічі меншими для мінімально-фазового фільтра.

#### 4.5.11. Порівняння методів вирішення апроксимаційних задач

Метод розкладання в ряд Фур'є функції, що апроксимується, має такі переваги:

а) він є самим простим порівняно з іншими методами, оскільки його реалізація при визначеному  $N$  потребує найменшого обсягу обчислень;

б) якщо за деякого  $N$  точність апроксимації виявляється недостатньою, то можна збільшити порядок фільтру, обчисливши тільки додаткові коефіцієнти, а коефіцієнти, які вже були обчислені, тільки змінюють свої номери;

в) це єдиний метод, який дозволяє одержати аналітичні вирази (формули) для коефіцієнтів фільтру.

Основний недолік методу полягає у тому, що точність апроксимації виявляється низькою. Із порівняння наведених вище даних видно, що при одних і тих же значеннях  $N$  максимальна похибка апроксимації в смугах пропускання та затримування виявляється приблизно в 40 раз більшою, ніж для методу найменших квадратів, і приблизно в 100 раз більшою, ніж для методу найкращої рівномірної апроксимації.

Метод розкладання функції, що апроксимується, в ряд Фур'є слушно використовувати тоді, коли порядок фільтру, що проектується, настільки великий, що нема можливості застосувати інші методи апроксимації.

Основна перевага методу найменших квадратів порівняно з іншими методами полягає у можливості врахування додаткові обмеження на коефіцієнти фільтру, що мають характер лінійних нерівностей або рівностей, а також у можливості побудови складної функції мети, мінімум якої відповідає шуканому розв'язку. По точності апроксимації метод займає проміжне становище між методами розкладання функції, що апроксимується, в ряд Фур'є та найкращої рівномірної апроксимації.

Метод найменших квадратів потребує значного обсягу обчислень, оскільки для вирішення задачі необхідно визначати коефіцієнти та праві частини системи лінійних алгебраїчних рівнянь і розв'язувати цю систему. Метод слушно використовувати у таких випадках:

коли необхідно враховувати додаткові обмеження на коефіцієнти фільтру або побудувати складну функцію мети;

коли мінімізація функції  $G(c)$  відповідає фізичному змісту задачі.

Метод найкращого рівномірного (чебишовського) наближення реалізується, як правило, у вигляді алгоритму Ремеза. Він дозволяє:

розрахувати фільтр заданого порядку  $N$ , для якого максимальна абсолютна похибка апроксимації в смугах пропускання та затримування буде мінімальною;

за заданою абсолютною похибкою апроксимації в смугах пропускання та затримування розрахувати фільтр найменшого порядку  $N_{\min}$ , АЧХ якого задовольняє визначеним вимогам;

точно задати відношення між абсолютними похибками апроксимації в різних смугах за допомогою вагової функції.



---

## Рекурсивні фільтри

---

Рекурсивним цифровим фільтрам (РЦФ) порівняно з аналоговими прототипами властива низка важливих переваг. Перш за все це висока стабільність і точність, простота змінювання характеристик (наприклад, ширини смуги пропускання і коефіцієнту передачі).

На відміну від СІХ-фільтрів стійкі НІХ-фільтри, що є фізично реалізуємі, не мають строго лінійної фазової характеристики (за винятком окремого випадку, коли всі полюси  $H(z)$  розташовано на одиничному колі). У зв'язку з цим при розрахунку НІХ-фільтрів завжди доводиться розглядати апроксимацію заданих як амплітудної, так і фазової характеристик.

### 5.1. Властивості рекурсивних фільтрів

1. **Скінченно-різницеве рівняння** є одна із основних моделей рекурсивного цифрового фільтру, який при формуванні поточного значення вихідного сигналу використовує не тільки поточні і попередні значення вхідного сигналу, а й попередні значення вихідного сигналу, що відповідає рівнянню:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N-1} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^{N-1} a_k y_{n-k}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

Тут  $\{x(n)\}, \{y(n)\}$  – вибірки вхідної та вихідної послідовностей,  $a_j, b_k, k = \overline{0, M-1}, j = \overline{1, N-1}$  – сталі коефіцієнти фільтра,  $M, N$  – цілі числа, максимальне з яких визначає *порядок* цифрового фільтра. Як видно з (5.4),  $n$ -й відлік вихідної послідовності  $y_n$  визначається  $M$  відліками вхідної послідовності  $\{x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-M+1}\}$  та  $N-1$  попередніми відліками самої вихідної послідовності  $\{y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-N+1}\}$ .

Різницеве рекурсивне рівняння (5.4) структурно визначає цифровий фільтр зі зворотнім зв'язком між виходом і входом, що забезпечує більш високу збіжність ніж у нерекурсивного фільтра при одному й тому ж порядку  $M$ .

Скінченно-різницеве рівняння вигляду (5.4) описує алгоритм обчислення вихідної послідовності  $\{y(n)\}$  рекурсивного фільтру. Ці обчислення можна однозначно виконати лише у випадку, коли будуть визначені (задані) *початкові умови*  $\{y(-N+1) = y_{-N+1}, y(-N) = y_{-N}, \dots, y(-2) = y_{-2}, y(-1) = y_{-1}\}$ .

2. **Імпульсна характеристика**, як відомо, визначається згідно рівнянню (5.4) значеннями вихідного сигналу при подачі на його вхід одиничного імпульсу

$$u(n) = u_n = \begin{cases} 1, & \text{за } n = 0, \\ 0, & \text{за } n \neq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

за нульових початкових умов. Обчислення шуканої характеристики виконується таким

чином. Нехай рекурсивний цифровий фільтр описується різницеvim рівнянням

$$y_n = x_n - a_1 y_{n-1}. \quad (5.3)$$

Оскільки імпульсна характеристика (ІХ) – це реакція системи (5.3) на одиничний імпульс  $u_n$  за нульових початкових умов, треба покласти  $x_n = u_n$ ,  $y(-1) = y_{-1} = 0$ . Обчислення відліків вихідного сигналу  $y_n = h_n$  наведені у табл. 5.1. Для значення  $a_1 = 0,8$  результати ілюструються рис. 5.1.

Табл. 5.1. Визначення ІХ рекурсивного фільтра

$n$	$x_n$	Рівняння	$y_n$
0	1	$y_0 = x_0 - a_1 y_{-1} = 1 - a_1 \cdot 0$	1
1	0	$y_1 = x_1 - a_1 y_0 = 0 - a_1 \cdot 1$	$-a_1$
2	0	$y_2 = x_2 - a_1 y_1 = 0 - a_1 \cdot (-a_1)$	$(-a_1)^2$
3	0	$y_3 = x_3 - a_1 y_2 = 0 - a_1 \cdot (-a_1)^2$	$(-a_1)^3$
·	·	·	·
n	0	$y_n = x_n - a_1 y_{n-1} = 0 - a_1 \cdot (-a_1)^{n-1}$	$(-a_1)^n$

Коли  $0 \leq a_1 \leq 1$ , значення виходу (тобто ІХ) асимптотично наближається до нуля.

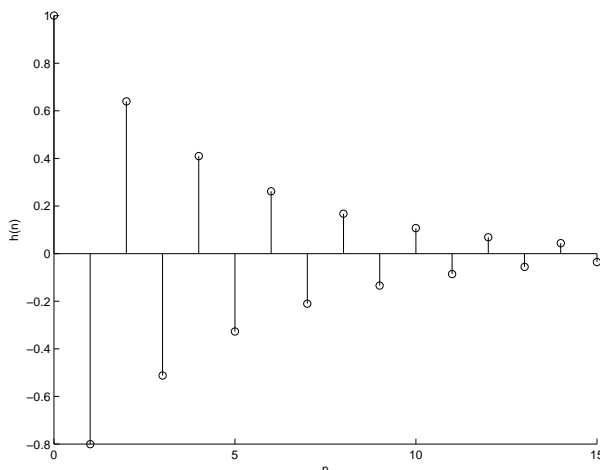


Рис. 5.1. Імпульсна характеристика рекурсивного фільтра (5.3)

Бачимо, що імпульсна характеристика фільтра (5.3) є нескінченний ряд за степенями  $h_n = (-a_1)^n$ . Якщо  $|a_1| < 1$ , така характеристика за  $n \rightarrow \infty$  асимптотично наближається до нуля. Це обумовило іншу назву рекурсивних фільтрів, а саме – *фільтрів із нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ-фільтрів)*.

Загальна форма запису  $z$ -перетворення імпульсної характеристики НІХ-фільтрів має вигляд

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}. \quad (5.4)$$

Фільтри із передаточною характеристикою виду (5.4) містять скінченну кількість нулів ( $M$ ) та полюсів ( $N$ ).

**3. Передаточна функція.** Виходячи з визначення передаточної функції цифрової системи як відношення  $Z$ -перетворення вихідного сигналу і вхідного сигналу за

нульових початкових умов і застосовуючи  $Z$ -перетворення до обох частин різницевого рівняння (5.4), отримуємо вираз для передаточної функції  $H(z)$  у вигляді

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N-1} a_i z^{-i}} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (5.5)$$

Передаточні функції є основним апаратом під час аналізу та структурного перетворення фільтрів.

Важливу роль у цифрових системах обробки сигналів відіграють фільтри першого та другого порядків, що обумовлює необхідність їхнього окремого розглядання.

*Базовий рекурсивний фільтр першого порядку.*

Базовим рекурсивним фільтром першого порядку називають фільтр, що описують різницевою рівнянням

$$y(n) = x(n) - a_1 y(n-1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

Використовуючи  $Z$ -перетворення до лівої та правої частин рівняння (5.6), отримаємо

$$Y(z) = X(z) - a_1 z^{-1} Y(z),$$

звідки

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}}.$$

*Рекурсивний фільтр першого порядку.*

Різницева рівняння має вигляд

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) - a_1 z^{-1} Y(z),$$

звідки

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}.$$

*Базовий рекурсивний фільтр другого порядку.*

Різницева рівняння та передаточна функція мають вигляд:

$$y(n) = x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

*Рекурсивний фільтр другого порядку.*

Різницева рівняння та передаточна функція мають вигляд:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

На основі аналізу наведених прикладів можна зробити такі висновки:

– передаточна функція рекурсивного фільтру визначається застосуванням  $Z$ -перетворення до різницевого рівняння, що описує динаміку цього фільтра;

– передаточна функція рекурсивного фільтру являє собою дробово-раціональну функцію за степенями  $z^{-k}$  з коефіцієнтами, що є коефіцієнти різницевого рівняння.

#### 4. Структура рекурсивних фільтрів.

Структура цифрового рекурсивного фільтра відображає структуру алгоритму обробки сигналу у фільтрі і відповідає різницевому рівнянню або передаточній функції, що описують динаміку цифрового фільтра.

Розглянемо рекурсивні фільтри, динаміка яких описується різницевим рівнянням (5.4) або передаточною функцією (5.5)

Існує декілька різних структурних форм реалізації рекурсивних фільтрів. Відзначимо таке:

**1. Пряма форма (пряма структура)**, яка відповідає безпосередній реалізації (5.4) або (5.5).

Апаратна реалізація прямої форми може бути подана у вигляді схеми рис. 5.2

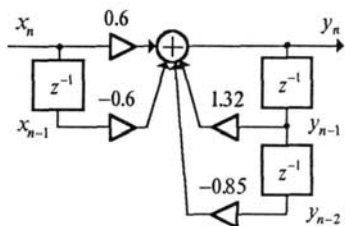


Рис. 5.2. Пряма форма рекурсивного фільтра

**2. Канонічна форма** (канонічна структура), яку отримують перетворенням передаточної функції рекурсивного фільтра (5.5) до вигляду

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) = \frac{1}{A(z)} \cdot B(z). \quad (5.7)$$

Таке подання  $H(z)$  відповідає послідовному з'єднанню (рис. ) рекурсивного фільтра з передаточною функцією

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k z^{-k}}$$

із нерекурсивним фільтром з передаточною функцією

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}.$$

Передаточним функціям  $H_1(z)$  і  $H_2(z)$  відповідають різницеві рівняння

$$\left. \begin{aligned} v_n &= x_n - \sum_{k=1}^{N-1} a_k v_{n-k}, \\ y_n &= \sum_{k=0}^{M-1} b_k v_{n-k}, \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

які описують канонічну структуру рекурсивного фільтра.

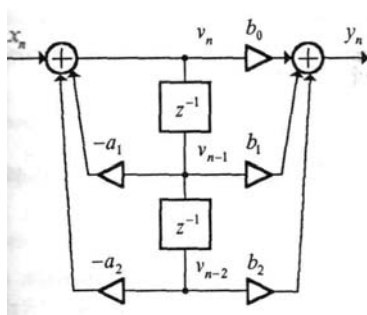


Рис. 5.3. Канонічна форма рекурсивного фільтра

Цю форму (структуру) називають *канонічною*, оскільки вона має мінімальну кількість дискретних елементів затримки, що реалізується за допомогою пристроїв пам'яті.

**3. Каскадна структура (послідовна форма)** рекурсивного фільтра ґрунтується на поданні передаточної функції (5.5) рекурсивного фільтра у вигляді

$$H(z) = \prod_{k=1}^{L_1} \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}} = \prod_{k=1}^R H_k(z). \quad (5.9)$$

Кожну з ланок в (5.9) називають *біквдратним блоком*. Біквдратний блок є універсальна ланка для побудови будь-яких фільтрів.

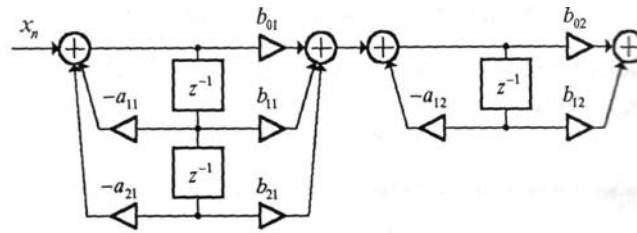


Рис. 5.4. Каскадна форма рекурсивного фільтра третього порядку

На рис. 5.4 наведено каскадну форму реалізації рекурсивного фільтра третього порядку, яка є послідовним з'єднанням фільтра другого порядку з фільтром першого порядку. Кожний з фільтрів реалізовано у вигляді канонічної форми.

Каскадна форма реалізації рекурсивних фільтрів забезпечує найменший рівень власних шумів фільтра.

**4. Паралельна структура (паралельна форма)** реалізації фільтра являє собою паралельне з'єднання, що відповідає поданню  $H(z)$  у вигляді суми

$$H(z) = \sum_{k=1}^{L_2} \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1}}{1 + \alpha_{1k}z^{-1} + \alpha_{2k}z^{-2}} = \sum_{k=1}^{L_2} H_k(z). \quad (5.10)$$

**5. Полюси та нулі передаточних функцій рекурсивних фільтрів.**

Під час аналізу цифрових фільтрів важливе значення набуває визначення розташування полюсів та нулів передаточної функції в  $Z$ -площині й їх впливу на стійкість рекурсивних фільтрів.

*Базовий рекурсивний фільтр першого порядку.* Динаміка такого фільтру описується передаточною функцією

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1z^{-1}} = \frac{z}{z + a_1} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (5.11)$$

Знаходимо нулі і полюси функції (5.11):

$$B(z) = 0 \rightarrow z_1^0 = 0;$$

$$A(z) = 0 \rightarrow z + a_1 = 0 \rightarrow z_1^* = -a_1,$$

де  $z_1^0, z_1^*$  – відповідно нуль та полюс функції  $H(z)$ . Для стійкості такого фільтру необхідно й достатньо, щоб

$$|z_1^*| = |-a_1| < 1. \quad (5.12)$$

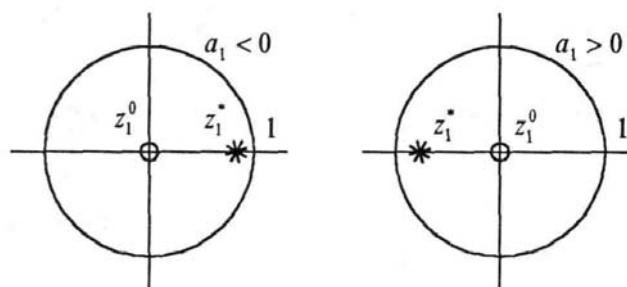


Рис. 5.5. Карти нулів і полюсів базового рекурсивного фільтра першого порядку

Рекурсивний фільтр першого порядку. Його передаточною функцією буде

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} = b_0 \frac{z + b_1/b_0}{z + a_1} = b_0 \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (5.13)$$

Така передаточна функція містить один нуль у точці  $B(z) = 0 \rightarrow z_1^0 = -b_1/b_0$ , і один полюс у точці  $A(z) = 0 \rightarrow z_1^* = -a_1$ .

Критерій стійкості фільтру також приймає вигляд (5.12), оскільки в обох випадках поліноми  $A(z)$  співпадають. На рис. 5.6 наведено карту нулів і полюсів фільтру при значеннях  $b_0 = 0,5, b_1 = -0,5, a_1 = 0,7$ , для яких  $z_1^0 = 1, z_1^* = -0,7$ .

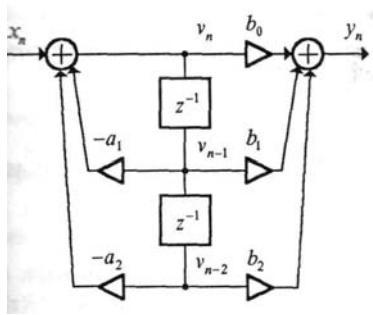


Рис. 5.6. Карта нулів і полюсів рекурсивного фільтру першого порядку

Базовий рекурсивний фільтр другого порядку. Динаміка такого фільтру описується передаточною функцією

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (5.14)$$

Розглянемо випадок комплексно-сполучених полюсів, які разом з нулями визначаємо таким чином:

$$A(z) = z^2 + a_1 z + a_2 \rightarrow z_{1,2}^* = -\frac{a_1}{2} \pm i \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}.$$

Запишемо комплексні числа  $z_{1,2}^*$  в експоненційній формі

$$z_{1,2}^* = r^* e^{\pm i \varphi^*}, \quad (5.15)$$

а значення модуля  $r^*$  і фази  $\varphi^*$  знаходимо, використовуючи формулу Ейлера:

$$z_{1,2}^* = r^* (\cos \varphi^* \pm i \sin \varphi^*).$$

Згідно теоремі Вієта

$$z_1^* + z_2^* = 2r^* \cos \varphi^* = -a_1 \rightarrow \varphi^* = \arccos(-r^* a_1/2);$$

$$z_1^* \cdot z_2^* = (r^*)^2 (\cos^2 \varphi^* + \sin^2 \varphi^*) = (r^*)^2 = a_2 \rightarrow r^* = \sqrt{a_2}.$$

$$B(z) = 0 \rightarrow z^2 = 0 \rightarrow z_{1,2}^0 = 0.$$

Отже, маємо два нулі і два комплексно-сполучені полюси у точках  $z_{1,2}^*$ , що показано на рис. 5.7.

має виконуватися умова

$$|r^*| = \sqrt{a_2} < 1. \quad (5.16)$$

Рекурсивний фільтр другого порядку. Його передаточною функцією буде

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (5.17)$$

Рис. 5.7. Карта нулів і полюсів рекурсивного фільтру другого порядку

Знову будемо розглядати випадок комплексно-сполучених полюсів.

$$z_{1,2}^* = r^* e^{\pm i \varphi^*}, \quad r^* = \sqrt{a_2}, \quad \varphi^* = \arccos(-r^* a_1/2).$$

Нулі цієї передаточної функції можуть виявитися як дійсними:

$$z_{1,2}^0 = -\frac{b_1}{2b_0} \pm \frac{1}{2b_0} \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2},$$

так і комплексно-сполученими:

$$z_{1,2}^0 = r^0 e^{\pm i\varphi^0}, \quad r^0 = \sqrt{b_2/b_0}, \quad \varphi^0 = \arccos\left(-\frac{b_1}{2b_0}\right) = \arccos\left(-\frac{b_1}{2\sqrt{b_0b_2}}\right).$$

Вочевидь, критерій стійкості рекурсивного фільтру другого порядку також визначається умовою стійкості (5.16). На рис. 5.8 зображено карту нулів і полюсів рекурсивного фільтру другого порядку в  $Z$ -площині для двох випадків:

а)  $b_0 = 0,2$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = -0,2$ ,  $a_1 = 0,9$ ,  $a_2 = 0,81$ . Маємо:  $z_1^0 = 1$ ,  $z_2^0 = -1$ ,  $z_{1,2}^* = r^* e^{\pm i\varphi^*}$ ;  $r^* = 0,9$ ,  $\varphi^* = 2\pi/3$  (рис. а);

б)  $b_0 = b_1 = b_2 = 0,2$ ,  $a_1 = -0,6$ ,  $a_2 = 0,36$  (комплексно-сполучені нулі), коли буде:  $z_{1,2}^0 = r^0 e^{\pm i\varphi^0}$ ;  $r^0 = 1$ ,  $\varphi^0 = 2\pi/3$ ;  $z_{1,2}^* = r^* e^{\pm i\varphi^*}$ ,  $r^* = 0,6$ ,  $\varphi^* = \pi/3$  (рис. б).

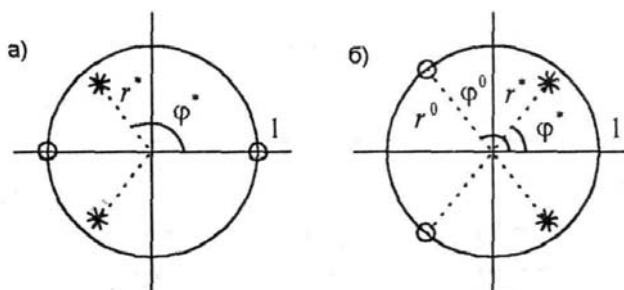


Рис. 5.8. Карти нулів і полюсів рекурсивного фільтру другого порядку

## 6. Амплітудна і фазова частотні характеристики.

У загальному вигляді частотна характеристика рекурсивних фільтрів має вигляд

$$H(e^{i\omega}) = \frac{Y(e^{i\omega})}{X(e^{i\omega})}. \quad (5.18)$$

Частотна характеристика цифрового фільтру може бути отримана з передаточної функції  $H(z)$  цифрового фільтру формальною заміною комплексної змінної  $z$  на  $e^{i\omega T_d}$ , де  $T_d$  – інтервал (період) дискретизації сигналів цифрового фільтру, тобто

$$H(e^{i\omega}) = H(z)|_{z=e^{i\omega T_d}}.$$

Частотна характеристика будь-якої динамічної системи, якою, зокрема, є рекурсивний фільтр, складається з амплітудно-частотної характеристики (АЧХ)

$$A(\omega) = |H(e^{i\omega})| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 H(e^{i\omega}) + \operatorname{Im}^2 H(e^{i\omega})},$$

де  $\operatorname{Re} H(e^{i\omega})$ ,  $\operatorname{Im} H(e^{i\omega})$  – дійсна та уявна складові комплексної функції  $H(e^{i\omega})$ , та фазо-частотної характеристики (ФЧХ)

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\operatorname{Im} H(e^{i\omega})}{\operatorname{Re} H(e^{i\omega})} \right].$$

Для передаточної функції загального вигляду (5.5) частотні характеристики записується у вигляді:

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{\left[\sum_{k=0}^{M-1} b_k \cos \omega T_d k\right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{M-1} b_k \sin \omega T_d k\right]^2}{\left[\sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos \omega T_d k\right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{N-1} a_k \sin \omega T_d k\right]^2}} \quad (5.19)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \left[ \frac{\left(\sum_{k=0}^{M-1} b_k \cos \omega T_d k\right) \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k \sin \omega T_d k\right) - \left(\sum_{k=0}^{M-1} b_k \sin \omega T_d k\right) \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos \omega T_d k\right)}{\left(\sum_{k=0}^{M-1} b_k \cos \omega T_d k\right) \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos \omega T_d k\right) + \left(\sum_{k=0}^{M-1} b_k \sin \omega T_d k\right) \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k \sin \omega T_d k\right)} \right] \quad (5.20)$$

Застосуємо отримані загальні співвідношення для АЧХ і ФЧХ для визначення відповідних характеристик рекурсивних фільтрів першого і другого порядку.

Запишемо передаточну функцію для базового рекурсивного фільтру першого порядку:

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}},$$

тобто  $b_0 = 1$ ,  $a_0 = 1$ , звідки маємо: – частотна характеристика (ЧХ)

$$H(e^{i\omega T_d}) = \frac{1}{1 + a_1 e^{-i\omega T_d}};$$

– АЧХ

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{(1 + a_1 \cos \omega T_d)^2 + (a_1 \sin \omega T_d)^2}}; \quad (5.21)$$

– ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \arctg \left[ \frac{a_1 \sin \omega T_d}{(1 + a_1 \cos \omega T_d)} \right]. \quad (5.22)$$

Графіки шуканих АЧХ і ФЧХ для  $a_1 = -0,8$  і частоти  $0 \leq \omega \leq \pi/T_d$  наведені на рис.

Слід зауважити, що корисно мати співвідношення, які дозволяють розраховувати значення АЧХ на межах основної смуги частот, тобто при  $\omega = 0$  і  $\omega = \pi/T_d$ . У даному разі з (5.21) маємо:

$$A(0) = \left| \frac{1}{1 + a_1} \right|; \quad A(\pi/T_d) = \left| \frac{1}{1 - a_1} \right|.$$

Для рекурсивного фільтру першого порядку з передаточною функцією

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}},$$

маємо:

– ЧХ

$$H(e^{i\omega T_d}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-i\omega T_d}}{1 + a_1 e^{-i\omega T_d}};$$

– АЧХ

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{(b_0 + b_1 \cos \omega T_d)^2 + (b_1 \sin \omega T_d)^2}{(1 + a_1 \cos \omega T_d)^2 + (a_1 \sin \omega T_d)^2}}; \quad (5.23)$$

– ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \arctg \left[ \frac{(b_0 + b_1 \cos \omega T_d)(a_1 \sin \omega T_d) - (b_1 \sin \omega T_d)(1 + a_1 \cos \omega T_d)}{(b_0 + b_1 \cos \omega T_d)(1 + a_1 \cos \omega T_d) + (b_1 \sin \omega T_d)(a_1 \sin \omega T_d)} \right]. \quad (5.24)$$



Співвідношення для розрахунку значень АЧХ на межах основної смуги частот  $\omega \in [0, \pi/T_d]$  є такими:

$$A(0) = \left| \frac{b_0 + b_1}{1 + a_1} \right|; \quad A(\pi/T_d) = \left| \frac{b_0 - b_1}{1 - a_1} \right|.$$

Для значень параметрів фільтру  $b_0 = 0,1$ ,  $b_1 = 0,1$ ,  $a_1 = -0,8$ ,  $T_d = 2c$  і частот  $\omega \in [0, \pi/T_d]$  АЧХ і ФЧХ наведені на рис.

За таких параметрів даний фільтр належить до класу вибіркового фільтрів нижніх частот.

Для базового рекурсивного фільтру другого порядку з передаточною функцією

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

маємо:

– ЧХ

$$H(e^{i\omega T_d}) = \frac{1}{1 + a_1 e^{-i\omega T_d} + a_2 e^{-i2\omega T_d}};$$

– АЧХ

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{(1 + a_1 \cos \omega T_d + a_2 \cos 2\omega T_d)^2 + (a_1 \sin \omega T_d + a_2 \sin 2\omega T_d)^2}}; \quad (5.25)$$

– ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{a_1 \sin \omega T_d + a_2 \sin 2\omega T_d}{1 + a_1 \cos \omega T_d + a_2 \cos 2\omega T_d}. \quad (5.26)$$

На межах основної смуги частот  $\omega \in [0, \pi/T_d]$  АЧХ набуває значень:

$$A(0) = \left| \frac{1}{1 + a_1 + a_2} \right|; \quad A(\pi/T_d) = \left| \frac{1}{1 - a_1 + a_2} \right|.$$

Графіки ФЧХ та АЧХ, що відповідають співвідношенням (5.25), (5.26) за таких значень коефіцієнтів, як  $a_1 = 0,9$ ,  $a_2 = 0,81$  і смуги частот  $0 \leq \omega \leq \pi/T_d$  подані на рис.

Рекурсивний фільтр другого порядку. Передаточна функція фільтру має вигляд:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

$$H(e^{i\omega T_d}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-i\omega T_d} + b_2 e^{-i2\omega T_d}}{1 + a_1 e^{-i\omega T_d} + a_2 e^{-i2\omega T_d}};$$

– АЧХ

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{(b_0 + b_1 \cos \omega T_d + b_2 \cos 2\omega T_d)^2 + (b_1 \sin \omega T_d + b_2 \sin 2\omega T_d)^2}{(1 + a_1 \cos \omega T_d + a_2 \cos 2\omega T_d)^2 + (a_1 \sin \omega T_d + a_2 \sin 2\omega T_d)^2}}; \quad (5.27)$$

– ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{(b_0 + b_1 \cos \omega T_d + b_2 \cos 2\omega T_d)(a_1 \sin \omega T_d + a_2 \sin 2\omega T_d) - (b_1 \sin \omega T_d + b_2 \sin 2\omega T_d)(1 + a_1 \cos \omega T_d + a_2 \cos 2\omega T_d)}{(b_0 + b_1 \cos \omega T_d + b_2 \cos 2\omega T_d)(1 + a_1 \cos \omega T_d + a_2 \cos 2\omega T_d) + (b_1 \sin \omega T_d + b_2 \sin 2\omega T_d)(a_1 \sin \omega T_d + a_2 \sin 2\omega T_d)}; \quad (5.28)$$

На межах основної смуги частот маємо:

$$A(0) = \left| \frac{b_0 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2} \right|; \quad A(\pi/T_d) = \left| \frac{b_0 - b_1 + b_2}{1 - a_1 + a_2} \right|.$$

Побудовані графіки АЧХ і ФЧХ за значень параметрів рекурсивного фільтру  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = 0,0951$ ,  $b_2 = -0,0951$ ,  $T_d = 2c$ ,  $a_1 = 0,9$ ,  $a_2 = 0,81$  показані на рис.

### 7. Квадрат модуля амплітудної характеристики.

Під час проектування рекурсивних фільтрів у низці методів, де використовується апроксимація АЧХ, часто застосовується квадрат амплітудно-частотної характеристики. Для аналогового фільтру з передаточною функцією  $H(p)$  квадрат модуля частотної характеристики визначають так:

$$|H(i\omega)|^2 = H(i\omega)H^*(i\omega), \quad (5.29)$$

де  $H^*(i\omega)$  – комплексно-сполучена функція відносно  $H(i\omega)$ .

Оскільки коефіцієнти функції  $H(p)$  є дійсні,  $H^*(i\omega) = H(-i\omega)$ , й отже,  $|H(i\omega)|^2$  можна отримати, виходячи зі співвідношення

$$|H(i\omega)|^2 = H(p)H(-p)|_{p=i\omega}. \quad (5.30)$$

Передаточну функцію  $H(p)$  можна завжди подати у вигляді добутку множників першого степеня, які містять у собі полюси і нулі функції  $H(p)$ , тобто у вигляді

$$H(p) = \frac{(p - \beta_1)(p - \beta_2) \dots}{(p - \alpha_1)(p - \alpha_2) \dots}, \quad (5.31)$$

де  $\alpha_i, \beta_j$  – полюси і нулі відповідно.

Отже, функція  $H(p)H(-p)$  може бути записана у вигляді добутку таких груп множників, як

$$(p - \beta_k)(-p - \beta_k) = \beta_k^2 - p^2 = (\omega^2 + \beta_k^2)|_{p=i\omega}. \quad (5.32)$$

Отже, квадрат модуля передаточної функції  $H(p)$  завжди можна записати у такій формі:

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{K^2(\omega^2 + \beta_1^2)(\omega^2 + \beta_2^2) \dots}{(\omega^2 + \alpha_1^2)(\omega^2 + \alpha_2^2) \dots}. \quad (5.33)$$

За будь-яких значень полюсів і нулів  $H(p)$  (дійсних чи комплексних) з виразу (5.33) випливає таке твердження:

**Поліноми чисельника і дільника квадрату модуля передаточної функції є поліноми вигляду (5.33) від  $\omega^2$  з дійсними коефіцієнтами, причому значення цих поліномів є додатні для всіх дійсних значень  $\omega$ .**

Для цифрового фільтра, динаміка якого описується передаточною функцією  $H(p)$ , квадрат модуля визначають так:

$$|H(e^{i\omega})|^2 = |H(z)H(-z)|_{z=e^{i\omega}}. \quad (5.34)$$

Розташування нулів та полюсів цієї функції в  $z$ -площині є симетричне із дзеркальним відображенням відносно одиничного кола. Полюси  $H(z)$  містяться всередині одиничного кола, тому вони сповна визначаються квадратом амплітудної характеристики фільтра. Нулі  $H(z)$  можуть займати в  $z$ -площині довільне положення (за винятком важливого випадку, коли нулі розташовано на одиничному колі). Але зазвичай нулі передаточної функції  $H(z)$  також вибираються таким чином, щоб нулі квадрату амплітудної характеристики, що їм відповідають, містились на одиничному колі та всередині його в  $z$ -площині. Фільтри з такими нулями називаються *мінімально-фазовими фільтрами*.

## 5.2. Методи проектування цифрових рекурсивних фільтрів

Всі методи проектування рекурсивних фільтрів різного функціонального призначення ґрунтуються на низці функціональних побудов, які дозволяють реалізувати основні функції фільтрів.

Проектування більшості зі стандартних типів фільтрів починається з їхньої апроксимації у вигляді фільтра нижніх частот із нормованою ідеалізованою характеристикою. *Нормований* ідеальний фільтр нижніх частот має одиничний коефіцієнт передачі у смузі частот від 0 до 1 рад/с та нульовий коефіцієнт передачі на всіх частотах, що є більші за 1 рад/с. Фазовий зсув для такого фільтра  $\varphi(\omega) \triangleq -\arctg \operatorname{Im}H(i\omega)/\operatorname{Re}H(i\omega)$  являє собою лінійну функцію, яка має одиничний тангенс кута нахилу у смузі пропускання. Для частот, які перевищують 1 рад/с, фазовий зсув не має значення, оскільки на цих частотах фільтр не пропускає сигнал.

Отже, *нормований ідеальний фільтр нижніх частот* визначається таким чином:

$$H(i\omega) = \begin{cases} e^{-i\omega} & \text{для } 0 \leq |\omega| \leq 1, \\ 0 & \text{для } |\omega| > 1. \end{cases} \quad (5.35)$$

Модуль коефіцієнта передачі та фазовий зсув, що визначається за (5.35), наведені на рис.

Після того, як одержано фільтр нижніх частот із нормованою ідеалізованою характеристикою, можна застосувати відповідні частотні перетворення, за допомогою яких цей базовий фільтр нижніх частот може бути перетворено у фільтр верхніх частот, смугастий й інші більш складні фільтри із декількома смугами пропускання та затримки.

Але перед цим виникає проблема апроксимації характеристик нормованого ідеального фільтра виду (5.35) реальними характеристиками фізично реалізуємих фільтрів згідно з технічними вимогами. Це здійснюється за допомогою спеціальних апроксимуючих функцій (поліномів), які визначають відповідні типи фільтрів різного функціонального призначення.

Перелічимо деякі з розповсюджених типів фільтрів нижніх частот:

1. *Фільтр Баттерворта* із монотонно спадаючою амплітудно-частотною характеристикою при  $\omega \geq 0$ .
2. *Фільтр Чебишова* (тип 1) із рівнохвильовою у смузі пропускання та монотонно спадаючою у смузі затримки амплітудно-частотною характеристикою.
3. *Інверсний фільтр Чебишова* (тип 2) із монотонно спадаючою у смузі пропускання та рівнохвильовою у смузі затримки амплітудно-частотною характеристикою.
4. *Еліптичний* фільтр, відомий як фільтр *Кауера*, або *подвійний фільтр Чебишова* (фільтр Золотарьова – Кауера) із рівнохвильовою як у смузі пропускання, так й у смузі затримування амплітудно-частотною характеристикою.
5. *Фільтр Бесселя* (відомий також як фільтр із максимально плоскою характеристикою групового часу уповільнення), що побудовано на основі апроксимації рядом Тейлора в околі  $s = 0$  лінійної фазо-частотної характеристики.

Як це впливає з перетворення Гільберта, мінімально-фазовий ланцюг сповна визначається або функцією модуля, або функцією фази. Тобто, передаточна функція не може одночасно апроксимувати амплітудно-частотну та фазо-частотну характеристики нормованого ідеалізованого фільтра нижніх частот. Фільтри Баттерворта, Чебишова, інверсний фільтр Чебишова та еліптичний фільтр апроксимують амплітудно-частотну, а фільтр Бесселя – фазо-частотну характеристики нормованого ідеалізованого фільтра нижніх частот.

Відомі три групи методів розрахунку передаточних функцій рекурсивних цифрових фільтрів (РЦФ):

1. *Метод аналогового прототипу*, сутністю якого є синтез спочатку аналогового фільтра, що відповідає заданим технічним вимогам, з наступним перетворенням цього фільтра у відповідний цифровий фільтр.
2. *Прямі методи розрахунку в Z-площині*, коли вдається знайти таке розташування полюсів та нулів цифрового фільтра, за якого забезпечується необхідна апроксимація безпосередньо заданої частотної або часової характеристики фільтра.

3. *Методи, що використовують певні процедури оптимізації* для мінімізації по параметрам (коефіцієнтам) фільтра або розташуванню полюсів та нулів передаточної функції обраного критерія, який забезпечує відповідну апроксимацію заданої характеристики фільтра.

### 5.3. Метод аналогового прототипу

В основі даного підходу до вирішення задачі проектування рекурсивних цифрових фільтрів покладено практичну ідею: замість того, щоб заново створювати теорію розрахунку цифрових фільтрів, можна використати прості методи відображення (дискретизації), які дозволяють перетворити аналогові фільтри різного функціонального призначення у відповідні цифрові фільтри. Головними умовами таких перетворень є збереження у цифрових фільтрах властивостей частотних характеристик та стійкості, що були у аналогового прототипу.

Такий підхід являється логічним, оскільки:

- 1) способи розрахунку аналогових фільтрів добре відпрацьовані;
- 2) більшість методів розрахунку аналогових фільтрів мають відносно прості процедури розрахунку в замкненій формі. Внаслідок цього методи розрахунку цифрового фільтра, що ґрунтуються на цих аналогових формулах розрахунку, є доволі прості.

Реалізація цього підходу вимагає розробки простих алгоритмів, які забезпечують вказаний перехід, що узагальнено можна подати у такому вигляді:

*Етап 1.* Отримання потрібної передаточної функції  $H(p)$  аналогового фільтра-прототипу, який задовольняє технічним вимогам обробки сигналу.

*Етап 2.* Створення процедури переходу, яка перетворює функцію  $H(p)$  у відповідну передаточну функцію  $H(z)$  цифрового фільтра, що задовольняє заданим технічним вимогам.

Своєю чергою кожний з етапів складається з сукупності відповідних процедур, що разом дають узагальнений алгоритм методу аналогового прототипу, й який має таку послідовність кроків:

1. Визначення функціонального типу фільтра згідно з вимогами до обробки сигналу і формування параметричних обмежень для амплітудно-частотної або фазо-частотної характеристики фільтра. Ці обмеження мають вигляд допусків на можливі відхилення від відповідної ідеальної частотної характеристики фільтра потрібного функціонального типу.

2. Перехід від відповідних частотних перетворень, сформованих у п.1, до частотних характеристик у діапазоні нижніх частот  $\omega \in [0, 1]$  рад/с, тобто здійснити перехід від проектування фільтра потрібного функціонального типу у заданому частотному діапазоні до побудови *нормованого аналогового фільтра нижніх частот у одиничному діапазоні частот*.

3. Апроксимація потрібних характеристик (АЧХ або ФЧХ) із заданою точністю з використанням відповідної системи апроксимуючих функцій (поліномів), що призводить до синтезу аналогових фільтрів нижніх частот типу Баттерворта, Чебишова, Кауера тощо.

4. Розрахунок передаточної функції нормованого аналогового фільтра нижніх частот на основі квадрату функції модуля апроксимованої частотної характеристики, що задовольняє умови фізичної реалізуємості і стійкості.

5. Перетворення отриманої передаточної функції нормованого фільтра нижніх частот у передаточну функцію аналогового фільтра заданого функціонального типу (ФНЧ, ФВЧ, смугастий чи режекторний) із заданими частотними властивостями у потрібному частотному діапазоні.

6. Перехід від спроектованого аналогового фільтра до рекурсивного цифрового фільтра того самого типу на основі відповідного перетворення (відображення) передаточної функції  $H(p)$  аналогового прототипу у передаточну функцію  $H(z)$ .

7. Побудова на основі отриманої передаточної функції  $H(z)$  рекурсивного цифрового фільтра скінченно-різницевого рівняння, яке є основа практичної реалізації цифрового фільтра.

### 5.3.1. Апроксимація квадрата модуля передаточної функції

Відомі кілька систем апроксимуючих функцій (поліномів), серед яких виділяють поліноми Баттерворта, Чебишова, Бесселя та інші. Розглянемо перші дві системи поліномів, що використовуються для апроксимації амплітудно-частотних характеристик нормованого ідеального фільтра нижніх частот.

#### 5.3.1.1. Апроксимація по Баттерворту

Функція Баттерворта  $n$ -го порядку визначається у такому вигляді

$$B_n(i\omega) = 1/(1 + \omega^{2n}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.36)$$

Для будь-якого додатного  $n$  функція Баттерворта  $B_n(i\omega)$  задовольняє умови наведеного твердження, а саме: і чисельник і дільник цієї функції є поліноми від  $\omega^2$  з дійсними коефіцієнтами, причому  $B_n(i\omega) > 0$  для всіх значень  $\omega$ . Отже, функція Баттерворта може відображати амплітудно-частотну характеристику фізично реалізованого фільтра. Нормований фільтр нижніх частот Баттерворта  $n$ -го порядку характеризується таким виразом:

$$|H(i\omega)|^2 = B_n(\omega) = 1/(1 + \omega^{2n}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.37)$$

Коли  $n \rightarrow \infty$ , амплітудно-частотна характеристика Баттерворта наближається до нормованої ідеалізованої амплітудно-частотної характеристики нижніх частот, що показано на рис. 5.9 при  $\omega \in [0, 1]$ . За зростання порядку  $n$  фільтра Баттерворта коефіцієнт передачі в смузі пропускання наближається до одиниці, перехідна область звужується, а в смузі затримування ( $\omega > 1$ ) функція передачі все ближче прямує до нуля. Таким чином,  $n$  є параметр, вибір якого дозволяє задовольнити заданий набір вимог до фільтра в смузі пропускання та смузі затримування. Фазо-частотну характеристику  $\varphi(\omega)$  нормованого фільтра нижніх частот Баттерворта  $n$ -го порядку наведено на рис. 5.10. Бачимо, що за дуже малих значень  $\omega$  фазова характеристика змінюється майже лінійно, особливо за малих значень  $n$ .

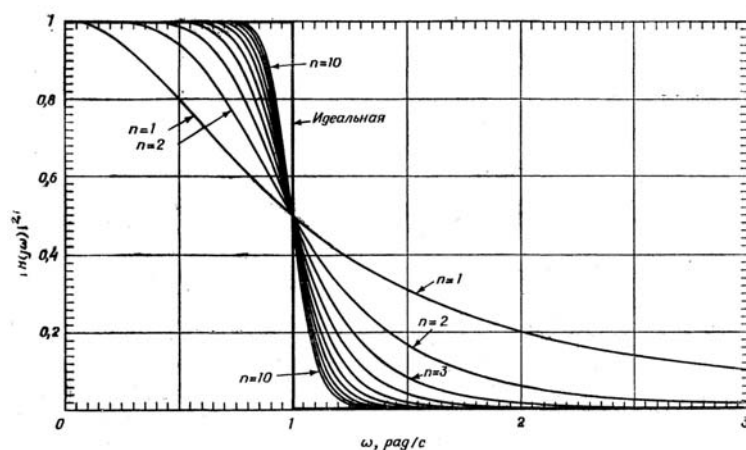


Рис. 5.9. АЧХ фільтра Баттерворта.

**Основні властивості фільтра Баттерворта.** Аналіз виразу (5.37) свідчить, що нормований фільтр нижніх частот Баттерворта має такі основні властивості:

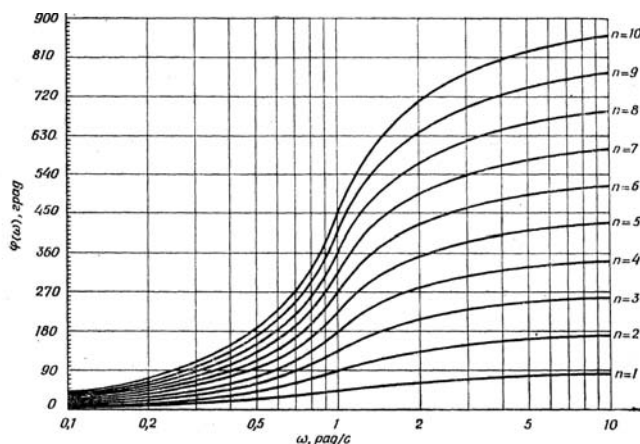


Рис. 5.10. ФЧХ фільтра Баттерворта.

1. За будь-якого  $n$  справджуються такі співвідношення:

$$|H(i\omega)|^2 = 1, \quad |H(i \cdot 1)|^2 = 0,5, \quad |H(i \cdot \infty)|^2 = 0. \quad (5.38)$$

Звідси витікає, що величина коефіцієнта передачі при  $\omega = 0$  складає 1. Частота зрізу  $\omega_c$  по рівню 3 дБ дорівнює 1 рад/с. До речі, частота зрізу  $\omega_c$  є частота, на якій квадрат модуля функції передачі дорівнює 0,5. Отже,  $\omega_c$  можна обчислити з виразу  $|H(i\omega_c)|^2 = 0,5$ . Якщо перейти до децибел, то  $\omega_c$  є точка, для якої величина послаблення  $-10 \lg |H(i\omega_c)|^2 = -10 \lg(0,5) \approx 3$  дБ.

2. Функції модуля передачі фільтрів Баттерворта монотонно убувають при  $\omega \geq 0$ . Отже,  $|H(i\omega)|$  має максимальне значення при  $\omega = 0$ .
3. Перші  $(2n - 1)$  похідних амплітудно-частотної характеристики фільтра нижніх частот Баттерворта  $n$ -го порядку дорівнюють нулю при  $\omega = 0$ . З цієї причини фільтри Баттерворта також називають фільтрами з *максимально плоскими* (гладкими) амплітудно-частотними характеристиками.
4. Крутизна амплітудно-частотної характеристики фільтра Баттерворта  $n$ -го порядку на високих частотах складає  $20n$  дБ/дек.

Властивість 2 можна довести, якщо продиференціювати вираз (5.37):

$$\frac{d}{d\omega} |H(i\omega)|^2 = \frac{-2n\omega^{2n-1}}{(1 + \omega^{2n})^2} = 2|H(i\omega)| \frac{d|H(i\omega)|}{d\omega}.$$

Звідси,

$$\frac{d|H(i\omega)|}{d\omega} = \frac{1}{2|H(i\omega)|} \frac{d}{d\omega} |H(i\omega)|^2 = -\frac{n\omega^{2n-1}}{[1 + \omega^{2n}]^{3/2}}.$$

Властивість 3 може бути показана шляхом розкладання  $|H(i\omega)|^2$  у ряд Тейлора в околі  $\omega = 0$ :

$$|H(i\omega)|^2 = 1 - \omega^{2n} + \omega^{4n} + \dots$$

**Передаточна функція** Щоб одержати мінімально-фазову функцію для заданої функції модуля треба:

*Крок 1.* За заданою функцією модуля фільтра Баттерворта  $n$ -го порядку побудувати

$$h(p) \triangleq H(p)H(-p) = |H(i\omega)|^2 \Big|_{\omega=p/i} = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \Big|_{\omega=p/i} = \frac{1}{1 + (-1)^n p^{2n}}. \quad (5.39)$$

*Крок 2.* Подати  $h(p)$  у вигляді добутку поліномів 1-го та 2-го порядків. Оскільки в  $h(p)$  відсутні скінченні нулі, а полюси мають квадратну симетрію, то чисельник  $H(p)$  дорівнює 1.

*Крок 3.* Скористаємось для побудови  $H(p)$  тими співмножниками, які відповідають полюсам, що містяться у лівій  $p$ -напівплощині. Добуток цих співмножників утворює дільник  $H(p)$ .

*Приклад.* Знайдемо передаточну функцію для нормованого фільтра нижніх частот Баттерворта 3-го порядку. Згідно наведеної схеми побудови маємо:

1.

$$H(p)H(-p) = |H(i\omega)|^2|_{\omega=p/i} = \frac{1}{1-p^6}$$

2.

$$H(p)H(-p) = \frac{1}{1-p^6} = \frac{1}{(p+1)(p^2+p+1)(-p+1)(p^2-p+1)}$$

3. Скористаємось для побудови співмножниками  $(p+1)$  та  $(p^2+p+1)$ , що відповідають полюсам у лівій  $p$ -напівплощині. Маємо

$$H(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+p+1)} = \frac{1}{p^3+2p^2+2p+1}$$

Цей вираз є передаточна функція для нормованого фільтра нижніх частот Баттерворта 3-го порядку.

Основою цього процесу є подання квадрату модуля у вигляді добутку  $H(p)H(-p)$ . Полюсами цього виразу є розв'язок рівняння

$$(-1)^n p^{2n} + 1 = 0. \quad (5.40)$$

Розглянемо спочатку випадок, коли значення  $n$  парне. Тоді рівняння (5.40) набуває вигляду

$$p^{2n} + 1 = 0; \quad -1 = e^{i(2k-1)/(2n)\pi},$$

де  $k$  – ціле число. Отже, полюсами  $\hat{p}_k$  функції  $H(p)H(-p)$  є

$$\hat{p}_k = \cos[(2k-1)/2n]\pi + i \sin[(2k-1)/2n]\pi = \cos \hat{\theta}_k + i \sin \hat{\theta}_k, \quad k = \overline{1, 2n}. \quad (5.41)$$

де  $\hat{\theta}_k = (2k-1)\pi/2n$ .

Розташування цих полюсів наведено на рис. 5.11 для випадку  $n=4$  та  $n=5$  відповідно. Оскільки відлік полюсів починається від дійсної осі й ведеться проти стрілки годинника, маркування полюсів починається з першого квадранту. Але для забезпечення стійкості нас перш за все цікавлять полюси, що містяться у лівій  $p$ -напівплощині. Позначимо

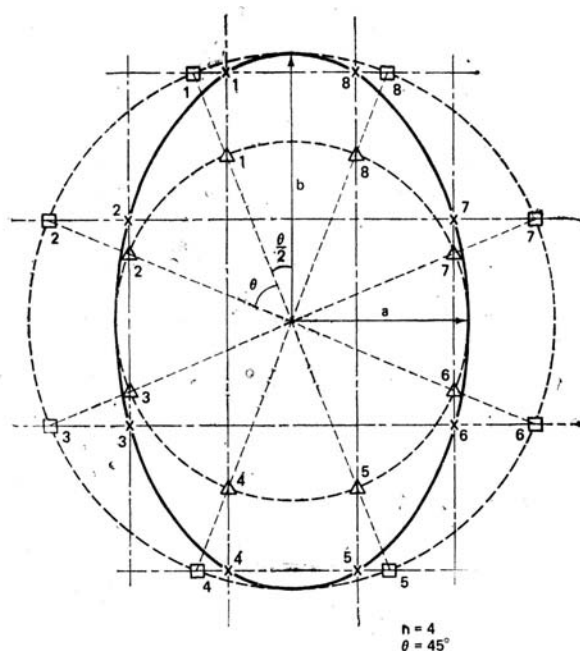
$$p_k \triangleq \hat{p}_{k+(n/2)}, \quad \theta_k \triangleq \hat{\theta}_{k+(n/2)} - \pi/2. \quad (5.42)$$

Звідси знайдемо, що вимір кута  $\theta_k$  починається з додатного напрямку уявної осі  $p$ -площини й здійснюється проти стрілки годинника. У зв'язку з цим послідовне змінування  $\theta_k$  спочатку виявляє  $n$  полюсів, що містяться в лівій  $p$ -напівплощині. Полюси  $H(p)H(-p)$  через  $\theta_k$  з лівої  $p$ -напівплощини визначаються таким чином:

$$p_k = \cos \hat{\theta}_{k+(n/2)} + i \sin \hat{\theta}_{k+(n/2)} = \cos[\theta_k + (\pi/2)] + i \sin[\theta_k + (\pi/2)] = -\sin \theta_k + i \cos \theta_k, \quad (5.43)$$

Аналогічно, можна показати, що полюси  $H(p)H(-p)$ , які містяться в лівій  $p$ -напівплощині для  $n$  непарного також визначаються виразом (5.43). Отже,

$$H(p) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{p-p_k} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{p-\sigma_k-i\omega_k}, \quad (5.44)$$

Рис. 5.11. Полюси фільтра Баттерворта для  $n = 4$  та  $n = 5$ .

де

$$p_k = \sigma_k + i\omega_k, \quad \sigma_k = -\sin \theta_k, \quad \omega_k = \cos \theta_k, \quad p_k = \sigma_k^2 + \omega_k^2 = \sin^2 \theta_k + \cos^2 \theta_k = 1. \quad (5.45)$$

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.46)$$

Отже, полюси  $H(p)$  містяться на колі одиничного радіусу. Якщо  $p_k$  – дійсний полюс, то

$$\theta_k = \pi/2, \text{ а } p_k = -1. \quad (5.47)$$

Враховуючи (5.46), вираз (5.47) може справджуватись тільки тоді, коли  $n$  – непарне число.

Якщо  $p_k$  – комплексний полюс, то  $\hat{p}_k$  (величина, комплексно-сполучена до  $p_k$ ) також є комплексний полюс, тож

$$(p - p_k)(p - \hat{p}_k) = (p - \sigma_k - i\omega_k)(p - \sigma_k + i\omega_k) = p^2 - 2\sigma_k p + \sigma_k^2 + \omega_k^2 = p^2 + (2 \sin \theta_k)p + 1. \quad (5.48)$$

Тоді маємо замість (5.44) таке

$$H(p) = \prod_{k=1}^{n/2} \frac{1}{p^2 + (2 \sin \theta_k)p + 1}, \quad n\text{-парне}. \quad (5.49)$$

$$H(p) = \frac{1}{p+1} \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{p^2 + (2 \sin \theta_k)p + 1}, \quad n\text{-непарне}. \quad (5.50)$$

Наприклад, передаточна функція нормованого фільтра нижніх частот Баттерворта 2-го порядку визначається виразом

$$H_2(p) = \frac{1}{p^2 + [2 \sin(\pi/4)]p + 1} = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}, \quad (5.51)$$



а передаточна функція 3-го порядку – виразом

$$H_3(p) = \frac{1}{p+1} \frac{1}{p^2 + [2 \sin(\pi/6)]p + 1} = \frac{1}{(p+1)(p^2 + p + 1)}, \quad (5.52)$$

Коли частотний діапазон фільтру нижніх частот вибирається так, що його частота зрізу складає  $\omega_c \neq 1$  рад/с, полюси переміщуються вздовж радіальних ліній до відповідних точок на колі радіусу  $\omega_c$ . Таким чином, нормування частоти не змінює характеру діаграми розташування полюсів та нулів за винятком зміновання її мірила.

### 5.3.1.2. Апроксимація по Чебишову

Фільтр, що є подібний до фільтра Баттерворта, в якому всі ступені свободи використовуються для одержання амплітудно-частотної характеристики з плоскою ділянкою у початку координат, може виявитись не найкращим рішенням. У багатьох випадках більш важливо мати апроксимацію, яка забезпечує рівномірно гарну якість продовж усієї смуги пропускання. Фільтр, який має такі рівномірні апроксимуючі властивості, – це фільтр Чебишова. Коефіцієнт передачі фільтра Чебишова у смузі пропускання коливається між двома значеннями (рис. ). Число хвиль цих коливань залежить від порядку  $n$  фільтра. Амплітуда коливань цього коефіцієнта передачі є вільний параметр.

Оскільки характеристики фільтрів Чебишова визначаються поліномами Чебишова, розглянемо спочатку деякі основні властивості поліномів Чебишова.

Поліном Чебишова  $n$ -го порядку визначається виразом:

$$T_n(\omega) = \begin{cases} \cos(n \arccos \omega), & |\omega| \leq 1 \\ \operatorname{ch}(n \operatorname{Arcch} \omega), & |\omega| > 1. \end{cases} \quad (5.53)$$

Наведемо декілька перших поліномів Чебишова, використовуючи при цьому проміжну заміну в (5.53)  $x = \arccos \omega \rightarrow \omega = \cos x$ , що дає вираз

$$T_n(\omega) = \cos nx. \quad (5.54)$$

Для послідовних значень  $n = 0, n = 1, \dots$  отримуємо:

$$T_0(\omega) = \cos 0 = 1, \quad T_1(\omega) = \cos x = \cos(\arccos \omega) = \omega;$$

$$T_2(\omega) = \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2\omega^2 - 1;$$

$$T_3(\omega) = \cos 3x = -3 \cos x + 4 \cos^3 x = -3\omega + 4\omega^3;$$

$$T_4(\omega) = \cos 4x = 1 - 8 \cos^2 x + 8 \cos^4 x = 1 - 8\omega^2 + 8\omega^4.$$

Якщо скористатися рекурентною тригонометричною формулою

$$\cos[(n+1)x] = 2 \cos nx \cos x - \cos[(n-1)x],$$

можна одержати рекурентну формулу полінома Чебишова для обчислення поліномів Чебишова більш високого порядку.

$$T_{n+1}(\omega) = 2\omega T_n(\omega) - T_{n-1}(\omega), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.55)$$

Виходячи з наведеного, можна відзначити такі властивості поліномів Чебишова.

1. Для всіх  $n$   $0 \leq |T_n(\omega)| \leq 1$  при  $0 \leq |\omega| \leq 1$ ;  $|T_n(\omega)| > 1$  при  $|\omega| > 1$ .
2.  $T_n(\omega)$  монотонно зростає при  $\omega \geq 1$  та за всіх  $n$ .
3.  $T_n(\omega)$  є непарний (парний) поліном, що залежить від  $\omega$ , якщо  $n$  є непарне (парне) число.

4.  $|T_n(0)| = 0$  коли  $n$  є непарне, та  $|T_n(0)| = 1$ , коли  $n$  є парне.

Для  $|\omega| \leq 1$  значення функції  $\arccos \omega$  є дійсний кут. Отже,  $T_n(\omega)$  являє собою косинус дійсного кута. Це означає, що значення  $T_n(\omega)$  періодично змінюється у межах від  $-1$  до  $+1$  при  $|\omega| \leq 1$ . Для  $|\omega| > 1$  функція  $\arccos \omega$  являє собою уявну величину й  $\cos(n \arccos \omega)$  є гіперболічним косинусом дійсного кута. Оскільки гіперболічний косинус змінюється в межах від  $1$  до  $\infty$ , то  $1 < |T_n(\omega)| < \infty$  для  $|\omega| > 1$ . Отже властивість 1 має місце.

На відміну від функцій Баттерворта для поліномів Чебишова справджуються не всі властивості функції модуля, які перелічено у **твердженні**. Але їх можна використати для конструювання передаточних функцій, які апроксимують амплітудно-частотні характеристики нормованих ідеалізованих фільтрів нижніх частот. Функція передачі для фільтру нижніх частот має прямувати до нуля за  $\omega \rightarrow \infty$ . Отже, поліноми Чебишова мають бути однією з компонент поліномів у дільнику функції передачі фільтра. Такою функцією квадрату модуля функції передачі фільтра буде

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega)}, \quad (5.56)$$

де  $\varepsilon$  являє собою вільний параметр, що визначає величину нерівномірності передачі. При використанні функції  $\varepsilon^2 T_n^2(\omega)$  чисельник та дільник  $|H(i\omega)|^2$  є поліноми, що залежать від  $\omega^2$  і мають додатні значення. Отже, функція (5.56) задовольняє всім вимогам твердження до функції модуля. Це означає, що з виразу (5.56) можна одержати потрібну функцію передачі. Тому надалі будемо називати фільтр, який має функцію квадрату модуля, що відповідає (5.56), *нормованим фільтром нижніх частот Чебишова* (або просто фільтром Чебишова)  $n$ -го порядку.

**Основні властивості фільтра Чебишова** Виходячи з виразу (5.56) та властивостей поліномів Чебишова, можна стверджувати, що нормований фільтр нижніх частот Чебишова  $n$ -го порядку має такі основні властивості:

1. Для  $|\omega| \leq 1$  значення функції  $|H(i\omega)|^2$  коливаються між двома межами  $1/(1 + \varepsilon^2)$  та  $1$ . Всього на інтервалі  $0 \leq \omega \leq 1$  є  $n$  критичних точок, в яких функція  $|H(i\omega)|^2$  досягає максимального значення, що дорівнює  $1$ , або мінімального значення, що дорівнює  $1/(1 + \varepsilon^2)$ . З цієї причини фільтри Чебишова називають також *рівнохвильовими фільтрами*, що підтверджується графіками функції (5.56) на інтервалі  $0 \leq \omega \leq 1$  рис. 5.12.
2. При  $\omega \geq 1$  функція  $|H(i\omega)|^2$  монотонно спадає і прямує до нуля. Крутизна спадання на високих частотах складає  $20n$  дБ/дек.
3. Функція квадрату модуля фільтра Чебишова  $n$ -го порядку задовольняє рівнянням:

$$|H(i \cdot 1)|^2 = 1/(1 + \varepsilon^2), \quad |H(i0)|^2 = 1, \quad n \text{ непарне}, \quad |H(i0)|^2 = 1/(1 + \varepsilon^2), \quad n \text{ парне}. \quad (5.57)$$

Якщо задано характеристики смуги пропускання та смуги затримання, то можна визначити коливальний параметр  $\varepsilon$  та порядок  $n$  фільтра Чебишова. Зазвичай замість величини  $\varepsilon$  задається максимальна величина відносного згасання  $A_{max}$  в смузі пропускання, де

$$A_{max} \text{ (дБ)} = -10 \lg[1/(1 + \varepsilon^2)] = 10 \lg(1 + \varepsilon^2). \quad (5.58)$$

Отже, коливальний параметр  $\varepsilon$  визначається як

$$\varepsilon = \sqrt{10^{(A_{max}/10)} - 1}. \quad (5.59)$$

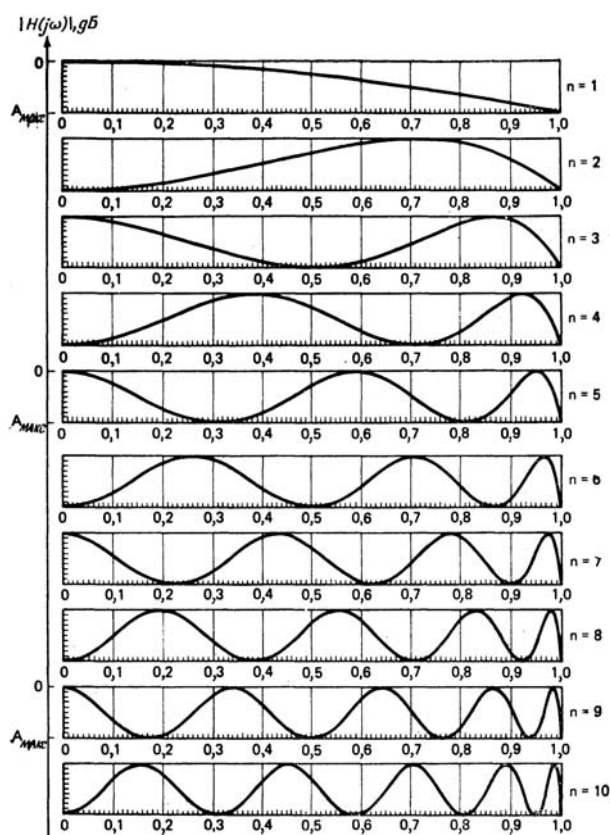


Рис. 5.12. Рівнохвильове змінювання коефіцієнта передачі у смузі пропускання фільтрів Чебишова

Вибір порядку  $n$  фільтра Чебишова визначається на основі різних критеріїв таких, як крутизна спадання на високих частотах в децибелах, бажана частота зрізу та значення коефіцієнта передачі у смузі затримування та інших факторів.

*Приклад.* Припустимо, що нам необхідно спроектувати нормований рівнохвильовий фільтр нижніх частот, що відповідає таким вимогам:

1. Максимальне відносне згасання  $A_{\max}$  у смузі пропускання (нерівномірність передачі) складає 1дБ.
2. Згасання у смузі затримування дорівнює не більше за  $\delta$  при  $\omega \geq 2$  рад/с.

Знайдемо потрібну функцію модуля, користуючись першою вимогою та співвідношенням (5.59). Маємо

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1} - 1} = 0,5088.$$

Щоб визначити порядок фільтра Чебишова з метою задоволення заданим умовам, можна скористатись (5.56) та  $\varepsilon = 0,5088$ .

$$|H(i\omega)|^2 \Big|_{\omega=2\text{рад/с}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega)} \Big|_{\omega=2\text{рад/с}} = \delta.$$

Із урахуванням виразу для діапазону частот  $|\omega| > 1$  отримуємо

$$|H(i\omega)|^2 \Big|_{\omega=2\text{рад/с}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \text{ch}^2(n \text{Arcch} \omega)} \Big|_{\omega=2\text{рад/с}} = \delta.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно шуканого порядку  $n$  фільтра, маємо

$$n = \frac{\text{Arcch} \left( \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{1/\delta - 1} \right)}{\text{Arcch} \omega} \Big|_{\omega=2\text{рад/с}}.$$

Підставляємо у цей вираз значення для  $\varepsilon, \delta$  і  $\omega$ . Отримуємо

$$n = \frac{\text{Arcch} \left( \frac{1}{0,5088} \sqrt{1/0,05 - 1} \right)}{\text{Arcch} 2} = 2,155.$$

Оскільки порядок фільтра є ціле додатне число, то  $2 \leq n \leq 3 \rightarrow n = 3$ , що гарантує виконання другої вимоги, оскільки у смузі затримування коефіцієнт передачі монотонно спадає до нуля і за більшого значення  $n$  ця вимога також виконується.

Отже, порядок  $n$  фільтру Чебишова дорівнює 3. Виходячи з цього, маємо

$$T_3(\omega) = -3\omega + 4\omega^3.$$

Тоді

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_3^2(\omega)} = \frac{1}{1 + 0,259(-3\omega + 4\omega^3)^2} = \frac{1}{4,14\omega^6 - 6,21\omega^4 + 2,33\omega^2 + 1}.$$

**Передаточна функція.** Передаточна функція фільтра Чебишова, як і фільтра Баттерворта містить тільки полюси, тобто не містить нулів. На відміну від фільтра Баттерворта полюси фільтра Чебишова розташовано на еліпсі, а не на колі. Велика вісь цього еліпсу проходить по уявній осі  $p$ -площини, а мала – вздовж дійсної осі. Чим вужчий еліпс, тим ближче розташовано полюс до уявної осі, тим сильніший вплив кожного полюсу, тобто тим помітнішими будуть коливання частотної характеристики. Отже, задана величина нерівномірності передачі буде значною мірою впливати на розташування полюсів результуючої передаточної функції.

Виявимо розташування полюсів передаточної функції фільтра Чебишова  $n$ -го порядку. Для цього підставимо вираз для поліномів Чебишова у вираз (5.56). Одержимо:

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cos^2(n \arccos \omega)}; \quad |\omega| \leq 1. \quad (5.60)$$

Визначимо комплексну змінну таким чином:  $\xi = \alpha + i\beta \triangleq \arccos(p/i)$ ,  $p = \sigma + i\omega$ . Звідси

$$\frac{p}{i} = \frac{\sigma + i\omega}{i} = \cos(\alpha + i\beta) \rightarrow p = \sigma + i\omega = i \cos \alpha \operatorname{ch} \beta + \sin \alpha \operatorname{sh} \beta. \quad (5.61)$$

Тобто

$$\omega = \cos \alpha \operatorname{ch} \beta, \quad \sigma = \sin \alpha \operatorname{sh} \beta. \quad (5.62)$$

Як й у випадку передаточної функції фільтра Баттерворта (5.39) для фільтра Чебишова маємо

$$h(p) \triangleq H(p)H(-p) = |H(i\omega)|^2|_{\omega=p/i} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cos^2(n \arccos(p/i))} = \frac{1}{1 + \cos^2(n\xi)}. \quad (5.63)$$

Отже, полюси функції  $h(p)$  є корені рівняння

$$1 + \varepsilon^2 \cos^2(n\xi) = [1 + i\varepsilon \cos(n\xi)][1 - i\varepsilon \cos(n\xi)] = 0.$$

що еквівалентно розв'язку

$$\cos n\xi = \cos[\alpha + n\beta] = \cos n\alpha \cos n\beta - i \sin n\alpha \sin n\beta = \pm(i/\varepsilon). \quad (5.64)$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини у цій рівності, отримуємо

$$\cos n\alpha \operatorname{ch} n\beta = 0, \quad \sin n\alpha \operatorname{sh} n\beta = \pm(1/\varepsilon),$$

що приводить до такого розв'язку:

$$\alpha_k = \pm[(2k - 1)/2n]\pi, \quad \beta_k = \pm(1/n)\operatorname{Arcsh}(1/\varepsilon), \quad (5.65)$$

де  $k$  – додатне ціле число.

Отже, з урахуванням (5.62) полюси передаточної функції Чебишова  $n$ -го порядку, які містяться у лівій  $p$ -напівплощині, визначаються так:  $p_k = \sigma_k + i\omega_k$ , де

$$\sigma_k = -\operatorname{sh}[1/n \operatorname{Arcsh}(1/\varepsilon)] \sin \frac{2k-1}{2n} \pi \omega_k = -\operatorname{ch}[1/n \operatorname{Arcsh}(1/\varepsilon)] \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \omega_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.66)$$

Оскільки  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , отримуємо рівняння еліпсу

$$\frac{\sigma_k^2}{\operatorname{sh}^2[(1/n) \operatorname{Arcsh}(1/\varepsilon)]} + \frac{\omega_k^2}{\operatorname{ch}^2[(1/n) \operatorname{Arcsh}(1/\varepsilon)]} = 1. \quad (5.67)$$

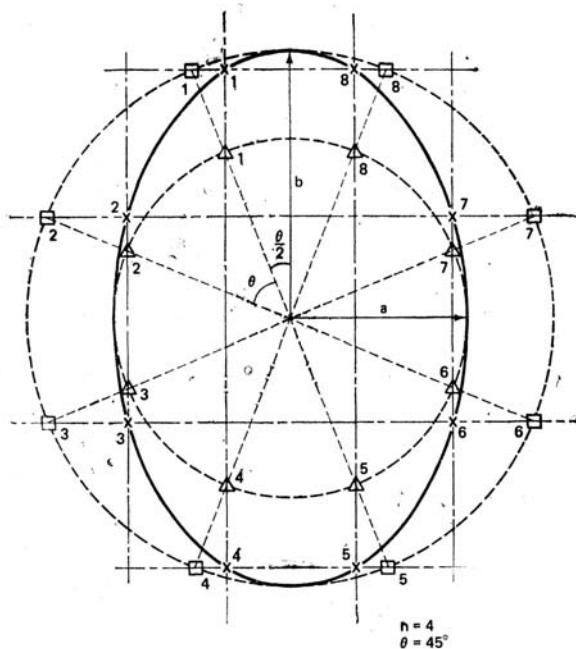


Рис. 5.13. Графічна побудова чебишовських полюсів.

Таким чином, якщо відомі значення  $n$  та  $\varepsilon$ , то можна визначити полюси нормованого фільтра нижніх частот Чебишова. На рис. 5.13 наведено такий еліпс, у якого вертикальну та горизонтальну напівосі позначено як  $b$  та  $a$  відповідно. Напівосі можна виразити й у такому вигляді:

$$b = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \right]^{1/n} + \left[ \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \right]^{-1/n} \right\}, \quad (5.68)$$

$$a = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \right]^{1/n} - \left[ \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \right]^{-1/n} \right\}. \quad (5.69)$$

Координати полюсів на еліпсі можна геометрично зв'язати із двома баттервортовськими колами з радіусами  $a$  та  $b$ . Вертикальні координати полюсів фільтра Чебишова  $n$ -го порядку дорівнюють вертикальним координатам відповідних полюсів фільтра Баттерворта  $n$ -го порядку, що містяться на колі більшого круга (радіусом  $b$ ), тоді як горизонтальні координати чебишовських полюсів співпадають із відповідними координатами баттервортовських полюсів, що містяться на колі меншого круга (радіусом  $a$ ) (рис. 5.13). Якщо зважити на зв'язок між координатами баттервортовських та чебишовських полюсів, то фільтр Чебишова  $n$ -го порядку буде мати від'ємний дійсний полюс при  $p = -a$ , якщо  $n$  – непарне ціле число.

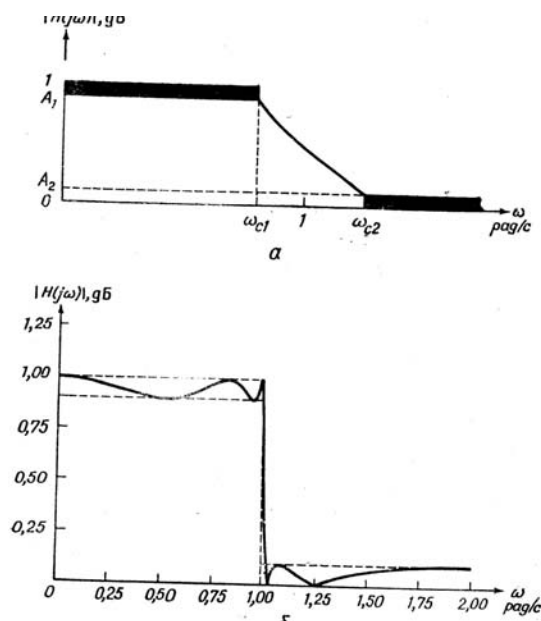


Рис. 5.14. АЧХ еліптичного фільтру.

Щоб знайти передаточну функцію  $H(p)$  нормованого фільтра нижніх частот Чебишова за заданою функцією квадрату модуля, що визначається (5.56), знову виконаємо такі ж дії, як й у випадку фільтра Баттерворта.

*Крок 1.* Утворюємо

$$H(p)H(-p) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(p/i)}.$$

*Крок 2.* Знаходимо полюси  $H(p)H(-p)$  згідно з (5.66).

*Крок 3.* Для побудови  $H(p)$  скористаємось співмножниками, які пов'язані із полюсами, що розташовані у лівій  $p$ -напівплощині.

$$H(p) = \prod \frac{1}{p - p_k}, \quad (5.70)$$

де  $p_k$  – полюси у лівій  $p$ -напівплощині, які визначаються згідно (5.66) ( $r = \overline{1, n}$ ).

*Приклад.* Знайти передаточну функцію для фільтра Чебишова третього порядку із нерівномірністю передачі в смузі пропускання 1 дБ.

*Розв'язання.* Оскільки  $A_{max} = 1$  дБ, вираз  $\varepsilon = \sqrt{10^{1/10} - 1} = 0,5088$ ;  $\text{Arcsh}(1/\varepsilon) = \text{Arcsh}1,9652 = 1,4280$ .

Оскільки  $n = 3$ ,  $(1/n)\text{Arcsh}(1/\varepsilon) = 1,4280/3 = 0,4760$ ;  $\text{sh} 0,4760 = 0,4942$ ,  $\text{ch} 0,4760 = 1,1154$ .

Згідно (5.66) отримуємо:

$$\sigma_1 = -0,4942 \sin(\pi/6) = -0,2471; \quad \omega_1 = 1,1154 \cos(\pi/6) = 0,9660;$$

$$\sigma_2 = -0,4942 \sin(\pi/2) = -0,4942; \quad \omega_2 = 1,1154 \cos(\pi/2) = 0;$$

$$\sigma_3 = -0,4942 \sin(5\pi/6) = -0,2471; \quad \omega_3 = 1,1154 \cos(5\pi/6) = -0,9660.$$

Це означає, що полюси мають такі координати:

$$s_1 = \sigma_1 + i\omega_1 = -0,2471 + i0,9660; \quad s_2 = \sigma_2 + i\omega_2 = -0,4942; \quad s_3 = \sigma_3 + i\omega_3 = -0,2471 - i0,9660.$$

Отже, шукана передаточна функція визначається як

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{k}{(p - s_1)(p - s_2)(p - s_3)} = \frac{k}{(p + 0,4942)[(p + 0,2471)^2 + (0,9660)^2]} = \\ &= \frac{k}{p^3 + 0,9883p^2 + 1,2384p + 0,4913}. \end{aligned}$$

### 5.3.2. Апроксимація по Бесселю

Фільтри Баттерворта та Чебишова апроксимують функцію передачі (амплітудно-частотну характеристику) ідеалізованого фільтра нижніх частот.

Часто більш важливо апроксимувати фазочастотну характеристику за умови її лінійності. Вимоги до лінійності фазової характеристики або до сталості групового часу уповільнення ідеалізованого фільтра можна зв'язати із поліномами передаточної функції, якщо записати її у полярній формі, тобто

$$H(i\omega) = R(\omega) + iX(\omega) = |H(i\omega)|e^{-\varphi(\omega)} = e^{-\alpha(\omega)-i\varphi(\omega)}, \quad (5.71)$$

де

$$-\alpha(\omega) = \ln |H(i\omega)|, \quad \varphi(\omega) = -\arctg[X(\omega)/R(\omega)].$$

Щоб не мати справу із арктангенсом функції  $\varphi(\omega)$ , краще перейти до функції групового часу  $\tau(\omega)$ , яка виражається у такій формі:

$$\tau(\omega) = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = -\frac{d}{d\omega} \arctg \frac{X(\omega)}{R(\omega)} = \frac{X(\omega)R'(\omega) - X'(\omega)R(\omega)}{|H(i\omega)|^2}. \quad (5.72)$$

Ця функція являє собою раціональну функцію, тому її легше перетворювати й оперувати з нею. Якщо треба отримати фільтр із лінійною фазовою характеристикою, то треба отримати фільтр, функція групового часу якого буде сталою величиною.

Оскільки  $R(\omega)$  є парна функція, а  $X(\omega)$  – непарна, а також похідна парної функції є непарна і навпаки, функція  $\tau(\omega)$  є парна функція. Далі, функція  $\tau(\omega)$  являє собою відношення двох поліномів, які залежать від  $\omega^2$ . Отже, задача відшукування функції  $\tau(\omega)$  майже не відрізняється від задачі відшукування функції  $|H(i\omega)|^2$ , що являє собою апроксимацію сталої у межах смуги пропускання.

#### 5.3.2.1. Передаточна функція.

Прямий підхід до проектування апроксимуючого поліному для фільтра нижніх частот із *максимально плоскою характеристикою групового часу* полягає у такому. Нехай загальний вигляд передаточної функції такого фільтра – це функція тільки із одними полюсами

$$H(p) = \frac{a_0}{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_{n-1}p^{n-1} + p^n} = \frac{a_0}{M_2(p) + N_2(p)}, \quad (5.73)$$

де

$$M_2(p) = a_0 + a_2p^2 + \dots, \quad N_2(p) = p(a_1 + a_3p^2 + \dots) \quad (5.74)$$

– парна та непарна функції.

Отже,  $H(p)$  можна записати у такому вигляді:

$$H(p) = \frac{a_0}{M_2(p) + N_2(p)} = \frac{a_0[M_2(p) - N_2(p)]}{M_2^2(p) - N_2^2(p)} = M(p) + N(p). \quad (5.75)$$

$$R(\omega) = M(p) = \frac{a_0M_2(p)}{M_2^2(p) - N_2^2(p)}, \quad X(\omega) = N(p) = -\frac{a_0N_2(p)}{M_2^2(p) - N_2^2(p)}$$

також є парна та непарна частини відповідно функції  $H(p)$ .

Після підстановки цих виразів у (5.72) одержимо

$$\tau\left(\frac{p}{i}\right) = \frac{M_2(p)N_2'(p) - N_2(p)M_2'(p)}{M_2^2(p) - N_2^2(p)}. \quad (5.76)$$

Якщо тепер використати (5.76) вирази (5.74) для поліномів  $M_2(p)$  і  $N_2(p)$ , можна отримати характеристику групового часу затримки  $\tau\left(\frac{p}{i}\right)$  у вигляді функції параметрів  $a_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) фільтра:

$$\tau\left(\frac{p}{i}\right) = \frac{a_0 a_1 + (3a_0 a_3 - a_1 a_2)p^2 + (5a_0 a_3 - 3a_1 a_4 + a_2 a_3)p^4 + \dots}{a_0^2 + (2a_0 a_2 - a_1^2)p^2 + (2a_0 a_4 - 2a_1 a_3 + a_2^2)p^4 + \dots}. \quad (5.77)$$

Існує відносно простий шлях встановлення відповідності між знаменником передаточної функції фільтра вигляду (5.73), яка містить тільки полюси, класом поліномів Бесселя із забезпеченням функції групового часу затримки (5.77) та одиничного значення  $\tau(0) = 1$ . Це дозволяє отримати фільтр з максимально плоскою характеристикою групового часу затримки, або лінійною фазо-частотною характеристикою, який називають *фільтром Бесселя*.

Точніше, фільтр нижніх частот Бесселя  $n$ -го порядку характеризується передаточною функцією

$$H(p) = \frac{b_0}{\hat{B}_n(p)}, \quad (5.78)$$

де  $\hat{B}_n(p)$  – поліном Бесселя  $n$ -го степеня, а  $b_0$  – стала нормування, яка дорівнює

$$b_0 = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad (5.79)$$

або визначається як  $b_0 = \hat{B}_n(0)$ .

Функції Бесселя задовольняють рекурентному співвідношенню

$$B_n(p) = (2n - 1)B_{n-1}(p) + p^2 B_{n-2}(p) \quad (5.80)$$

з початковими умовами

$$B_0(p) = 1, \quad b_1(p) = p + 1. \quad (5.81)$$

Ці функції можна також подати у вигляді

$$B_n(p) = \sum_{k=0}^n b_k p^k, \quad (5.82)$$

де

$$b_k = \frac{(2n - k)!}{2^{n-1} k! (n - k)!}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (5.83)$$

Так, наприклад, використовуючи співвідношення (5.80) та (5.81) при  $n = 3$  маємо. Для конкретного значення  $n = 3$  маємо:

$$n = 2. \quad B_2(p) = (2 \cdot 2 - 1)B_1(p) + p^2 B_0(p) = 3(p + 1) + p^2 \cdot 1 = p^2 + 3p + 3.$$

$$n = 3. \quad B_3(p) = (2 \cdot 3 - 1)B_2(p) + p^2 B_1(p) = 5(p^2 + 3p + 3) + p^2(p + 1) = p^3 + 6p^2 + 15p + 15.$$

Передаточна функція фільтру нижніх частот Бесселя 3-го порядку буде такою:

$$H(p) = \frac{b_0}{B_3(p)} = \frac{(2 \cdot 3)! / (2^3 3!)}{p^3 + 6p^2 + 15p + 15}.$$

На рис. 5.15 наведено фазочастотні характеристики та характеристики групового часу для фільтра нижніх частот Бесселя  $n$ -го порядку, від  $n = 1$  до  $n = 10$ . Слід відзначити, що всі фільтри Бесселя порядку  $n \geq 2$  дуже добре апроксимують лінійну фазову характеристику при  $\omega \in [0, 1]$ .



Фільтр Бесселя із передаточною функцією (5.78) дає тільки одиничний груповий час уповільнення  $\tau(0) = 1$ . Якщо бажано мати  $\tau(0) = \tau_0 \neq 1$ , треба виконати перетворення  $p \rightarrow \tau_0 p$  або  $\omega \rightarrow \tau_0 \omega$ . По суті ці перетворення зводяться до змінювання горизонтального мірила фазових характеристик фільтра Бесселя в  $1/\tau_0$  раз за умови збереження незмінним вертикального мірила. Тож тангенс кута нахилу, що дорівнює 1, або

$$\Delta\varphi(\omega)/\Delta\omega = 1 \quad (5.84)$$

стає рівним тангенсу кута нахилу

$$\frac{\Delta\varphi(\omega)}{\Delta\omega/\tau_0} = \tau_0, \quad (5.85)$$

З цієї причини горизонтальну вісь на рис. 5.15 позначено символом  $\tau_0\omega$  рад поряд із її позначенням  $\omega$  рад/с.

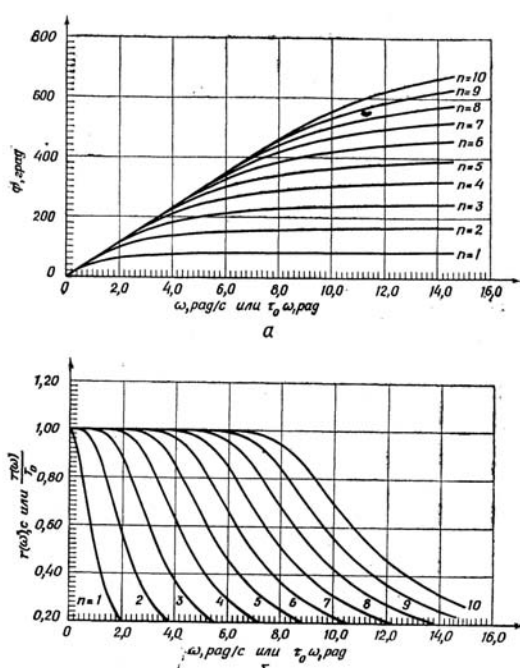


Рис. 5.15. Фазочастотні характеристики а) та характеристики групового часу б) фільтрів Бесселя

Отже, передаточна функція фільтра нижніх частот із лінійною фазовою характеристикою та груповим часом уповільнення  $\tau_0$  має вигляд:

$$H(p) = \frac{\hat{B}_n(0)}{\hat{B}(\tau_0 p)} = \frac{b_0}{B(\tau_0 p)}. \quad (5.86)$$

Така форма  $H(p)$  гарантує, що результуючий фільтр буде мати функцію передачі НЧ-типу. Степінь дільника, що входить у вираз (5.86), залежить від вимог, що пред'являються до фільтру, та інших міркувань.

*Приклад.* Знайти передаточну функцію фільтра нижніх частот другого порядку із максимально плоскою характеристикою групового часу та  $\tau_0 = 3$ .

*Розв'язання.* Розв'яжемо цю задачу двома шляхами. Перший метод спирається на процедуру прирівнювання до нуля коефіцієнтів при степенях  $p$ , а другий використовує поліноми Бесселя та процедуру змінювання мірила шкали частот.

Припустимо, що передаточна функція має таку форму:

$$H(p) = \frac{k}{p^2 + b_1p + b_0}, \quad (5.87)$$

Згідно з (5.76) функція групового уповільнення визначається як

$$\tau\left(\frac{p}{i}\right) = \frac{(p^2 + b_0)b_1 - b_1p(2p)}{(p^2 + b_0)^2 - b_1^2p^2}. \quad (5.88)$$

Визначимо

$$e(p) \triangleq \tau\left(\frac{p}{i}\right) - \tau(0) = \tau\left(\frac{p}{i}\right) - 3 = \frac{-3p^4 + (3b_1^2 - b_1 - 6b_0)p^2 + b_0(b_1 - 3b_0)}{(p^2 + b_0)^2 - b_1^2p^2}. \quad (5.89)$$

Значить, треба покласти  $3b_1^2 - b_1 - 6b_0 = 0$  та  $b_1 - 3b_0 = 0$ . Її розв'язок:  $b_1 = 1$ ,  $b_0 = 1/3$ . Отже, маємо

$$H(p) = \frac{k}{p^2 + p + (1/3)} = \frac{1}{3p^2 + 3p + 1}.$$

Інший шлях – використання виразу (5.85) – призводить до такої ж функції.

$$H(p) = \frac{k}{\hat{B}_2(3p)} = \frac{k}{(3p)^2 + 3(3p) + 3} = \frac{k}{9p^2 + 9p + 3} = \frac{1}{3p^2 + 3p + 1}.$$

$$\tau\left(\frac{p}{i}\right) = \frac{a_1a_1 + (3a_0 - a_1a_2)p^2 + a - 2p^4}{a_0^2 + (2a_0a_2 - a_1^2)p^2 + (-2a_1 + a_2^2)p^4 - p^6}.$$

Припустимо, що бажано розрахувати фільтр із одиничним груповим уповільненням –  $\tau(0) = 1$ . Оскільки  $\tau(0) = \frac{a_0a_1}{a_0^2} = \frac{a_1}{a_0}$ , то вочевидь, у даному випадку має бути  $a_1 = a_0$ .

Запишемо вираз для похибки

$$e(p/i) \triangleq \tau(p/i) - \tau(0) = \tau(p/i) - 1 = \frac{(3a_1 - 3a_1a_2 + a_1^2)p^2 + (a_2 + 2a_1 - a_2^2)p^4 + p^6}{a_1^2 + (2a_1a_2 - a_1^2)p^2 + (-2a_1 + a_2^2)p^4 - p^6}. \quad (5.90)$$

Один із шляхів вирішення задачі полягає у тому, щоб похибка зникала при  $p = 0$ . Інший шлях полягає у тому, щоб функція похибки мала якомога більше нулів при  $p = 0$ . Це еквівалентно тому, щоб прирівняти до нуля всі коефіцієнти в поліномі чисельника, за винятком останнього (при старшому степені  $p$ ). Тоді одержимо систему рівнянь

$$\begin{aligned} 3 - 3a_2 + a_1 &= 0, \\ a_2 + 2a_1 - a_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Бачимо, що ця система рівнянь є нелінійна й у загальному випадку її треба вирішувати наближеними методами. У даному випадку її розв'язок такий:  $a_1 = a_0 = 15$ ,  $a_2 = 6$ . Таким чином, шукана передаточна функція має вигляд

$$H(p) = \frac{a_0}{a_0 + a_1p + a_2p^2 + p^3} = \frac{15}{15 + 15p + 6p^2 + p^3}. \quad (5.92)$$

### 5.3.2.2. Перехідні фільтри

Хоча фільтр Бесселя дає фазовий зсув, що відрізняється значно більшою лінійністю порівняно з фільтрами Баттерворта та Чебишова, амплітудно-частотна характеристика передачі фільтру Бесселя не має досить крутого зрізу. Існує один клас фільтрів, які забезпечують проміжне вирішення, що має кращі амплітудно-частотні характеристики зрізання, ніж фільтри Бесселя, й кращі фазо-частотні характеристики, ніж фільтри Баттерворта. Цей компроміс досягається шляхом розміщення полюсів фільтру між полюсами фільтрів Баттерворта та Бесселя.

Як приклад, розглянемо фільтр Баттерворта другого порядку із полюсами в  $-(1/\sqrt{2} \pm i(1/\sqrt{2}))$ . Фільтр Бесселя другого порядку має полюси в  $-(3/2) \pm i\sqrt{3}/2$ . Фільтр Баттерворта нормується так, щоб радіус-вектор цього полюсу дорівнював 1. Тож фільтр Бесселя треба нормувати так, щоб радіус-вектор його полюсу також дорівнював 1. Для цього треба нормувати частоту шляхом ділення її на  $\sqrt{3}$ . Тоді передаточна функція нормованого фільтра Бесселя другого порядку визначиться як

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{3}p + 1} = \frac{1}{\left(p + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \left(p + \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)} \quad (5.93)$$

Перехідний фільтр буде мати полюси між полюсами фільтра Баттерворта  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$  та полюсами фільтра Бесселя  $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm i\frac{1}{2}$ . Фільтр, полюси якого містяться посередині між полюсами фільтру Баттерворта та Бесселя, має передаточну функцію

$$H(p) = \frac{1}{\left(p + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{1 + \sqrt{2}}{4}\right) \left(p + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4} - i\frac{1 + \sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{1}{p^2 + 1,5731p + 0,9830} \quad (5.94)$$

Перехідні фільтри із передаточною функцією типу (5.94) часто виявляються кращими фільтрами для тональних посилок (в системах зв'язку), оскільки хороша фазова характеристика обмежує викривлення низьким рівнем. З іншого боку, виділення тональних посилок вимагає досить хорошої амплітудно-частотної характеристики.

### 5.3.3. Частотні перетворення для рекурсивних фільтрів

Особлива увага в методі аналогового прототипу до нормованих НЧ-структур пов'язана із такими обставинами:

1. Нормовані фільтри нижніх частот належать до фільтрів, які легше реалізувати, використовуючи ту чи іншу апроксимацію (Баттерворта, Чебишова, Бесселя) функції модуля передачі ніж будь-які інші фільтри.

2. Більшість вимог, які пред'являються до ненормованих фільтрів нижніх частот, смуғастих, режекторних фільтрів і до фільтрів верхніх частот, простіше реалізувати шляхом відповідного перетворення нормованої НЧ-структури.

Ці частотні перетворення у першу чергу розглядаються у межах такої реалізації методу аналогового прототипу, коли нормалізований аналоговий фільтр спершу перетворюється у інший аналоговий фільтр, за яким шляхом дискретизації розраховується цифровий фільтр із заданими характеристиками. У другому випадку нормований фільтр нижніх частот дискретизується одразу ж, а потім шляхом перетворення його смуғи частот формується цифровий фільтр із заданими характеристиками. Ці два підходи до реалізації методу аналогового прототипу наведені на рис. .

**Перетворення НЧФ  $\rightarrow$  НЧФ** Цей процес ще називають *масштабуванням по частоті*, або *денормуванням по частоті*. Всі передаточні функції, що розглядалися вище, у тій чи іншій апроксимації ідеалізованої функції модуля передачі (Баттерворта, Чебишова, Бесселя), стосувалися фільтрів нижніх частот з частотою зрізу  $\omega_c = 1$  рад/с. Нехай необхідно отримати частоту зрізу  $\omega_c \neq 1$  рад/с. Це досягається шляхом виконання у передаточній функції або частотних характеристиках частотних перетворень

$$p \rightarrow p/\omega_c, \quad \omega \rightarrow \omega/\omega_c, \quad (5.95)$$

що відповідає заміні у відповідних математичних виразах цих функцій символів  $p$  або  $\omega$  на їхні перетворення.

*Приклад.* Заданий аналоговий нормований НЧ-фільтр типу Баттерворта 3-го порядку з передаточною функцією

$$H_N(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}.$$

Знайти передаточну функцію НЧ-фільтра того ж типу і порядку з частотою зріза  $\omega_c = 5$  рад/с.

*Розв'язання.* Застосуємо першу заміну у (5.95):  $p \rightarrow p/\omega_c$ . Отримуємо передаточну функцію ненормованого НЧ-фільтра Баттерворта:

$$H_{\text{НЧ}}(p) = \frac{1}{(p/\omega_c)^3 + 2(p/\omega_c)^2 + 2(p/\omega_c) + 1} = \frac{\omega_c^3}{p^3 + 2\omega_c p^2 + 2\omega_c^2 p + \omega_c^3} = \frac{125}{p^3 + 10p^2 + 50p + 125}.$$

Якщо тепер отримати вираз для функції квадрату модуля передаточної функції  $H_{\text{НЧ}}(p)$ , можна з'ясувати, що

$$|H_{\text{НЧ}}(i\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_c=5\text{рад/с}} = 0,5.$$

Це вказує на те, що частотне перетворення виконано вірно і фільтр має характеристики фільтрів типу Баттерворта.

Отже, перетворення (5.95) є лише зміна частотного масштабу, тобто якщо  $x$  є точка на осі частоти нормованої частотної шкали, то  $\omega_c x$  є точка на осі частоти після частотного перетворення або ж зміни масштабу відповідно до (5.95).

**Перетворення НЧФ  $\rightarrow$  СФ** Частотне перетворення, яке перетворює нормований НЧ-прототип (з однією смугою пропускання, що має середню частоту  $\omega_0$ ) у смугастий фільтр (СФ) (з двома смугами пропускання із середніми частотами  $\omega_0$  та  $-\omega_0$ , кожна з яких характеризується шириною смуги  $B$ ), є нелінійне. (рис. ).

Розглянемо перетворення

$$p \rightarrow \frac{p^2 + \omega_0^2}{Bp}, \quad \text{або} \quad \omega \rightarrow \frac{-\omega^2 + \omega_c^2}{B\omega}, \quad (5.96)$$

де  $\omega_0$  – потрібна середня частота, а  $B$  – ширина смуги частот у смугастому фільтрі. Ширина смуги частот смугастого фільтра визначається як різниця між двома частотами зрізу  $\omega_{c1}$ ,  $\omega_{c2}$  по рівню 3 дБ (додатними) у вигляді  $B = |\omega_{c1} - \omega_{c2}|$ , де  $\omega_{c1}$  та  $\omega_{c2}$  є розв'язками відносно  $\omega_c$  рівняння:

$$-10 \log \frac{|H(i\omega_c)|^2}{|H(i\omega_0)|^2} = 3.$$

Перетворення частоти відповідно до (5.96) має такі важливі характеристики:

1. Точка  $\omega = 0$  відображується на середні частоти  $\omega_0$  та  $-\omega_0$ . У загальному випадку точка  $x$  відображується на дві точки  $\omega_x$  та  $-\omega_x$ , за винятком  $x = \infty$ , яка відображується у початок координат.
2. Додатна (від'ємна) уявна вісь відображується на інтервал  $(\omega_0, \infty)$  та  $(-\infty, \omega_0)$   $[(0, \omega_0)$  та  $(-\omega_0, 0)]$ .
3. Нехай  $\pm\omega_x$  та  $\pm\omega_{-x}$  будуть відображеннями точок  $x$  та  $-x$ , тоді згідно (5.96)

$$\omega_0^2 = \omega_x \omega_{-x}. \quad (5.97)$$

Внаслідок виконання умови (5.97) результуючі характеристики згасання (і фазова) у смузі пропускання не будуть мати арифметичну симетрію відносно  $\omega_0$ , а демонструють геометричну симетрію. Якщо покласти  $x = 1$ , то  $\omega_1$  та  $\omega_{-1}$  будуть відповідати межах смуги пропускання результуючого фільтра. Отже, маємо

$$B = \omega_1 - \omega_{-1}, \quad \omega_0^2 = \omega_1 \omega_{-1}. \quad (5.98)$$

Отже, у випадку перетворення типу НЧФ  $\rightarrow$  СФ (5.96) можна отримати передаточну функцію смугастого фільтра  $H_{СФ}(p)$  з передаточної функції НЧ-прототипу  $H_N(p)$  шляхом заміни  $p \rightarrow (p^2 + \omega_0^2)/Bp$ .

*Приклад.* Нехай треба спроектувати смугастий фільтр, який відповідає таким вимогам:

- а) Середня частота смуги пропускання дорівнює  $\omega_0 = 100$  рад/с.
- б) Ширина смуги пропускання по рівню 3 дБ дорівнює 20 рад/с.
- в) Максимальне згасання, яке допускається в смузі пропускання в межах від  $\omega_0 = 100$  рад/с до  $\omega_1 = 102,5$  рад/с, складає 0,05 дБ.

г) Мінімальне згасання в смузі затримувannya має складати 10 дБ для  $\omega > \omega_2 = 120$  рад/с.

д) Для  $\omega \geq \omega_0$  функція передачі має бути монотонно спадаючою.

Необхідно знайти передаточну функцію фільтра.

*Розв'язання.* Умова д) вимагає вибору фільтра Баттерворта. Порядок фільтра буде визначатися умовами а) – г). У загальному випадку значно простіше визначити порядок  $n$  фільтра Баттерворта в області, що задана для НЧ-прототипу. Але при цьому треба перетворити умови а) – г) до вигляду, який відповідає НЧ-прототипу. Умови а) та б) для визначення порядку фільтра не потрібні. Умови в) та г) після перетворення приймають такий вигляд:

в') Максимальне згасання, що допускається у смузі пропускання в межах від  $\omega = 0$  до  $\omega = 0,25$  рад/с, складає 0,05 дБ.

г') Мінімальне згасання, яке вимагається у смузі затримувannya, дорівнює 10 дБ для частот  $\omega \geq 2$  рад/с.

Ці умови означають, що значення  $n$  має бути вибрано так, щоб задовольнити нерівності

$$-10 \log \left| \frac{1}{1 + (0,25)^{2n}} \right| \leq 0,05, \quad -10 \log \left| \frac{1}{1 + 2^{2n}} \right| > 10. \quad (5.99)$$

Звідси після деяких перетворень знайдемо, що  $n \geq 2$ . Отже, передаточна функція нормованого фільтра нижніх частот визначається рівнянням

$$H_N(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}. \quad (5.100)$$

При  $\omega_0 = 100$  рад/с та ширині смуги за рівнем 3 дБ, що дорівнює 20 рад/с, передаточна функція шуканого смугастого фільтра буде визначатись виразом

$$\begin{aligned} H_{СФ}(p) &= H_N \left( \frac{p^2 + 10^{10}}{2 \cdot 10^4 p} \right) = \frac{1}{\left( \frac{p^2 + 10^{10}}{2 \cdot 10^4 p} \right) + \sqrt{2} \left( \frac{p^2 + 10^{10}}{2 \cdot 10^4 p} \right) + 1} = \\ &= \frac{4 \cdot 10^8 p^2}{(p^2 + 10^{10}) + \sqrt{2}(p^2 + 10^{10})(2 \cdot 10^4 p) + (4 \cdot 10^8 p^2)} = \\ &= \frac{4 \cdot 10^8 p^2}{p^4 + (2\sqrt{2} \cdot 10^4 p^3 + (2,04 \cdot 10^{10} p^2) + (2\sqrt{2} \cdot 10^{14} p) + 10^{20}}. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Амплітудно-частотні характеристики НЧ-прототипу та смугастого фільтра з потрібною передаточною функцією (5.101) наведено на рис. 5.16.

**Перетворення НЧФ  $\rightarrow$  РФ** Як й у попередньому випадку щоб одержати модель режекторного (загороджувального) фільтра (РФ) зручно почати із нормованого НЧ-прототипу й скористатися перетворенням частоти. Частотне перетворення є обернене (інверсне) перетворення НЧ  $\rightarrow$  СФ. Це означає, що частотне перетворення для переходу від нормованого фільтра нижніх частот до режекторного фільтра визначається виразом

$$p \rightarrow \frac{Bp}{p^2 + \omega_0^2} \quad \text{або} \quad \omega \rightarrow \frac{B\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2}, \quad (5.102)$$

де  $\omega_0$  є середня частота смуги затримувannya, а  $B$  – ширина смуги затримувannya. На відміну від смугастого фільтра цей фільтр у смугах шириною  $B$  затримує сигнал, а в решті діапазону пропускає.

*Приклад.* Припустимо, що нам треба спроектувати фільтр Баттерворта, що загороджує, який має відповідати таким вимогам:

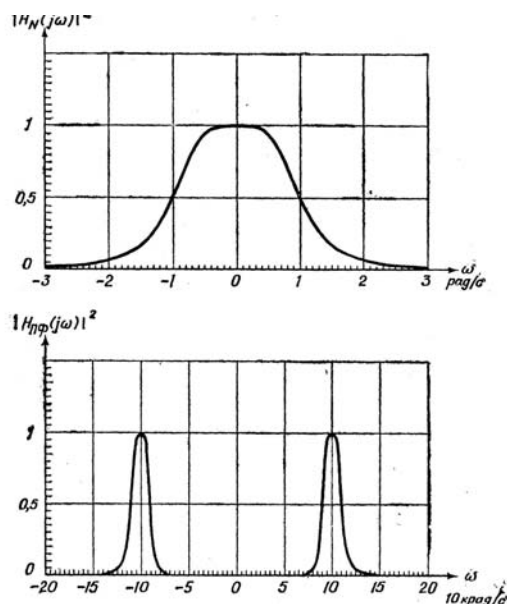


Рис. 5.16. АЧХ НЧ-прототипу та СФ

- а) Середня частота дорівнює 1 крад/с.  
 б) Ширина смуги затримування за рівнем 2 дБ складає 100 рад/с.  
 в) Мінімальне згасання у смузі затримування складає 40 дБ для  $1 \text{ крад/с} < \omega < 1010 \text{ рад/с}$ .  
 г) Максимальне згасання, що допускається у високочастотній смузі пропускання, складає 0,1 дБ для  $\omega \geq 1,2 \text{ крад/с}$ .

Знайти потрібну передаточну функцію.

*Розв'язання.* При  $\omega_0 = 10^3$  та  $B = 10^2$  вимоги до загороджувального фільтра, що задано, перетворюються у відповідні вимоги до НЧ-прототипу таким чином:

- в') Мінімальне згасання складає 40 дБ для частотного діапазону

$$\frac{B(1k)}{-(1k)^2 + \omega_0^2} < \omega < \frac{B(1010)}{-(1010)^2 + \omega_0^2} \text{ або } \omega > \frac{100(1010)}{(1010)^2 - 1000^2} = 5,02. \quad (5.103)$$

Ця умова вимагає  $n \geq 3$ .

- г') Максимальне згасання складає 0,1 дБ для діапазону

$$\omega < \frac{B(1,2k)}{(1,2k)^2 - \omega_0^2} = \frac{100 \cdot 1200}{1200^2 - 1000^2} = 0,27.$$

Ця умова вимагає  $n \geq 2$ .

Отже, за прототип може слугувати фільтр нижніх частот Баттерворта третього порядку. Нормована передаточна функція згідно (5.52):

$$H_N(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}.$$

Застосуємо перетворення частоти (5.102).

$$\begin{aligned} H(p) &= H_N\left(\frac{100p}{p^2 + 10^6}\right) = \frac{1}{\left(\frac{100p}{p^2 + 10^6}\right)^3 + 2\left(\frac{100p}{p^2 + 10^6}\right)^2 + 2\left(\frac{100p}{p^2 + 10^6}\right) + 1} = \\ &= \frac{p^6 + (3 \cdot 10^6 p^4) + (3 \cdot 10^{12} p^2) + 10^{18}}{p^6 + 200p^5 + (3,02 \cdot 10^6 p^4) + (4,01 \cdot 10^8 p^3) + (3,02 \cdot 10^{12} p^2) + (2 \cdot 10^{14} p) + 10^{18}} \end{aligned}$$

**Перетворення НЧ → ВЧ** Оскільки характеристики фільтрів нижніх частот є по суті обернені характеристики верхніх частот, частотне перетворення нормованої НЧ-передаточної функції у передаточну функцію фільтра верхніх частот із частотою зрізання  $\omega_c$  визначаються виразом

$$p \rightarrow \frac{\omega_c}{p} \text{ або } \omega \rightarrow \frac{\omega_c}{\omega}. \quad (5.104)$$

*Приклад.* Необхідно спроектувати фільтр ВЧ типу Баттерворта 2-го порядку з частотою зрізу  $\omega_c = 10$  рад/с.

*Розв'язання.* Процес проектування починаємо з побудови нормованого НЧ-прототипу Баттерворта 2-го порядку. Його передаточна функція має вигляд

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}.$$

Для отримання передаточної функції шуканого фільтру високих частот використовуємо перетворення (5.104).

$$H_{ВЧ}(p) = \frac{1}{(\omega_c/p)^2 + \sqrt{2}(\omega_c/p) + 1} = \frac{p^2}{p^2 + \omega_c\sqrt{2}p + \omega_c^2} = \frac{p^2}{p^2 + 10\sqrt{2}p + 100}.$$

**Частотні перетворення для цифрових фільтрів** За аналогією з аналоговими фільтрами існують відповідні перетворення для цифрового фільтра нижніх частот (з частотою зрізу  $\omega_c$ ) у інший фільтр (із іншою частотою зрізу  $\omega_{\text{ч}}$  чи то у смугастий, режекторний фільтр або у фільтр верхніх частот. Ці співвідношення мають такий вигляд:

1. Перетворення цифровий ФНЧ → цифровий ФНЧ.

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad \alpha = \frac{\sin\{[(\omega_c - \omega_{\text{ч}})/2]T_d\}}{\sin\{[(\omega_c + \omega_{\text{ч}})/2]T_d\}}, \quad (5.105)$$

де  $T_d$  – інтервал (період) дискретизації,  $\omega_c$  – частота зрізу вихідного ФНЧ (для нормованого фільтра  $\omega_c = 1$  рад/с),  $\omega_{\text{ч}}$  – частота зрізу для шуканого ФНЧ.

2. Перетворення цифровий ФНЧ → цифровий СФ.

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - \left(\frac{2\alpha\beta}{\beta+1}\right)z^{-1} + \left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)}{\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)z^{-2} - \left(\frac{2\alpha\beta}{\beta+1}\right)z^{-1} + 1}, \quad (5.106)$$

де

$$\alpha = \cos(\omega_0 T_d) = \frac{\cos\{[(\omega_l + \omega_{\text{ч}})/2]T_d\}}{\cos\{[(\omega_{\text{ч}} - \omega_l)/2]T_d\}}; \quad \beta = \text{ctg}\left(\frac{\omega_{\text{ч}} - \omega_l}{2}T_d\right) \text{tg}\left(\frac{\omega_c T_d}{2}\right), \quad (5.107)$$

$\omega_0, \omega_l, \omega_{\text{ч}}$  – середня, нижня та верхня частоти шуканого СФ відповідно.

3. Перетворення цифровий ФНЧ → цифровий РФ.

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - \left(\frac{2\alpha}{1+\beta}\right)z^{-1} + \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)}{\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)z^{-2} - \left(\frac{2\alpha}{1+\beta}\right)z^{-1} + 1}, \quad (5.108)$$

де

$$\alpha = \cos(\omega_0 T_d) = \frac{\cos\{[(\omega_{\text{ч}} - \omega_l)/2]T_d\}}{\cos\{[(\omega_{\text{ч}} + \omega_l)/2]T_d\}}; \quad \beta = \text{ctg}\left[\left(\frac{\omega_{\text{ч}} - \omega_l}{2}\right)T_d\right] \text{tg}\left(\frac{\omega_c T_d}{2}\right), \quad (5.109)$$

$\omega_0, \omega_l, \omega_{\text{ч}}$  – середня, нижня та верхня частоти шуканого СФ відповідно.

#### 4. Перетворення цифровий ФНЧ→цифровий ФВЧ.

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}, \quad \alpha = -\frac{\cos\{[(\omega_c - \omega_{ч})/2]T_d\}}{\cos\{[(\omega_c + \omega_{ч})/2]T_d\}}, \quad (5.110)$$

Із формул (5.104)–(5.110) випливає, що по суті кожний із нових фільтрів створюється шляхом перетворення цифрового фільтра-прототипу (можливо, нормованого) нижніх частот в інший відповідний фільтр (нижніх частот, смугастий, режекторний або верхніх частот) простою заміною  $z^{-1}$  у передаточній функції  $H(z)$  вихідного цифрового фільтра на потрібну функцію тієї ж змінної. Такі перетворення частотної смуги для цифрових фільтрів просто використовувати, оскільки вони відображують раціональну передаточну функцію у нову раціональну передаточну функцію, не вносячи спотворень у амплітудно-частотну характеристику. Тому вони успішно конкурують із методами перетворення частотної смуги аналогових фільтрів-прототипів нижніх частот вигляду (5.95)–(5.98).

### 5.4. Методи дискретизації аналогових фільтрів

Однією з основних процедур проектування цифрових фільтрів у методі аналогового прототипу є перехід від аналогової моделі фільтра до моделі цифрового фільтра, який відповідає заданим технічним вимогам. Оскільки у якості моделей фільтрів виступають передаточні функції, мова йде про перетворення передаточної функції  $H(p)$  аналогового фільтра у передаточну функцію  $H(z)$  цифрового фільтра. Ці перетворення можуть виконуватися одразу після розрахунку нормованого аналогового НЧ-фільтра, що задовольняє заданим вимогам, або після перетворення нормованого ФНЧ у потрібний частотний діапазон, тобто у заданий функціональний тип фільтру.

Оскільки нормовані аналогові фільтри-прототипи задовольняють всім наявним вимогам обробки сигналу, необхідно впевнитися у тому, що отримані в результаті дискретизації цифрові фільтри також задовольняють ті самі вимоги. Внаслідок цього бажано, щоб процедура дискретизації аналогового фільтру задовольняла такі умови:

1. Уявна вісь  $p$ -площини відображається в одиничне коло у  $Z$ -площині ( $z = e^{i\omega}$  для  $-\infty < \omega < \infty$ ). Формально ця умова записується у вигляді

$$\{p = i\omega \mid -\infty < \omega < \infty\} \rightarrow \{z = i\omega \mid -\pi < \omega \leq \pi\}.$$

Ця властивість при перетворенні необхідна для збереження частотних характеристик аналогових фільтрів.

2. Ліва половина  $p$ -площини ( $\text{Re}[p] < 0$ ) відображується у частину  $Z$ -площини, розташованої всередині одиничного кола ( $|z| < 1$ ).

Формально ця умова подається таким чином:

$$\{p \mid \text{Re } p < 0\} \rightarrow \{z \mid |z| < 1\}.$$

Ця умова необхідна при перетворенні для збереження властивості стійкості, що була у аналогового прототипу.

Найбільш поширеними методами дискретизації аналогових фільтрів є такі:

1. метод відображення диференціалів;
2. метод інваріантного перетворення імпульсної характеристики;
3. метод білінійного  $Z$ -перетворення;
4. метод узгодженого  $Z$ -перетворення.

#### 5.4.1. Метод відображення диференціалів

Метод відображення диференціалів аналогового фільтра полягає у апроксимації похідних диференціального рівняння, що описує динаміку фільтра, скінченними різницями. Це дає можливість отримати різницеве рівняння, яке апроксимує диференціальне



рівняння вигляду

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \quad (5.111)$$

де  $x(t), y(t)$  – вхідний та вихідний сигнали аналогового фільтра відповідно;  $a_k, b_k$  – сталі коефіцієнти.

$$H(p) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k p^k}{\sum_{k=0}^N a_k p^k} = \frac{Y(p)}{X(p)}, \quad (5.112)$$

де  $X(p), Y(p)$  – зображення по Лапласу вхідного та вихідного сигналів. Передбачається, що  $H(p)$  було отримано за допомогою одного з методів апроксимації. Вхідний та вихідний сигнали зв'язані між собою за допомогою інтегралу згортки

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad (5.113)$$

де  $h(t)$  – імпульсна характеристика, що є обернене перетворення Лапласа від  $H(p)$ .

Апроксимацію похідних можна виконувати як скінченними різницями вперед, так і скінченними різницями назад. Скінченні різниці назад  $k$ -го порядку (або обернені різниці) зазвичай позначаються символом  $\nabla^{(k)}$ , а скінченні різниці вперед (або прямі різниці) –  $\Delta^{(k)}$ .

$$\nabla^{(1)}[w(n)] = \frac{w(n) - w(n-1)}{T_d}; \quad n = N, N-1, \dots, 0. \quad (5.114)$$

$$\Delta^{(1)}[w(n)] = \frac{w(n+1) - w(n)}{T_d}; \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (5.115)$$

де, як завжди,  $T_d$  – інтервал дискретизації.

Розглянемо спочатку апроксимацію похідних за допомогою обернених різниць. Позначимо

$$\nabla^{(0)}[y(n)] = y(n).$$

Тоді

$$\left. \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right|_{t=nT_d} = \nabla^{(1)} \left[ \nabla^{(k-1)}[y(n)] \right]. \quad (5.116)$$

Рівняння (5.111) набуде вигляду

$$\sum_{k=0}^N c_k \nabla^{(k)}[y(n)] = \sum_{k=0}^M d_k \nabla^{(k)}[x(n)], \quad (5.117)$$

де  $y(n) = y(nT_d), x(n) = x(nT_d)$ .

Оскільки операція  $\nabla^{(1)}$  є лінійний інваріантний до зсуву оператор і  $\nabla^{(k)}$  може розглядатися як каскадне з'єднання  $k$  операторів  $\nabla^{(1)}$ , то

$$\mathcal{Z}[\nabla^{(1)}[x(n)]] = [(1 - z^{-1})/T_d]X(z) \quad (5.118)$$

і

$$\mathcal{Z}[\nabla^{(k)}[x(n)]] = [(1 - z^{-1})/T_d]^k X(z).$$

Оскільки  $\mathcal{L}[dy/dt] \rightarrow pY(p)$ , маємо відповідність між оператором  $p$  та  $z$  у вигляді

$$p = \frac{1 - z^{-1}}{T_d}, \quad (5.119)$$

$$z = \frac{1}{1 - pT_d}. \quad (5.120)$$

Таким чином, взявши  $z$ -перетворення від кожної частини, одержимо

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \left[ \frac{1 - z^{-1}}{T_d} \right]^k}{\sum_{k=0}^N a_k \left[ \frac{1 - z^{-1}}{T_d} \right]^k}. \quad (5.121)$$

Із порівняння (5.121) та (5.112) видно, що цифрова передаточна функція може бути одержана безпосередньо з аналогової передаточної функції шляхом заміни змінних (5.119).

Заміна похідних скінченними різницями забезпечує точне відображення  $p$ -площини на  $z$ -площину відповідно до (5.118).

При апроксимації диференціального рівняння, що описує динаміку аналогового фільтра, скінченно-різницеvim рівнянням необхідно виконати перевірку виконання перелічених вище умов щодо властивості збереження частотних характеристик аналогових фільтрів, а також стійкості у відповідному цифровому фільтрі.

З цією метою покладемо в (5.120)  $p = i\omega$ . Тоді

$$|z|^2 = \left| \frac{1}{1 - i\omega T_d} \right|^2 = \operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z = \left( \frac{1}{1 + \omega^2 T_d^2} \right)^2 + \left( \frac{\omega T_d}{1 + \omega^2 T_d^2} \right)^2.$$

Звідси неважко з'ясувати, пряма  $p = i\omega$ ,  $-\infty < \omega < \infty$  (уявна вісь  $p$ -площини) перетворенням (5.120) відображується у коло радіуса  $r = 1/2$  із центром  $O(1/2, 0)$  (рис. 5.12):

$$[\operatorname{Re} z - 1/2]^2 + [\operatorname{Im} z]^2 = (1/2)^2.$$

Це означає, що всі точки осі  $i\omega$  із  $p$ -площини після відображення (5.120) не переходять на одиничне коло  $z$ -площини. Отже, перша умова коректної дискретизації аналогового фільтра не виконується, що призводить до втрати вибіркового властивостей аналогового фільтра. Друга умова щодо стійкості у даному випадку виконується.

Застосування прямих різниць призводить до відповідності

$$p = \frac{z - 1}{T_d}, \quad (5.122)$$

$$z = 1 + pT_d. \quad (5.123)$$

За  $p = i\omega$  маємо  $z = 1 + i\omega T_d$ , тобто уявна вісь  $p$ -площини відображується у пряму  $z$ -площини, що зсунута вправо на одиницю. Ясно, що ні перша, ні друга вимоги до дискретизації аналогового фільтра не виконуються.

Підводячи підсумки щодо застосування методу, бачимо, що застосування доволі простих підстановок вигляду (5.119) або (5.122) дозволяє безпосередньо перейти від заданої функціональної передаточної функції аналогового фільтра до шуканої раціональної передаточної функції дискретного фільтра, хоча характеристики вихідного аналогового фільтра не зберігаються. Це обумовлює використання інших, більш ефективних, але й більш складних методів дискретизації аналогових фільтрів.

### 5.4.2. Метод інваріантного перетворення імпульсної характеристики

Цей метод дискретизації аналогових фільтрів, який ще називають методом стандартного  $z$ -перетворення, характеризується тим, що у якості імпульсної характеристики цифрового фільтру, що розраховується, використовується дискретизована імпульсна характеристика відповідного аналогового фільтра. В результаті частотна характеристика цифрового фільтра створюється шляхом періодичного повторювання (накладання) з частотою дискретизації частотної характеристики дискретизованого аналогового фільтра.

Процес розрахунків згідно методу інваріантного перетворення імпульсної характеристики можна подати у вигляді алгоритму, який наведено на рис.

З метою ілюстрації метода інваріантного перетворення імпульсної характеристики розглянемо аналоговий фільтр, динаміка якого описується передаточною функцією

$$H(p) = \frac{\sum_{k=1}^M b_k p^k}{\sum_{k=1}^N a_k p^k}. \quad (5.124)$$

За припущення відсутності кратних полюсів у передаточній функції (5.124) і враховуючи, що розглядається стійкий аналоговий фільтр, її можна розкласти на елементарні дроби і подати у вигляді

$$H(p) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{p + \alpha_k}. \quad (5.125)$$

Цифровий фільтр з імпульсною характеристикою, яка співпадає із дискретизованою імпульсною характеристикою аналогового фільтра-прототипа, можна одержати, використовуючи відповідність

$$Y(p) = \sum_{l=1}^m \frac{A_l}{p + \alpha_l} \rightarrow H(z) = \sum_{l=1}^m \frac{A_l}{1 - e^{-\alpha_l T_d} z^{-1}}. \quad (5.126)$$

Якщо передаточна функція неперервного фільтра містить кратні полюси, то їм відповідають ланцюги типу

$$\left[ \frac{(-1)^{l-1} \partial^{l-1}}{(l-1)! \partial p^{l-1}} \frac{A_l}{1 - e^{-p T_d} z^{-1}} \right]_{p=\alpha_l}. \quad (5.127)$$

Імпульсна характеристика (імпульсна перехідна функція) визначається як обернене перетворення Лапласа від передаточної функції. Аналогічно, імпульсна характеристика цифрового фільтра  $h(nT)$  визначається як обернене  $z$ -перетворення його передаточної функції  $H(z)$ . Таким чином,

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \sum_{l=1}^m \frac{A_l}{p + \alpha_l} \right\} = \sum_{l=1}^m A_l e^{-\alpha_l t}. \quad (5.128)$$

Дискретизована імпульсна характеристика

$$h(nT_d) = \sum_{l=1}^m A_l e^{-\alpha_l n T_d}. \quad (5.129)$$

Якщо візьмемо  $z$ -перетворення від (5.129), то одержимо

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT_d) z^{-n} = \sum_{l=1}^m A_l \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha_l n T_d} z^{-n} = \sum_{l=1}^m \frac{A_l}{1 - e^{\alpha_l T_d} z^{-1}}. \quad (5.130)$$

Взагалі, перехід від передаточної функції неперервного фільтра до передаточної функції дискретного фільтра здійснюється за теоремою про лишки, але можна у більшості випадків користуватись формулою відповідності

$$\frac{1}{p + \alpha_i} \rightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-\alpha_i T_d}}. \quad (5.131)$$

або таблицями відповідності між типовими ланцюгами перетворення Лапласа та  $z$ -перетворення.

На рис. 5.17 показано відображення із  $p$ -площини в  $z$ -площину, що відповідає інваріантному перетворенню імпульсної характеристики. Кожна горизонтальна смуга шириною  $2\pi/T_d$  із  $p$ -площини відображається на  $z$ -площину. Тому всі суміжні смуги із  $p$ -площини будуть при відображенні накладатись одна на одну в  $z$ -площині.

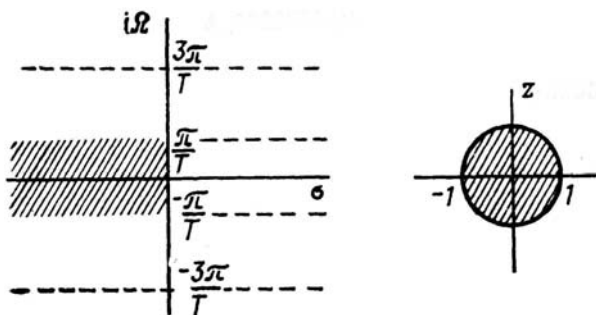


Рис. 5.17. Відображення  $p$ -площини в  $z$ -площину.

Звідси випливає, що для того, щоб частотні характеристики вихідного аналогового фільтра та цифрового фільтра, який розраховується за методом інваріантного перетворення імпульсної характеристики, відповідали один одному, необхідно, щоб смуга пропускання аналогового фільтра містилась в межах діапазону  $-\pi/T_d \leq \Omega \leq \pi/T_d$ . Для виконання цієї умови необхідно до початку перетворення вводити додатковий фільтр нижніх частот, який гарантує відповідне обмеження смуги пропускання аналогового фільтра.

*Приклад.* Інваріантне перетворення імпульсної характеристики аналогового фільтру з передаточною функцією

$$H(p) = \frac{2}{(p+1)(p+3)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+3}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{p + \alpha} \rightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-\alpha T_d}},$$

то

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-T_d}} - \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-3T_d}} = \frac{z^{-1}(e^{-T_d} - e^{-3T_d})}{1 - z^{-1}(e^{-T_d} + e^{-3T_d}) + e^{-4T_d}z^{-2}}.$$

Одна з процедур перетворення даних розрахунку аналогового фільтра для розрахунку цифрового фільтра відповідає вибору у якості імпульсної характеристики цифрового фільтра рівномірно розподілених відліків імпульсної характеристики аналогового фільтра. Іншими словами,  $h(n) = h_a(nT)$ , де  $T$  – період дискретизації.

$Z$ -перетворення від  $h(n)$  зв'язане з перетворенням Лапласа від  $h_a(t)$  співвідношенням

$$|H(z)|_{z=e^{pT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left( p + i \frac{2\pi}{T} k \right). \quad (5.132)$$

Зі співвідношення  $z = e^{pT_d}$  видно, що смуги шириною  $2\pi/T$  на  $p$ -площині відображаються на всю  $z$ -площину. Ліва половина кожної смуги  $p$ -площини відображається у внутрішню область одиничного кола, а права половина – у зовнішню область. Уявна вісь  $p$ -площини відображається в одиничне коло таким чином, що кожний відрізок довжиною  $2\pi/T$  уміщується один раз на одиничному колі. З (5.132) ясно, що кожна горизонтальна смуга з  $p$ -площини переноситься на  $z$ -площину для формування цифрової передаточної функції із аналогової передаточної функції. Таким чином, метод імпульсної інваріантності не відповідає простому алгебраїчному відображенню  $p$ -площини на  $z$ -площину.

Частотна характеристика цифрового фільтра зв'язана із частотною характеристикою аналогового фільтра співвідношенням

$$H(e^{i\omega}) = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\left(i\frac{\omega}{T_d} + i\frac{2\pi}{T_d}k\right). \quad (5.133)$$

З теореми дискретизації очевидно, що

$$H(e^{i\omega}) = \frac{1}{T_d} H\left(i\frac{\omega}{T_d}\right), \quad |\omega| \leq \pi$$

тільки коли  $H(\Omega) = 0$  при  $|\Omega| \geq \pi/T_d$ . Але будь-який практичний аналоговий фільтр не буде мати різко обмежену смугу, й отже, має місце накладання між послідовними членами в (5.133).

Внаслідок явища накладання, що виникає в процесі дискретизації, частотна характеристика результуючого цифрового фільтра не буде ідентичною вихідній аналоговій частотній характеристиці.

З метою дослідження інтерпретації методу розрахунку на основі імпульсної інваріантності за допомогою співвідношення між  $p$ - та  $z$ -площинами, розглянемо передаточну функцію аналогового фільтра, яку представлено у вигляді розкладання на прості дроби

$$H_a(p) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{p - p_k}. \quad (5.134)$$

Відповідна імпульсна характеристика має вигляд

$$h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k t} u(t),$$

де  $u(t)$  – аналогова функція одиничного стрибка. Тоді імпульсна характеристика цифрового фільтра дорівнює

$$h(n) = h(nT_d) = \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k n T_d} u(n) = \sum_{k=1}^N A_k (e^{p_k T_d})^n u(n).$$

Передаточна функція цифрового фільтра  $H(z)$  визначається виразом

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{p_k T_d} z^{-1}}. \quad (5.135)$$

Із порівняння (5.134) та (5.135) бачимо, що полюс у точці  $p = p_k$  із  $p$ -площини перетворюється в полюс у точці  $e^{p_k T}$  на  $z$ -площині, а коефіцієнти у розкладанні на прості дроби  $H(p)$  та  $H(z)$  є рівними. Якщо аналоговий фільтр є стійким, то величина  $e^{p_k T} < 1$ , тож відповідний полюс в цифровому фільтрі міститься знутрі одиничного

кола, і цифровий фільтр є також стійким. Незважаючи на те, що полюси в  $p$ -площині відображаються в полюси  $z$ -площини у відповідності із співвідношенням  $z_k = e^{p_k T}$ , слід звернути увагу на те, що процедура на основі інваріантності імпульсної характеристики не сповна відповідає відображенню  $p$ -площини на  $z$ -площину відповідно такому або будь-якому іншому співвідношенню. Зокрема, нулі цифрової передаточної функції є функцією полюсів та коефіцієнтів  $A_k$  у розкладанні на прості дроби, й вони у загальному випадку не будуть відображатися таким же чином, як відображались полюси. Це стає очевидним при виконанні процедури розкладання дробово-раціональної функції на найпростіші дроби.

*Приклад.* Розглянемо аналогову передаточну функцію  $H(p)$ , яку задано у вигляді

$$H(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2} = \frac{0,5}{p+a+ib} + \frac{0,5}{p+a-ib}.$$

Відповідна функція цифрового фільтра, який одержано за методом імпульсної інваріантності, дорівнює

$$H(z) = \frac{1/2}{1 - e^{-aT_d} e^{-ibT_d} z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - e^{-aT_d} e^{ibT_d} z^{-1}} = \frac{1 - (e^{-aT_d} \cos bT_d) z^{-1}}{((1 - e^{-aT_d} e^{-ibT_d} z^{-1})(1 - e^{-aT_d} e^{ibT_d} z^{-1}))}.$$

Отже, цифровий фільтр має один нуль в початку координат та нуль у точці  $z = e^{-aT_d} \cos bT_d$ .

На рис. (5.18) показано розташування полюсів та нулів для  $H(p)$  в  $p$ -площині та для  $H(z)$  в  $z$ -площині разом із аналоговою та цифровою частотними характеристиками. Ефекти накладання в цифровій частотній характеристиці очевидні.

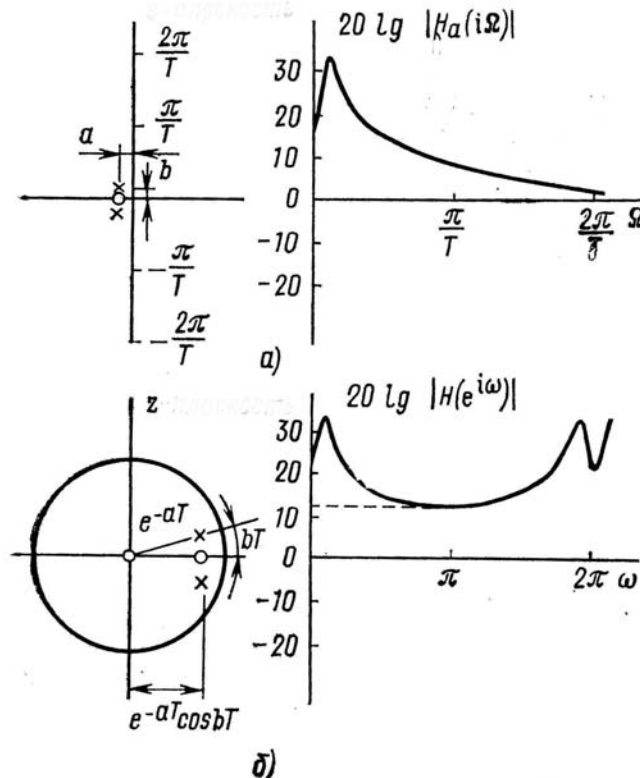


Рис. 5.18. Розташування полюсів та нулів і частотна характеристика

За високих частот дискретизації (малому  $T_d$ ) цифровий фільтр може мати дуже велике підсилення. З цієї причини замість (5.121) слушно використовувати вираз ви-

гляду

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{T_d A_k}{1 - e^{p_k T_d} z^{-1}}. \quad (5.136)$$

Це означає, що імпульсною характеристикою являється

$$h(n) = T_d h(nT_d).$$

### 5.4.3. Метод білінійного $z$ -перетворення

Одним із основних недоліків методу інваріантного перетворення імпульсної характеристики є відсутність однозначної функції переходу від  $p$ -площини до  $z$ -площини, що призводить до накладання частотних областей. Цей недолік відсутній у методі білінійного  $z$ -перетворення, яке визначається

Розглянемо процедуру синтезу цифрового фільтра, що ґрунтується на інтегруванні диференціального рівняння та подальшої чисельної апроксимації інтегралу.

Розглянемо рівняння першого порядку

$$c_1 y'(t) + c_0 y(t) = d_0 x(t). \quad (5.137)$$

Відповідна передаточна функція має вигляд

$$H(p) = \frac{d_0}{c_1 p + c_0}.$$

Запишемо  $y(t)$  у вигляді інтегралу

$$y(t) = \int_{t_0}^t y'(t) dt + y(t_0).$$

Зокрема, якщо  $t = nT_d$  і  $T_0 = (n-1)T_d$ , то

$$y(nT_d) = \int_{(n-1)T_d}^{nT_d} y'(\tau) d\tau + y[(n-1)T_d].$$

Якщо інтеграл апроксимується за формулою трапецій, то можна записати

$$y(nT_d) = y[(n-1)T_d] + (T_d/2) [y'(nT_d) + y'[(n-1)T_d]]. \quad (5.138)$$

Замістимо (5.137) в цю формулу:

$$[y(n) - y(n-1)] = (T_d/2) \{(-c_0/c_1)[y(n) + y(n-1)] + (d_0/c_1)[x(n) + x(n-1)]\},$$

де  $y(n) = y(nT_d)$ ,  $x(n) = x(nT_d)$ . Знайдемо  $z$ -перетворення:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{d_0}{c_1 \frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + c_0}. \quad (5.139)$$

Звідси,  $H(z)$  одержують із  $H(p)$  за допомогою заміни

$$p = \frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}, \quad (5.140)$$

тобто

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}. \quad (5.141)$$

Із (5.140) одержуємо вираз для

$$z^{-1} = \frac{2 - T_d p}{2 + T_d p}, \quad z = \frac{2 + T_d p}{2 - T_d p}. \quad (5.142)$$

Перетворення, яке використовує заміну (5.140), є білінійне перетворення. Покажемо, що це перетворення має властивість, за якою уявна вісь із  $p$ -площини відображається в одиничне коло. Для цього розглянемо  $p = i\omega$ . Тоді з (5.142)

$$z = \frac{2 + T_d p}{2 - T_d p} \Big|_{p=i\omega T_d} = \frac{(2 + i\omega T_d)^2}{4 + \omega^2 T_d^2} = \frac{[4 - (\omega T_d)^2] + i4\omega T_d}{4 + \omega^2 T_d^2} = |z|^2 e^{i\varphi(\omega)}.$$

$$r = |z| = \frac{4 + (\omega T_d)^2}{4 + (\omega T_d)^2} = 1; \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{4\omega T_d}{4 - (\omega T_d)^2}.$$

Отже, перетворення (5.142) відображує уявну вісь  $p = i\omega$  на одиничне коло у  $z$ -площині.

Для  $z = e^{i\omega T_d}$  з (5.140) маємо:

$$p = \frac{2}{T_d} \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{2}{T_d} \frac{e^{i\omega T_d} - 1}{e^{i\omega T_d} + 1} = i \frac{2}{T_d} \frac{\sin(\omega T_d/2)}{\cos(\omega T_d/2)} = i \frac{2}{T_d} \operatorname{tg}(\omega T_d/2) = \sigma + i\Omega.$$

Таким чином, для  $z$ , що міститься на одиничному колі,  $\sigma = 0$ ,  $\Omega$  та  $\omega$  зв'язані співвідношенням  $\Omega \rightarrow \frac{2}{T_d} \operatorname{tg}(\omega/2T_d)$ , що графічно показано на рис. ??.

Білінійне перетворення забезпечує просте відображення між аналоговими та цифровими фільтрами і є алгебраїчним перетворенням.

Недолік методу білінійного перетворення полягає у тому, що ефекти нелінійності співвідношення між частотними шкалами аналогового та цифрового фільтрів можна врахувати лише у тому випадку, коли частотна характеристика аналогового фільтра має вигляд ступінчастоподібної функції. Крім того, при білінійному перетворенні ані імпульсна, ані фазова характеристики аналогового та цифрового фільтрів не будуть співпадати.

#### 5.4.4. Метод узгодженого $z$ -перетворення

Метод узгодженого  $z$ -перетворення ґрунтується на безпосередньому відображенні полюсів та нулів із  $p$ -площини у полюси та нулі на  $z$ -площині. За такого відображення полюс (нуль) у точці  $p = a$   $p$ -площини відображується у полюс (нуль) у точці  $z = e^{aT_d}$   $z$ -площини. Отже, при узгодженому  $z$ -перетворенні відображуюча заміна матиме вигляд

$$p - a \rightarrow 1 - z^{-1} e^{aT_d}. \quad (5.143)$$

Варто зауважити, що полюси цифрового фільтра, що розраховані за методом узгодженого  $z$ -перетворення, є ідентичні полюсам, які отримують за методом інваріантного перетворення імпульсної характеристики того самого аналогового фільтра, але нулі суттєво відрізняються.

Метод узгодженого  $z$ -перетворення доволі простий у використанні, але у багатьох випадках він неприйнятний. Так, наприклад, якщо передаточна функція аналогового фільтра містить тільки полюси, передаточна функція цифрового фільтра також матиме тільки полюси, але у багатьох випадках вона не відповідатиме аналоговому фільтру.

#### 5.4.5. Приклади проектування цифрових фільтрів

Всі приклади розрахунків параметрів цифрових фільтрів виконуються згідно із узагальненим алгоритмом метода аналогового прототипу.

**Приклад 1.** Проектування цифрового фільтра нижніх частот із максимальною плоскою амплітудною характеристикою.

Таким фільтром є фільтр Баттерворта. Вхідні дані для розрахунків:



- 1) частота зрізу  $f_c = 50$  Гц;
- 2) у смузі пропускання  $f_c \in [0, f_c]$  на частоті  $f_1 = 25$  Гц квадрат модуля частотної характеристики

$$|H(i2\pi f_1)|^2 \geq \delta_1 = 0,9.$$

- 3) у смузі затримки  $f \in [f_c, \infty]$  на частоті  $f_2 = 75$  Гц квадрат модуля частотної характеристики

$$|H(i2\pi f_2)|^2 \leq \delta_2 = 0,10.$$

- 4) частота дискретизації  $f_d = \frac{1}{T_d} = \frac{1}{0,005} 1/c = 200$  Гц.

Підсумковий результат проектування подати у вигляді скінченно-різницевого рівняння, придатного для програмної реалізації цифрового фільтра.

*Розв'язання.* Оскільки технічні вимоги сформульовані у завданні на проектування, одразу переходимо до другого кроку алгоритму метода аналогового прототипу.

п.2. Відповідно до заданих технічних вимог переходимо до частотного діапазону  $\omega \in [0, 1]$  згідно з частотним перетворенням ФНЧ  $\rightarrow$  ФНЧ вигляду (??)

$$\omega'_1 \rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_c} = \frac{2\pi f_1}{2\pi f_c} = \frac{f_1}{f_c} = 0,5 [\text{рад/с}];$$

$$\omega'_2 \rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_c} = \frac{2\pi f_2}{2\pi f_c} = \frac{f_2}{f_c} = 1,5 [\text{рад/с}],$$

де  $\omega'_1, \omega'_2$  – частоти у смугах пропускання та затримувannya відповідно для нормованого аналогового НЧ-фільтра.

Отже, технічними вимогами до нормованого аналогового фільтра типа Баттерворта є тепер такі:

- 1) частота зрізу –  $\omega'_c = 1$  рад/с;
- 2) на частоті  $\omega'_1 = 0,5$  рад/с у смузі пропускання  $\omega' \in [0, \omega'_c]$  квадрат модуля частотної характеристики  $|H(i\omega'_1)|^2 \geq \delta_1 = 0,9$ ;
- 3) на частоті  $\omega'_2 = 1,5$  рад/с у смузі затримувannya  $\omega' \in [\omega'_c, \infty]$  квадрат модуля частотної характеристики  $|H(i\omega'_2)|^2 \leq \delta_2 = 0,10$ ;

п.3. Порядок аналогового нормованого ФНЧ Баттерворта визначаємо згідно умов (??),(??), використовуючи вираз (??) таким чином:

$$|H(i\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega'_1} = \frac{1}{1 + \omega^{2n_1}} \Big|_{\omega=\omega'_1} = \delta_1;$$

$$|H(i\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega'_2} = \frac{1}{1 + \omega^{2n_2}} \Big|_{\omega=\omega'_2} = \delta_2,$$

де  $n_1, n_2$  – степені поліномів Баттерворта, за яких виконуються вимоги  $\delta_1 = 0,9, \delta_2 = 0,10$ .

Із наведених виразів отримуємо

$$n_k = \frac{\log((1 - \delta_k)/\delta_k)}{2 \log \omega'_k}, \quad k = 1, 2.$$

$$n_1 = \frac{\log((1 - 0,9)/0,9)}{2 \log 0,5} = 1,585; \quad n_2 = \frac{\log((1 - 0,10)/0,10)}{2 \log 1,5} = 2,71.$$

Оскільки  $n_2 > n_1$ , то шуканий порядок апроксимуючого полінома Баттерворта

$$n = \max\{[n_1], [n_2]\} = \max\{2, 3\} = 3.$$

Отже, функція квадрату модуля шуканого фільтра буде такою:

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega^2)^3} = \frac{1}{1 + \omega^6}.$$

п.4. Розрахунок передаточної функції стійкого нормованого ФНЧ заданого порядку ( $n = 3$ ) можна здійснити двома способами:

а) із використанням полюсів  $p_k$  передаточної функції  $H(p)$ , що розташовані у лівій  $p$ -напівплощині згідно зі співвідношеннями (??), (??), (??) і які наведені у табл. (??);

б) із використанням форми подання передаточної функції нормованого фільтра  $H(p)$  у вигляді

$$H(p) = \frac{1}{A(p)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n a_k p^k}.$$

Оберемо другий спосіб.

$$H(p) = \frac{1}{1 + 2p + 2p^2 + p^3}.$$

п.5. Перетворимо передаточну функцію нормованого фільтра у потрібну передаточну функцію ФНЧ з частотного діапазону, що відповідає  $f_c = 50$  Гц. Для цього використовуємо перетворення  $p = r/\omega_c$ , що дає

$$\begin{aligned} H(p)|_{p=r/\omega_c} &= \frac{1}{1 + 2(p/\omega_c) + 2(p/\omega_c)^2 + (p/\omega_c)^3} = \frac{\omega_c^3}{p^3 + 2\omega_c p^2 + 2\omega_c^2 p + \omega_c^3} \Big|_{\omega_c=2\pi 50 \text{ рад/с}} = \\ &= \frac{8\pi^3 125 \cdot 10^3}{p^3 + 4\pi \cdot 50 p^2 + 2(\pi \cdot 50)^2 p + (2\pi \cdot 50)^3}. \end{aligned}$$

Отже, отриманий вираз визначає передаточну функцію аналогового ФНЧ, частотна характеристика якого відповідає технічним вимогам, що підтверджується графіком АЧХ на рис.

п.6. Перетворення аналогового ФНЧ у цифровий виконуємо на основі білінійного  $z$ -перетворення, використовуючи співвідношення (??) до отриманої передаточної функції.

$$\begin{aligned} H(z) &= H(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\omega_c^3}{p^3 + 2\omega_c p^2 + 2\omega_c^2 p + \omega_c^3} \Big|_{p=\frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \\ &= \frac{C^3(1+z^{-1})^3}{8(1-z^{-1})^3 + 8C(1+z^{-1}) + 4C^2(1-z^{-1})(1+z^{-1})^2 + C^3(1+z^{-1})^3} = \\ &= \frac{C^3(1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3})}{C1 + C2z^{-1} + C3z^{-2} + C4z^{-3}} = \\ &= \frac{3,876(1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3})}{34,312 + 10,063z^{-1} + 13,191z^{-2} - 1,428z^{-3}} = \\ &= \frac{0,114 + 0,341z^{-1} + 0,341z^{-2} + 0,114z^{-3}}{1 + 0,293z^{-1} + 0,384z^{-2} - 0,0416z^{-3}}. \end{aligned}$$

де  $C = \omega_c T_d$ ,  $C1 = 8 + 8C + 4C^2 + C^3$ ,  $C2 = -24 - 8C + 4C^2 + 3C^3$ ,  $C3 = 24 - 8C - 4C^2 + 3C^3$ ,  $C4 = -8 + 8C - 4C^2 + C^3$ .

п.7. Використовуючи обернене  $z$ -перетворення із врахуванням теореми про зсув, отримуємо різницеве рівняння, що використовується при програмній реалізації спроектованого цифрового фільтра нижніх частот.

$$y(n) = -0,293y(n-1) - 0,384y(n-2) + 0,0416y(n-3) +$$

$$+0,114x(n) + 0,341x(n-1) + 0,341x(n_2) + 0,114x(n-3); \quad n = \overline{0, N-1}.$$

**Приклад 2.** Проектування цифрового смугового фільтра з монотонно спадною функцією передачі.

Таким вимогам має задовольняти фільтр Баттерворта.

Вхідні дані:

- 1) середня частота смуги пропускання  $\omega_0 = 100$  рад/с;
- 2) ширина смуги пропускання  $B = 20$  крад/с;
- 3) максимальне згасання, яке допускається у смузі пропускання на частоті  $\omega_1 = 97,5$  рад/с, дорівнює  $\delta_1 = 0,5$  дБ;
- 4) мінімальне згасання у смузі затримування на частоті  $\omega_2 = 180$  рад/с має дорівнювати  $\delta_2 = 5$  дБ;
- 5) частота дискретизації  $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 400$  рад/с,  $T_d = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-2}$ .

*Розв'язання.* Оскільки вимоги задано у частотному діапазоні, починаємо з другого кроку алгоритму метода аналогового прототипу.

п.2. Згідно вимогам 3), 4) визначаємо частотний діапазон нормованого аналогового фільтра  $\omega \in [0, 1]$ , використовуючи частотне перетворення ФНЧ  $\rightarrow$  СФ:

$$\omega'_1 = \frac{-\omega_1^2 + \omega_0^2}{B\omega_1} = \frac{-(97,5)^2 + (100)^2}{20 \cdot 97,5} = 0,25 \text{ рад/с};$$

$$\omega'_2 = \frac{-\omega_2^2 + \omega_0^2}{B\omega_1} = \frac{-(180)^2 + (100)^2}{20 \cdot 80} = 2,25 \text{ рад/с},$$

де  $\omega'_1, \omega'_2$  – відповідно частоти у смугах пропускання та затримування для нормованого аналогового ФНЧ.

Отже, технічним вимогам до нормованого ФНЧ будуть:

- 1) частота зрізу  $\omega'_c = 1$  рад/с;
- 2) у смузі пропускання на частоті  $\omega'_1 = 0,25$  рад/с максимальне згасання дорівнює  $\delta_1 = 0,5$  дБ;
- 3) у смузі затримування на частоті  $\omega'_2 = 2,25$  рад/с мінімальне згасання дорівнює  $\delta_2 = 5$  дБ.

п.3. Порядок нормованого аналогового ФНЧ (Баттерворта) відшукуємо таким чином:

$$-10 \log |H(i\omega'_1)|^2 \leq \delta_1,$$

$$-10 \log |H(i\omega'_2)|^2 \leq \delta_2,$$

звідки із урахуванням числових значень для  $\omega'_1, \omega'_2, \delta_1, \delta_2$  маємо:

$$-10 \log \left| \frac{1}{1 + (0,25)^{2n_1}} \right| \leq 0,5;$$

$$-10 \log \left| \frac{1}{1 + (2,25)^{2n_2}} \right| \geq 5,$$

де  $n_1, n_2$  – потрібні порядки фільтра за кожною із технічних вимог.

Розв'язуючи ці співвідношення відносно  $n_1, n_2$ , отримуємо шукані значення  $n_1 \geq 0,759, n_2 \geq 0,477$ , звідки отримуємо  $n = \max\{n_1, n_2\} = 1$ .

п.4. Отже, шукана передаточна функція нормованого ФНЧ визначається як:

$$H(p) = \frac{1}{A(p)} = \frac{1}{p + a_0} = \frac{1}{p + 1},$$

де  $a_0$  – коефіцієнт поліному  $A(p)$ , що взятий із табл.

Табл. 5.2. Таблица 1. Координати полюсів нормованих ФНЧ Баттерворта

$n$	$p_{1,n}$	$p_{2,n-1}$	$p_{3,n-2}$	$p_{4,n-3}$	$p_{5,n-4}$
1	-1,000				
2	-0,707±i0,707				
3	-0,5±i0,866	-1,000			
4	-0,383±i0,924	-0,924±i0,383			
5	-0,309±i0,957	-0,809±i0,588	-1,000		
6	-0,259±i0,966	-0,707±i0,707	-0,966±i0,259		
7	-0,223±i0,975	-0,623±i0,782	-0,901±i0,434	-1,000	
8	-0,195±i0,981	-0,556±i0,831	-0,831±i0,556	-0,981±i0,195	
9	-0,173±i0,985	-0,5±i0,866	-0,766±i0,643	-0,940±i0,342	-1,000

Табл. 5.3. Таблица 2. Коефіцієнти полінома  $A(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0$  нормованого ФНЧ Баттерворта

$n$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$
1	1,000								
2	1,000	1,141							
3	1,000	2,200	2,000						
4	1,000	2,613	3,414	2,613					
5	1,000	3,236	5,236	5,236	3,236				
6	1,000	3,864	7,464	9,142	7,464	3,864			
7	1,000	4,494	10,098	14,592	14,592	10,098	4,494		
8	1,000	5,126	13,137	21,846	25,688	21,846	13,137	5,126	
9	1,000	5,759	16,582	31,163	41,986	41,986	31,163	16,582	5,759

п.5. При  $\omega_0 = 100$  рад/с і ширині смуги пропускання  $B = 20$  рад/с передаточна функція аналогового смугастого фільтра  $H_{СФ}(p)$  згідно частотному перетворенню (??)

$$H_{СФ}(p) = H(p) \Big|_{p=\frac{p^2+\omega_0^2}{Bp}} = \frac{1}{p+a_0} \Big|_{p=\frac{p^2+\omega_0^2}{Bp}} = \frac{Bp}{p^2+a_0Bp+\omega_0^2} = \frac{20p}{p^2+20p+100^2}.$$

Амплітудно-частотні характеристики аналогового НЧ-прототипу із передаточною функцією  $H(p) = 1/(p+1)$  і смугастого аналогового фільтра із шуканою передаточною функцією  $H_{СФ}(p)$  наведені на рис.

п.6. Перетворення передаточної функції  $H(p)$  аналогового смугастого фільтра у передаточну функцію  $H_{СФ}(z)$  цифрового фільтра здійснюємо, використовуючи білінійне  $z$ -перетворення, що призводить за заданих числових значеннях  $a_0, B, \omega_0, T_d$  до такого результату:

$$\begin{aligned} H_{СФ}(z) &= H_{СФ}(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{Bp}{p^2+a_0Bp+\omega_0^2} \Big|_{p=\frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \\ &= \frac{2BT_d(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{4(1-z^{-1})^2+2a_0BT_d(1-z^{-1})(1+z^{-1})+\omega_0^2T_d^2(1+z^{-1})^2} = \\ &= \frac{2BT_d(1-z^{-2})}{(4-2a_0BT_d+\omega_0^2T_d^2)z^{-2}+2(\omega_0^2T_d^2-4)z^{-1}+2a_0BT_d+\omega_0^2T_d^2} = \\ &= \frac{0,628(1-z^{-2})}{3,095-3,066z^{-1}+5,839z^{-2}} = \frac{0,203(1-z^{-1})}{1-0,991z^{-1}+1,887z^{-2}}. \end{aligned}$$

На основі цієї передаточної функції ( $H_{СФ}(z)$ ) цифрового смугастого фільтра отримуємо різницеве рівняння фільтра, яке використовується при програмній реалізації фільтра:

$$y(n) = 0,991y(n-1) - 1,887y(n-2) + 0,203x(n) - 0,203x(n-2); \quad n = \overline{0, N-1}.$$

*Приклад 3.* Проектування цифрового режекторного (загороджувального) фільтра типу Баттерворта.

Цей тип фільтра є обернений до смугастого фільтра, тому розрахунки виконуються аналогічно прикладу 2, відрізняючись лише частотним перетворенням, яке у даному разі визначається не (??), а виразом (??).

*Приклад 4.* Проектування цифрового фільтра верхніх частот із рівнохвильовою функцією передачі.

Фільтр верхніх частот має задовольняти таким технічним вимогам:

- 1) циклічна частота зрізу  $f_c = 1000$  Гц;
- 2) нерівномірність передачі у смузі пропускання  $f \in [f_c, \infty)$  визначається максимальною величиною відносного згасання вигляду (??) і дорівнює  $A_{\max} = 1$  дБ;
- 3) мінімальне згасання у смузі затримання на частотах  $f_2 \leq 500$  Гц дорівнює  $\delta_2 = 10$  дБ;
- 4) частота дискретизації  $f_d = 5000$  Гц ( $T_d = 1/f_d = 2 \cdot 10^{-4}$  с).

*Розв'язання.* Оскільки технічні вимоги вже сформульовано, починаємо розрахунки з кроку 2 алгоритму аналогового прототипу, визнаючи, що фільтрами з рівнохвильовою частотною характеристикою є фільтр Чебишова.

п.2. Формуємо технічні вимоги для нормованого ФНЧ, для чого враховуємо задані у 3) та 1) значення мінімального згасання та частоти зрізу:

$$\omega'_2 = \frac{\omega_c}{\omega_2} = \frac{2\pi f_c}{2\pi f_2} = \frac{10^3}{0,5 \cdot 10^3} = 2 \text{ рад/с.}$$

Отже, вимогами до аналогового нормованого ФНЧ є:

- 1) частота зрізу  $\omega'_c = 1$  рад/с;
- 2) максимальне відносне згасання у смузі пропускання  $\omega' \in [0, 1]$   $A_{\max} = 1$  дБ;
- 3) мінімальне згасання у смузі затримання  $\omega' \in [\omega'_c, \infty)$  на частотах  $\omega'_2 \geq 1,25$  рад/с  $\varepsilon_2 = 10$  дБ.

п.3. Першою чергою знайдемо значення параметра  $\varepsilon$ , що визначає величину нерівномірності передачі у смузі пропускання, використовуючи для цього формулу

$$\varepsilon = \sqrt{10^{A_{\max}/10} - 1} = \sqrt{10^{1/10} - 1} = \sqrt{1,259 - 1} = 0,509.$$

Визначаємо порядок нормованого ФНЧ Чебишова за величиною  $\varepsilon$  та величиною мінімального згасання у смузі затримання на частоті  $\omega'_2$ :

$$n = \frac{\text{Arch}\left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1 - 10^{-0,1\delta}}{10^{-0,1\delta}}}\right)}{\text{Arch}\omega'_2} = 1,86 \rightarrow n = 2.$$

п.4. Визначення передаточної функції нормованого ФНЧ Чебишова можна виконати двома такими способами:

- 1) Обчисленням полюсів  $p_k$  передаточної функції  $H(p)$ , які містяться у лівій половині  $p$ -площини згідно з формулою (??).
- 2) Поданням передаточної функції  $H(p)$  нормованого ФНЧ у вигляді

$$H(p) = \frac{1}{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_np^n},$$

Табл. 5.4. Таблица 3. Координати полюсів нормованих ФНЧ Чебишова:  $\delta = 1$  дБ

$n$	$p_{1,n}$	$p_{2,n-1}$	$p_{3,n-2}$	$p_{4,n-3}$	$p_{5,n-4}$
1	-1,965				
2	$-0,549 \pm i0,895$				
3	$-0,247 \pm i0,966$	-0,494			
4	$-0,140 \pm i0,983$	$-0,337 \pm i0,407$			
5	$-0,089 \pm i0,990$	$-0,234 \pm i0,612$	-0,289		
6	$-0,062 \pm i0,993$	$-0,170 \pm i0,727$	$-0,232 \pm i0,266$		
7	$-0,046 \pm i0,995$	$-0,128 \pm i0,798$	$-0,185 \pm i0,443$	-0,205	
8	$-0,035 \pm i0,996$	$-0,100 \pm i0,845$	$-0,149 \pm i0,564$	$-0,176 \pm i0,198$	
9	$-0,027 \pm i0,997$	$-0,080 \pm i0,877$	$-0,122 \pm i0,651$	$-0,150 \pm i0,346$	-0,159

Табл. 5.5. Таблица 4. Коефіцієнти полінома  $A(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0$  нормованого ФНЧ Чебишова

$n$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$
1	1,965								
2	1,103	1,098							
3	0,491	1,238	0,988						
4	0,276	0,743	1,454	0,953					
5	0,123	0,581	0,974	1,689	0,937				
6	0,069	0,307	0,939	1,202	1,931	0,929			
7	0,031	0,214	0,549	1,358	1,429	2,176	0,923		
8	0,017	0,107	0,448	0,847	1,837	1,655	2,423	0,920	
9	0,008	0,071	0,244	0,786	1,202	2,378	1,881	2,671	0,918

значення коефіцієнтів  $a_k$  якої визначаються з табл.1.

Скористаємося другим способом. Маємо

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + a_1p + a_0} = \frac{1}{p^2 + 1,098p + 1,103}$$

п.5. Тепер треба перетворити цю передаточну функцію у передаточну функцію аналогового ФВЧ із заданою частотною характеристикою за допомогою частотного перетворення (??):

$$\begin{aligned} H_{\text{ВЧ}}(p) &= H(p) \Big|_{p=\frac{\omega_c}{p}} = \frac{1}{(\omega_c/p)^2 + 1,098(\omega_c/p) + 1,103} = \\ &= \frac{p^2}{1,103p^2 + 1,098\omega_cp + \omega_c^2} \Big|_{\omega_c=2\pi \cdot 10^3} = \frac{p^2}{1,103p^2 + 2\pi \cdot 1,098 \cdot 10^3p + 4\pi^2 \cdot 10^6} \end{aligned}$$

Частотні характеристики отриманого нормованого ФНЧ і аналогового ФВЧ наведені на рис.

п.6. Перетворення аналогового ФВЧ у цифровий здійснюється на основі білінійного  $z$ -перетворення.

$$H_{\text{ВЧ}}(z) = H_{\text{ВЧ}}(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{p^2}{1,103p^2 + 2\pi \cdot 1,098 \cdot 10^3p + 4\pi^2 \cdot 10^6} \Big|_{p=\frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{4}{T_d^2} \frac{(1-z^{-1})^2}{(1+z^{-1})^2}}{1,103 \frac{4}{T_d^2} \frac{(1-z^{-1})^2}{(1+z^{-1})^2} + 2\pi \cdot 1,098 \frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 4\pi^2 \cdot 10^6} \Big|_{T_d=0,2 \cdot 10^{-3}} = \\
&= \frac{0,457z^{-2} - 0,914z^{-1} + 0,457}{0,369z^{-2} - 0,674z^{-1} + 1}.
\end{aligned}$$

п.7. Якщо тепер скористатися оберненим  $Z$ -перетворенням, можна основі операторного рівняння вхід-вихід спроектованого фільтра високих частот вигляду

$$Y(z) = H(z)X(z),$$

де  $X(z), Y(z)$  –  $Z$ -образи вхідного та вихідного сигналів відповідно, отримати різницеве рівняння, що описує даний цифровий фільтр:

$$y(n) = 0,674y(n-1) - 0,369y(n-2) + 0,457x(n) - 0,914x(n-1) + 0,457x(n-2); \quad n = \overline{0, N-1}.$$

## 5.5. Прямі методи проектування цифрових фільтрів

Коротко розглянемо прямі методи розрахунку цифрових фільтрів як по заданому квадрату модуля передаточної функції, так й у часовій області.

### 5.5.1. Розрахунок цифрових фільтрів по квадрату модуля передаточної функції

Нехай є передаточна функція  $H(z)$  рекурсивного цифрового фільтра вигляду

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}}, \quad (5.144)$$

що дозволяє записати квадрат модуля  $H(z)$

$$|H(z)|^2 = H(z) \cdot H(-z) \Big|_{z=e^{i\omega T_d}}$$

як

$$|H(e^{i\omega})|^2 = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k e^{-i\omega k T_d} \sum_{k=0}^{M-1} b_k e^{-i\omega k T_d}}{\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k a_k e^{-i\omega k T_d} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-i\omega k T_d}}. \quad (5.145)$$

Прикладом квадрата модуля передаточної функції, що придатний для фільтрації нижніх частот, є

$$|H(e^{i\omega T})|^2 = \left[ 1 + \frac{\operatorname{tg}^{2n}(\omega T/2)}{\operatorname{tg}^{2n}(\omega_c T/2)} \right]^{-1}. \quad (5.146)$$

Якщо покласти  $z = e^{i\omega T}$ , то вираз (5.146) можна записати у вигляді

$$|H(z)|^2 = \frac{\operatorname{tg}^{2n}(\omega_c T/2)}{\operatorname{tg}^{2n}(\omega_c T/2) (-1)^n [(z-1)/(z+1)]^{2n}}. \quad (5.147)$$

Полюси (5.147) відшукуються шляхом заміщення в (5.147) виразу

$$p = \frac{z-1}{z+1}, \quad (5.148)$$

звідки можна перекоонатись, що  $2n$  полюсів функції  $|H(p)|^2$  містяться рівномірно на колі радіуса  $\text{tg}^{2n}(\omega_c T/2)$  в площині  $p$ .

За допомогою оберненого до (5.148) перетворення

$$z = \frac{1+p}{1-p} \quad (5.149)$$

легко відшуковуються полюси в площині  $z$ .

Поклавши  $p = x + iy$ ,  $z = u + iv$ , знаходимо

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{(1 - x)^2 + y^2}; \quad (5.150)$$

$$v(x, y) = \frac{2y}{(1 - x)^2 + y^2}. \quad (5.151)$$

Коло, на якому розміщуються полюси в площині  $p$ , задовольняє рівняння

$$x^2 + y^2 = \text{tg}^2 \frac{\omega_c T}{2}. \quad (5.152)$$

Це коло відображується у коло в площині  $z$  с координатами

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{1 + \text{tg}^2 \omega_c T/2}{1 - \text{tg}^2 \omega_c T/2} = \sec \omega_c T, \quad v_c = 0; \\ \rho &= \frac{2 \text{tg} \omega_c T/2}{1 - \text{tg}^2 \omega_c T/2} = \text{tg} \omega_c T. \end{aligned} \quad (5.153)$$

Для непарних  $n$  полюси в  $p$ -площині мають такі координати  $x$  та  $y$ :

$$\begin{aligned} x_m &= \text{tg} \omega_c T/2 \cos \frac{m\pi}{n}, \\ y_m &= \text{tg} \frac{\omega_c T}{2} \sin \frac{m\pi}{n}; \quad m = \overline{0, 2n-1}. \end{aligned} \quad (5.154)$$

Для парних  $n$  полюси в  $p$ -площині мають такі координати  $x$  та  $y$ :

$$\begin{aligned} x_m &= \text{tg} \frac{\omega_c T}{2} \cos \frac{2m+1}{2n} \pi, \\ y_m &= \text{tg} \frac{\omega_c T}{2} \sin \frac{2m+1}{n} \pi; \quad m = \overline{0, 2n-1}. \end{aligned} \quad (5.155)$$

Координати відповідних полюсів в площині  $z$ :

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{2[1 - \text{tg}^2(\omega_c T/2)]}{1 - 2 \text{tg}(\omega_c T) \cos(m\pi/n) + \text{tg}^2(\omega_c T/2)}, \\ v_m &= \frac{2 \text{tg}^2(\omega_c T/2) \sin(m\pi/n)}{1 - 2 \text{tg}(\omega_c T) \cos(m\pi/n) + \text{tg}^2(\omega_c T/2)}. \end{aligned} \quad (5.156)$$

Якщо замінити  $m\pi/n$  на  $(2m+1)\pi/(2n)$ , одержимо еквівалентні формули для парних  $n$ .

#### Приклад.

Знайти полюси та нулі квадрата модуля передаточної функції для фільтра нижніх частот, який має згасання 3 дБ на частоті 1250 гц і згасання не менш ніж 20 дБ на частоті 2000 гц. Нехай частота дискретизації складає 10 кгц. Межова частота 1250 гц відповідає значенню  $\omega_c T = 45^\circ$ , частота 2000 гц відповідає значенню  $\omega T = 72^\circ$ .

Квадрат модуля передаточної функції (5.146) приймає вигляд

$$|H(e^{i\omega T})|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\text{tg}^{2n}(\omega T/2)}{\text{tg}(\pi/8)}}. \quad (5.157)$$



Покладемо  $\omega T = 72^\circ$  і  $|H(e^{i\omega T})|^2 = 0.01$ , що відповідає умові згасання на 20 дБ. Звідси  $n = 4$ .

Якщо квадрат модуля передаточної функції задається рівнянням

$$|H(e^{i\omega T})|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_n^2 \left[ \frac{\operatorname{tg}(\omega T/2)}{\operatorname{tg}(\omega_c T/2)} \right]^2}, \quad (5.158)$$

то полюси для  $p = (z - 1)/(z + 1)$  містяться на еліпсі в  $p$ -площині, який має ті ж властивості, що й для фільтра Чебишова. Складові в площині  $p$

$$x = a \operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2} \cos \theta, \quad y = b \operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2} \sin \theta. \quad (5.159)$$

Замістивши (5.159) у (5.150), (5.151), одержимо:

$$u = \frac{2[1 - a \operatorname{tg} \omega_c T/2 \cos \theta]}{[1 - a \operatorname{tg}(\omega_c T/2) \cos \theta]^2 + b^2 \operatorname{tg}^2(\omega_c T/2) \sin^2 \theta} - 1; \quad (5.160)$$

$$v = \frac{2b \operatorname{tg}(\omega_c T/2) \cos \theta}{[1 - a \operatorname{tg}(\omega_c T/2) \cos \theta]^2 + b^2 \operatorname{tg}^2(\omega_c T/2) \sin^2 \theta}.$$

### 5.5.2. Розрахунок цифрових фільтрів у часовій області

## 5.6. Проектування рекурсивних цифрових фільтрів на основі методів оптимізації

Особливістю даних методів є те, що система рівнянь, яка складена відносно коефіцієнтів фільтра, не може бути розв'язана у явній формі. Тому для пошуку коефіцієнтів використовують ті чи інші процедури мінімізації вибраного критерія близькості шуканої та заданої характеристик фільтра.

Найпоширенішим є критерій середньоквадратичної похибки (відхилення) між бажаною та шуканою амплітудно-частотною характеристиками фільтра.

Нехай передаточна функція  $H(z)$  цифрового фільтра має вигляд

$$H(z) = A \prod_{k=1}^K \frac{1 + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}}, \quad (5.161)$$

тобто фільтр складається з послідовно з'єднаних ланок 2-го порядку з коефіцієнтами  $b_{1k}, b_{2k}, a_{1k}, a_{2k}$ . Позначимо задану амплітудно-частотну характеристику через  $H^*(e^{i\omega})$ . Нехай  $\omega_i$ , ( $i = \overline{1, M}$ ) – дискретна послідовність значень частот, на яких обчислюються відхилення шуканої  $H(e^{i\omega})$  від заданої  $H^*(e^{i\omega})$  амплітудних характеристик фільтра. Тоді середньоквадратичний критерій близькості цих характеристик як функція параметрів фільтра може бути поданий у вигляді

$$S(\bar{\theta}) = \sum_{i=1}^M (|H(e^{i\omega_i})| - |H^*(e^{i\omega_i})|)^2, \quad (5.162)$$

де  $\bar{\theta}$  –  $(4K + 1)$ -вимірний вектор шуканих коефіцієнтів

$$\bar{\theta} = (b_{11}, b_{21}, a_{11}, a_{21}, \dots, b_{1K}, b_{2K}, a_{1K}, a_{2K}, A). \quad (5.163)$$

Мінімізація суми квадратів похибок (5.162) зводиться до відшукування оптимального значення вектора  $\theta^*$ , для якого

$$S(\theta^*) \leq S(\theta). \quad (5.164)$$

Цю задачу мінімізації можна розв'язати одним з методів нелінійної оптимізації.

При використанні методів оптимізації для розрахунку цифрових фільтрів враховується поведінка тільки амплітудної характеристики, тому деякі полюси або нулі передаточної функції фільтра після завершення процедури мінімізації можуть опинитися за межами одиничного кола  $z$ -площини. У цьому разі можна замінити полюс з полярними координатами  $(\rho, \varphi)$ , що опинився за межами одиничного кола, на полюс з координатами  $(1/\rho, \varphi)$ , який вже міститиметься всередині одиничного кола. Амплітудна характеристика фільтра за такої заміни не зміниться, оскільки полюс заміниться на його дзеркальне відображення, а стійкість фільтра буде забезпечено. Але внаслідок цього з'являється можливість за допомогою додаткового аналізу ще більше оптимізувати параметри фільтра шляхом мінімізації суми квадратів похибок.

Така ситуація з'являється досить часто, й у цих випадках оптимізація має виконуватися у два етапи:

1. Використання процедур оптимізації для мінімізації критерія  $(\theta)$  без будь-яких обмежень на розташування полюсів і нулів передаточної функції  $H(z)$  фільта.

2. По завершенні процедури оптимізації здійснюється інвертування всіх полюсів та нулів, які опинилися за межами одиничного кола. Після цього продовжується процедура оптимізації з метою відшукування нових значень параметрів фільтра.

---

## Двовимірні перетворення

---

### 6.1. Вступ

Популярність цифрової обробки зображень за останні роки стрімко зросла, причому особливу увагу привернули такі напрямки обробки, як кодування, відновлення та виділення ознак зображень. Кодування зображень зазвичай пов'язують зі спробами передачі зображення цифровою мережею зв'язку найбільш ефективним способом. Зазвичай при цьому відшукують можливості скоротити кількість бітів, які описують зображення, й отже, зменшити кількість бітів, що необхідно передати по системі зв'язку. Задача реставрації зображення виникає тоді, коли якість зображення погіршена порівняно із якістю оригіналів. Для методів реставрації характерно, що вони обумовлюються або наявністю апіорної інформації, або моделлю явища, що викривлює та діє у даній системі відображення.

У якості можливих об'єктів цифрової обробки можуть розглядатися зображення, що одержуються при космічних та біомедичних дослідженнях, промислові рентгенограми, фотографії розвідувального характеру, зображення, що одержуються в телевізійних системах, в інфрачервоних системах прямого огляду і в радіолокаторах бічного огляду. Крім того, об'єктом цифрової обробки є численні види синтетичних зображень.

Визначимо реставрацію зображень як відновлення зображення, спрямоване на його наближення до вхідного зображення (оригінала) і яке здійснюється шляхом інверсії визначеного спотвореного явища. Така інформація може існувати у вигляді аналітичних або статистичних моделей, або ж інших апіорних відомостей, що ґрунтуються на знаннях (або припущеннях) про фізичну систему, яка здійснює процес відображення. Тому особливу увагу слід приділяти джерелам викривлень та моделям, що їх описують.

Відокремлюванням ознак при цифровій обробці зображень називають вибір специфічних характеристик, що виражають деякі особливості зображення, з метою подальшого розпізнавання образів, класифікації, прийняття рішень та інтерпретації. В деяких прикладаннях корисні ознаки можна одержати шляхом двовимірного перетворення вхідного зображення у простір, де нові координати виявляються статистично менш корельованими ніж координати вхідного зображення. Потім у цьому просторі із менш вираженою кореляцією можуть бути відокремлені ознаки, що є більш ефективними для цілей класифікації, оскільки некорельовані характеристики потребують меншої розмірності для опису ніж корельовані.

Більшість моделей для аналізу систем обробки зображень зазвичай апроксимуються за припущення їхньої лінійності. Така лінійна модель відображення, по суті, визначає характер реставрування, яка необхідна для інверсії зображень, так же, як і структуру системи передачі кодованого зображення.

Для зручності сприйняття запровадимо позначення:  $f(\xi, \eta)$  – оригінал,  $g(x, y)$  –

зображення,  $h(x, y, \xi, \eta)$  – імпульсна характеристика, або функція розсіювання точки (ФРТ) за припущення, що система відображення є лінійна.

Безліч різних методів, що використовуються для цифрової обробки зображень, обумовили появу низки моделей, що відображають спроби реставрувати зображення шляхом ефективної інверсії явища, що спотворює при відображенні оригіналу. Нехай  $g(x, y)$  – зображення оригіналу  $f(\xi, \eta)$ , що спотворене оператором  $H(x, y, \xi, \eta)$ , так що

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) h(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (6.1)$$

Викривлення в системі описується імпульсною характеристикою, або функцією розсіювання точки  $h$ , яка фізично відповідає виходу системи, коли на її вході діє дельта-функція, або точкове джерело світла. Якщо при зондуванні площини оригіналу точковим джерелом вигляд імпульсної характеристики зберігається незмінним (виключаючи положення у площині зображення), то говорять, що система є просторово-інваріантна, тобто є просторово-інваріантна функція розсіювання (ПІФРТ) і діє співвідношення

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta. \quad (6.2)$$

Інакше маємо систему із просторово-залежною функцією розсіювання точки (ПЗФРТ), й отже, діє вираз (6.1). У лінійному випадку  $f(\xi, \eta)$  по  $g(x, y)$  можна одержати за допомогою перетворення Фур'є, яке дозволяє визначити інверсію  $h$  в (6.2), використовуючи зв'язок перетворення Фур'є із згортою. Так, за відсутності шуму

$$G_f(u, v) = H_f(u, v) F_f(u, v), \quad (6.3)$$

де  $G_f, H_f, F_f$  – фур'є-образи функцій  $g, h$  та  $f$  відповідно, причому для визначення  $F_f(u, v)$  треба тільки виконати інверсію  $H_f$ . При використанні моделей із ПЗФРТ методи перетворення Фур'є застосовувати не можна, тому доводиться застосовувати більш універсальні і більш потужні методи інверсії.

Для інверсії обох систем часто застосовуються три основні лінійні методи, які можна назвати

- а) неперервно-неперервним,
- б) неперервно-дискретним та
- в) дискретно-дискретним.

При першому методі весь процес реставрації зображення розглядається як неперервний (хоча зрештою він неодмінно здійснюється як дискретний). При другому методі аналізу вважається, що оригінал є неперервний, а зображення представлене у вигляді відліків, й отже, є дискретне.

Неперервно-неперервна модель описується співвідношенням (6.1), неперервно-дискретна модель:

$$g_i(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h_i(\xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad i = \overline{1, N^2}, \quad (6.4)$$

дискретно-дискретна модель:

$$\mathbf{g} = [H]\mathbf{f}. \quad (6.5)$$

В неперервно-дискретній моделі мається на увазі, що оригінал є неперервний (оскільки він є об'єкт реального світу), а датчик, що формує зображення є дискретний із  $N^2$  відліками. Тобто, одержуємо  $N^2$  скалярних значень  $g_i$  й отже,  $N^2$  функцій розсіювання точки  $h(\xi, \eta)$ .

В дискретно-дискретній моделі вважається, що як оригінал  $\mathbf{f}$ , так і зображення  $\mathbf{g}$  представлено у вигляді  $N^2$  одновимірних векторів. Ці вектори можуть бути утворені шляхом растрового сканування двовимірних функцій або за допомогою деякого іншого методу розгортки, який дозволяє одержати всі  $N^2$  відліків. У даному разі чотирьохви-мірна функція  $h(\xi, \eta, x, y)$  шляхом растрового сканування перетворюється у двовимірну матрицю, що має розмір  $N^2 \times N^2$ .

Якщо явище, що викривлює, можна представити моделлю, що розділяє, то (6.5) можна замінити виразом

$$[G] = [A][F][B], \quad (6.6)$$

де  $[F]$  – дискретизований варіант оригіналу,  $[G]$  – дискретизований варіант зображення,  $[A]$ ,  $[B]$  – стовпець та рядок відповідно, що виражають викривлення оригіналу. Таким чином, всі матриці в (6.6) мають розмір  $N \times N$ , що суттєво спрощує обчислення.

## 6.2. Математичне представлення

### 6.2.1. Представлення зображення в ортогональному базисі

Нехай матриця  $[G]$  – дискретизоване та квантоване зображення, при цьому  $i$ -й рядок та  $j$ -стовпець матриці відповідають просторовим координатам  $x$  та  $y$  зображення  $g(x, y)$ . Таким чином, можна записати

$$[G] = SQ\{g(x, y)\}, \quad (6.7)$$

де нелінійний оператор  $SQ\{\dots\}$  виражає дію дискретизатора та квантователя. Нехай  $[G]$  має розмір  $N \times N$ .

Узагальнене лінійне перетворення матриці зображення  $[G]$ , що є розділиме, можна записати у вигляді

$$[\alpha] = [U]^T [G] [V], \quad (6.8)$$

де  $[\alpha]$  – зображення, що одержується внаслідок унітарного перетворення,  $[U]$  та  $[V]$  – унітарні оператори. Унітарність  $[U]$  та  $[V]$  означає, що

$$[U][U]^T = [E], \quad [V]^T [V] = [E]. \quad (6.9)$$

Звідси, перетворення, що є обернене до (6.8), можна записати у вигляді

$$[G] = [U][\alpha][V]^T, \quad (6.10)$$

Якщо розкрити позначення  $U$  та  $V$ :

$$[U] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N], [V] = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N], \quad (6.11)$$

де  $\mathbf{u}_k$ ,  $\mathbf{v}_k$  – вектори, утворені із стовпців матриць, то одержимо

$$G = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N][\alpha][\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N]^T, \quad (6.12)$$

Звідси витікає, що

$$G = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_{kj} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_j^T, \quad (6.13)$$

Зовнішній добуток  $\mathbf{u}_k \mathbf{v}_j^T$  можна трактувати як “зображення”, тож сума за всіма комбінаціями зовнішніх добутоків із відповідними вагами  $\alpha_{kj}$  відтворює вхідне зображення  $G$ . Для деяких видів перетворень такий підхід дозволяє надати зручну інтерпретацію апроксимацій із збереженням обраних коефіцієнтів.

У якості графічної інтерпретації цього процесу розглянемо приклад на рис. Зображення  $G$  розкладається на суму  $N^2$  матриць рангу 1 із відповідними коефіцієнтами

$\alpha_{kj}$ . Матриці рангу 1 являють собою двовимірні базисні зображення, прикладами яких слугують тригонометричні функції для розкладання за Фур'є та бінарні функції для розкладання за Уолшом.

Вибір перетворень, що виражаються матрицями  $U$  та  $V$ , є цілком довільний. Ці матриці можна вибирати як із одних, так й із різних базисних функцій. Наприклад, матриця  $U$  може бути складена із функцій Уолша, а  $V$  – із функцій Фур'є, тобто синусів та косинусів. У цьому випадку стовпці матриці зображення розкладаються у ряд за функціями Уолша (прямокутним функціям), а рядки – у ряд за комплексними експонентами (синусами та косинусами).

Якщо  $\alpha$  – діагональна матриця рангу  $R$  (тобто якщо в  $\alpha$  є лише  $R$  додатних діагональних елементів), то

$$G = \sum_{k=1}^R \alpha_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T, \quad (6.14)$$

Вираз (6.14) можна інтерпретувати як розкладання за власними значеннями.

$$G = U \sqrt{\Lambda} V^T, \quad (6.15)$$

та

$$GG^T = U \Lambda U^T, \quad G^T G = V \Lambda V^T, \quad (6.16)$$

де  $\Lambda$  – діагональна матриця власних значень  $GG^T$ , стовпці  $U$  – власні вектори матриці  $GG^T$ , стовпці  $V$  – власні вектори матриці  $G^T G$ . Симетрія та квадратність  $GG^T$  та  $G^T G$  гарантують дійсність  $\lambda_k$  та ортогональність множини власних векторів  $\{\mathbf{u}_k\}$  і  $\{\mathbf{v}_k\}$ .

### 6.3. Кодування зображень

Метою кодування зображень є ефективне скорочення кількості бітів, що необхідні для представлення зображення, й збереження при цьому деякого рівня вірогідності відновлення кодованого зображення відносно вхідного зображення. Існують два загальних підходи, один з яких охоплює метод кодування зображення у вхідній (просторовій) області, а інший – у перетвореній області. Просторові методи можна представити як методи кодування двовимірних перетворень зображення.

#### 6.3.1. Просторове кодування зображень

Для  $(n \times n)$ -передбачувача одержуємо у стані  $(i, j)$  різницю  $\Delta_{i,j}$  у вигляді

$$\Delta_{i,j} = g_{i,j} - \sum_{k=1}^n p_{k,0} g_{i-k,j} - p_{0,l} g_{i,j-l} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n p_{k,l} g_{i-k,j-l}, \quad (6.17)$$

яка потім кодується та передається. При диференціальній імпульсно-кодовій модуляції (ДІКМ), що не є розділима, у наявності маємо  $n^2 + 2n$  коефіцієнтів передбачувача  $p_{k,l}$  і відповідно  $n^2 n$  ступенів свободи передбачувача. Часто такий передбачувач називають передбачувачем  $n^2 n$ -го порядку. У випадку диференціальної імпульсно-кодової модуляції, що є розділима, передбачення відліку  $g_{i,j}$  дає різницю

$$\Delta_{i,j} = g_{i,j} - \sum_{k=1}^n p_k g_{i-k,j} - q_l g_{i,j-l} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n p_k q_l g_{i-k,j-l}, \quad (6.18)$$

і видно, що тут використовуються лише  $2n$  ступенів свободи (передбачувач  $2n$ -го порядку). У разі, коли зображення має статистику, що розділяється, передбачувач описується



де  $\mathcal{M}\{\dots\}$  – двовимірний розділимий оператор математичного сподівання, який усереднює розділимі статистичні характеристики, що описують даний тип зображення. За припущення про розділимість впливає вимога, щоб статистичні характеристики по горизонталі та вертикалі були розділими (яке не обов'язково виконується). Коваріаційні матриці, які описують рядкові та стовпцеві статистичні характеристики, виражаються відповідно як  $\Phi_x$  та  $\Phi_y$ . Якщо для класу зображень, що розглядається, справджується розділима модель, то слушно обчислювати власні вектори коваріаційної матриці (що виконується один раз) за допомогою обчислювальної системи, яка віддалена від джерела зображення та передавача. Таким чином,

$$\Phi_x = E_x \Lambda_x E_x^T, \quad (6.23)$$

$$\Phi_y = E_y \Lambda_y E_y^T, \quad (6.24)$$

де  $E_x, E_y$  – ортогональні матриці, для визначення яких треба приблизно  $N^3$  обчислень.  $\Lambda_x, \Lambda_y$  – діагональні матриці, елементами яких є власні значення коваріаційних матриць.

У цьому разі є можливість реалізувати апаратне розкладання зображення  $G$  на коефіцієнти розкладання, що визначаються як

$$\alpha = E_x^T G E_y \quad (6.25)$$

у джерела зображення або передавача. Для цієї процедури необхідно виконання  $2N^3$  арифметичних операцій, що дає економію у два рази порівняно із методом РСЗ у розрахунку на одне зображення.

Важливо підкреслити, що двовимірне перетворення Карунена–Лоева (6.25) дає у результаті повну матрицю  $\alpha$ , елементи якої є такі, що у середньому найбільша частина енергії зображення зосереджена у найменшій кількості коефіцієнтів  $\alpha_{ij}$ .

Моделі, що використовуються для опису розділимих стаціонарних процесів, які мають місце при генеруванні зображень, часто визначаються марковськими ланцюгами. У цьому випадку коваріаційні матриці  $\Phi_x, \Phi_y$  є теплицевими матрицями й мають елементи  $\Phi_{x_{ij}} = \rho_x^{|i-j|}$  та  $\Phi_{y_{ij}} = \rho_y^{|i-j|}$ . Оскільки такі матриці перетворюються у діагональні за допомогою косинусів або синусів відповідної частоти та фази, для дискретної апроксимації розкладання цього типу найбільш зручним є косинусне перетворення

$$\alpha = [\cos]^T G [\cos]. \quad (6.26)$$

додаткова перевага цього перетворення полягає у наявності швидкого алгоритму реалізації ( $2N^2 \log_2 N$  операцій замість  $2N^3$ ), а також у тому, що тут нема потреби у розкладанні за власними значеннями. Косинусне перетворення не виконує точної діагоналізації дискретного марковського процесу, але експериментальна перевірка показала, що результат є досить близьким до статистичного оптимуму Карунена–Лоева.

Якщо марковська модель не дає задовільного оптимуму статистичних характеристик процесу генерування зображень, але припущення щодо стаціонарності залишається в силі, то  $\Phi_x$  та  $\Phi_y$  зберігає форму теплицевих матриць.

Застосовується також схема кодування, яка має назву гібридної, оскільки в ній використовують методи кодування як у вхідній, так й у перетвореній областях. Зокрема, зображення спочатку підпорядковують одновимірному унітарному перетворенню (косинусному, Фур'є, Уолша тощо) у напрямку рядків, а потім отримані одновимірні коефіцієнти перетворення кодують методом ДІКМ за перетвореними рядками. Зазвичай гібридні методи застосовують для збільшення швидкості роботи, а також для того, щоб досягти зменшення обсягу обладнання та місткості пам'яті. Завдяки застосуванню таких методів стає можливим здійснення у реальному мірилі часу системи стискання телевізійного спектру, причому потрібно лише  $nN$  комірок пам'яті ( $n$  – порядок передбачувача). Число необхідних обчислювальних операцій скорочується до  $N^2 \log_2 N + nN^2$ , в той час як для швидкого двовимірного перетворення воно складає  $2N^2 \log_2 N$ .



## 6.4. Реставрування оригіналу

Дискретно-дискретний варіант моделі має вигляд

$$\mathbf{g} = [H]\mathbf{f}. \quad (6.27)$$

Цій моделі у неперервно-неперервному вигляді відповідає

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta)h(x, y, \xi, \eta)d\xi d\eta. \quad (6.28)$$

Сутність реставрування оригіналу полягає у спробі виконати інверсію зображень, які вносяться у оригінал  $f(\xi, \eta)$  системою відображення.

Запровадимо чотири припущення, які стосуються імпульсної характеристики  $h(x, y, \xi, \eta)$ , потім оцінимо вплив цих припущень на двовимірні перетворення та інверсію пов'язаних із цими припущеннями явищ. Перелічимо ці припущення у порядку їхньої складності:

а) Розділима просторово-інваріантна функція розсіювання точки (РПФРТ)

$$h(x, y, \xi, \eta) = a(x - \xi)b(y - \eta). \quad (6.29)$$

б) Розділима просторово-залежна функція розсіювання точки (РПЗФРТ)

$$h(x, y, \xi, \eta) = a(x, \xi)b(y, \eta). \quad (6.30)$$

в) Нерозділима просторово-інваріантна функція розсіювання точки (НПФРТ)

$$h(x, y, \xi, \eta) = h(x - \xi, y - \eta). \quad (6.31)$$

г) Нерозділима просторово-залежна функція розсіювання точки (НПЗФРТ)

$$h(x, y, \xi, \eta) = h(x, \xi, y, \eta). \quad (6.32)$$

У якості інструмента для виконання процесів реставрації використовується алгебра матриць та зовнішніх добутків, причому до матриці функції розсіювання точки  $[H]$  в (6.27) не пред'являється будь-яких особливих вимог. Будемо виходити з того, що відомий аналітичний вираз  $[H]$  і треба відновити  $\mathbf{f}$ . При практичній реалізації моделі зручно, щоб система відображення зберігала незмінною енергію зображення. Але оскільки скалярні елементи  $\mathbf{f}$  та  $\mathbf{g}$  самі являються деякими мірами енергії, то маємо

$$\sum_{i=1}^{N^2} f_i = \sum_{i=1}^{N^2} g_i. \quad (6.33)$$

З іншого боку, імпульс (або дельта-функція – точкове джерело світла), що розташований будь-де в  $\mathbf{f}$ , вносить в  $\mathbf{g}$  кількість енергії, що не залежить від його розташування в  $\mathbf{f}$ . Отже, ми описуємо систему із одиничним підсилюванням:

$$\sum_{i=1}^{N^2} h_{ij}, \quad j = \overline{1, N^2}. \quad (6.34)$$

Крім того, природа пристроїв, що є чутливі до енергії, така, що вони утворюють тільки невід'ємні величини, тож

$$f_i \geq 0, \quad g_i \geq 0, \quad h_{ij} \geq 0. \quad (6.35)$$

Оскільки матриця  $[H]$  невід'ємна, то буде поелементно невід'ємним і вираз

$$[H_1] = \sqrt{\lambda_i} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T. \quad (6.36)$$

---

## Багатовимірні сигнали та системи

---

### 7.1. Двовимірні дискретні сигнали

Двовимірний дискретний сигнал (або послідовність, масив) – це функція, що визначена на сукупності упорядкованих пар цілих чисел. Окремі елементи послідовності будемо називати відліками. Тоді  $x(n_1, n_2)$  є відлік послідовності

$$x(n_1, n_2), \quad -\infty < n_1, n_2 < \infty \quad (7.1)$$

у точці  $(n_1, n_2)$ . Значення відліків можуть бути дійсними або комплексними. Якщо  $n_1$  та  $n_2$  вважати змінними величинами, то вираз  $x(n_1, n_2)$  можна розглядати як позначення усієї послідовності.

Відповідно до наведеного визначення двовимірні послідовності мають нескінченну протяжність, оскільки  $n_1$  та  $n_2$  можуть приймати будь-які цілочислові значення. Але на практиці для більшості двовимірних послідовностей значення відліків відомі тільки у скінченній області площини  $(n_1, n_2)$ . Наприклад, при скануванні чорно-білої фотографії за її межами відліки не беруться. Замість того, щоб обмежувати область визначення такої двовимірної послідовності, ми будемо вважати, що всі значення відліків за межами визначеної області дорівнюють нулю. Хоча більш правильним було б розглядати також й інші можливі способи довизначення, наприклад, довизначення сигналу парним подовженням, яке не дає розривів у значеннях сигналу на межах області визначення.

#### 7.1.1. Деякі особливі послідовності

Деякі послідовності є настільки важливі, що їх позначили спеціальними символами. До них належить двовимірний *одиночний відлік*. Одиночний імпульс визначається таким чином:

$$\delta(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } n_1 = n_2 = 0, \\ 0 & \text{у решті випадків} \end{cases} \quad (7.2)$$

Якщо визначити одновимірний одиночний імпульс як

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

то двовимірний одиночний імпульс можна записати у вигляді добутку двох одновимірних одиночних імпульсів

$$\delta(n_1, n_2) = \delta(n_1)\delta(n_2). \quad (7.4)$$

На рис. 7.1 наведено графічне представлення двовимірного одиночного імпульсу. На ньому позначено великою точкою відлік із значенням один, малою точкою – відліки із нульовими значеннями.

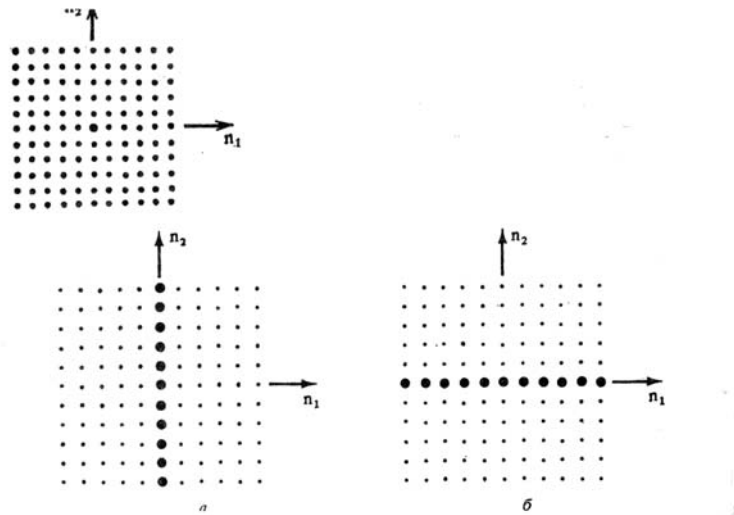


Рис. 7.1. Приклади двовимірних лінійних імпульсів

Двовимірний *лінійний імпульс* – це послідовність, яка має сталі значення у одному напрямку та імпульсна – у іншому. Послідовності

$$x(n_1, n_2) = \delta(n_1). \quad (7.5)$$

та

$$y(n_1, n_2) = \delta(n_2). \quad (7.6)$$

є приклади лінійних імпульсів (рис. 7.1б). Вочевидь, для  $M$ -вимірного випадку можна визначити не тільки  $M$ -вимірні одиничні імпульси, а й  $M$ -вимірні лінійні імпульси,  $M$ -вимірні плоскі імпульси тощо.

Іншою особливою послідовністю є двовимірний *одиничний щабель*  $u(n_1, n_2)$ , який наведено на рис. 7.2

Щабель визначається таким чином:

$$u(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } n_1 \geq 0 \text{ та } n_2 \geq 0, \\ 0 & \text{у решті випадків} \end{cases} \quad (7.7)$$

Можна також розглядати  $u(n_1, n_2)$  як добуток

$$u(n_1, n_2) = u(n_1)u(n_2), \quad (7.8)$$

в якому

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq 0 \\ 0 & \text{при } n < 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

являє собою одновимірний одиничний щабель. Двовимірний одиничний щабель відрізняється від нуля в одному квадранті  $(n_1, n_2)$ -площини.

*Експоненційні послідовності* визначаються таким чином:

$$x(n_1, n_2) = a^{n_1}b^{n_2}, \quad -\infty < n_1, n_2 < \infty, \quad (7.10)$$

де  $a$  та  $b$  – комплексні числа. Якщо абсолютні значення  $a$  та  $b$  дорівнюють одиниці, їх можна записати у вигляді

$$a = e^{i\omega_1}; \quad b = e^{i\omega_2}.$$

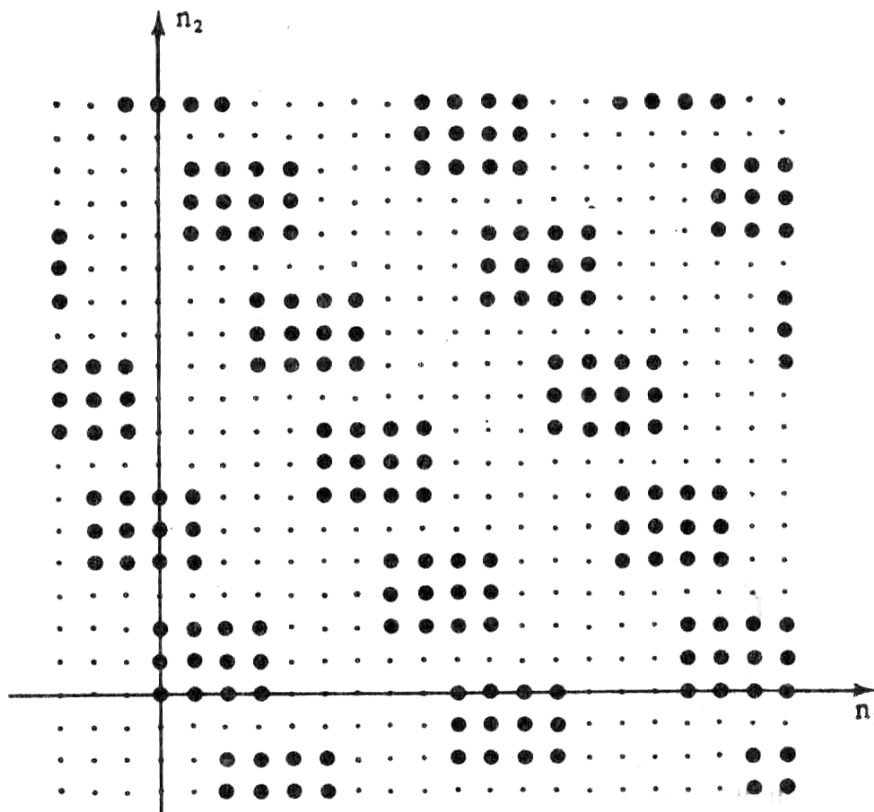


Рис. 7.2. Двовимірний одиничний щабель

У цьому випадку експоненційна послідовність стає комплексною синусоїдальною послідовністю:

$$x(n_1, n_2) = e^{i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2} = \cos(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2) + i \sin(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2). \quad (7.11)$$

Експоненційні послідовності являють собою власні функції двовимірних лінійних систем, що інваріантні до зсуву.

### 7.1.2. Розділимі послідовності

Особливі послідовності, що розглянуто вище, можна представити у вигляді

$$x(n_1, n_2) = x_1(n_1)x_2(n_2). \quad (7.12)$$

Будь-яку послідовність, яку можна представити у вигляді добутку одновимірних послідовностей, називають *розділимюю*. Незважаючи на те, що серед сигналів, які мають місце на практиці, лише деякі з них виявляються розділимими, будь-яку двовимірну множину зі скінченним числом ненульових відліків можна записати у вигляді суми скінченної кількості розділимих послідовностей:

$$x(n_1, n_2) = \sum_{i=1}^N x_{i1}(n_1)x_{i2}(n_2), \quad (7.13)$$

де  $N$  – кількість ненульових рядків або стовпців.

Розділимі послідовності успішно використовують у якості тестових вхідних сигналів для оцінки характеристик та налагоджування експериментальних систем.

### 7.1.3. Послідовності скінченної протяжності

Іншим важливим класом дискретних сигналів є двовимірні послідовності скінченної протяжності. Термін “скінченна протяжність” означає, що ці сигнали дорівнюють нулю поза областю скінченної протяжності в  $(n_1, n_2)$ -площині. Ця область називається *опорною областю* сигналу. Однією із типових послідовностей скінченної протяжності, що зображена на рис. 7.3, відрізняється від нуля тільки всередині прямокутника

$$0 \leq n_1 < N_1, \quad 0 \leq n_2 < N_2. \quad (7.14)$$

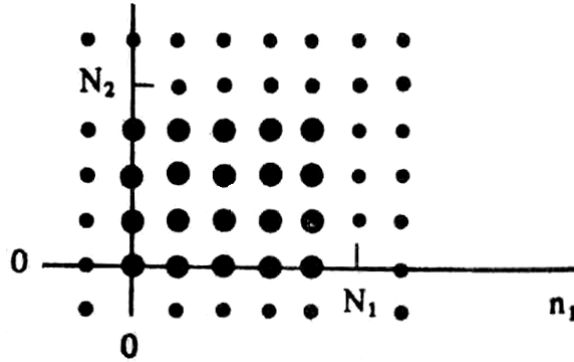


Рис. 7.3. Послідовність скінченної протяжності із опорною областю прямокутної форми

Часто можна спростити представлення послідовності із опорною областю неправильної форми, а також операції над нею, якщо включити її опорну область всередині прямокутної області більшого розміру.

### 7.1.4. Періодичні послідовності

Інший важливий клас двовимірних послідовностей складають періодичні дискретні сигнали. Двовимірну періодичну послідовність, як й її одновимірний аналог, можна розглядати як сигнал, що регулярно повторюється у просторі. Формулювання загального визначення почнемо із часткового випадку.

Розглянемо двовимірну послідовність

$$\tilde{x}(n_1, n_2 + N_2) = \tilde{x}(n_1, n_2), \quad \tilde{x}(n_1 + N_1, n_2) = \tilde{x}(n_1, n_2). \quad (7.15)$$

Ця послідовність має подвійну періодичність; її значення повторюються, якщо змінна  $n_1$  збільшується на  $N_1$  або якщо змінна  $n_2$  збільшується на  $N_2$ . На рис. 7.4 наведено зображення такої послідовності. Величини  $N_1$  та  $N_2$ , які є мінімальні додатні цілі числа, для яких справджуються вирази (7.15), назовемо *горизонтальним* та *вертикальним інтервалами періодичності* послідовності  $\tilde{x}$ .

Проміж усіх відліків тільки  $N_1 N_2$  відліків послідовності  $x$  виявляються незалежними; решта відліків визначаються умовами періодичності. Будемо називати *періодом* послідовності  $\tilde{x}$  будь-яку зв'язну область площини  $(n_1, n_2)$ , яка містить точно  $N_1 N_2$  відліків, якщо значення цих відліків є незалежні.

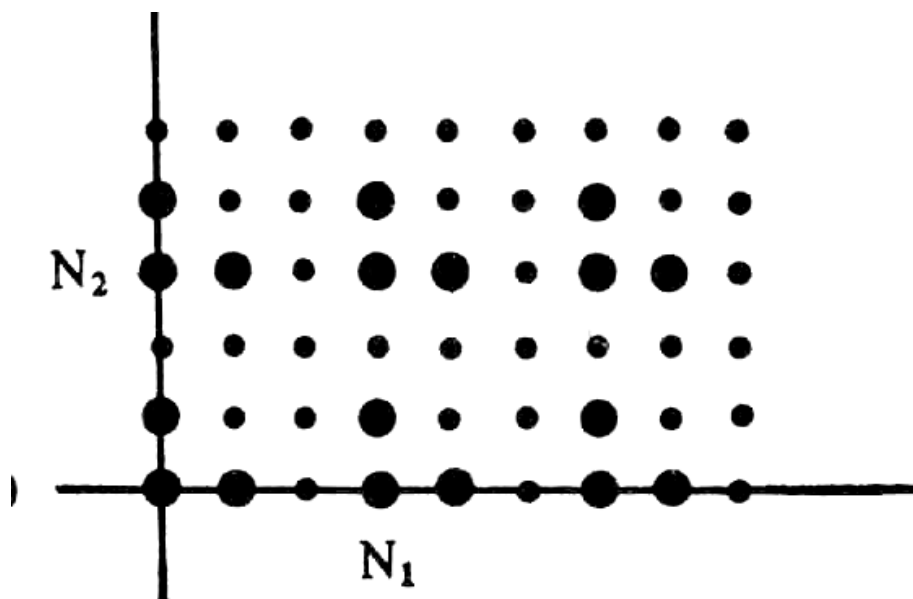
Часто найбільш зручною формою періоду є прямокутник  $\{(n_1, n_2), 0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1\}$ , але це не єдина можливість.

Тепер розглянемо двовимірну послідовність  $\tilde{x}(n_1, n_2)$ , яка задовольняє більш загальні умови періодичності:

$$\tilde{x}(n_1 + N_{11}, n_2 + N_{21}) = \tilde{x}(n_1, n_2), \quad \tilde{x}(n_1 + N_{12}, n_2 + N_{22}) = \tilde{x}(n_1, n_2). \quad (7.16)$$

Причому

$$D \equiv N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21} \neq 0. \quad (7.17)$$

Рис. 7.4. Двовимірна періодична послідовність із  $N_1 = N_2 = 3$ 

Упорядковані пари  $(N_{11}, N_{21})^T$  та  $(N_{12}, N_{22})^T$  можна розглядати як вектори  $\mathbf{N}_1$  та  $\mathbf{N}_2$ , що являють собою зміщення від будь-якого відліку до відповідних відліків інших періодів. Один період такої послідовності міститься в області, що має форму паралелограма, суміжні боки якого утворено векторами  $\mathbf{N}_1$  та  $\mathbf{N}_2$ .

## 7.2. Багатовимірні системи

Системи слугують для перетворення сигналів. Формально система – це оператор, що відображає один (вхідний) сигнал на інший (вихідний).

Сигнали можна об'єднувати або змінювати за допомогою множини операцій.

Нехай  $w$  та  $x$  – двовимірні дискретні сигнали. Ці сигнали можна додати й отримати третій сигнал  $y$ . Додавання виконується поелементно, тож значення кожного відліку  $y(n_1, n_2)$  отримується шляхом додавання двох відповідних відліків  $w(n_1, n_2)$  та  $x(n_1, n_2)$

$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) + w(n_1, n_2). \quad (7.18)$$

Якщо помножити двовимірні послідовності на сталу, можна отримати нові послідовності.

$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2). \quad (7.19)$$

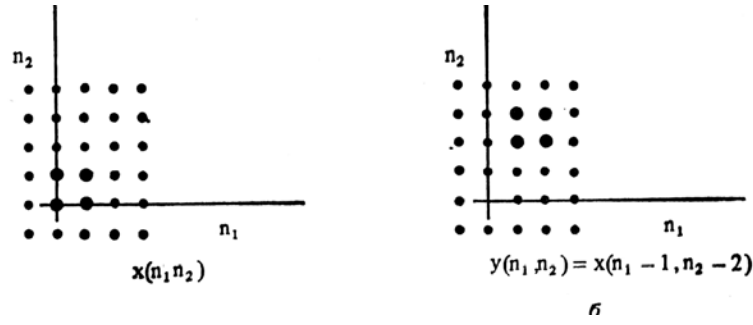
Над двовимірною послідовністю  $x$  можна здійснювати лінійний зсув, що призводить до утворення нової послідовності  $y$ . Операція зсуву переносить всю послідовність  $x$  на нову ділянку площини  $(n_1, n_2)$ . Значення відліків  $y$  зв'язані зі значеннями відліків  $x$  співвідношенням

$$y(n_1, n_2) = x(n_1 - m_1, n_2 - m_2), \quad (7.20)$$

де  $(m_1, m_2)$  – величина зсуву. Приклад зсуву двовимірної послідовності наведено на рис. 7.5.

Із використанням базових операцій можна розкласти будь-яку двовимірну послідовність на суму зважених та зсунутих двовимірних одиничних імпульсів

$$x(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1, k_2) \delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2). \quad (7.21)$$

Рис. 7.5. Операція зсуву двовимірної послідовності  $x(n_1, n_2)$ 

Слід звернути увагу ще на дві основні операції над двовимірними послідовностями. Одну з них, *просторове масштабування*, можна розглядати як узагальнення скалярного добутку. Значення кожного відліку двовимірної послідовності  $x$  помножується на число  $c(n_1, n_2)$ , значення якого залежить від розташування відповідного відліку

$$y(n_1, n_2) = c(n_1, n_2)x(n_1, n_2). \quad (7.22)$$

Двовимірні послідовності можуть піддаватися впливу нелінійних операторів. Важливий тип нелінійних операторів, що має назву *безінерційної нелінійності*, характеризується незалежним впливом на значення кожного відліку двовимірної послідовності. Розглянемо, для прикладу, послідовність, що утворено

$$y(n_1, n_2) = [x(n_1, n_2)]^2. \quad (7.23)$$

Операція підведення у квадрат є безінерційний нелінійний перетворювач, оскільки обчислення вихідного значення у точці  $(n_1, n_2)$  залежить від єдиного вхідного значення у тій же точці.

### 7.2.1. Лінійні системи

Лінійні системи підпорядковуються принципу суперпозиції. Відгук лінійної системи на зважену суму вхідних сигналів дорівнює сумі відгуків на окремі вхідні сигнали.

$$y(n_1, n_2) = L \left[ \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1, k_2) \delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \right]. \quad (7.24)$$

Оскільки система лінійна, цей вираз можна переписати таким чином:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1, k_2) L[\delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2)] = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1, k_2) h_{k_1 k_2}(n_1, n_2), \quad (7.25)$$

де  $h_{k_1 k_2}$  – відгук системи на одиничний імпульс, який розташовано у точці  $(k_1, k_2)$ . Якщо для кожної точки  $(k_1, k_2)$  відомий імпульсний відгук  $h_{k_1 k_2}(n_1, n_2)$  на довільно розташований вхідний імпульс, то відгук системи на будь-який вхідний сигнал можна знайти за допомогою суперпозиції.

Системою, *інваріантною до зсуву*, називається система, для якої зсув вхідної послідовності призводить до відповідного зсуву вихідної послідовності. Якщо

$$y(n_1, n_2) = T[x(n_1, n_2)],$$

то система  $T[\cdot]$  є інваріантна до зсуву тільки у тому разі, коли

$$T[x(n_1 - m_1, n_2 - m_2)] = y(n_1 - m_1, n_2 - m_2). \quad (7.26)$$

для всіх послідовностей  $x$  та для всіх цілочислових зсувів  $(m_1, m_2)$ .

Лінійність та інваріантність до зсуву являються незалежними властивостями системи: жодна із цих властивостей не передбачає наявності іншої.

Лінійні інваріантні до зсуву дискретні системи (ЛІЗ-системи) – це клас систем, що найбільш часто вивчається з метою обробки дискретних сигналів будь-якої розмірності. Ці системи відрізняються простою як під час обробки, так й під час аналізу. Поведінку цих систем у багатьох випадках можна вивчати, не торкаючись конкретних характеристик вхідного сигналу.

Згідно з (7.25)

$$h_{k_1 k_2}(n_1, n_2) \equiv L[\delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2)]. \quad (7.27)$$

Для випадку  $k_1 = k_2 = 0$  маємо

$$h_{k_1 k_2}(n_1, n_2) = L[\delta(n_1, n_2)]. \quad (7.28)$$

Враховуючи принцип інваріантності до зсуву, одержимо

$$h_{k_1 k_2}(n_1, n_2) = h_{00}(n_1 - k_1, n_2 - k_2)]. \quad (7.29)$$

Імпульсний відгук на довільно розташований вхідний імпульс дорівнює зсунутому імпульсному відгуку на вхідний імпульс, що розташований у початку координат. Якщо позначити  $h(n_1, n_2) \equiv h_{00}(n_1, n_2)$ , можна виразити вихідну послідовність таким чином:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1, k_2)h(n_1 - k_1, n_2 - k_2). \quad (7.30)$$

Це співвідношення відоме як *дискретна згортка*.

Фактично тут виконується розкладання вхідної послідовності  $x(n_1, n_2)$  на зважену суму зсунутих імпульсів згідно з рівністю (7.21). ЛІЗ-система перетворює кожний імпульс у зсунуту копію імпульсного відгуку  $h(n_1, n_2)$ . Суперпозиція цих зважених та зсунутих імпульсних відгуків утворює вихідну послідовність, причому ваговими коефіцієнтами є значення відліків вхідної послідовності  $x(n_1, n_2)$ . Рівність (7.30) записано за припущення, що ЛІЗ-система сповна характеризується своїм імпульсним відгуком  $h(n_1, n_2)$ .

Згортка (7.30) може бути записана й у такому вигляді

$$y(n_1, n_2) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} h(l_1, l_2)x(n_1 - l_1, n_2 - l_2). \quad (7.31)$$

Отже, згортка – це комутативна операція. Рівняння (7.30) можна записати у вигляді

$$y = x * * h = h * * x. \quad (7.32)$$

За допомогою векторних позначень вихідну послідовність  $M$ -вимірної ЛІЗ-системи можна представити як  $M$ -вимірну згортку вихідної послідовності та імпульсного відгуку

$$y(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{k}} x(\mathbf{k}h(\mathbf{n} - \mathbf{k})). \quad (7.33)$$

Для того, щоб із послідовності  $h(k_1, k_2)$  утворити послідовність  $h(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$ , спочатку виконуємо відображення  $h$  відносно обох осей  $k_1, k_2$ , потім виконуємо зсув послідовності так, щоб відлік  $h(0, 0)$  опинився в точці  $(n_1, n_2)$ , як це показано на рис. Послідовність-добуток  $x(k_1, k_2)h(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$  утворена; для пошуку значення вихідного відліку  $y(n_1, n_2)$  додаємо ненульові значення відліків послідовності-добутку.

*Приклад 1.*



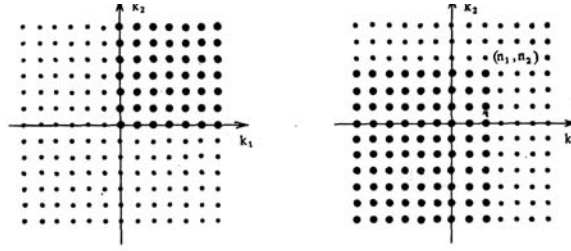


Рис. 7.6. а) – послідовність  $h(k_1, k_2)$ ; б) – послідовність  $h(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$ ;  $n_1 = 2, n_2 = 3$

Розглянемо двовимірну дискретну ЛІЗ-систему, вихідний відлік якої у точці  $(n_1, n_2)$  характеризує внесок значень вхідних відліків, що розташовані у точках нижче та зліва від точок  $(n_1, n_2)$ . Система являє собою один з видів двовимірного цифрового інтегратора; її імпульсний відгук – це двовимірна одинична ступінчаста послідовність  $u(n_1, n_2)$ .

За вхідну послідовність  $x(n_1, n_2)$  виберемо двовимірну послідовність скінченної протяжності, значення відліків якої дорівнюють 1 зсередини прямокутної області  $0 \leq n_1 < N_1, 0 \leq n_2 < N_2$  і 0 зовні її.

Для обчислення значення вихідного відліку  $y(n_1, n_2)$  за допомогою виразу (7.30) утворимо послідовність-добуток  $x(k_1, k_2)h(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$ . Залежно від конкретного значення  $(n_1, n_2)$  ненульові області послідовностей  $x(k_1, k_2)$  та  $h(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$  перекриваються із різним ступенем. Можна відокремити п'ять випадків, що представлені на рис. , де ненульові області кожної послідовності заштриховано, а нульові відліки не показано.

*Випадок 1.*  $n_1 < 0$  або  $n_2 < 0$ . Для таких значень  $(n_1, n_2)$  послідовності  $x(k_1, k_2)$  та  $h(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$  не перекриваються. Тому їхній добуток, як і значення таких відліків згортки, дорівнюють нулю.

*Випадок 2.*  $0 \leq n_1 < N_1, 0 \leq n_2 < N_2$ . Має місце часткове перекриття. Внесок ненульових значень відліків у послідовності-добутку має вигляд

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} 1 = (n_1 + 1)(n_2 + 1). \quad (7.34)$$

*Випадок 3.*  $n_1 \geq N_1, 0 \leq n_2 < N_2$ .

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2} 1 = N_1(n_2 + 1). \quad (7.35)$$

*Випадок 4.*  $0 \leq n_1 < N_1, n_2 \geq N_2$ . За аналогією із попереднім випадком

$$y(n_1, n_2) = N_2(n_1 + 1). \quad (7.36)$$

*Випадок 5.*  $n_1 \geq N_1, n_2 \geq N_2$ . У цьому разі зсунута ступінчаста послідовність  $h(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$  повна перекриває імпульс  $x(k_1, k_2)$ . Тоді

$$y(n_1, n_2) = N_1 N_2. \quad (7.37)$$

Як наслідок, повна згортка має вигляд

$$y(n_1, n_2) = \begin{cases} 0 & \text{при } n_1 < 0 \text{ або } n_2 < 0, \\ (n_1 + 1)(n_2 + 1) & \text{при } 0 \leq n_1 < N_1, 0 \leq n_2 < N_2, \\ N_1(n_2 + 1) & \text{при } n_1 \geq N_1, 0 \leq n_2 < N_2, \\ (n_1 + 1)N_2 & \text{при } 0 \leq n_1 < N_1, n_2 \geq N_2, \\ N_1 N_2 & \text{при } n_1 \geq N_1, n_2 \geq N_2. \end{cases} \quad (7.38)$$

Її графічне зображення наведено на рис. 7.7.

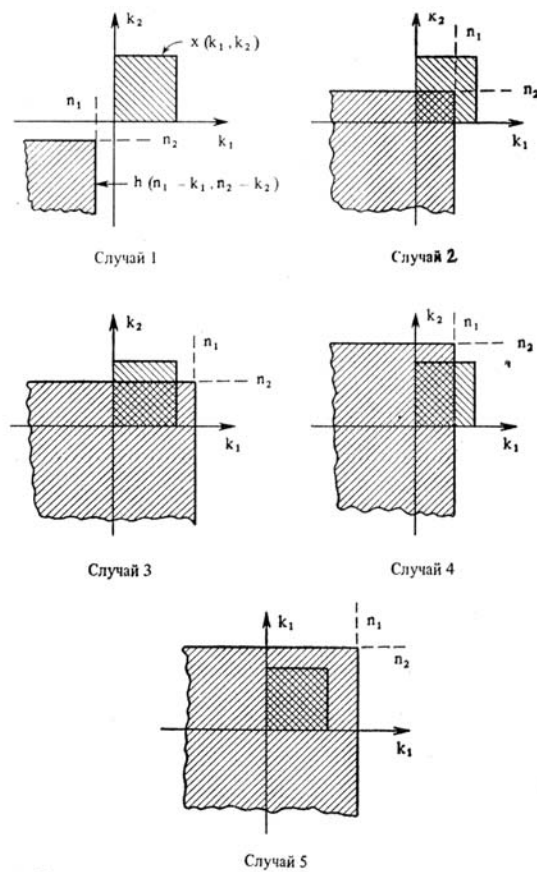


Рис. 7.7. Згортка квадратного імпульсу з двовимірною ступінчастою послідовністю

### 7.2.2. Опорні області

Для більшості двовимірних систем незалежні змінні не зв'язані із часом. Але якщо розглядати реалізацію систем, треба узагальнити поняття фізично реалізуємої системи.

Імпульсний відгук  $h(n)$  фізично реалізуємої одновимірної ЛПЗ-системи дорівнює нулю при  $n < 0$ . Відповідно до узагальнення поняття фізичної реалізуємої може бути вимога, щоб імпульсний відгук дорівнював нулю поза деякою опорною областю.

Послідовності, що відрізняються від нуля тільки в одному квадранті площини  $(n_1, n_2)$ , мають *опорну область у вигляді квадранта*. Поняття опори на квадрант можна узагальнити шляхом включення опорних областей у формі сектора. Говорять, що послідовність має *опорну область у вигляді сектора*, якщо вона має ненульові значення тільки у межах сектора, який обмежено двома прямими, що виходять із початку координат за умови, що кут між цими прямими строго менше  $180^\circ$ . Приклад такої послідовності наведено на рис.

Будь-яку послідовність, що спирається на сектор, можна відобразити на квадрант шляхом лінійного перетворення змінних. Наприклад, нехай вектори

$$\mathbf{N}_1 = (N_{11}, N_{21})^T, \quad \mathbf{N}_2 = (N_{12}, N_{22})^T. \quad (7.39)$$

розташовано вздовж меж секторної області  $(N_{11}, N_{21}, N_{12}, N_{22}$  – цілі числа). Нехай також пари чисел  $N_{11}$  та  $N_{21}$ , а також  $N_{12}$  та  $N_{22}$  не містять загальних множників. Оскільки  $\mathbf{N}_1$  та  $\mathbf{N}_2$  не колінеарні, то

$$D = N_{11}N_{21} - N_{12}N_{22} \neq 0. \quad (7.40)$$

Тоді заміна змінних

$$m_1 = N_{22}n_1 - N_{12}n_2, \quad m_2 = N_{21}n_1 + N_{11}n_2 \quad (7.41)$$

відображує сектор на перший квадрант. У даному разі вектор  $\mathbf{N}_1$  відображується на  $(D, 0)^T$ , а вектор  $\mathbf{N}_2$  – на  $(0, D)^T$ . На рис. 7.8 наведено результат відображення сектора на перший квадрант. Оскільки у даному прикладі  $D = 3$ , то не кожна точка першого квадранта міститься в області лінійного перетворення (7.41). В площині  $m_1, m_2$  у наявності є відліки, на які не одержить відображення жодний відлік із площини  $(n_1, n_2)$ . Це – наслідок використання дискретних сигналів: виконуються відображення цілочислового вектора  $(n_1, n_2)^T$  на цілочисловий вектор  $(m_1, m_2)^T$ . Необхідною та достатньою умовами того, щоб кожна цілочислова упорядкована пара з першого квадранта площини  $(m_1, m_2)$  містилась в області лінійного перетворення, є умова  $|D| = 1$ .

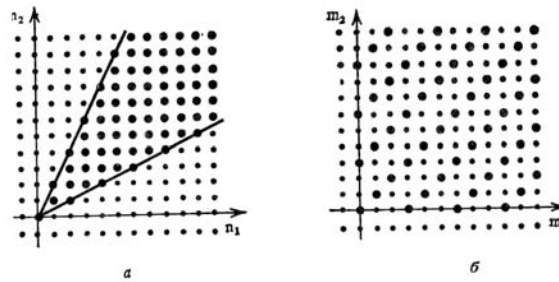


Рис. 7.8. а) – послідовність із опорною областю у вигляді сектора; б) – її відображення на квадрант

### 7.3. Характеристики сигналів та систем у частотній області

Якщо представити вхідний сигнал у вигляді суперпозиції зсунутих імпульсів, то і вихідний сигнал також можна представити як суперпозицію зсунутих імпульсних відгуків. Представлення ЛІЗ-систем у частотній області також використовує принцип суперпозиції, але у цьому разі елементарні послідовності є комплексні синусоїди. Розглянемо перш за все відгук ЛІЗ-систем на синусоїдальні вхідні сигнали.

#### 7.3.1. Частотний відгук двовимірної ЛІЗ-системи

Розглянемо двовимірну ЛІЗ-систему із одиничним імпульсним відгуком  $h(n_1, n_2)$  та вхідним сигналом, який являє собою комплексну синусоїду

$$x(n_1, n_2) = \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2), \quad (7.42)$$

де  $\omega_1, \omega_2$  – дійсні числа, що мають назву горизонтальної та вертикальної просторових частот відповідно. Вихідний сигнал можна одержати за допомогою згортки

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \exp[i\omega_1(n_1 - k_1) + i\omega_2(n_2 - k_2)]h(k_1, k_2) = \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2) \left[ \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1, k_2) \exp(-i\omega_1 k_1 - i\omega_2 k_2) \right] = \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2)H(\omega_1, \omega_2). \quad (7.43)$$

Вихідний сигнал являє собою комплексну синусоїду із тими ж частотами, що й у вхідного сигналу, але із зміненими амплітудою та фазою за рахунок комплексного множника

$H(\omega_1, \omega_2)$ . Множник  $H(\omega_1, \omega_2)$  має назву *частотного відгуку* (*частотної характеристики*) системи й описується виразом

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} h(n_1, n_2) \exp(-i\omega_1 n_1 - i\omega_2 n_2) \quad (7.44)$$

ЛІЗ-система має властивість розрізняти синусоїдальні сигнали залежно від їхніх частот. Якщо для деякого конкретного значення упорядкованої пари  $(\omega_1, \omega_2)$  значення  $|H(\omega_1, \omega_2)| \approx 1$ , то синусоїдальні сигнали цієї частоти будуть проходити через систему без ослаблення. Якщо ж для деякої пари  $(\omega_1, \omega_2)$  значення  $|H(\omega_1, \omega_2)| \approx 0$ , то синусоїди цієї частоти будуть пригнічуватися системою.

Частотний відгук  $H(\omega_1, \omega_2)$  є періодичний з періодом  $2\pi$  по обом частотним змінним

$$H(\omega_1 + 2\pi, \omega_2) = H(\omega_1, \omega_2); \quad H(\omega_1, \omega_2 + 2\pi) = H(\omega_1, \omega_2). \quad (7.45)$$

*Приклад 2.*

Обчислимо частотний відгук системи з імпульсним відгуком

$$h(n_1, n_2) = \delta(n_1 + 1, n_2) + \delta(n_1 - 1, n_2) + \delta(n_1, n_2 + 1) + \delta(n_1, n_2 - 1). \quad (7.46)$$

Ця послідовність зображена на рис. 7.9

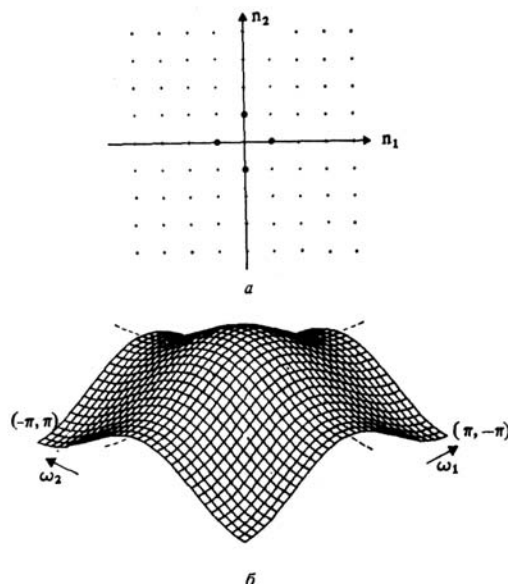


Рис. 7.9. Імпульсний (а) та частотний (б) відгуки

Частотний відгук має вигляд

$$\begin{aligned} H(\omega_1, \omega_2) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} h(n_1, n_2) \exp[-i\omega_1 n_1 - i\omega_2 n_2] = \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} [\delta(n_1 + 1, n_2) + \delta(n_1 - 1, n_2) + \delta(n_1, n_2 + 1) + \delta(n_1, n_2 - 1)] \times \\ &\times \exp(-i\omega_1 n_1 - i\omega_2 n_2) = e^{i\omega_1} + e^{-i\omega_1} + e^{i\omega_2} + e^{-i\omega_2} = 2(\cos \omega_1 + \cos \omega_2). \end{aligned} \quad (7.47)$$

*Приклад 3.* Розглянемо систему з імпульсним відгуком вигляду

$$h(n_1, n_2) = \begin{cases} 0,125 & \text{при } n_1 = \pm 1, \quad n_2 = \pm 1, \\ 0,25 & \text{при } n_1 = \pm 1, \quad n_2 = 0, \\ 0,25 & \text{при } n_1 = 0, \quad n_2 = \pm 1, \\ 0,5 & \text{при } n_1 = n_2 = 0, \\ 0 & \text{у решті випадків} \end{cases} \quad (7.48)$$

За визначенням частотного відгуку одержуємо

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} h(n_1, n_2) \exp[-i\omega_1 n_1 - i\omega_2 n_2] = 0,5 + 0,25(e^{i\omega_1} + e^{-i\omega_1} + e^{i\omega_2} + e^{-i\omega_2}) + 0,125(e^{-i\omega_1} e^{-i\omega_2} + e^{-i\omega_1} e^{i\omega_2} + e^{i\omega_1} e^{-i\omega_2} + e^{i\omega_1} e^{i\omega_2}) = 0,5(1 + \cos \omega_1)(1 + \cos \omega_2). \quad (7.49)$$

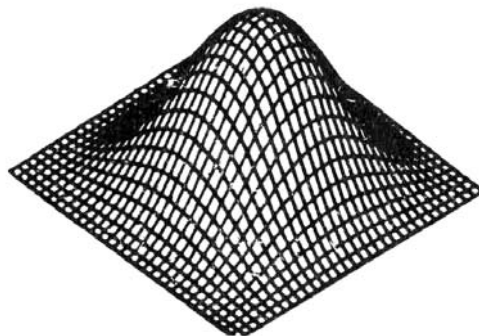


Рис. 7.10. Частотний відгук ФНЧ

Частотний відгук зображено на рис. 7.10. Система являє собою фільтр нижніх просторових частот. Коефіцієнт передачі фільтру дорівнює  $\approx 2$  у початку координат і зменшується практично до нуля при  $\omega_1 \approx \pm\pi$  або  $\omega_2 \approx \pm\pi$ .

Система має розділимий імпульсний відгук й з (7.49) видно, що її частотний відгук є розділима функція. Ця властивість справджується й у загальному випадку. Якщо

$$h(n_1, n_2) = f(n_1)g(n_2), \quad (7.50)$$

то

$$H(\omega_1, \omega_2) = F(\omega_1)G(\omega_2),$$

де

$$F(\omega_1) = \sum_{n_1} f(n_1)e^{-i\omega_1 n_1}, \quad G(\omega_2) = \sum_{n_2} g(n_2)e^{-i\omega_2 n_2}. \quad (7.51)$$

### 7.3.2. Визначення імпульсного відгуку по частотному відгуку

Згідно визначенню (7.44) для  $H(\omega_1, \omega_2)$  частотний відгук дискретної ЛІЗ-системи у загальному випадку являє собою неперервну двовимірну періодичну функцію, яку можна виразити у вигляді лінійної комбінації гармонічно зв'язаних синусоїд. Співвідношення (7.44) не тільки визначає  $H(\omega_1, \omega_2)$ , але й описує розкладання  $H(\omega_1, \omega_2)$  у двовимірний ряд Фур'є. Коефіцієнтами розкладання слугують значення відліків імпульсного відгуку  $h(n_1, n_2)$ . Шукана залежність може бути отримана шляхом множення обох частин рівняння (7.44) на комплексну синусоїду та інтегрування у межах квадратної частотної області:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega_1, \omega_2) \exp(i\omega_1 k_1 + i\omega_2 k_2) d\omega_1 d\omega_2 = \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n_1} \sum_{n_2} h(n_1, n_2) \exp(-i\omega_1 n_1 - i\omega_2 n_2) \exp(i\omega_1 k_1 + i\omega_2 k_2) d\omega_1 d\omega_2 = \\ & = \sum_{n_1} \sum_{n_2} h(n_1, n_2) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-i\omega_1(n_1 - k_1)] d\omega_1 \right] \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-i\omega_2(n_2 - k_2)] d\omega_2 \right]. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Оскільки

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega(n-k)} = \delta(n-k), \quad (7.53)$$

то подвійна сума у правій частині виразу (7.52) перетворюється в  $h(k_1, k_2)$ . Це дає можливість обчислювати значення імпульсного відгуку у точці  $(k_1, k_2)$ . Отже

$$h(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega_1, \omega_2) \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (7.54)$$

*Приклад 4.*

Розглянемо задачу обчислення імпульсного відгуку ідеального кругового фільтра нижніх частот, який описується частотним відгуком вигляду

$$H(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq R^2 < \pi^2, \\ 0 & \text{в решті випадків.} \end{cases} \quad (7.55)$$

Цей частотний відгук, наведений на рис. не є розділимий. У даному разі

$$h(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_A \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (7.56)$$

З метою спрощення обчислення інтегралу по круговій області  $A$  замістимо  $\omega_1$  та  $\omega_2$  змінними у полярних координатах. Визначимо

$$\omega \equiv \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}, \quad \varphi \equiv \arctg \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \theta \equiv \arctg \frac{n_2}{n_1}.$$

Тоді рівняння (7.57) перетвориться так:

$$\begin{aligned} h(n_1, n_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \omega \exp \left[ i\omega \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cos(\theta - \varphi) \right] d\varphi d\theta = \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^R \omega J_0 \left( \omega \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \right) d\omega = \frac{R}{2\pi} \frac{J_1 \left( R \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \right)}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}, \end{aligned} \quad (7.57)$$

де  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  – функції Бесселя I роду 0-го та 1-го порядків відповідно. Отриманий імпульсний відгук є дискретна функція із круговою симетрією. Її перетин вздовж осі  $n_1$  має вигляд

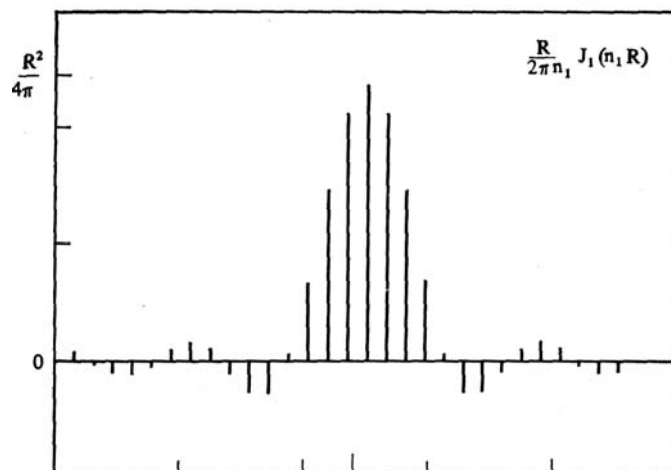
$$h(n_1, 0) = \frac{R}{2\pi n_1} J_1(n_1 R). \quad (7.58)$$

Цей перетин наведено на рис. 7.11.

Двовимірна послідовність у більшості практично важливих випадків може бути представлена зваженою сумою комплексних синусоїд, для чого слід використовувати багатовимірне перетворення Фур'є. Оскільки відгук ЛІЗ-системи нам відомий, ми можемо представити вихідну послідовність як суперпозицію синусоїдальних відгуків ЛІЗ-системи.

Оператор оберненого перетворення частотного відгуку (7.57) не тільки дає формулу для обчислення  $h(n_1, n_2)$ , але і представляє послідовність  $h$  як суперпозицію комплексних синусоїд. Використаємо аналогічне представлення для вхідної послідовності

$$x(n-1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_1, \omega_2) \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (7.59)$$

Рис. 7.11. Перетин вздовж осі  $n_1$  імпульсного відгуку ФНЧ із круговою симетрією

Комплексна функція  $X$ , відома як *двовимірне перетворення Фур'є* функції  $x$ , визначається таким чином:

$$X(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) \exp(-i\omega_1 n_1 - i\omega_2 n_2). \quad (7.60)$$

Бачимо, що із урахуванням цього визначення частотний відгук ЛІЗ-системи являє собою перетворення Фур'є імпульсного відгуку системи.

Нехай дана двовимірна ЛІЗ-система  $L[\cdot]$  з імпульсним відгуком  $h(n_1, n_2)$  та частотним відгуком  $H(\omega_1, \omega_2)$ . Відомо, що

$$L[\exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2)] = H(\omega_1, \omega_2) \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2). \quad (7.61)$$

Звідси

$$y(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega_1, \omega_2) X(\omega_1, \omega_2) \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (7.62)$$

Цей вираз дає новий спосіб опису вихідної послідовності ЛІЗ-системи. Відносні ваги комплексних синусоїдальних компонент, які входять до складу вхідної послідовності, тут заміщено множенням на частотний відгук системи  $H(\omega_1, \omega_2)$ .

Вихідну послідовність  $y(n_1, n_2)$  можна також записати за допомогою перетворення Фур'є:

$$y(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega_1, \omega_2) \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (7.63)$$

Порівняння (7.62) та (7.63) дає

$$Y(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1, \omega_2) X(\omega_1, \omega_2), \quad (7.64)$$

якщо  $y = h * x$ . Цей результат, що має назву *теорема про згортку*, є виключно важливий: перетворення Фур'є згортки двох двовимірних послідовностей дорівнює добутку їхніх перетворень Фур'є.

### 7.3.3. Деякі властивості двовимірних перетворень Фур'є

Просторовий зсув. Якщо  $x(n_1, n_2) \leftrightarrow X(\omega_1, \omega_2)$ , то

$$x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \leftrightarrow e^{-i\omega_1 m_1 - i\omega_2 m_2} X(\omega_1, \omega_2) \quad (7.65)$$

Зсув послідовності  $x(n_1, n_2)$  на величину  $(m_1, m_2)$  відповідає множенню її перетворення Фур'є  $X(\omega_1, \omega_2)$  на множник із лінійною фазою  $\exp(-i\omega_1 m_1 - i\omega_2 m_2)$ .

Модуляція.

$$x(n_1, n_2) \exp(i\theta_1 n_1 + i\theta_2 n_2) \leftrightarrow X(\omega_1 - \theta_1, \omega_2 - \theta_2). \quad (7.66)$$

Множення. Справджується співвідношення

$$\begin{aligned} c(n_1, n_2)x(n_1, n_2) &\leftrightarrow \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta_1, \theta_2) C(\omega_1 - \theta_1, \omega_2 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_1 - \theta_1, \omega_2 - \theta_2) C(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned} \quad (7.67)$$

Множення двох послідовностей призводить до згортки їхніх перетворень Фур'є. Бачимо, що інтеграл згортки має особливий вигляд; виразу під інтегралом властива подвійна періодичність, а область інтегрування точно відповідає одному періоду виразу під інтегралом. Властивість модуляції можна розглядати як частковий випадок множення двох послідовностей.

Диференціювання перетворення Фур'є. Воно здійснюється таким чином:

$$\begin{aligned} -in_1 x(n_1, n_2) &\leftrightarrow \frac{\partial X(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1}; \\ -in_2 x(n_1, n_2) &\leftrightarrow \frac{\partial X(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2} \\ -n_1 n_2 x(n_1, n_2) &\leftrightarrow \frac{\partial^2 X(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2}. \end{aligned} \quad (7.68)$$

Комплексне сполучення.

$$x^*(n_1, n_2) \leftrightarrow X^*(-\omega_1, -\omega_2). \quad (7.69)$$

Дійсна та уявна частини. Розділяються таким чином:

$$\operatorname{Re}[x(n_1, n_2)] \leftrightarrow 1/2[X(\omega_1, \omega_2) + X^*(-\omega_1, -\omega_2)]. \quad (7.70)$$

$$i\operatorname{Im}[x(n_1, n_2)] \leftrightarrow 1/2[X(\omega_1, \omega_2) - X^*(-\omega_1, -\omega_2)]. \quad (7.71)$$

$$1/2[x(n_1, n_2) + x^*(-n_1, -n_2)] \leftrightarrow \operatorname{Re}[X(\omega_1, \omega_2)]. \quad (7.72)$$

$$1/2[x(n_1, n_2) - x^*(-n_1, -n_2)] \leftrightarrow i\operatorname{Im}[X(\omega_1, \omega_2)]. \quad (7.73)$$

Зокрема, якщо  $x(n_1, n_2)$  – послідовність із дійсними значеннями, то

$$X(\omega_1, \omega_2) = X^*(-\omega_1, -\omega_2). \quad (7.74)$$

$$\operatorname{Re}[X(\omega_1, \omega_2)] = \operatorname{Re}[X(-\omega_1, -\omega_2)]. \quad (7.75)$$

$$\operatorname{Im}[X(\omega_1, \omega_2)] = -\operatorname{Im}[X(-\omega_1, -\omega_2)]. \quad (7.76)$$

Дійсна частина перетворення Фур'є симетрична до початку координат парним чином, уявна частина – непарним.



*Теорема Парсеваля.*

Якщо  $x(n_1, n_2) \leftrightarrow X(\omega_1, \omega_2)$  та  $w(n_1, n_2) \leftrightarrow W(\omega_1, \omega_2)$ , то

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} x(n_1, n_2) w^*(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_1, \omega_2) W^*(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (7.77)$$

Ліва частина виразу (7.77) визначає скалярний добуток двох двовимірних послідовностей, а права – скалярний добуток їхніх перетворень Фур'є. Теорема Парсеваля стверджує, що скалярний добуток є інваріантний відносно операції перетворення Фур'є.

Рівність (7.77) зводиться до теореми про згортку, якщо  $w(n_1, n_2) = h^*(m_1 - n_1, m_2 - n_2)$ .

Інший важливий випадок з'являється, якщо  $w(n_1, n_2) = x(n_1, n_2)$ , так що рівняння (7.77) переходить у рівняння

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} |x(n_1, n_2)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2. \quad (7.78)$$

Ліву частину цього рівняння можна розглядати як повну енергію дискретного сигналу  $x(n_1, n_2)$ . Функція  $|X(\omega_1, \omega_2)|^2$  визначає спектральну щільність енергії, оскільки інтеграл від цієї функції дорівнює повній енергії сигналу.

## 7.4. Дискретизація неперервних двовимірних сигналів

Майже всі дискретні послідовності одержуються як результат представлення деяких реальних неперервних сигналів. Існує багато різних способів представлення неперервних сигналів – розкладання в ряди Фур'є та Тейлора, розкладання по нетригонометричним ортогональним функціям тощо, але значно частіше використовується періодична дискретизація, що зокрема, пов'язано із простотою її реалізації.

### 7.4.1. Періодична дискретизація по прямокутному растру

Проміж кількох способів узагальнення одновимірної періодичної дискретизації на двовимірний випадок найбільш простою є періодична дискретизація у прямокутних координатах (прямокутна дискретизація). Якщо  $x_a(t_1, t_2)$  – двовимірний неперервний сигнал, то дискретний сигнал  $x(n_1, n_2)$ , що одержано з нього шляхом прямокутної дискретизації, має вигляд

$$x(n_1, n_2) = x_a(n_1 T_1, n_2 T_2), \quad (7.79)$$

де  $T_1, T_2$  – додатні дійсні сталі, відомі як горизонтальний та вертикальний інтервали дискретизації.

Виходячи з вигляду сформованої таким чином послідовності, треба з'ясувати, чи можна за значеннями  $x(n_1, n_2)$  відновити сигнал  $x_a(t_1, t_2)$  та як зв'язані фур'є-перетворення сигналів  $x$  та  $x_a$ .

Перш за все визначимо двовимірне перетворення Фур'є для неперервних сигналів:

$$X_a(\Omega_1, \Omega_2) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t_1, t_2) \exp(-i\Omega_1 t_1 - i\Omega_2 t_2) dt_1 dt_2, \quad (7.80)$$

$$x_a(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega_1, \Omega_2) \exp(i\Omega_1 t_1 + i\Omega_2 t_2) d\Omega_1 d\Omega_2. \quad (7.81)$$

Оскільки  $x(n_1, n_2) \equiv x_a(n_1 T_1, n_2 T_2)$ , то

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega_1, \Omega_2) \exp(i\Omega_1 n_1 T_1 + i\Omega_2 n_2 T_2) d\Omega_1 d\Omega_2. \quad (7.82)$$

Тепер перетворимо цей вираз так, щоб одержати обернене перетворення Фур'є для дискретних сигналів. Зробимо заміну  $\omega_1 = \Omega_1 T_1, \omega_2 = \Omega_2 T_2$ ; це дасть нам правильну форму експоненційних множників.

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_1 T_2} X_a \left( \frac{\omega_1}{T_1}, \frac{\omega_2}{T_2} \right) \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (7.83)$$

Подвійний інтеграл по всій площині  $(\omega_1, \omega_2)$  можна розкласти на нескінченну послідовність інтегралів, кожний з яких має квадратну область інтегрування площею  $4\pi^2$ . Нехай  $SQ(k_1, k_2)$  представляє собою квадратну область

$$-\pi + 2\pi k_1 \leq \omega_1 < \pi + 2\pi k_1, \quad -\pi + 2\pi k_2 \leq \omega_2 < \pi + 2\pi k_2.$$

Тоді (7.83) можна переписати так:

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} \iint_{SQ(k_1, k_2)} \frac{1}{T_1 T_2} X_a \left( \frac{\omega_1}{T_1}, \frac{\omega_2}{T_2} \right) \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (7.84)$$

Якщо замінити  $\omega_1$  на  $\omega_1 - 2\pi k_1$ ,  $\omega_2$  на  $\omega_2 - 2\pi k_2$ , можна запобігти залежності меж інтегрування від  $k_1, k_2$  й одержати

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{T_1 T_2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} X_a \left( \frac{\omega_1 - 2\pi k_1}{T_1}, \frac{\omega_2 - 2\pi k_2}{T_2} \right) \right] \times \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2) \exp(-i2\pi k_1 n_1 - i2\pi k_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (7.85)$$

Другий експоненційний множник дорівнює 1 для всіх значень цілочислових змінних  $n_1, k_1, n_2$  та  $k_2$ . Отже, маємо

$$X(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} X_a \left( \frac{\omega_1 - 2\pi k_1}{T_1}, \frac{\omega_2 - 2\pi k_2}{T_2} \right), \quad (7.86)$$

що співпадає із оберненим перетворенням Фур'є, або

$$X(\Omega_1 T_1, \Omega_2 T_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} X_a \left( \Omega_1 - \frac{2\pi k_1}{T_1}, \Omega_2 - \frac{2\pi k_2}{T_2} \right). \quad (7.87)$$

Вираз (7.87) дає нам шуканий взаємозв'язок між перетвореннями Фур'є неперервного та дискретного сигналів. Праву частину цього виразу можна розглядати як періодичне подовження, або доповнення функції  $X_a(\Omega_1, \Omega_2)$ , яке дає періодичну функцію  $X_a(\Omega_1 T_1, \Omega_2 T_2)$ .

Якщо неперервний сигнал  $x_a(t_1, t_2)$  є сигнал із обмеженим спектром, тобто спектр займає ділянку обмеженої протяжності в частотній площині, вираз (7.87) допускає подальше спрощення. Перетворення Фур'є  $X_a(\Omega_1, \Omega_2)$  сигналу із обмеженим спектром має нульові значення поза деякою скінченною областю на площині  $(\Omega_1, \Omega_2)$ . Припустимо, що періоди дискретизації  $T_1$  та  $T_2$  вибрано досить малими, так що

$$X_a(\Omega_1, \Omega_2) = 0 \text{ для } |\Omega_1| \geq \pi/T_1, |\Omega_2| \geq \pi/T_2. \quad (7.88)$$

Тоді вираз (7.87) спрощується:

$$X(\Omega_1 T_1, \Omega_2 T_2) = \frac{1}{T_1 T_2} X_a(\Omega_1, \Omega_2) \text{ при } |\Omega_1| \leq \pi/T_1 \text{ та } |\Omega_2| \leq \pi/T_2. \quad (7.89)$$

Значення  $X(\Omega_1 T_1, \Omega_2 T_2)$  поза цією областю визначаються періодичністю  $X(\Omega_1 T_1, \Omega_2 T_2)$ .

На рис. 7.12 представлено зображення перетворення Фур'є із обмеженим частотним спектром. Періодичне повторення перетворення Фур'є дає періодичну функцію. Доти  $X_a(\Omega_1, \Omega_2)$  задовольняє рівнянню (7.88), його можна відновити по  $X(\Omega_1 T_1, \Omega_2 T_2)$ :

$$X_a(\Omega_1, \Omega_2) = \begin{cases} T_1 T_2 X(\Omega_1 T_1, \Omega_2 T_2) & \text{при } |\Omega_1| < \pi/T_1, \quad |\Omega_2| < \pi/T_2, \\ 0 & \text{в решті випадків.} \end{cases} \quad (7.90)$$

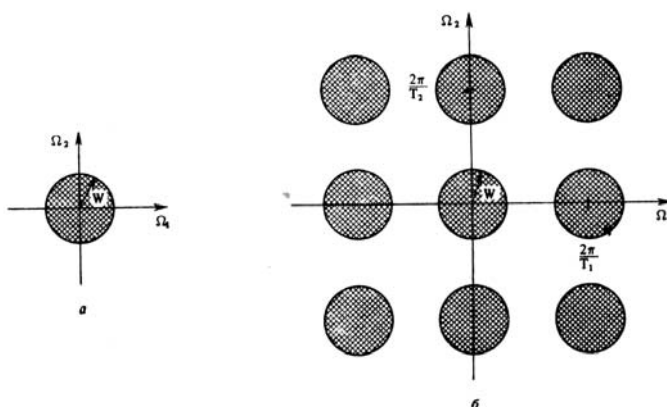


Рис. 7.12. Зображення перетворення Фур'є з обмеженим частотним спектром

Виразимо  $x_a(t_1, t_2)$  через його перетворення Фур'є ( $W_1 = \pi/T_1$ ,  $W_2 = \pi/T_2$ )

$$\begin{aligned} x_a(t_1, t_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega_1, \Omega_2) \exp(i\Omega_1 t_1 + i\Omega_2 t_2) d\Omega_1 d\Omega_2 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-W_1}^{W_1} \int_{-W_2}^{W_2} T_1 T_2 X_a(\Omega_1 T_1, \Omega_2 T_2) \exp(i\Omega_1 t_1 + i\Omega_2 t_2) d\Omega_1 d\Omega_2 \end{aligned} \quad (7.91)$$

Тепер замістимо  $X(\Omega_1 T_1, \Omega_2 T_2)$  на  $x(n_1, n_2)$ :

$$\begin{aligned} x_a(t_1, t_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-W_1}^{W_1} \int_{-W_2}^{W_2} T_1 T_2 \left[ \sum_{n_1} \sum_{n_2} x(n_1, n_2) \exp(-i\Omega_1 T_1 n_1 - i\Omega_2 T_2 n_2) \right] \times \\ &\times \exp(i\Omega_1 t_1 + i\Omega_2 t_2) d\Omega_1 d\Omega_2 = \frac{T_1 T_2}{4\pi^2} \sum_{n_1} \sum_{n_2} x(n_1, n_2) \int_{-W_1}^{W_1} \int_{-W_2}^{W_2} \exp[i\Omega_1 (t_1 - n_1 T_1) + \Omega_2 (t_2 - n_2 T_2)] \\ &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} x(n_1, n_2) \frac{\sin[W_1 (t_1 - n_1 T_1)]}{W_1 (t_1 - n_1 T_1)} \frac{\sin[W_2 (t_2 - n_2 T_2)]}{W_2 (t_2 - n_2 T_2)}. \end{aligned} \quad (7.92)$$

Вирази (7.79), (7.90) та (7.92) утворюють основу двовимірної *теорему відліків*. Ця теорема стверджує, що неперервний сигнал із обмеженим спектром може бути відновлений за значеннями його відліків. Для забезпечення умови (7.88) інтервали дискретизації  $T_1$  та  $T_2$  мають бути досить малими, або, що теж саме, *частоти дискретизації*  $2W_1$  та  $2W_2$  мають бути досить великими.

Неперервний сигнал із необмеженим спектром також можна підпорядкувати дискретизації, але у цьому разі вирази (7.89) та (7.90) не справджуються, оскільки за

періодичного повторення (7.87) в область  $|\Omega_1 T_1| < \pi$ ,  $|\Omega_2 T_2| < \pi$  будуть вносити внесок й інші копії  $X_a(\Omega_1, \Omega_2)$ . Це явище, як і при обробці одновимірних сигналів, має назву ефекту накладання, оскільки високочастотні компоненти будуть “маскуватись” під низькочастотні компоненти  $X(\Omega_1 T_1, \Omega_2 T_2)$ .

#### 7.4.2. Періодична дискретизація при довільному растрі дискретизації

Поняття прямокутної дискретизації легко узагальнити. Якщо визначити два лінійно незалежних вектори  $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{21})^T$ ,  $\mathbf{v}_2 = (v_{12}, v_{22})^T$ , то можна описати розташування двовимірної періодичної множини відліків на площині  $(t_1, t_2)$  таким чином:

$$t_1 = v_{11}n_1 + v_{12}n_2, \quad t_2 = v_{21}n_1 + v_{22}n_2, \quad \text{або } \mathbf{t} = \mathbf{V}\mathbf{n}, \quad (7.93)$$

де  $\mathbf{t} = (t_1, t_2)^T$ ,  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ ,  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ . Матриця  $\mathbf{V}$  називається матрицею дискретизації.  $|\mathbf{V}| \neq 0$ .

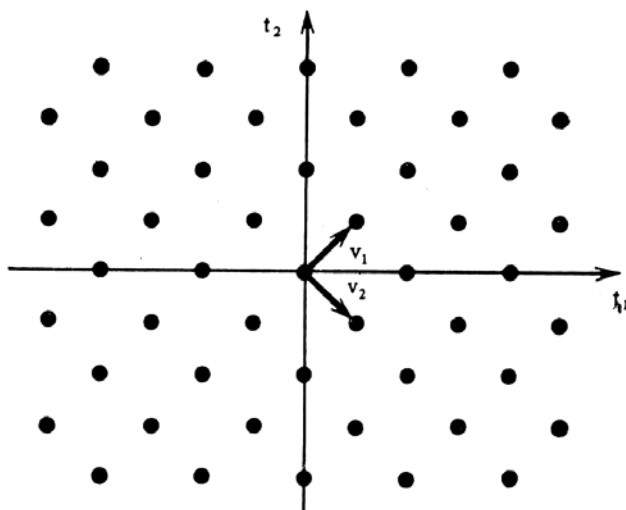


Рис. 7.13. Розташування відліків на площині  $(t_1, t_2)$ , що визначаються векторами  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$

Дискретизація неперервного сигналу  $x_a(\mathbf{t})$  утворює дискретний сигнал  $x(\mathbf{n}) \equiv x_a(\mathbf{V}\mathbf{n})$ . Задамо вектор частот  $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2)^T$ .

Перетворення Фур'є сигналу  $x(\mathbf{n})$  у векторних позначеннях має вигляд

$$X(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\mathbf{n}} x(\mathbf{n}) e^{-i\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{n}}. \quad (7.94)$$

де  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)^T$ . Тоді

$$x(\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} X(\boldsymbol{\omega}) e^{i\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{n}} d\boldsymbol{\omega}. \quad (7.95)$$

Оскільки  $x(\mathbf{n})$  одержується з  $x_a(\mathbf{t})$  дискретизацією, можна написати

$$x(\mathbf{n}) = x_a(\mathbf{V}\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\boldsymbol{\Omega}) e^{i\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{V}\mathbf{n}} d\boldsymbol{\Omega}. \quad (7.96)$$

Заміщення  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{V}^T \boldsymbol{\Omega}$  дає

$$x(\mathbf{n}) = x_a(\mathbf{V}\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\mathbf{V}|} X_a([\mathbf{V}^T]^{-1} \boldsymbol{\omega}) e^{i\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{n}} d\boldsymbol{\omega}. \quad (7.97)$$

Як і раніше, інтегрування по площині  $\boldsymbol{\omega}$  представляється як нескінченна сума інтегралів по квадратним областям. Результат є аналогічний виразу (7.85). Далі

$$x(\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{|\mathbf{V}|} X_a([\mathbf{V}^T]^{-1}(\boldsymbol{\omega} - 2\pi\mathbf{k})) e^{i\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{n}} e^{-i2\pi\mathbf{k}^T \mathbf{n}} \right] d\boldsymbol{\omega}, \quad (7.98)$$

де  $\mathbf{k}$  – вектор цілочислових значень. Другий експоненційний множник, як і раніше, завжди дорівнює 1, тому порівняння (7.98) та (7.95) призводить до виразу

$$X(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{|\mathbf{V}|} \sum_{\mathbf{k}} X_a([\mathbf{V}^T]^{-1}(\boldsymbol{\omega} - 2\pi\mathbf{k})), \quad (7.99)$$

або

$$X(\mathbf{V}^T \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{|\mathbf{V}|} \sum_{\mathbf{k}} X_a(\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{U}\mathbf{k}), \quad (7.100)$$

де  $\mathbf{U}$  – матриця, що задовольняє умову

$$\mathbf{U}^T \mathbf{V} = 2\pi \mathbf{E}, \quad (7.101)$$

$\mathbf{E}$  – одинична матриця розміру  $2 \times 2$ . Вираз (7.100) містить шуканий зв'язок між перетвореннями Фур'є сигналів  $x(\mathbf{n})$  та  $x_a(\mathbf{t})$ .

У разі прямокутної дискретизації матриці  $\mathbf{V}$  та  $\mathbf{U}$  приймають вигляд

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}; \quad |\mathbf{V}| = T_1 T_2, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{T_1} & 0 \\ 0 & \frac{2\pi}{T_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2W_1 & 0 \\ 0 & 2W_2 \end{bmatrix}$$

і вираз (7.100) зводиться до (7.87).

$X(\mathbf{V}^T \boldsymbol{\Omega})$  можна розглядати як періодичне подовження  $X_a(\boldsymbol{\Omega})$ , але тепер періодичність задається матрицею  $\mathbf{U}$ , яка представляє собою набір з двох векторів періодичності  $\mathbf{u}_1$  та  $\mathbf{u}_2$ .

$$X(\mathbf{V}^T(\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{U}\mathbf{k})) = X(\mathbf{V}^T(\boldsymbol{\Omega} + 2\pi\mathbf{k})) = X(\mathbf{V}^T \boldsymbol{\Omega}).$$

Розглянемо неперервний сигнал  $x_a(t)$  з перетворенням Фур'є, яке показано на рис. 7.12а. Якщо дискретизацію  $x_a(t)$  виконувати згідно матриці дискретизації

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

яка відповідає розташуванню відліків, показаних на рис. 7.13, то функція  $X_a(\boldsymbol{\Omega})$  буде періодично повторюватись згідно матриці періодичності

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \pi & \pi \\ \pi & -\pi \end{bmatrix}.$$

Отже,  $X(\mathbf{V}^T \boldsymbol{\Omega})$  як функція від  $\boldsymbol{\Omega}$ , що визначається (7.100), буде виглядати як показано на рис. 7.14.

Розглянемо знову важливий випадок неперервного сигнала  $x_a(t)$  з обмеженим спектром. Перетворення Фур'є  $X_a(\boldsymbol{\Omega})$  тотожно дорівнює нулю поза областю скінченної протяжності  $B$ , яку називають *смугою частот*. Змінюючи матрицю дискретизації  $\mathbf{V}$ , можна матрицю періодичності  $\mathbf{U}$  підібрати так, щоб не було перекривання копій  $X_a(\boldsymbol{\Omega})$  у правій частині (7.100), що періодично повторюються. Цим самим ми забезпечимо

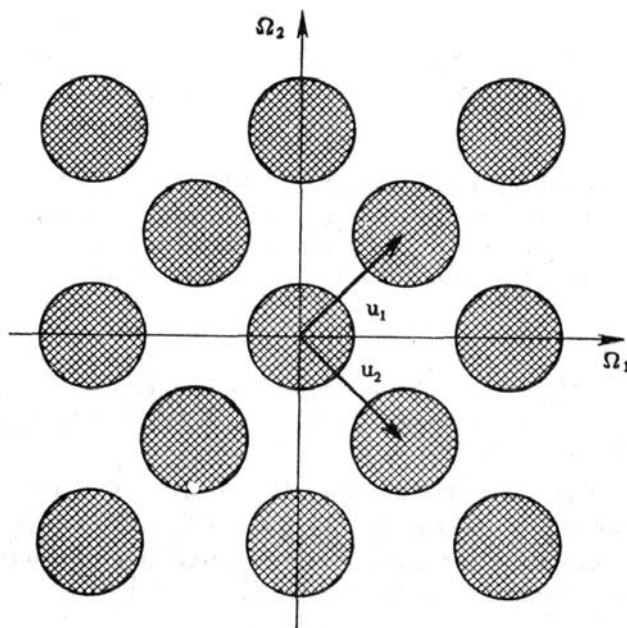


Рис. 7.14. Періодична функція  $X(\mathbf{V}^T \boldsymbol{\Omega})$  з матрицею дискретизації  $\mathbf{V}$

відсутність накладань. Тоді для значень  $\mathbf{V}^T \boldsymbol{\Omega}$ , що містяться в квадраті із боками довжиною  $2\pi$  та центром в початку координат, вираз (7.100) спрощується:

$$X(\mathbf{V}^T \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{|\mathbf{V}|} X_a(\boldsymbol{\Omega}). \quad (7.102)$$

Отже, функцію  $X_a(\boldsymbol{\Omega})$  можна відновити по функції  $X(\mathbf{V}^T \boldsymbol{\Omega})$ , а неперервний сигнал  $x_a(t)$  – по послідовності  $x(\mathbf{n})$ .

$$X_a(\boldsymbol{\Omega}) = \begin{cases} |\mathbf{V}| X(\mathbf{V}^T \boldsymbol{\Omega}), & \boldsymbol{\Omega} \in B \\ 0 & \text{в решті випадків} \end{cases} \quad (7.103)$$

Виконаємо обернене перетворення Фур'є функцій, що містяться зліва та справа від знаку рівності, та виразимо  $X(\mathbf{V}^T \boldsymbol{\Omega})$  через значення відліків  $x(n_1, n_2)$ , одержимо вираз, що аналогічний виразу (7.92):

$$x_a(\mathbf{t}) = \frac{|\mathbf{V}|}{4\pi^2} \sum_{\mathbf{n}} x(\mathbf{n}) \int_B \exp[i\boldsymbol{\Omega}^T (\mathbf{t} - \mathbf{V}\mathbf{n})] d\boldsymbol{\Omega}. \quad (7.104)$$

Тут інтеграл береться по смузі  $B$  в площині частот.

$$x_a(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n}} x(\mathbf{n}) f(\mathbf{t} - \mathbf{V}\mathbf{n}), \quad (7.105)$$

$$f(\mathbf{t}) = \frac{|\mathbf{V}|}{4\pi^2} \int_B \exp[i\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{t}] d\boldsymbol{\Omega} \quad (7.106)$$

*Інтерполяційна функція  $f(\mathbf{t})$*  надає можливість відновити значення  $x_a(\mathbf{t})$  у точках, що містяться між відліками  $\mathbf{t} = \mathbf{V}\mathbf{n}$ .

Із (7.100) видно, що перетворення Фур'є дискретного сигналу  $x(\mathbf{n})$  дає послідовність зважених копій  $X_a(\boldsymbol{\Omega})$ , що періодично повторюються. Матриця періодичності  $\mathbf{U}$

визначає два лінійно незалежних напрямки, в яких здійснюється повторення  $X_a(\Omega)$ . Для вирішення поставленої задачі слід вибирати  $\mathbf{U}$  так, щоб не було перекривань окремих копій  $X_a(\Omega)$  і відповідно було відсутнє накладання. У цьому разі  $X_a(\Omega)$  задовольняє рівності (7.103).

Вибір матриці періодичності  $\mathbf{U}$  визначає матрицю дискретизації  $\mathbf{V}$ , оскільки  $\mathbf{U}$  та  $\mathbf{V}$  зв'язані співвідношенням (7.101). У загальному випадку вибір  $\mathbf{U}$  не є однозначний: за відповідної щільності відліків  $\mathbf{t}$  будь-який сигнал із обмеженим спектром можна представити по різним растрам дискретизації. Але бажано представляти  $x_a(\mathbf{t})$  мінімальною кількістю відліків.

Щільність відліків (кількість відліків на одиницю площини) складає  $1/|\mathbf{V}|$ . Мінімізація цієї величини є еквівалентна мінімізації  $|\mathbf{U}|$ . Тому треба вибирати матрицю періодичності  $\mathbf{U}$  із мінімальним значенням  $|\mathbf{U}|$ , коли забезпечується відсутність накладання для конкретної форми смуги частот  $B$  сигнала.

### 7.4.3. Порівняння прямокутної та гексагональної дискретизації

Для будь-якого сигнала із обмеженим спектром можна запропонувати безліч матриць періодичності  $\mathbf{U}$  та матриць дискретизації  $\mathbf{V}$ . Але практично використовуються лише два варіанти – прямокутна та *гексагональна* дискретизації. Для прямокутної дискретизації, розглянутої у попередньому розділі, характерна діагональна матриця дискретизації  $\mathbf{V}$ .

Гексагональній дискретизації відповідає матриця дискретизації вигляду

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} T_1 & T_1 \\ T_2 & -T_2 \end{bmatrix}. \quad (7.107)$$

Растр відліків для гексагональної матриці дискретизації наведено на рис. 7.15.

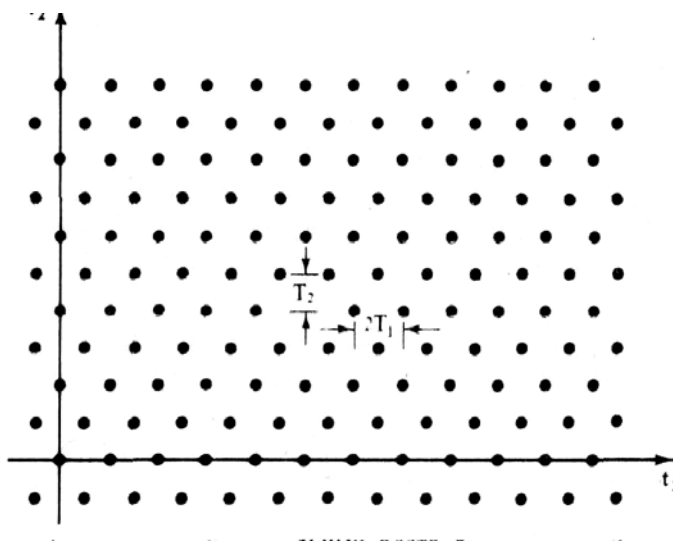


Рис. 7.15. Гексагональний растр дискретизації

Рядки растру повторюються через один, при цьому непарні рядки зсунуто відносно парних на півперіоду. Термін “гексагональний” використовується тому, що при  $T_2 = \sqrt{3}T_1$  кожний відлік буде мати шість рівновіддалених сусідів.

Відповідна матриця періодичності має вигляд

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 & u_1 \\ u_2 & -u_2 \end{bmatrix}, \quad (7.108)$$

де  $u_1 = \pi/T_1$ ,  $u_2 = \pi/T_2$ . Особливий інтерес представляє шестикутна область із параметрами  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ , яку наведено на рис. 7.16

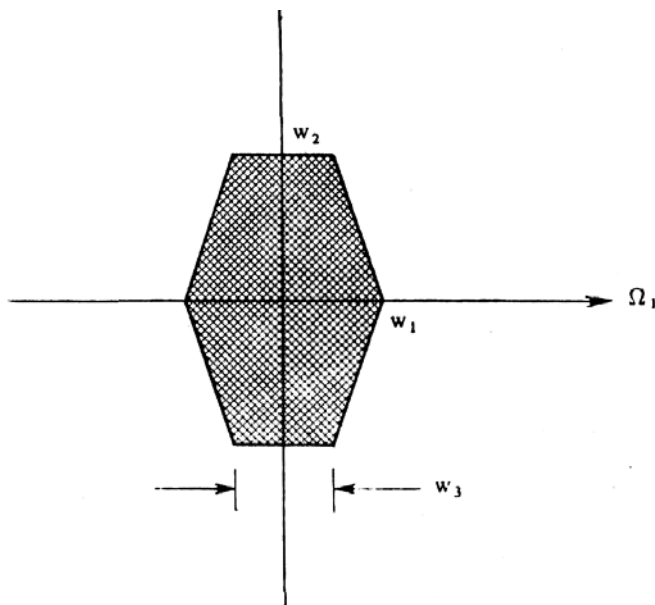


Рис. 7.16. Гексагональний растр дискретизації

Ці параметри зв'язані із параметрами періодичності  $u_1$  та  $u_2$  таким чином:

$$u_1 = W_1 + 1/2W_3; \quad u_2 = W_2. \quad (7.109)$$

Порівняємо відносну ефективність прямокутного та гексагонального растра дискретизації двовимірного неперервного сигналу з частотним спектром, що обмежено круговою областю частот. Двовимірне перетворення Фур'є такого сигналу задовольняє умову

$$X_a(\Omega_1, \Omega_2) = 0 \text{ для } \Omega_1^2 + \Omega_2^2 \geq W^2. \quad (7.110)$$

Кругову область частот можна вписати у квадрат зі стороною  $2W$  або у шестикутник зі стороною  $2W/\sqrt{3}$ . Тож, частотний діапазон сигналу можна вважати обмеженим або квадратною, або шестикутною ділянкою частотної площини.

Періодичне повторення квадратної ділянки відповідає дискретизації на прямокутному растрі. У цьому разі матриця дискретизації має вигляд

$$\mathbf{V}_{pr} = \begin{bmatrix} \pi/W & 0 \\ 0 & \pi/W \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{V}_{pr}| = \frac{\pi^2}{W^2}. \quad (7.111)$$

В той же час, можна використати матрицю гексагональної дискретизації

$$\mathbf{V}_{gekc} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{\sqrt{3}W} & \frac{\pi}{\sqrt{3}W} \\ \frac{\pi}{W} & -\frac{\pi}{W}\pi/W \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{V}_{gekc}| = \frac{\pi^2}{W^2} \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (7.112)$$

Оскільки щільність відліків пропорційна  $1/|\mathbf{V}|$ , то видно, що для одного й того ж сигналу, спектр якого обмежено кругом, гексагональна дискретизація потребує на  $\sqrt{3}/2$  менше відліків, ніж прямокутна. Дійсно, для сигналу з круговим частотним спектром гексагональна дискретизація є найбільш ефективною.



---

## Цифрова обробка зображень

---

Обробка зображень в широкому сенсі означає виконання різних операцій над багатовимірними сигналами (телевізійні зображення, фотографії тощо).

Цілі, що є метою обробки багатовимірних сигналів, різні. Але у більшості випадків вони можуть бути віднесені до однієї з наступних чотирьох категорій: покращення зображень, ефективне кодування зображень, розпізнавання образів та машинна графіка. Якщо вважати, що обробка зображень виконується для усунення викривлень, що вже виникли в зображенні, то таку обробку називають реставруванням зображень.

Машинна графіка – це область обробки зображень, яка охоплює ввід зображень в ЕОМ та їхній вивід на ЕОМ, відповідне програмування та проблеми, які пов'язані з організацією даних.

### 8.1. Математичний опис неперервних зображень

#### 8.1.1. Представлення неперервних зображень

Розподіл енергії світлового випромінювання по просторовим координатам  $x, y$ , часу  $t$  та довжинам хвиль  $\lambda$ , описується функцією  $C(x, y, t, \lambda)$ .

Оскільки енергія випромінювання пропорційна квадрату амплітуди електричного поля, то вона являється дійсною та додатною величиною. Крім того, в системах відображення інформації (тобто в відеосистемах) максимальна якість зображення внаслідок технічних характеристик являється обмеженою величиною, й, отже:

$$0 \leq C(x, y, t, \lambda) \leq A, \quad (8.1)$$

де  $A$  - максимальна якість зображення.

Розміри зображення також обмежені послідовністю, що формує, та середовищем відтворення (тобто засобами розгортки, екрану). З метою спрощення будемо вважати, що зображення відрізняються від нуля тільки в прямокутній області, яка визначається як

$$-L_x \leq x \leq L_x; \quad -L_y \leq y \leq L_y. \quad (8.2)$$

Оскільки зображення спостерігається продовж визначеного скінченного часу  $-T \leq t \leq T$ , то величина  $C(x, y, t, \lambda)$  являється обмеженою функцією чотирьох змінних, які мають обмежені області визначення.

Відчуття світлоти, що виникає в зоровій системі людини, зазвичай визначається миттєвою яркістю світлового поля, тобто величиною

$$Y(x, y, t) = \int_0^{+\infty} C(x, y, t, \lambda) V_z(\lambda) d\lambda, \quad (8.3)$$

де  $V_z(\lambda)$  - спектральна чутливість зору.

Відчуття кольору можна описати набором так званих координат кольору пропорційно інтенсивності червоного, зеленого та блакитного кольорів, суміш яких дає заданий колір. Для довільної червоно-зелено-блакитної системи поточні значення координат дорівнюють

$$\begin{aligned} R(x, y, t) &= \int_0^{+\infty} C(x, y, t, \lambda) R_s(\lambda) d\lambda, \\ G(x, y, t) &= \int_0^{+\infty} C(x, y, t, \lambda) G_s(\lambda) d\lambda, \\ B(x, y, t) &= \int_0^{+\infty} C(x, y, t, \lambda) B_s(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (8.4)$$

де:  $R(\lambda)$ ,  $G(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ , - значення відповідної червоної, зеленої та блакитної питомих координат, що дорівнюють координатам кольору монохроматичного випромінювання одиничної інтенсивності із довжиною хвилі  $\lambda$ .

З метою спрощення будемо вважати, що зображення, яке сформовано деякою фізичною системою, описується функцією  $F(x, y, t)$ , при цьому:

1) для однокольорової системи  $F(x, y, t)$  визначає розподіл яркості (або іншої фізичної величини, що зв'язана із яркістю);

2) для кольорових систем  $F(x, y, t)$  задає одну з координат кольору.

Середня за часом яркість зображення в даній точці  $(x, y)$  визначається як

$$\overline{F(x, y, t)}_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(x, y, t) L(t) dt \right\}, \quad (8.5)$$

де  $L(t)$  - часова функція ваги.

Просторова середня яркість в момент часу  $t$  визначається як

$$\overline{F(x, y, t)}_T = \lim_{\substack{L_x \rightarrow \infty \\ L_y \rightarrow \infty}} \left\{ \frac{1}{4L_x L_y} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} F(x, y, t) L(t) dx dy \right\}. \quad (8.6)$$

В системах відновлення зображень різного типу моделі математичного опису зображення можуть бути різними. Зокрема:

в проєкційних пристроях, коли зображення не змінюється в часі, змінна  $t$  в функції  $F(\cdot)$  відсутня;

в відеосистемах (кінематографічних, телевізійних) аргумент  $t$  в функції  $F(\cdot)$  змінюється дискретно.

### 8.1.1.1. Сингулярні оператори

Сингулярні оператори широко використовуються при аналізі двовимірних систем, особливо систем, в яких здійснюється дискретизація неперервних функцій. Двовимірна

$\delta$ -функція Дірака є сингулярним оператором з такими властивостями:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \infty, & x = 0, y = 0, \\ 0 & \text{в решті випадків,} \end{cases} \quad (8.7a)$$

$$\delta(x - \xi, y - \eta) = \begin{cases} \infty, & x = \xi, y = \eta, \\ 0 & \text{в решті випадків,} \end{cases} \quad (8.7b)$$

$$\iint_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x, y) dx dy = 1 \text{ при } \varepsilon > 0, \quad (8.7c)$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = F(x, y). \quad (8.7d)$$

Двовимірна  $\delta$ -функція може бути також визначена як границя деяких функцій: прямокутної функції

$$\delta(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} [\alpha^2 \text{rect}|\alpha x| \text{rect}|\alpha y|],$$

кругової функції

$$\delta(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} [(\alpha^2/\pi) \text{cirk}|\alpha \sqrt{x^2 + y^2}|],$$

гаусової функції

$$\delta(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} [\alpha^2 \exp[-\alpha^2 \pi(x^2 + y^2)]],$$

sinc-функції

$$\delta(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} [\alpha^2 \text{sinc}(\alpha x) \text{sinc}(\alpha y)],$$

бесселевої функції

$$\delta(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[ \frac{\alpha J_1(2\pi\alpha \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right],$$

де

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2; \end{cases} \quad \text{cirk}(r) = \begin{cases} 1, & r \leq 1, \\ 0, & r > 1; \end{cases} \quad \text{sinc}(x) = \sin \pi x / \pi x. \quad (8.8)$$

З використанням властивості  $\delta$ -функції (8.7d), функцію на вході системи можна представити як виважену суму  $\delta$ -функцій

$$F(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (8.9)$$

де  $f(\xi, \eta)$  – ваговий множник  $\delta$ -імпульсу, який має координати  $\xi, \eta$  на площині  $(x, y)$ . Якщо функція на виході лінійної системи

$$G(x, y) = \mathcal{L}[F(x, y)],$$

то

$$G(x, y) = \mathcal{L} \left\{ \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \right\}, \quad (8.10a)$$

$$G(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta) \mathcal{L}\{\delta(x - \xi, y - \eta)\} d\xi d\eta, \quad (8.10b)$$

Функція

$$H(x, y; \xi, \eta) \equiv \mathcal{L}\{\delta(x - \xi, y - \eta)\} \quad (8.11)$$

зветься імпульсним відгуком двовимірної системи. Імпульсний відгук оптичної системи часто називають функцією розсіювання точки. Заміщення імпульсного відгуку в (8.10b) дає інтеграл суперпозиції

$$G(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta) H(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (8.12)$$

Лінійна двовимірна система називається просторово-інваріантною, якщо її імпульсний відгук залежить тільки від різниць координат  $x - \xi, y - \eta$ . Для просторово-інваріантної системи

$$H(x, y; \xi, \eta) = H(x - \xi, y - \eta). \quad (8.13)$$

Інтеграл суперпозиції для такої системи

$$G(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta) H(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (8.14)$$

називається інтегралом згортки. Операція згортки символічно записується як

$$G(x, y) = F(x, y) * H(x, y). \quad (8.15)$$

### 8.1.2. Двовимірне перетворення Фур'є

В результаті двовимірного перетворення Фур'є функції  $F(x, y)$ , яка описує зображення, одержуємо спектр цього зображення, що визначається як

$$\mathcal{F}(\omega_x, \omega_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) e^{-i(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy, \quad (8.16)$$

де  $\omega_x, \omega_y$  – просторові частоти. Взагалі спектр  $\mathcal{F}(\omega_x, \omega_y)$  є комплексною величиною:

$$\mathcal{F}(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{R}(\omega_x, \omega_y) + i\mathcal{I}(\omega_x, \omega_y).$$

Спектр можна представити у вигляді амплітуди та фази:

$$\mathcal{F}(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{A}(\omega_x, \omega_y) e^{i\Phi(\omega_x, \omega_y)};$$

$$\mathcal{A}(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{R}^2(\omega_x, \omega_y) + \mathcal{I}^2(\omega_x, \omega_y);$$

$$\Phi(\omega_x, \omega_y) = \operatorname{arctg} \frac{\mathcal{I}(\omega_x, \omega_y)}{\mathcal{R}(\omega_x, \omega_y)}.$$

Достатньою умовою існування Фур'є-спектра функції  $F(x, y)$  являється абсолютна інтегрованість цієї функції, тобто умова

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)| dx dy < \infty.$$

Вихідна функція  $f(x, y)$  може бути відновлена за допомогою оберненого перетворення Фур'є

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\omega_x, \omega_y) e^{i(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y. \quad (8.17)$$

Оскільки ядро двовимірного перетворення Фур'є є подільним, це перетворення може виконуватись в два етапи. Спочатку знаходиться

$$\mathcal{F}_y(\omega_x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) e^{-i\omega_x x} dx, \quad (8.18)$$

а потім

$$\mathcal{F}(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_y(\omega_x, y) e^{-i\omega_y y} dy, \quad (8.19)$$

### 8.1.2.1. Властивості перетворення Фур'є

1. Якщо функція  $F(x, y)$  є подільною по просторовим змінним, так що

$$F(x, y) = f_x(x) f_y(y),$$

то

$$\mathcal{F}(\omega_x, \omega_y) = f_x(\omega_x) f_y(\omega_y),$$

де  $f_x(\omega_x)$ ,  $f_y(\omega_y)$  – одновимірні Фур'є-спектри функцій  $f_x(x)$  та  $f_y(y)$ .

Якщо  $\mathcal{F}(\omega_x, \omega_y)$  – Фур'є-спектр функції  $F(x, y)$ , то  $\mathcal{F}^*(-\omega_x, -\omega_y)$  являється Фур'є-спектром функції  $F^*(x, y)$ , де  $*$  означає комплексну сполученість. Якщо функція  $F(x, y)$  є симетричною, тобто  $F(x, y) = F(-x, -y)$ , то  $\mathcal{F}(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{F}(-\omega_x, -\omega_y)$ .

2. Оператор перетворення Фур'є є *лінійним*:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}\{aF_1(x, y) + bF_2(x, y)\} = a\mathcal{F}_1(\omega_x, \omega_y) + b\mathcal{F}_2(\omega_x, \omega_y), \quad (8.20)$$

3. Змінювання мірила просторових змінних призводить до оберненого змінювання мірила просторових частот та пропорційному змінюванню значень спектра:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}\{F(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} \mathcal{F}(\omega_x/a, \omega_y/b). \quad (8.21)$$

Отже, стискання вздовж однієї з осей площини  $(x, y)$  призводить до розтягування вздовж відповідної осі частотної площини і навпаки. Також здійснюється і пропорційне змінювання значень спектру.

4. *Зсув* (змінювання координат) на вихідній площині призводить до фазових змінювань на частотній площині:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}\{F(x - a, y - b)\} = \mathcal{F}(\omega_x, \omega_y) e^{-i(\omega_x a + \omega_y b)}. \quad (8.22)$$

Навпаки, зсув у частотній площині призводить до фазових змінювань вихідної функції:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^{-1}\{\mathcal{F}(\omega_x - a_x, \omega_y - b_y)\} = F(x, y) e^{i(a_x x + b_y y)} \quad (8.23)$$

5. *Згортка.* Фур'є-спектр функції, який одержано внаслідок згортки двох функцій, дорівнює добутку спектрів вихідних функцій:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}\{F(x, y) * H(x, y)\} = \mathcal{F}(\omega_x, \omega_y)\mathcal{H}(\omega_x, \omega_y). \quad (8.24)$$

Обернена теорема стверджує, що

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}\{F(x, y)H(x, y)\} = \mathcal{F}(\omega_x, \omega_y) * \mathcal{H}(\omega_x, \omega_y). \quad (8.25)$$

6. *Теорема Парсеваля.*

Два представлення енергії зображення – через функцію  $f(x, y)$  та Фур'є-спектр  $\mathcal{F}(\omega_x, \omega_y)$  – зв'язані таким чином:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(\omega_x, \omega_y)|^2 d\omega_x d\omega_y. \quad (8.26)$$

7. *Теорема про спектр автокореляційної функції.*

Фур'є-спектр автокореляційної функції зображення дорівнює квадрату модуля Фур'є-спектру цього зображення:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}} \left\{ \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha, \beta) F^*(\alpha - x, \beta - y) d\alpha d\beta \right\} = |\mathcal{F}(\omega_x, \omega_y)|^2. \quad (8.27)$$

8. *Спектри просторових похідних.*

Фур'є-спектри перших просторових похідних функції  $F(x, y)$  зв'язані з її Фур'є-спектром співвідношеннями:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}} \left\{ \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right\} = -i\omega_x \mathcal{F}(\omega_x, \omega_y), \quad (8.28)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}} \left\{ \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right\} = -i\omega_y \mathcal{F}(\omega_x, \omega_y), \quad (8.29)$$

Спектр Лапласіана дорівнює

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}} \left\{ \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} \right\} = -(\omega_x^2 + \omega_y^2) \mathcal{F}(\omega_x, \omega_y), \quad (8.30)$$

Теорема про перетворення Фур'є згортки (8.24) виявляється вельми корисним засобом при аналізі лінійних систем. Розглянемо функцію  $F(x, y)$ , яка описує зображення на вході лінійної системи із імпульсним відгуком  $H(x, y)$ . Зображення на виході описується функцією  $G(x, y)$ , що одержується внаслідок згортки:

$$G(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha, \beta) H(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta. \quad (8.31)$$

Виконаємо перетворення Фур'є обох частин цієї рівності і змінимо порядок інтегрування в його правій частині.

$$\mathcal{G}(\omega_x, \omega_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha, \beta) \left[ \iint_{-\infty}^{+\infty} H(x - \alpha, y - \beta) e^{-i(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy \right] d\alpha d\beta.$$

Згідно теоремі про зсув (8.22) внутрішній інтеграл дорівнює добутку спектра функції  $H(x, y)$  та експоненційного множника фазового зсцу. Тому

$$\mathcal{G}(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha, \beta) \mathcal{H}(\omega_x, \omega_y) e^{-i(\omega_x \alpha + \omega_y \beta)} d\alpha d\beta.$$

Перетворення Фур'є дає

$$\mathcal{G}(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{H}(\omega_x, \omega_y) \mathcal{F}(\omega_x, \omega_y).$$

Обернене перетворення Фур'є дає функцію, яка описує зображення на виході:

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(\omega_x, \omega_y) \mathcal{F}(\omega_x, \omega_y) e^{i(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y. \quad (8.32)$$

Вирази (8.31) та (8.32) являють собою два альтернативних способи визначення вихідного зображення лінійної просторово-інваріантної системи. Вибір того чи іншого підходу залежить від задачі, що вирішується.

### 8.1.3. Імовірнісний опис неперервних зображень

Якщо зображення є зашумленим, то його доводиться розглядати як випадковий процес  $F(x, y, t)$ . Випадковий процес сповна описується спільною щільністю імовірності

$$p\{F_1, F_2, \dots, F_N; x_1, y_1, t_1, x_2, y_2, t_2, \dots, x_N, y_N, t_N\}. \quad (8.33)$$

Іноді для щільності імовірності  $p(F; x, y, t)$  можна підібрати вдалу модель з фізичних міркувань або на ґрунті вимірювань. Наприклад, щільність імовірності випадкового шуму в електронних перетворювачах зображень гарно моделюється щільністю

$$p(F; x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_F^2(x, y, t)}} \exp \left\{ -\frac{[F(x, y, t) - \eta_F(x, y, t)]^2}{2\sigma_F^2(x, y, t)} \right\}, \quad (8.34)$$

де параметри  $\eta_F(x, y, t)$  та  $\sigma_F^2(x, y, t)$  суть середнє та дисперсія шуму.

Щільність імовірності яркості має бути однобічною, оскільки яркість приймає тільки додатні значення. У якості моделей щільності імовірності яркості застосовують щільність розподілу імовірностей Релея

$$p(F : x, y, t) = \frac{F(x, y, t)}{\alpha^2} \exp \left\{ -\frac{[F(x, y, t)]^2}{2\alpha^2} \right\}. \quad (8.35)$$

Щільність логарифмічного нормального розподілу

$$p(F : x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi F^2(x, y, t)\sigma_F^2(x, y, t)}} \exp \left\{ -\frac{[\ln[F(x, y, t)] - \eta_F(x, y, t)]^2}{2\sigma_F^2(x, y, t)} \right\} \quad (8.36)$$

а щільність експоненційного розподілу

$$p(F : x, y, t) = \alpha e^{-\alpha|F(x, y, t)|}. \quad (8.37)$$

Ці щільності визначені при  $F > 0$ ,  $\alpha$  – стала.

Щільність рівномірного розподілу

$$p(F : x, y, t) = 1/(2\pi), \quad -\pi \leq F \leq \pi \quad (8.38)$$

є звичною моделлю для флуктуацій фази випадкового процесу.

Інший спосіб опису випадкового процесу полягає в обчисленні середніх за ансамблем. Перший момент, або середнє значення функції  $F(x, y, t)$ , дорівнює

$$\eta_F(x, y, t) = \mathcal{M}\{F(x, y, t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y, t)p(F; x, y, t)dF. \quad (8.39)$$

Другий момент, або автокореляційна функція, визначається як

$$R(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = \mathcal{M}\{F(x_1, y_1, t_1)F^*(x_2, y_2, t_2)\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(x_1, y_1, t_1)F^*(x_2, y_2, t_2)p(F_1, F_2; x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2)dF_1dF_2.$$

Автоковаріаційна функція зображення визначається як

$$C(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = \mathcal{M}\{[F(x_1, y_1, t_1) - \eta_F(x_1, y_1, t_1)][F^*(x_2, y_2, t_2) - \eta_F^*(x_2, y_2, t_2)]\} \quad (8.40)$$

Зв'язок між автоковаріаційною та автокореляційною функціями визначається співвідношенням

$$C(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = R(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) - \eta_F(x_1, y_1, t_1)\eta_F^*(x_2, y_2, t_2) \quad (8.41)$$

Випадковий процес, який породжує зображення, має назву *стаціонарного у широкому сенсі*, якщо його моменти не залежать від перенесення початку координат у просторі або часі. Процес називається стаціонарним у широкому сенсі, якщо він має сталу середню яркість, а його автокореляційна функція залежить від різниць координат  $x_1 - x_2, y_1 - y_2, t_1 - t_2$ , але не від самих координат. Для стаціонарного процесу  $F(x, y, t)$

$$\mathcal{M}\{F(x, y, t)\} = \eta_F. \quad (8.42)$$

$$R(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2) = R(x_1 - x_2, y_1 - y_2, t_1 - t_2). \quad (8.43)$$

Для дійсної функції  $F$  автокореляційна функція є дійсною та парною. Енергетичний спектр стаціонарного зображення є результатом тривимірного перетворення Фур'є його автокореляційної функції:

$$\mathcal{W}(\omega_x, \omega_y, \omega_t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} R(\tau_x, \tau_y, \tau_t) \exp[-i(\omega_x\tau_x + \omega_y\tau_y + \omega_t\tau_t)]d\tau_xd\tau_yd\tau_t. \quad (8.44)$$

Часто моделлю зображення слугує реалізація двовимірного марковського процесу першого порядку. Автоковаріаційна функція такого процесу може бути представлена у вигляді

$$C_{x,y}(\tau_x, \tau_y) = K \exp\left[-\sqrt{\alpha_x^2\tau_x^2 + \alpha_y^2\tau_y^2}\right], \quad (8.45)$$

де  $K, \alpha_x, \alpha_y$  – масштабні множники. Відповідний енергетичний спектр дорівнює

$$\mathcal{W}(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\alpha_x\alpha_y} \frac{2K}{1 + \omega_x^2/\alpha_x^2 + \omega_y^2/\alpha_y^2}. \quad (8.46)$$

Процеси, для яких просторово-часові середні дорівнюють середнім за ансамблем, називаються *ергодичними*.



### 8.1.4. Двовимірні перетворення

Популярність цифрової обробки зображень суттєво зросла протягом останніх декількох років. При цьому особливо зросла зацікавленість до розвитку таких напрямків обробки, як кодування, реставрування та виділення ознак зображень. Кодування зображень зазвичай пов'язують із спробами передачі зображень по цифровій мережі зв'язку найефективнішим способом.

Зазвичай під цим мають на увазі пошук можливості скоротити число бітів, які описують зображення, й таким чином зменшити число бітів, які необхідно передати по системі зв'язку. Прикладами таких систем можуть слугувати національні мережі зв'язку між ЕОМ та мережі зв'язку із ущільненням в часі для обміну зображеннями, системи передачі спектрозональних знімків з супутників, космічних кораблів-зондів та апаратів з дистанційним керуванням, системи фототелеграфної передачі зображень від відбитків пальців до тексту, а також системи передачі зображень по телефонним мережам.

Реставрація може бути визначена як відновлення зображення, що спрямовано на його наближення до вихідного зображення (оригіналу) і яке здійснюється шляхом інверсії визначеного явища, що викривлює. Щоб виконати інверсію і таким чином здійснити реставрування, треба мати у розпорядженні деяку інформацію про явище, що викривлює. Ця інформація може існувати у вигляді аналітичних або статистичних моделей або інших апріорних відомостей, які ґрунтуються на знаннях про фізичну систему, що здійснює процес відображення. Тому особливу увагу слід приділяти джерелам викривлень та моделям, що їх описують.

Виділенням ознак при цифровій обробці зображень називають набір специфічних характеристик, які відображають деякі особливості зображення, для подальшого розпізнавання образів, класифікації, прийняття рішень та інтерпретації.

Більшість моделей для аналізу систем обробки зображень зазвичай апроксимуються із використанням припущення про їхню лінійність. Така лінійна модель відображення по суті визначає характер реставрування, що необхідне для інверсії викривлень, а також структуру системи передачі кодованого зображення.

Множина різних методів, що використовуються для цифрової обробки зображень, обумовила появу низки моделей, що відображають спроби реставрувати зображення шляхом ефективною інверсії явища, що викривлює, яке виникає під час відображення оригіналу.

Нехай  $g(x, y)$  – зображення оригіналу  $f(\xi, \eta)$ , що викривлено оператором  $h(x, y, \xi, \eta)$ :

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) h(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (8.47)$$

Викривлення в системі описується імпульсною характеристикою або функцією розсіювання точки  $h$ , яка фізично відповідає виходу системи, коли на її вході діє  $\delta$ -функція, або точкове джерело світла.

Якщо при зондуванні площини оригіналу точковим джерелом вигляд імпульсної характеристики залишається незмінним (за винятком положення в площині зображення), то говорять, що система є просторово-інваріантною, тобто у наявності є просторово-інваріантна функція розсіювання точки і діє співвідношення

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta. \quad (8.48)$$

Для знаходження  $f(\xi, \eta)$  по  $g(x, y)$  можна застосовувати методи перетворення Фур'є, які дозволяють визначити інверсію  $h$ , використовуючи зв'язок перетворення Фур'є зі згортокою. Так, за відсутності шуму

$$G_f(u, v) = H_f(u, v) F_f(u, v), \quad (8.49)$$

де  $G_f$ ,  $H_f$ ,  $F_f$  – Фур'є-образи функцій  $g$ ,  $h$ ,  $f$  відповідно, причому для визначення  $F_f(u, v)$  потрібно лише виконати інверсію  $H_f$ , якщо вона існує. При використанні моделей просторово-залежної функції розсіювання точки методи перетворення Фур'є не можна застосовувати, і для реставрації доводиться застосовувати більш універсальні та потужніші методи інверсії.

### 8.1.5. Двовимірні дискретні перетворення

Унітарні перетворення являються частковим випадком лінійних перетворень, коли лінійний оператор є точно обратимим, а його ядро задовольняє умовам ортогональності:

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} A(n_1, n_2; m_1, m_2) A^*(j_1, j_2; m_1, m_2) = \delta(n_1 - j_1, n_2 - j_2). \quad (8.50)$$

Перетворення називають подільним, якщо обидва його ядра можна представити в такій формі.

$$A(n_1, n_2; m_1, m_2) = A_C(n_1, m_1) A_R(n_2, m_2), \quad (8.51)$$

де через  $A_C$  и  $A_R$  позначені відповідні одновимірні оператори стовпців та рядків.

Однією з головних властивостей унітарного перетворення являється збереження метрики.

Існують три основні області застосування двовимірних унітарних перетворень. По перше, перетворення використовуються для виділення характерних ознак зображення. Так, стала складова спектра Фур'є пропорційна середній яркості зображення, а високочастотні складові характеризують величину та орієнтацію його контурів. Іншою областю застосування перетворень є кодування зображень, коли ширина спектра зменшується за рахунок відкидання або грубого квантування малих за величиною коефіцієнтів перетворення. Третя область прикладень – це скорочення розмірності при виконанні обчислень.

В результаті прямого унітарного перетворення матриці зображення  $F(n_1, n_2)$  розміру  $N_1 \times N_2$  утворюється матриця перетвореного зображення того ж розміру, елементи якої дорівнюють

$$\mathcal{F}(m_1, m_2) = \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} F(n_1, n_2) A(n_1, n_2; m_1, m_2), \quad (8.52)$$

де  $A(n_1, n_2; m_1, m_2)$  – ядро прямого перетворення. Вихідне зображення можна одержати за допомогою оберненого перетворення

$$F(n_1, n_2) = \sum_{m_1=1}^{N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \mathcal{F}(m_1, m_2) B(n_1, n_2; m_1, m_2), \quad (8.53)$$

де  $B(n_1, n_2; m_1, m_2)$  – ядро оберненого перетворення.

Результат впливу подільного двовимірного унітарного оператора перетворення можна знаходити в два етапи. Спочатку виконується одновимірне перетворення за всіма стовпцями матриці зображення. При цьому утворюється матриця з елементами

$$P(m_1, n_2) = \sum_{n_1=1}^{N_1} F(n_1, n_2) A_C(n_1, m_1). \quad (8.54)$$

Потім виконується одновимірне перетворення за всіма рядками матриці, що одержано. В результаті утворюється матриця з елементами

$$\mathcal{F}(m_1, m_2) = \sum_{n_2=1}^{N_2} P(m_1, n_2) A_R(n_2, m_2). \quad (8.55)$$

Подільні унітарні перетворення можна представити у вигляді зваженої суми матричних добутків вектор-стовпців, які сформовано з елементів матриць. Позначимо  $\mathbf{a}_C(n_1)$  та  $\mathbf{a}_R(n_2)$ ,  $n_1$ -й та  $n_2$ -й стовпці матриць  $A_C^T$  та  $A_R^T$ . Тоді

$$\mathcal{F} = \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} F(n_1, n_2) \mathbf{a}_C(n_1) \mathbf{a}_R^T(n_2). \quad (8.56)$$

Аналогічно,

$$F = \sum_{m_1=1}^{N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \mathcal{F}(m_1, m_2) \mathbf{b}_C(m_1) \mathbf{b}_R^T(m_2). \quad (8.57)$$

Матричні добутки векторів, які входять в (8.56), (8.57), утворюють послідовність матриць, що мають назву базисних матриць, на основі яких й виконується розкладання матриці  $F$  вихідного зображення або перетворення зображення  $\mathcal{F}$ .

З метою спрощення аналізу властивостей двовимірних унітарних перетворень далі будемо вважати що усі масиви являються квадратними і мають розмір  $N \times N$ . Тоді

$$\mathcal{F}(l, m) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j, k) A(j, k; l, m), \quad (8.58)$$

а обернене перетворення – як

$$F(j, k) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \mathcal{F}(l, m) B(j, k; l, m). \quad (8.59)$$

### 8.1.5.1. Двовимірне перетворення Фур'є

Базисними функціями перетворення Фур'є являються експоненти з комплексними показниками:

$$A(j, k; l, m) = \exp \left[ -\frac{2\pi i}{N} (lj + mk) \right] = \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (lj + mk) \right] - i \sin \left[ \frac{2\pi}{N} (lj + mk) \right], \quad (8.60)$$

$$B(j, k; l, m) = \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} (lj + mk) \right] = \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (lj + mk) \right] + i \sin \left[ \frac{2\pi}{N} (lj + mk) \right], \quad (8.61)$$

Тоді двовимірне дискретне перетворення Фур'є матриці відліків зображення визначиться у вигляді ряду

$$\mathcal{F}(l, m) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j, k) \exp \left[ -\frac{2\pi i}{N} (lj + mk) \right], \quad (8.62)$$

а обернене перетворення – як

$$F(j, k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \mathcal{F}(l, m) \exp \left[ \frac{2\pi i}{N} (lj + mk) \right]. \quad (8.63)$$

За аналогією із термінологією неперервного перетворення Фур'є змінні  $l$  та  $m$  називають просторовими частотами.

В початку координат частотної площини спектральна складова

$$\mathcal{F}(0, 0) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j, k) \quad (8.64)$$

дорівнює середньому (по вихідній площині) значенню яркості зображення, що збільшене у  $N$  раз.

Спектр є періодичною функцією. Замість в (8.62)  $l = l + uN$ ,  $m = m + vN$ ,  $u$  та  $v$  – сталі, одержимо

$$\mathcal{F}(l + uN, m + vN) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j, k) \exp \left[ -\frac{2\pi i}{N} (lj + mk) \right] \cdot \exp[-2\pi i(ul + vm)]. \quad (8.65)$$

За будь-яких цілочислових значень  $u$  та  $v$  другий експоненційний співмножник дорівнює одиниці. Таким чином,

$$\mathcal{F}(l + uN, m + vN) = \mathcal{F}(l, m). \quad (8.66)$$

Оскільки  $\mathcal{F}(l, m)$  має властивість комплексної сполученості

$$\mathcal{F}(l, m) = \mathcal{F}^*(-l + uN, -m + vN), \quad (8.67)$$

то майже половина спектральних складових виявляється надлишковою. Оскільки динамічний діапазон складових спектру є значно ширшим, ніж лінійна ділянка інтервалу експозицій фотоплівки, то спектри необхідно підпорядкувати стисненню згідно співвідношенню

$$\mathcal{D}(l, m) = \ln[a + b|\mathcal{F}(l, m)|], \quad (8.68)$$

де  $a$  і  $b$  – масштабні сталі.

### 8.1.5.2. Косинусні перетворення

Відомо, що ряд Фур'є для будь-якої неперервної дійсної та симетричної (парної) функції містить тільки дійсні коефіцієнти, що відповідають косинусним членам ряду.

Нехай симетричний масив утворено шляхом дзеркального відображення вихідного масиву відносно його кінців згідно співвідношенню

$$F_s(j, k) = \begin{cases} F(j, k) & \text{при } j \geq 0, k \geq 0, \\ F(-1 - j, k) & \text{при } j < 0, k \geq 0, \\ F(j, -1 - k) & \text{при } j \geq 0, k < 0, \\ F(-1 - j, -1 - k) & \text{при } j < 0, k < 0, \end{cases} \quad (8.69)$$

Масив, що побудовано у такий спосіб,  $F_s(j, k)$ , є симетричним відносно точки  $j = -1/2$ ,  $k = -1/2$ . Після обчислення перетворення Фур'є для випадку, коли початок координат міститься в центрі симетрії, одержимо

$$\mathcal{F}_s(l, m) = \frac{1}{2N} \sum_{j=-N}^{N-1} \sum_{k=-N}^{N-1} F_s(j, k) \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{2N} \left[ l \left( j + \frac{1}{2} \right) + m \left( k + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}, \quad (8.70)$$

де  $l, m = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N - 1$ . Оскільки масив є симетричним і складається з дійсних чисел, співвідношення (8.70) можна привести до вигляду

$$\mathcal{F}_s(l, m) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j, k) \cos \left[ \frac{\pi}{N} l \left( j + \frac{1}{2} \right) \right] \cos \left[ \frac{\pi}{N} m \left( k + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (8.71)$$

З іншого боку, спектральні складові вигляду (8.71) можна знайти шляхом обчислення перетворення Фур'є масиву  $F(j, k)$  по  $2N$  точкам:

$$\mathcal{F}_s(l, m) = \frac{2}{N} \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[ \frac{i\pi l}{2N} \right] \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j, k) \exp \left[ -\frac{2\pi i}{2N} (lj + mk) \right] \right\}. \quad (8.72)$$

Пряме парне косинусне перетворення за визначенням дорівнює сумі (8.71), що помножена на нормуючий множник  $C(l)C(m)$ , де  $C(0) = 1/\sqrt{2}$ , а  $C(p) = 1$  при  $p = 1, N-1$ . Тоді

$$\mathcal{F}(l, m) = \frac{2}{N} C(l)C(m) \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j, k) \cos \left[ \frac{\pi}{N} l \left( j + \frac{1}{2} \right) \right] \cos \left[ \frac{\pi}{N} m \left( k + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (8.73)$$

а обернене перетворення визначається співвідношенням

$$F(j, k) = \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} C(l)C(m) \mathcal{F}(l, m) \cos \left[ \frac{\pi}{N} l \left( j + \frac{1}{2} \right) \right] \cos \left[ \frac{\pi}{N} m \left( k + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (8.74)$$

За непарного косинусного перетворення симетричний масив визначається таким чином.

$$\mathcal{F}_s(j, k) = \begin{cases} F(j, k) & \text{при } j \geq 0, k \geq 0, \\ F(-j, k) & \text{при } j < 0, k \geq 0, \\ F(j, -k) & \text{при } j \geq 0, k < 0, \\ F(-j, -k) & \text{при } j < 0, k < 0, \end{cases} \quad (8.75)$$

Обчислення двовимірного перетворення Фур'є від такого масиву дає

$$\mathcal{F}_s(l, m) = \frac{1}{2N-1} \sum_{j=-N+1}^{N-1} \sum_{k=-N+1}^{N-1} F_s(j, k) \exp \left[ -\frac{2\pi i}{2N-1} (lj + mk) \right], \quad (8.76)$$

де  $l, m = -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1$ . Оскільки перетворення Фур'є має властивість симетрії відносно комплексного сполучення, то для реальних зображень

$$\mathcal{F}_s(i, m) = \mathcal{F}_s^*(-i, -m). \quad (8.77)$$

Отже,  $\mathcal{F}_s(i, m)$  досить обчислити тільки за невід'ємних значень індексів  $(l, m)$ .

$$\mathcal{F}_s(l, m) = \frac{4}{2N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}_s(j, k) \cos \left[ \frac{2\pi}{2N-1} jl \right] \cos \left[ \frac{2\pi}{2N-1} km \right], \quad (8.78)$$

де масив  $\tilde{F}_s(j, k)$  одержується з матриці зображення  $F(j, k)$  зважуванням її елементів:

$$\tilde{F}_s(j, k) = \begin{cases} 1/4F(j, k) & \text{при } j = 0, k = 0, \\ 1/2F(j, k) & \text{при } j = 0, k \neq 0, \\ 1/2F(j, k) & \text{при } j \neq 0, k = 0, \\ F(j, k) & \text{при } j \neq 0, k \neq 0. \end{cases} \quad (8.79)$$

Непарне cos-перетворення є просто нормований варіант рівності (8.78), причому нормування виконано так, щоб базисні функції виявились ортонормованими. Таким чином, непарне cos-перетворення визначається співвідношеннями

$$\mathcal{F}(l, m) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}_s(j, k) \text{ при } l = 0, m = 0. \quad (8.80)$$

$$\mathcal{F}(l, m) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}_s(j, k) \cos \left[ \frac{2\pi}{2N-1} jl \right] \cos \left[ \frac{2\pi}{2N-1} km \right], \quad l \neq 0, m \neq 0. \quad (8.81)$$

Обернене перетворення

$$\tilde{F}(j, k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \mathcal{F}_s(l, m) \text{ при } j = 0, k = 0. \quad (8.82)$$

$$\tilde{F}(j, k) = \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \mathcal{F}_s(l, m) \cos \left[ \frac{2\pi}{2N-1} jl \right] \cos \left[ \frac{2\pi}{2N-1} km \right], \quad l \neq 0, m \neq 0. \quad (8.83)$$

дає матрицю зважених відліків  $\tilde{F}(j, k)$ . Вихідний масив можна відновити за допомогою формули

$$F(j, k) = \begin{cases} 4\tilde{F}(j, k) & \text{при } j = 0, k = 0, \\ 2\tilde{F}(j, k) & \text{при } j = 0, k \neq 0, \\ 2\tilde{F}(j, k) & \text{при } j \neq 0, k = 0, \\ \tilde{F}(j, k) & \text{при } j \neq 0, k \neq 0. \end{cases} \quad (8.84)$$

Базисні функції непарного косинусного перетворення являються подільними, отже двовимірне непарне косинусне перетворення можна виконати за допомогою послідовних одновимірних перетворень.

### 8.1.5.3. Перетворення Карунена–Лоева

Метод перетворення неперервних сигналів у набір некорельованих коефіцієнтів запропонували Карунен та Лоев. Цей метод називають також методом розкладання за власними векторами.

Взагалі перетворення Карунена–Лоева описується співвідношенням

$$\mathcal{F}(l, m) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j, k) A(j, k; l, m), \quad (8.85)$$

ядро  $A(j, k; l, m)$  якого задовольняє рівняння

$$\lambda(l, m) A(j, k; l, m) = \sum_{j'=0}^{N-1} \sum_{k'=0}^{N-1} K_F(j, k; j', k') A(j', k'; l, m), \quad (8.86)$$

де  $K_F(j, k; j', k')$  – коваріаційна матриця дискретизованого зображення, а  $\lambda(l, m)$  при фіксованих  $l$  та  $m$  є сталою величиною. Функції  $A(j, k; l, m)$  являються власними функціями коваріаційної функції, а  $\lambda(l, m)$  – власні значення. Як правило, виразити власні функції в явній формі не вдається.

Якщо коваріаційну функцію можна розділити, тобто

$$K_F(j, k; j', k') = F_C(j, j') F_R(k, k'), \quad (8.87)$$

то ядро розкладання Карунена - Лоева також є подільним і

$$A(j, k; l, m) = A_C(j, l) A_R(k, m), \quad (8.88)$$

Рядки та стовпці матриць, які описують ці ядра, задовольняють наступним рівнянням.

$$\lambda_R(m) A_R(k, m) = \sum_{k'=0}^{N-1} K_R(k, k') A_R(k', m), \quad (8.89)$$

$$\lambda_C(m) A_C(j, l) = \sum_{j'=0}^{N-1} K_C(j, j') A_C(j', l). \quad (8.90)$$

В окремому випадку, коли коваріаційна матриця описує подільний марковський процес першого порядку, власні функції вдається записати в явній формі. Для одновимірного марковського процесу з коефіцієнтом кореляції  $\rho$  власні функції та власні значення мають вигляд

$$A(j, l) = \sqrt{\frac{2}{N + \lambda^2(l)}} \sin \left[ w(l) \left( j - \frac{N-1}{2} \right) + \frac{(l+1)\pi}{2} \right]. \quad (8.91)$$

$$\lambda(l) = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos w(l) + \rho^2}, \quad (8.92)$$

де  $j \geq 0$ ,  $l \leq N-1$ , а  $w(l)$  – корені рівняння

$$\operatorname{tg}(Nw) = \frac{(1 - \rho^2) \sin w}{\cos w - 2\rho + \rho^2 \cos w}. \quad (8.93)$$

Власні вектори можна також знайти з рекурентних формул, якщо покласти  $A(0, l) = 1$

$$A(1, l) = \frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{1 - \rho^2}{\lambda(l)} \right) A(0, l), \quad (8.94)$$

$$A(j+1, l) = \frac{1}{\rho} \left[ \left( 1 + \rho^2 - \frac{1 - \rho^2}{\lambda(l)} \right) A(j, l) \right] - A(j-1, l), \quad 0 < j < N-1, \quad (8.95)$$

$$A(N-1, l) = \frac{\rho \lambda(l)}{\lambda(l) - 1 + \rho^2} A(N-2, l), \quad (8.96)$$

та пронормувати власні вектори.

Якщо вихідне та перетворене зображення представити в векторній формі, то матриця перетворення  $A$  буде задовольняти рівнянню

$$AK_f = \Lambda A, \quad (8.97)$$

де  $K_f$  – коваріаційна матриця вектора  $\mathbf{f}$ ;  $A$  – матриця, рядки якої є власними векторами матриці  $K_f$ ;  $\Lambda$  – діагональна матриця вигляду

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda(2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda(N^2) \end{bmatrix} \quad (8.98)$$

Якщо матриця  $K_f$  є подільною, то

$$A = A_C \otimes A_R, \quad (8.99)$$

причому матриці  $A_C$  та  $A_R$  задовольняють наступним рівнянням.

$$A_R K_R = \Lambda_R A_R, \quad (8.100)$$

$$A_C K_C = \Lambda_C A_C. \quad (8.101)$$

## 8.2. Дискретизація та відновлення неперервних зображень

В системі цифрової обробки зображень зазвичай надходять масиви чисел, що одержуються шляхом дискретизації реального зображення. Після обробки утворюються нові числові масиви, які використовуються для відновлення неперервного зображення. Відліки зображення отримуються внаслідок вимірювань деяких фізичних характеристик реального зображення (яркості або оптичної щільності). Оскільки будь-який

вимірювальний пристрій функціонує з деякою вимірювальною похибкою, для оцінки достовірності виміряних значень та компенсації похибок вимірювання важливо мати математичну модель похибок вимірювань. Крім того, часто не вдається безпосередньо виміряти характеристики вихідного зображення, тож замість них приходиться вимірювати деякі величини, що відносяться до іншого зображення, яке є функцією вихідного. Щоб визначити характеристики вихідного зображення, цю функцію треба “обертати”.

При розробці та аналізі систем дискретизації та відновленні неперервних зображень зображення, що обробляються, зазвичай розглядаються як детерміновані поля. Але у деяких випадках зручніше вважати, що вихідний сигнал системи обробки зображень (особливо шумового походження) являється реалізацією двовимірного випадкового процесу.

### 8.2.1. Процеси дискретизації та відновлення зображень

Зображення можуть описуватись як детермінованими функціями, так і випадковими полями.

Розглянемо спочатку випадок детермінованих зображень.

#### 8.2.1.1. Дискретизація детермінованих зображень

Нехай функція  $F_I(x, y)$  описує вихідне неперервне зображення нескінчених розмірів і являє собою розподіл яркості, оптичної щільності або якогось іншого параметра реального зображення. В ідеальній системі дискретизації зображення просторові відліки вихідного зображення одержуються фактично шляхом множення цієї функції на просторово -дискретизуючу функцію

$$S(x, y) = \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \delta(x - j_1 \Delta x, y - j_2 \Delta y), \quad (8.102)$$

яка складається з нескінченної кількості  $\delta$ -функцій, заданих у вузлах решітки з кроком  $(\Delta x, \Delta y)$ .

Тоді дискретизоване зображення описується співвідношенням

$$F_D(x, y) = F_I(x, y)S(x, y) = \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} F_I(j_1 \Delta x, j_2 \Delta y) \delta(x - j_1 \Delta x, y - j_2 \Delta y), \quad (8.103)$$

при цьому функцію  $F_I(x, y)$  можна внести під знак сумування і задати її значення в точках відліку. Для аналізу процесу дискретизації зручно використати спектр  $\mathcal{F}_D(\omega_x, \omega_y)$ , який отримується внаслідок неперервного двовимірного перетворення Фур'є дискретизованого зображення.

$$\mathcal{F}_D(\omega_x, \omega_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F_D(x, y) \exp[-i(\omega_x x + \omega_y y)] dx dy. \quad (8.104)$$

Згідно теоремі про спектр згортки спектр дискретизованого зображення можна представити у вигляді згортки вихідного зображення  $\mathcal{F}_I(\omega_x, \omega_y)$  та спектра дискретизуючої функції  $\mathcal{S}(\omega_x, \omega_y)$ :

$$\mathcal{F}_D(\omega_x, \omega_y) = (1/(4\pi^2)) \mathcal{F}_I(\omega_x, \omega_y) * \mathcal{S}(\omega_x, \omega_y). \quad (8.105)$$

Двовимірне перетворення Фур'є дискретизуючої функції дає набір  $\delta$ -функцій в площині просторових частот з кроком  $\omega_{x_s} = 2\pi/\Delta x$  та  $\omega_{y_s} = 2\pi/\Delta y$ :

$$\mathcal{S}(\omega_x, \omega_y) = \frac{4\pi^2}{\Delta x \Delta y} \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega_x - j_1 \omega_{x_s}, \omega_y - j_2 \omega_{y_s}). \quad (8.106)$$



Будемо вважати, що спектр вихідного зображення обмежено за шириною так, що  $\mathcal{F}_I(\omega_x, \omega_y) = 0$  при  $|\omega_x| > \omega_{x_c}$  и  $|\omega_y| > \omega_{y_c}$ .

Обчислимо згортку згідно рівності (8.105).

$$\mathcal{F}_D(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_I(\omega_x - \alpha, \omega_y - \beta) \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha - j_1 \omega_{x_s}, \beta - j_2 \omega_{y_s}) d\alpha d\beta. \quad (8.107)$$

Змінюючи порядок сумування та інтегрування і враховуючи основну властивість  $\delta$ -функцій, одержимо вираз для спектра дискретизованого зображення

$$\mathcal{F}_D(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_I(\omega_x - j_1 \omega_{x_s}, \omega_y - j_2 \omega_{y_s}), \quad (8.108)$$

Спектр дискретизованого зображення одержується шляхом нескінченного повторення спектру вихідного зображення із зсувом на величини, кратні  $(2\pi/\Delta x, 2\pi/\Delta y)$ . Зауважимо, що якщо  $\Delta x$  та  $\Delta y$  вибрано занадто великими порівняно з шириною спектра  $\mathcal{F}_I(\omega_x, \omega_y)$ , то сусідні спектри будуть перекриватись.

З відліків функції  $\mathcal{F}_D(x, y)$  можна одержати неперервне зображення шляхом лінійної просторової інтерполяції або за допомогою лінійної просторової фільтрації дискретизованого зображення. Нехай  $R(x, y)$  – імпульсний відгук фільтра, що інтерполює, а  $\mathcal{R}(\omega_x, \omega_y)$  – його частотна характеристика. Відновлення зображення одержується як згортка послідовності відліків із імпульсним відгуком фільтра, що відновлює.

Таким чином, відновлене неперервне зображення описується співвідношенням

$$F_R(x, y) = F_D(x, y) * R(x, y). \quad (8.109)$$

Заміщуючи у цю рівність  $F_D(x, y)$  з (2) та обчислюючи згортку, одержимо

$$F_R(x, y) = \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} F_I(j_1 \Delta x, j_2 \Delta y) R(x - j_1 \Delta x, y - j_2 \Delta y). \quad (8.110)$$

Звідси видно, що імпульсний відгук  $R(x, y)$  виконує роль двовимірної функції, що інтерполює відліки на всю площину. Просторово-частотний спектр зображення, що відновлено згідно рівності (8.109), є добутком частотної характеристики фільтра, що відновлює, із спектром дискретизованого зображення:

$$\mathcal{F}_R(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{F}_D(\omega_x, \omega_y) \mathcal{R}(\omega_x, \omega_y). \quad (8.111)$$

Враховуючи (8.108), одержуємо

$$\mathcal{F}_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \mathcal{R}(\omega_x, \omega_y) \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_I(\omega_x - j_1 \omega_{x_s}, \omega_y - j_2 \omega_{y_s}). \quad (8.112)$$

Отже, якщо спектри не перекриваються, а множник  $\mathcal{R}(\omega_x, \omega_y)$  пригнічує всі зсунуті спектри при  $j_1 \neq 0, j_2 \neq 0$ , то спектр відновленого неперервного зображення буде співпадати зі спектром вихідного зображення. Для зображень з обмеженою шириною спектра перша умова виконується, якщо інтервал дискретизації вибраний так, що прямокутна область, що обмежена верхніми межовими частотами спектра зображення  $(\omega_{x_c}, \omega_{y_c})$ , міститься знутри прямокутної області, яка визначається половинами частот дискретизації  $(\omega_x/2, \omega_y/2)$ . Отже, мають виконуватись нерівності

$$\omega_{x_c} \leq \omega_{x_s}/2; \quad \omega_{y_c} \leq \omega_{y_s}/2, \quad (8.113)$$

або

$$\Delta x \leq \pi/\omega_{x_c}, \quad \Delta y \leq \omega_{y_c}. \quad (8.114)$$

Це означає, що крок дискретизації не повинен перевищувати половини періоду просторової гармоніки, що відповідає найдрібнішим деталям зображення. Ця умова еквівалентна теоремі про дискретизацію одновимірних сигналів, в якій сформульовано вимогу, щоб частота дискретизації перевищувала найвищу частоту спектра сигналу бодай вдвічі.

У тих випадках, коли просторова частота дискретизованого зображення є достатньою для запобігання накладання спектрів в дискретизованому зображенні, вихідне зображення можна абсолютно точно відновити шляхом просторової фільтрації відліків за допомогою відповідного фільтра. Так, наприклад, фільтр, частотна характеристика якого наведена на рис. і описується виразами

$$\mathcal{R}(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} K & \text{при } |\omega_x| \leq \omega_{xL} \text{ та } |\omega_y| \leq \omega_{yL}, \\ 0 & \text{в решті випадків,} \end{cases} \quad (8.115)$$

де  $K$  – масштабна стала, задовольняє умову точного відновлення, якщо  $\omega_{xL} > \omega_{x_c}$  і  $\omega_{yL} > \omega_{y_c}$ . Функція розсіювання точки (або імпульсний відгук) даного фільтра, що відновлює, має вигляд

$$R(x, y) = \frac{K\omega_{xL}\omega_{yL}}{\pi^2} \frac{\sin(\omega_{xL}x)}{\omega_{xL}x} \frac{\sin(\omega_{yL}y)}{\omega_{yL}y}. \quad (8.116)$$

При використанні цього фільтра зображення відновлюється за допомогою нескінченної суми функцій виду  $\text{sinc}(x)$ . Іншим фільтром, придатним для відновлення зображень, є "круговий" фільтр із частотною характеристикою

$$\mathcal{R}(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} K & \text{при } \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} \leq \omega_0, \\ 0 & \text{в решті випадків,} \end{cases} \quad (8.117)$$

якщо  $\omega_0^2 < \omega_{x_c}^2 + \omega_{y_c}^2$ . Імпульсний відгук такого фільтра має вигляд

$$R(x, y) = 2\pi\omega_0 \frac{J_1(\omega_0\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (8.118)$$

### 8.2.1.2. Дискретизація випадкових зображень

Нехай  $F_I(x, y)$  – неперервний двовимірний стаціонарний випадковий процес з відомими середнім значенням  $\eta_{F_I}$  та автокореляційною функцією

$$R_{F_I}(\tau_x, \tau_y) = \mathcal{M}\{F_I(x_1, y_1)F_I^*(x_2, y_2)\}, \quad (8.119)$$

де  $\tau_x = x_1 - x_2$ ,  $\tau_y = y_1 - y_2$ . Виконаємо дискретизацію цього процесу за допомогою набору  $\delta$ -функцій

$$F_D(x, y) = F_I(x, y)S(x, y) = F_I(x, y) \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \delta(x - j_1\Delta x, y - j_2\Delta y). \quad (8.120)$$

Автокореляційна функція дискретизованого процесу має вигляд

$$R_{F_D}(x_1, x_2; y_1, y_2) = \mathcal{M}\{F_D(x_1, y_1)F_D^*(x_2, y_2)\} = \mathcal{M}\{F_I(x_1, y_1)F_I^*(x_2, y_2)\}S(x_1, y_1)S(x_2, y_2), \quad (8.121)$$

Співмножник  $\mathcal{M}\{F(x_1, y_1)F_I^*(x_2, y_2)\}$  являється автокореляційною функцією стаціонарного вихідного зображення. Крім того, для стаціонарного процесу добуток двох функцій, що дискретизують, є  $\delta$ -функція.

$$S(x_1, y_1)S(x_2, y_2) = S(x_1 - x_2, y_1 - y_2)S(\tau_x, \tau_y). \quad (8.122)$$

Значить, дискретизоване випадкове поле, яке представляє зображення, також є стаціонарним і має автокореляційну функцію

$$R_{F_D}(\tau_x, \tau_y) = R_{F_I}(\tau_x, \tau_y)S(\tau_x, \tau_y). \quad (8.123)$$

За допомогою двовимірного перетворення Фур'є автокореляційної функції (8.123) знайдемо енергетичний спектр дискретизованого випадкового поля. Згідно теореми про спектр добутку,

$$\mathcal{W}_{F_D}(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{W}_{F_I}(\omega_x, \omega_y) * \mathcal{S}(\omega_x, \omega_y), \quad (8.124)$$

де  $\mathcal{W}_{F_I}(\omega_x, \omega_y)$  і  $\mathcal{W}_{F_D}(\omega_x, \omega_y)$  – спектральні щільності вихідного та дискретизованого зображень відповідно, а  $\mathcal{S}(\omega_x, \omega_y)$  – результат перетворення Фур'є дискретизуючих  $\delta$ -функцій. Далі, як й у випадку детермінованих зображень одержуємо енергетичний спектр дискретизованого зображення:

$$\mathcal{W}_{F_D}(\omega_x, \omega_y) = \frac{4\pi^2}{\Delta x \Delta y} \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_{F_I}(\omega_x - j_1\omega_{x_s}, \omega_y - j_2\omega_{y_s}). \quad (8.125)$$

Таким чином, енергетичний спектр дискретизованого зображення утворюється шляхом повторення енергетичного спектру неперервного вихідного зображення в просторово-частотній області через інтервали, що є кратними просторовій частоті дискретизації  $(2\pi/\Delta x, 2\pi/\Delta y)$ . Якщо ширина енергетичного спектру неперервного зображення обмежена так, що  $\mathcal{W}_{F_I}(\omega_x, \omega_y) = 0$  при  $|\omega_x| > \omega_{x_c}$  і  $|\omega_y| > \omega_{y_c}$ , де  $\omega_{x_c}, \omega_{y_c}$  – межові частоти, то в (8.125) окремі спектри не будуть накладатись один на одний у тому випадку, коли інтервали дискретизації задовольняють умови  $\Delta x < \pi/\omega_{x_c}$  і  $\Delta y < \pi/\omega_{y_c}$ .

Неперервне випадкове зображення  $F_R(x, y)$  можна відновити за відліками вихідного випадкового зображення за допомогою інтерполяції за формулою

$$F_R(x, y) = \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} F_I(j_1\Delta x, j_2\Delta y)R(x - j_1\Delta x, y - j_2\Delta y), \quad (8.126)$$

де  $R(x, y)$  – детермінована інтерполяційна функція. Можна домогтися, щоб відновлене поле і вихідне зображення були еквівалентними в середньоквадратичному сенсі, тобто

$$\mathcal{M}\{[F_I(x, y) - F_R(x, y)]^2\} = 0. \quad (8.127)$$

Для цього досить, щоб задовольнявся критерій Найквіста й у якості інтерполяційної функції була обрана досить "гарна" функція, як, наприклад, бesselева або функція  $\text{sinc}(x)$ , які визначаються формулами (8.118) або (8.116).

Наведені результати можна безпосередньо застосувати до задачі про дискретизацію суми детермінованого зображення та адитивного шуму, моделлю якого слугує випадкове поле. При цьому може виникнути ситуація, коли спектр шуму виявиться ширшим за спектр корисного зображення. Якщо шум буде дискретизуватися із недостатньою частотою, то в смугу пропускання фільтра, що відновлює, будуть попадати "хвости" шумового спектра. Це призводить до збільшення викривлень, які спонукаються шумом. Для запобігання цьому треба перед дискретизацією профільтрувати зашумлене зображення для того, щоб звужити спектр шуму.

### 8.3. Реальні системи дискретизації зображень

В реальній системі дискретизації зображень решітка, що дискретизує, має скінчені розміри, ширина дискретизуючих імпульсів помітно відрізняється від нуля, а відліки зображення можуть бути взяті із недостатньою частотою.

Розглянемо наслідки такої не ідеальної дискретизації. Підґрунтям для аналізу слугує типова система сканування зображень, що наведена на рис.

Вихідне зображення, що представлено у вигляді діапозитиву, сканується світловим променем, що переміщується стрибкоподібно. Світло, яке пройшло через діапозитив, складається конденсорною лінзою і спрямовується на світлочутливу поверхню фотодетектора. Електричний сигнал з виходу фотодетектора інтегрується за період часу, протягом якого світловий промінь освітлює даний елемент зображення. Будемо вважати, що в процесі дискретизації в сигнал не додаються додаткові шуми. Тому результати попереднього розділу, що стосуються дискретизації зашумлених зображень, неважко об'єднати із наслідками даного розділу.

#### 8.3.1. Вплив форми дискретизуючого імпульсу

Дискретизоване зображення можна описати функцією

$$F_D(x, y) = F_I(x, y)S(x, y), \quad (8.128)$$

де дискретизуюча функція

$$S(x, y) = \sum_{j_1=-J_1}^{J_1} \sum_{j_2=-J_2}^{J_2} D(x - j_1\Delta x, y - j_2\Delta y) \quad (8.129)$$

складається із  $(2J_1 + 1)(2J_2 + 1)$  однакових імпульсів  $D(x, y)$ , що утворюють решітку з кроком  $(\Delta x, \Delta y)$ . Будемо вважати, що імпульси, які дискретизують, є нормованими, так що

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} D(x, y) dx dy = 1.$$

Будемо також вважати, що функція, яка дискретизує, одержано шляхом проходження скінченного набору  $\delta$ -функцій  $D_T(x, y)$  через лінійний фільтр із імпульсним відгуком  $D(x, y)$ . Таким чином,

$$S(x, y) = D_T(x, y) * D(x, y), \quad (8.130)$$

де

$$D_T(x, y) = \sum_{j_1=-J_1}^{J_1} \sum_{j_2=-J_2}^{J_2} \delta(x - j_1\Delta x, y - j_2\Delta y). \quad (8.131)$$

Після заміщення виразу (8.129) в (8.128) одержимо формулу для дискретизованого зображення

$$F_D(x, y) = \sum_{j_1=-J_1}^{J_1} \sum_{j_2=-J_2}^{J_2} F_I(x, y) D(x - j_1\Delta x, y - j_2\Delta y). \quad (8.132)$$

Спектр цієї функції має вигляд

$$\mathcal{F}_D(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{F}_I((\omega_x, \omega_y) * [\mathcal{D}_T(\omega_x, \omega_y) \mathcal{D}(\omega_x, \omega_y)]), \quad (8.133)$$

де  $\mathcal{D}(\omega_x, \omega_y)$  – результат перетворення Фур'є функції  $D(x, y)$ . Перетворення Фур'є скінченої решітки дискретизуючих імпульсів описується співвідношенням:

$$\mathcal{D}_T(\omega_x, \omega_y) = \frac{\sin[\omega_x(J_1 + 1/2)\Delta x]}{\sin(\omega_x\Delta x/2)} \frac{\sin[\omega_y(J_2 + 1/2)\Delta y]}{\sin(\omega_y\Delta y/2)}. \quad (8.134)$$

В системі відновлення зображень неперервне зображення одержується шляхом інтерполювання відліків. Ідеальні інтерполяційні функції, такі як  $\text{sinc}(x)$  та бesselеві, зазвичай визначені на нескінченній площині. Якщо ж решітка, що дискретизує, має скінченні розміри, то на межах відсікаються “хвости” інтерполяційних функцій, тож поблизу країв зображення, що відновлюється, виникають похибки. Але такі похибки зазвичай стають зневажливо малими при віддаленні від меж на 8–10 кроків дискретизації.

Значення відліку, що відповідає елементу  $(j_1, j_2)$ , можна знайти за формулою

$$F_S(j_1\Delta x, j_2\Delta y) = \int_{j_1\Delta x - A_x}^{j_1\Delta x + A_x} \int_{j_2\Delta y - A_y}^{j_2\Delta y + A_y} F_I(x, y) D(x - j_1\Delta x, y - j_2\Delta y) dx dy, \quad (8.135)$$

де  $A_x, A_y$  – найбільші розміри цього елемента. Передбачається, що за час інтегрування в системі береться один відлік.

Заміною змінних рівність (8.135) можна перетворити до вигляду

$$F_S(j_1\Delta x, j_2\Delta y) = \int_{-A_x}^{A_x} \int_{-A_y}^{A_y} F_I(j_1\Delta x - \alpha, j_2\Delta y - \beta) D(-\alpha, -\beta) d\alpha d\beta. \quad (8.136)$$

Оскільки передбачається, що за час інтегрування береться тільки один відлік, межі інтегрування можна розширити до  $\infty$ . Тоді (8.136) можна розглядати як результат згортки вихідного зображення із імпульсним відгуком  $D(-x, -y)$  та подальшої дискретизації цієї згортки у скінченній області за допомогою  $\delta$ -функції. Тоді, нехтуючи ефектами, що пов'язані із скінченими розмірами решітки  $\delta$ -функцій, що дискретизує, одержимо

$$F_S(j_1\Delta x, j_2\Delta y) = [F_I(x, y) * D(-x, -y)] \delta(x - j_1\Delta x, y - j_2\Delta y). \quad (8.137)$$

У більшості систем дискретизації дискретизований імпульс є симетричним, тому  $D(-x, -y) = D(x, y)$ .

Імпульс зі скінченими розмірами фактично здійснює низькочастотну фільтрацію вихідного зображення, що призводить до звужування спектра і зменшує похибки, що виникають внаслідок накладання спектрів.

## 8.4. Реальні системи відновлення зображень

Для безпомилкового відновлення неперервного зображення необхідно обмежити ширину спектра вихідного зображення, взявши відліки по просторовим змінним із частотою не нижче найквістовської і інтерполювати відліки зображення.

Для відновлення однокольорових зображень можна застосувати когерентну оптичну систему. В цій системі спочатку фотографують картинку з екрану електронно-променевої трубки і виготовляють діапозитив, який висвітлюють колімованим лазерним променем. Світло, що пройшло через діапозитив, попадає на лінзу, яка в своїй задній фокальній площині утворює світлове поле із розподілом інтенсивності, пропорційним двовимірному спектру Фур'є просторового розподілу коефіцієнта пропускання діапозитиву. Можна розрахувати оптичний фільтр, який би бажаним чином змінював розподіл амплітуди та фази світлового поля в площині фільтрації, тобто міг би відігравати роль фільтра, що відновлює. Друга лінза також виконує перетворення Фур'є і відновлює зображення на поверхні фотоплівки.

Головним достоїнством пристрою, який побудовано на ґрунті когерентної оптичної системи, являється відносна простота виготовлення фільтра, що відновлює. Оптимальний фільтр є просто діафрагмою, яка пропускає тільки дифракційну картинку нульового порядку.

### 8.4.1. Інтерполяційні функції

Найпростішою інтерполяційною функцією являється прямокутна, за допомогою якої здійснюється інтерполяція відліків многочленами нульового порядку. Трикутна функція забезпечує лінійну інтерполяцію першого порядку. Таку функцію можна розглядати як згортку двох прямокутних функцій. Згортка трикутної функції із прямокутною дає дзвіноподібну інтерполяційну функцію, що наведена на рис.

Повторенням цього процесу можна прийти до гаусової інтерполяційної функції (рис. е).

Особливо зручним для інтерполяції зображень являється кубічний *B*-сплайн, оскільки в результаті інтерполяції одержується функція, що є неперервною та гладкою у вузлах інтерполяції. Цю функцію, що відрізняється від нуля тільки на чотирьох інтервалах дискретизації, можна одержати, якщо виконати згортку чотирьох прямокутних функцій.

Таблиця.  $T_x = 2\pi/\omega_x$ ;  $T_y = 2\pi/\omega_y$ .

Функція	Визначення
sinc( $x$ )	$R(x, y) = \frac{4}{T_x T_y} \frac{\sin(2\pi/T_x)x}{(2\pi/T_x)x} \frac{\sin(2\pi/T_y)y}{(2\pi/T_y)y}$
Спектр	$\mathcal{R}(\omega_x, \omega_y) = 1,  \omega_x  \leq \omega_{x_s},  \omega_y  \leq \omega_{y_s}$
Прямокут.	$R_0(x, y) = 1/(T_x T_y),  x  \leq T_x/2,  y  \leq T_y/2$
Спектр	$\mathcal{R}_0(\omega_x, \omega_y) = \frac{\sin(\omega_x T_x/2)}{\omega_x T_x/2} \frac{\sin(\omega_y T_y/2)}{\omega_y T_y/2}$
Трикутна	$R_1(x, y) = R_0(x, y) * R_0(x, y)$
Спектр	$\mathcal{R}_1(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{R}_0^2(\omega_x, \omega_y)$
Колокол.	$R_2(x, y) = R_0(x, y) * R_1(x, y)$
Спектр	$\mathcal{R}_2(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{R}_0^3(\omega_x, \omega_y)$
Куб. <i>B</i> -сплайн	$R_3(x, y) = R_0(x, y) * R_2(x, y)$
Спектр	$\mathcal{R}_3(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{R}_0^4(\omega_x, \omega_y)$
Гаусова	$R(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_w^2} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_w^2}\right]$
Спектр	$\mathcal{R}(\omega_x, \omega_y) = \exp\left[-\frac{\sigma_w^2(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{2}\right]$

---

## Дискретний фур'є-аналіз багатовимірних сигналів

---

В цьому розділі розглядається багатовимірне дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) та його зв'язок зі звичайним перетворенням Фур'є. Розробляються також деякі алгоритми ШПФ для обчислення ДПФ із застосуванням до послідовностей скінченної протяжності.

Багатовимірне ДПФ є одночасно точним представленням перетворення Фур'є для послідовностей скінченної протяжності, а також розкладанням в ряд Фур'є багатовимірної періодичної послідовності. Прихована періодичність може бути використана для розробки ефективних у обчислювальному відношенні алгоритмів його обчислення. У попередньому розділі показано, що існують різні варіанти періодичного подовження багатовимірних послідовностей. З цього витікає існування багатьох можливих алгоритмів ДПФ. Для простоти ми почнемо із викладення прямокутно-періодичних сигналів та прямокутного ДПФ.

### 9.1. Представлення прямокутно-періодичних послідовностей у вигляді дискретних рядів Фур'є

Двовимірна послідовність  $\tilde{x}(n_1, n_2)$  буде прямокутно-періодичною, якщо

$$\tilde{x}(n_1, n_2) = \tilde{x}(n_1 + N_1, n_2) = \tilde{x}(n_1, n_2 + N_2) \quad (9.1)$$

для всіх  $(n_1, n_2)$ ;  $N_1, N_2$  – додатні цілі числа. Якщо ці числа є найменші зі всіх додатних цілих чисел, для яких справджується рівність (9.1), то вони називаються *горизонтальним* та *вертикальним періодами*  $\tilde{x}$ . Будь-яка періодична послідовність із горизонтальним та вертикальним періодами  $N_1$  та  $N_2$  сповна описується  $N_1 \times N_2$  незалежними відліками. Прямокутну область

$$R_{N_1 N_2} = \{(n_1, n_2) : 0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1\} \quad (9.2)$$

ми будемо називати *фундаментальним періодом*.

Періодична послідовність та її фундаментальний період показані на рис. 9.1. Будь-яку періодичну послідовність  $\tilde{x}(n_1, n_2)$  із горизонтальним та вертикальним періодами  $N_1$  та  $N_2$  можна представити у вигляді скінченної суми комплексних синусоїд із кратними частотами. Це співвідношення, що являє собою *двовимірний дискретний ряд Фур'є*, можна записати таким чином

$$\tilde{x}(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \tilde{X}(k_1, k_2) \exp\left(i \frac{2\pi}{N_1} n_1 k_1 + i \frac{2\pi}{N_2} n_2 k_2\right). \quad (9.3)$$

Комплексна синусоїда

$$\exp\left(i \frac{2\pi}{N_1} n_1 k_1 + i \frac{2\pi}{N_2} n_2 k_2\right)$$

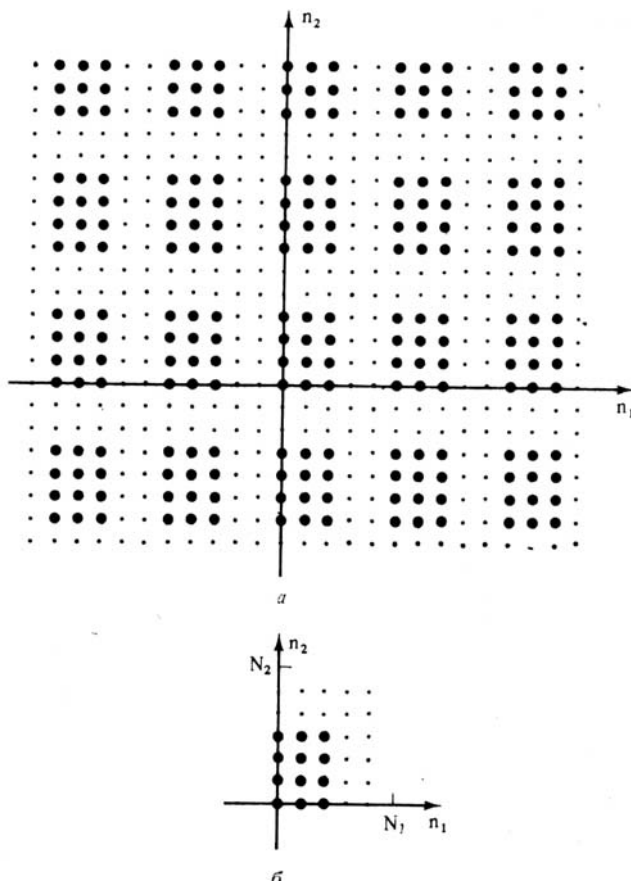


Рис. 9.1. Періодична двовимірна послідовність та її основний період.

є прямокутно-періодична із горизонтальним  $N_1$  та вертикальним  $N_2$  періодами для всіх цілих значень параметрів  $k_1, k_2$ . Числа  $\tilde{X}(k_1, k_2)$  називаються *коефіцієнтами ряду Фур'є*. Їх можна знайти для  $\tilde{x}(k_1, k_2)$  за допомогою рівності

$$\tilde{X}(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(n_1, n_2) \exp\left(-i\frac{2\pi}{N_1}n_1k_1 - i\frac{2\pi}{N_2}n_2k_2\right). \quad (9.4)$$

Рівності (9.3) та (9.4) є математично тотожні.

Операцію обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є можна інтерпретувати як перетворення однієї періодичної послідовності в іншу з тією ж періодичністю.

Періодичну послідовність можна легко побудувати з послідовності скінченної протяжності. Наприклад, нехай  $x(n_1, n_2)$  – послідовність скінченної протяжності, яка має опорну область  $R_{N_1N_2}$ , що визначена (9.2). Тоді  $\tilde{x}(n_1, n_2)$  можна визначити як послідовність

$$\tilde{x}(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(n_1 - k_1N_1, n_2 - k_2N_2). \quad (9.5)$$

Цей сигнал є прямокутно-періодичний і має таку властивість: в області  $R_{N_1N_2}$  послідовності  $\tilde{x}(n_1, n_2)$  та  $x(n_1, n_2)$  дорівнюють одна одній. Послідовність  $\tilde{x}(n_1, n_2)$  має назву *періодичного продовження*  $x(n_1, n_2)$ . Оскільки

$$x(n_1, n_2) = \begin{cases} \tilde{x}(n_1, n_2), & (n_1, n_2) \in R_{N_1N_2}, \\ 0 & \text{у решті випадків} \end{cases}, \quad (9.6)$$



то будь-яка послідовність скінченної протяжності сповна визначається своїм періодичним продовженням та опорною областю.

Можна також розглядати періодичну послідовність  $\tilde{X}(k_1, k_2)$  як періодичне продовження послідовності скінченної протяжності із коефіцієнтів ряду Фур'є  $X(k_1, k_2)$ . Отже,

$$\tilde{X}(k_1, k_2) = \sum_{j_1} \sum_{j_2} X(k_1 - j_1 N_1, k_2 - j_2 N_2) \quad (9.7)$$

та

$$X(k_1, k_2) = \begin{cases} \tilde{X}(k_1, k_2), & 0 \leq k_1 \leq N_1 - 1, \quad 0 \leq k_2 \leq N_2 - 1, \\ 0 & \text{у решті випадків} \end{cases}, \quad (9.8)$$

Оскільки  $\tilde{x}(n_1, n_2)$  та  $\tilde{X}(k_1, k_2)$  зв'язані рівностями (9.3), (9.4), можна обчислювати  $x(n_1, n_2)$  та  $X(k_1, k_2)$  одну з іншої шляхом послідовності операцій, що є обернені:

$$x(n_1, n_2) \leftrightarrow \tilde{x}(n_1, n_2) \leftrightarrow \tilde{X}(k_1, k_2) \leftrightarrow X(k_1, k_2). \quad (9.9)$$

Використовуючи рівності (9.3), (9.4) та (9.6), (9.8), можна виписати дискретне перетворення Фур'є

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \exp\left(-i\frac{2\pi}{N_1}n_1k_1 - i\frac{2\pi}{N_2}n_2k_2\right) \quad (9.10)$$

для  $0 \leq k_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq k_2 \leq N_2 - 1$

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X(k_1, k_2) \exp\left(i\frac{2\pi}{N_1}n_1k_1 + i\frac{2\pi}{N_2}n_2k_2\right). \quad (9.11)$$

для  $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$ . Фактично, треба убрати значок  $\tilde{\cdot}$  із співвідношень для дискретного ряду Фур'є. Той факт, що дискретний ряд Фур'є і дискретне перетворення Фур'є – це по суті одне й те саме, означає, що більшість властивостей ДПФ мають сенс тільки у тому разі, якщо ми розуміємо його як ряд Фур'є. Наприклад, якщо вираз (9.11) застосовують для обчислення відліків  $x$  поза областю  $R_{N_1 N_2}$ , одержують не відліки  $x$ , а відліки  $\tilde{x}$ .

Фур'є-перетворення послідовності скінченної протяжності з опорною областю  $R_{N_1 N_2}$  описується виразом

$$X(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \exp(-i\omega_1 n_1 - i\omega_2 n_2). \quad (9.12)$$

Із порівняння (9.12) та (9.10) бачимо, що ДПФ складається із відліків фур'є-перетворення

$$X(k_1, k_2) = X(\omega_1, \omega_2) \Big|_{\omega_1=2\pi k_1/N_1, \omega_2=2\pi k_2/N_2}. \quad (9.13)$$

Ми вже знаємо з попереднього (??) розділу, що сигнали з обмеженою смугою частот можна точно описати значеннями їхніх відліків у просторовій області, тобто сигнали з обмеженою смугою частот можна точно представити відліками їхніх фур'є-перетворень. Далі, ми знаємо, що дискретизація сигналу з необмеженою смугою частот призводить до накладання його спектра. Аналогічно, дискретизація фур'є-перетворення просторово необмеженого сигналу з метою отримання  $\tilde{X}(k_1, k_2)$  та подальше обчислення  $\tilde{x}(k_1, k_2)$  за допомогою (9.3) призводить до просторового накладання сигналу, який описується співвідношенням (9.5). Послідовність  $x(n_1, n_2)$  можна відновити з  $\tilde{x}(k_1, k_2)$  тільки тоді, коли вона просторово обмежена областю, яка не більше за  $R_{N_1 N_2}$ . Таким чином, ДПФ

представляє собою інший варіант застосування теореми відліків, коли виконується дискретизація фур'є-перетворення сигналу, а не самого неперервного сигналу.

Визначення ДПФ можна розповсюдити на багатовимірні послідовності. Нехай  $\epsilon$   $M$ -вимірна послідовність з опорною областю

$$R_{\mathbf{N}} = \{\mathbf{n} : 0 \leq n_i \leq N_i - 1, \quad i = \overline{1, M}\}. \quad (9.14)$$

Нехай  $\mathbf{N}$  – діагональна матриця із  $i$ -м діагональним елементом, що дорівнює  $N_i$ . За такої умови  $M$ -вимірне ДПФ можна записати у вигляді

$$X(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{n} \in R_{\mathbf{N}}} x(\mathbf{n}) \exp[-i\mathbf{k}^T (2\pi\mathbf{N}^{-1})\mathbf{n}]. \quad (9.15)$$

$$x(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{k} \in R_{\mathbf{N}}} X(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k}^T (2\pi\mathbf{N}^{-1})\mathbf{n}]. \quad (9.16)$$

*Приклад 1.* Обчислимо трьохвимірне ДПФ  $N_1 \times N_2 \times N_3$ -точкової послідовності, яка визначається так:

$$x(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 1, \\ 0 & \text{у решті випадків} \end{cases} \quad (9.17)$$

Якщо прийняти до уваги, що в області  $R_{\mathbf{N}}$  ця послідовність еквівалентна

$$x(n_1, n_2, n_3) = \delta(n_2, n_3 - 1), \quad (n_1, n_2, n_3) \in R_{\mathbf{N}},$$

то отримаємо

$$\begin{aligned} X(k_1, k_2, k_3) &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \delta(n_2, n_3 - 1) W_{N_1}^{n_1 k_1} W_{N_2}^{n_2 k_2} W_{N_3}^{n_3 k_3} = \\ &= W_{N_3}^{k_3} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \delta(n_2) W_{N_1}^{n_1 k_1} W_{N_2}^{n_2 k_2} = W_{N_3}^{k_3} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{n_1 k_1}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

$$X(k_1, k_2, k_3) = \begin{cases} N_1 W_{N_3}^{k_3}, & k_1 = 0, \quad (k_1, k_2, k_3) \in R_{\mathbf{N}} \\ 0 & \text{у решті випадків} \end{cases} \quad (9.19)$$

*Приклад 2.* Розглянемо обернене двовимірне ДПФ  $N_1 \times N_2$ -точкової послідовності, яку задано співвідношенням

$$X(k_1, k_2) = \begin{cases} 1, & 0 \leq k_1 \leq M_1 - 1, \quad 0 \leq k_2 = 0 \leq M_2 - 1, \\ 0 & \text{у решті випадків,} \end{cases} \quad (9.20)$$

де  $N_1 \geq M_1$ ,  $N_2 \geq M_2$ .

Послідовність  $x(n_1, n_2)$  виражається таким чином:

$$\begin{aligned} x(n_1, n_2) &= \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{M_1-1} \sum_{k_2=0}^{M_2-1} W_{N_1}^{-n_1 k_1} W_{N_2}^{-n_2 k_2} = \frac{1}{N_1} \sum_{k_1=0}^{M_1-1} W_{N_1}^{-n_1 k_1} \frac{1}{N_2} \sum_{k_2=0}^{M_2-1} W_{N_2}^{-n_2 k_2} = \\ &= \frac{1}{N_1} \frac{1 - W_{N_1}^{-n_1 M_1}}{1 - W_{N_1}^{-n_1}} \frac{1}{N_2} \frac{1 - W_{N_2}^{-n_2 M_2}}{1 - W_{N_2}^{-n_2}} = \exp \left[ -i2\pi \left( \frac{n_1(M_1 - 1)}{2N_1} + \frac{n_2(M_2 - 1)}{2N_2} \right) \right] \times \\ &\times \frac{1}{N_1 N_2} \frac{\sin \frac{\pi n_1 M_1}{N_1}}{\sin \frac{\pi n_1}{N_1}} \frac{\sin \frac{\pi n_2 M_2}{N_2}}{\sin \frac{\pi n_2}{N_2}}. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Елементи цієї послідовності є комплексні числа. Розглянемо окремо останній множник цього виразу і представимо його як функцію  $(n_1 n_2)$ , (рис. 9.2).

Цей множник являє собою варіант імпульсного відгуку ідеального фільтра нижніх частот із просторовим накладанням.

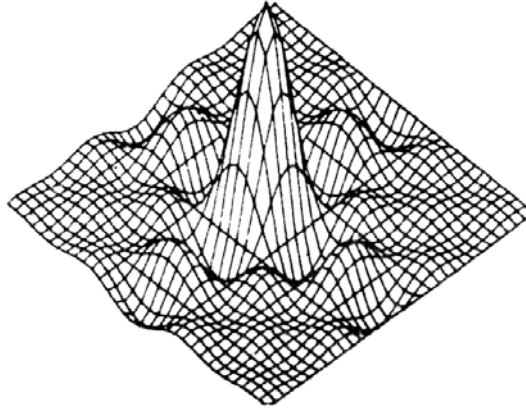


Рис. 9.2. Амплітуда сигналу  $x(n_1, n_2)$

### 9.1.1. Властивості дискретного перетворення Фур'є

*Циклічні зсуви.*

Розглянемо періодичну послідовність  $\tilde{x}(n_1, n_2)$  із періодами  $N_1, N_2$  та дискретними коефіцієнтами ряду Фур'є  $\tilde{X}(k_1, k_2)$ . Нехай  $\tilde{y}$  – результат зсуву  $\tilde{x}$

$$\tilde{y}(n_1, n_2) = \tilde{x}(n_1 - m_1, n_2 - m_2). \quad (9.22)$$

Коефіцієнти дискретних рядів Фур'є послідовностей  $\tilde{x}$  та  $\tilde{y}$  зв'язані співвідношенням

$$\tilde{Y}(k_1, k_2) = W_{N_1}^{m_1 k_1} W_{N_2}^{m_2 k_2} \tilde{X}(k_1, k_2). \quad (9.23)$$

З урахуванням (9.22) послідовність скінченної протяжності  $y$

$$y(n_1, n_2) = \begin{cases} \tilde{y}(n_1, n_2), & (n_1, n_2) \in R_{N_1 N_2}, \\ 0 & \text{у решті випадків} \end{cases} \quad (9.24)$$

отримують шляхом циклічного зсуву  $x(n_1, n_2)$ , тобто

$$y(n_1, n_2) = x[((n_1 - m_1))_{N_1}, ((n_2 - m_2))_{N_2}], (n_1, n_2) \in R_{N_1 N_2}, \quad (9.25)$$

де позначення  $((n))_N$  означає, що цілочислова змінна  $n$  береться по модулю  $N$ . (Якщо  $p = ((n))_N$ , то  $0 \leq p \leq N - 1$  й існує цілочислова змінна  $I$  така, що  $n = p + IN$ ).

ДПФ  $Y(k_1, k_2)$  визначається для  $(k_1, k_2) \in R_{N_1 N_2}$  таким чином:

$$Y(k_1, k_2) = \tilde{Y}(k_1, k_2) = W_{N_1}^{m_1 k_1} W_{N_2}^{m_2 k_2} \tilde{X}(k_1, k_2) = W_{N_1}^{m_1 k_1} W_{N_2}^{m_2 k_2} X(k_1, k_2). \quad (9.26)$$

Об'єднуючи (9.25) та 9.26), отримуємо

$$x[((n_1 - m_1))_{N_1}, ((n_2 - m_2))_{N_2}] = W_{N_1}^{m_1 k_1} W_{N_2}^{m_2 k_2} X(k_1, k_2). \quad (9.27)$$

*Теорема Парсеваля.*

$$\sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) y^*(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X(k_1, k_2) Y^*(k_1, k_2). \quad (9.28)$$

*Модуляція.* Властивість модуляції полягає у тому, що якщо послідовність помножується на комплексну експоненту, то її ДПФ підпорядковується циклічному зсуву.

$$W_{N_1}^{-n_1 l_1} W_{N_2}^{-n_2 l_2} x(n_1, n_2) \leftrightarrow X[((k_1 - l_1))_{N_1}, ((k_2 - l_2))_{N_2}]. \quad (9.29)$$

### 9.1.2. Циклічна згортка

Нехай є дві послідовності скінченної протяжності  $x(n_1, n_2)$  та  $h(n_1, n_2)$  із опорною областю  $R_{N_1 N_2}$ . Кожна з цих послідовностей має ДПФ  $x(n_1, n_2) \leftrightarrow X(k_1, k_2)$  та  $h(n_1, n_2) \leftrightarrow H(k_1, k_2)$  відповідно. Нехай  $Y(k_1, k_2) \in N_1 \times N_2$ -точковий дискретний спектр, що побудовано таким чином:

$$Y(k_1, k_2) = H(k_1, k_2)X(k_1, k_2). \quad (9.30)$$

Знайдемо  $y(n_1, n_2)$ . Розглянемо періодично доповнені послідовності  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{h}$ ,  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{H}$ ,  $\tilde{Y}$ . Оскільки

$$\tilde{Y}(k_1, k_2) = \tilde{H}(k_1, k_2)\tilde{X}(k_1, k_2), \quad (9.31)$$

то можна використати обернений дискретний ряд Фур'є (9.3) і записати

$$\tilde{y}(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \tilde{H}(k_1, k_2)\tilde{X}(k_1, k_2)W_{N_1}^{-n_1 k_1} W_{N_2}^{-n_2 k_2}. \quad (9.32)$$

Виразимо  $\tilde{X}(k_1, k_2)$  у вигляді

$$\tilde{X}(k_1, k_2) = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(m_1, m_2)W_{N_1}^{m_1 k_1} W_{N_2}^{m_2 k_2} \quad (9.33)$$

і замістимо цей вираз у (9.32).

$$\begin{aligned} \tilde{y}(n_1, n_2) &= \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(m_1, m_2) \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \tilde{H}(k_1, k_2)W_{N_1}^{-(n_1-m_1)k_1} W_{N_2}^{-(n_2-m_2)k_2} = \\ &= \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(m_1, m_2)\tilde{h}(n_1 - m_1, n_2 - m_2). \end{aligned} \quad (9.34)$$

За винятком меж підсумовування цей вираз має форму звичайної двовимірної згортки. Замість підсумовування за всіма відліками добутку досить додавати тільки ті відліки результуючої послідовності, що належать області  $R_{N_1 N_2}$ . Послідовність  $\tilde{y}(n_1, n_2)$  є прямокутно-періодична із періодами  $N_1, N_2$ . Отже

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(m_1, m_2)\tilde{h}(n_1 - m_1, n_2 - m_2)|_{(n_1, n_2) \in R_{N_1 N_2}} = \\ &= \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} x(m_1, m_2)h[((n_1 - m_1))_{N_1}, ((n_2 - m_2))_{N_2}]. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Назвемо  $y$  циклічною згорткою  $h$  та  $x$ . Вислів “циклічна згортка” означає, що  $h$  зазнає циклічний зсув по відношенню до  $x$  на противагу звичайному лінійному зсуву, коли  $h$  просто лінійно зсувається відносно  $x$ . Як і звичайна згортка, циклічна згортка має властивості комутативності, асоціативності та дистрибутивності відносно додавання.

ДПФ має перевагу порівняно із перетворенням Фур'є, оскільки може бути обчислено шляхом  $N_1^2 \times N_2^2$  комплексних множень та додавань. Як й у одновимірному випадку існує простий засіб, що дозволяє використовувати циклічну згортку для обчислення лінійної згортки.

Нехай  $x(n_1, n_2)$  має опорну область  $R_{P_1 P_2}$ , а  $h(n_1, n_2) - R_{Q_1 Q_2}$ . Позначимо через  $w(n_1, n_2)$  результат лінійної згортки

$$w(n_1, n_2) = \sum_{m_1} \sum_{m_2} h(m_1, m_2)x(n_1 - m_1, n_2 - m_2). \quad (9.36)$$

Послідовність  $w(n_1, n_2)$  має опорну область

$$0 \leq n_1 \leq P_1 + Q_1 - 1, \quad 0 \leq n_2 \leq P_2 + Q_2 - 1. \quad (9.37)$$

Використовуючи ДПФ розміром  $N_1 \geq \max(P_1, Q_1)$  та  $N_2 \geq \max(P_2, Q_2)$ , можна знайти циклічну згортку  $y = h * * x$

$$y(n_1, n_2) = \sum_{m_1=0}^{Q_1-1} \sum_{m_2=0}^{Q_2-1} h(m_1, m_2) \tilde{x}(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \text{ для } (n_1, n_2) \in R_{N_1 N_2}. \quad (9.38)$$

Періодичне продовження  $\tilde{x}(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$  послідовності скінченної протяжності  $x(n_1, n_2)$  можна записати у вигляді

$$\tilde{x}(n_1 - m_1, n_2 - m_2) = \sum_{r_1} \sum_{r_2} x(n_1 - m_1 - r_1 N_1, n_2 - m_2 - r_2 N_2). \quad (9.39)$$

Замістивши цей вираз у (9.38) після відповідних перетворень отримаємо

$$y(n_1, n_2) = \sum_{r_1} \sum_{r_2} \left[ \sum_{m_1=0}^{Q_1-1} \sum_{m_2=0}^{Q_2-1} h(m_1, m_2) x(n_1 - m_1 - r_1 N_1, n_2 - m_2 - r_2 N_2) \right] \text{ для } (n_1, n_2) \in R_{N_1 N_2}. \quad (9.40)$$

Завдяки обмеженим розмірам  $h(n_1, n_2)$  вираз у дужках є лінійна згортка, яку можна позначити як  $w(n_1, n_2)$ . Отже, маємо

$$y(n_1, n_2) = \sum_{r_1} \sum_{r_2} w(n_1 - r_1 N_1, n_2 - r_2 N_2) \text{ для } (n_1, n_2) \in R_{N_1 N_2}. \quad (9.41)$$

Послідовність  $y(n_1, n_2)$  дорівнює просторовому накладанню копії послідовності  $w(n_1, n_2)$  в області  $R_{N_1 N_2}$ . Але оскільки  $w(n_1, n_2)$  – послідовність обмеженої протяжності, то, обравши

$$N_1 \geq P_1 + Q_1 - 1, \quad N_2 \geq P_2 + Q_2 - 1, \quad (9.42)$$

отримаємо, що копії  $w(n_1, n_2)$  у рівності (9.40) не будуть перекриватися, і рівність (9.40) перетворюється у

$$y(n_1, n_2) = w(n_1, n_2) \text{ для } (n_1, n_2) \in R_{N_1 N_2}. \quad (9.43)$$

Отже, результат циклічної згортки дорівнює результату лінійної згортки.

Звідси витікає процедура обчислення лінійної згортки із використанням ДПФ:

1. Обрати  $N_1$  та  $N_2$ , що задовольняють умову (9.42).
2. Доповнити  $h(n_1, n_2)$  необхідною кількістю нулів для заповнення області  $R_{N_1 N_2}$ .
3. Доповнити  $x(n_1, n_2)$  таким же чином.
4. Обчислити  $(N_1 \times N_2)$ -точкове ДПФ  $h(n_1, n_2)$  та  $x(n_1, n_2)$ .
5. Знайти добуток  $H(k_1, k_2)X(k_1, k_2)$ .
6. Обчислити  $(N_1 \times N_2)$ -точкове обернене ДПФ для  $H(k_1, k_2)X(k_1, k_2)$ . Результат цього обчислення і буде шуканою лінійною згорткою.

У цій процедурі кроки 4–6 забезпечують виконання кругової згортки  $y = h * * x$ , яка дорівнює лінійній згортці  $w = h * * x$  завдяки правильному вибору  $N_1$  та  $N_2$ .

*Приклад 3.* Розглянемо простий випадок, коли  $x(n_1, n_2)$  та  $h(n_1, n_2)$  – послідовності розміром  $2 \times 2$ .

$$x(n, 1n_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad h(n, 1n_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ми маємо явний вираз послідовностей як множини значень відліків ( $n_1$  – індекс стовпця,  $n_2$  – рядку). Відлік  $(0, 0)$  – розміщено у нижньому лівому куті.

ДПФ розміром  $2 \times 2$  можна записати таким чином:

$$X(0, 0) = x(0, 0) + x(1, 0) + x(0, 1) + x(1, 1); \quad X(1, 0) = x(0, 0) - x(1, 0) + x(0, 1) - x(1, 1);$$

$$X(0, 1) = x(0, 0) + x(1, 0) - x(0, 1) - x(1, 1); \quad X(1, 1) = x(0, 0) - x(1, 0) - x(0, 1) + x(1, 1).$$

Після підстановки чисел, одержимо

$$X(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}; \quad H(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$H(k_1, k_2)X(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 2 \end{bmatrix}.$$

Обернене ДПФ дає циклічну згортку

$$y(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}. \quad (9.44)$$

Тепер розрахуємо лінійну згортку тих же двох послідовностей із використанням  $(4 \times 4)$ -точкового ДПФ. Лінійна згортка двох  $(2 \times 2)$ -точкових послідовностей буде  $(3 \times 3)$ -точковою послідовністю. Оскільки розмір ДПФ у кожному вимірі більше очікуваного розміру лінійної згортки,  $(4 \times 4)$ -точкова циклічна згортка і лінійна згортка будуть ідентичними. Доповнюючи  $x$  та  $h$  до заповнення опорної області  $4 \times 4$ , отримаємо

$$x(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad h(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Виразуємо  $(4 \times 4)$ -точкове ДПФ:

$$X(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} 3+j & 2 & 1+j & 2+2j \\ 2 & 1-j & 0 & 1+j \\ 3-j & 2-2j & 1-j & 2 \\ 4 & 3-j & 2 & 3+j \end{bmatrix};$$

$$H(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} 32+j & 2 & j & 1+2j \\ 1 & -j & -1 & j \\ 2-j & 1-2j & -j & 1 \\ 3 & 2-j & 1 & 2+j \end{bmatrix};$$

$$H(k_1, k_2)X(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} 5 + 5j & 2 & -1 + j & -2 + 6j \\ 2 & -1 - j & 0 & -1 + j \\ 5 - 5j & -2 - 6j & -1 - j & 0 \\ 12 & 5 - 5j & 2 & 5 + 5j \end{bmatrix}.$$

Візьмемо обернене ДПФ:

$$w(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Якщо цю послідовність перетворити у послідовність розміру  $2 \times 2$  шляхом просторового накладання, одержимо результат, ідентичний (9.44).

Результат для прикладу, що розглянуто, можна отримати значно простіше шляхом прямого обчислення лінійної згортки.

## 9.2. Обчислення ДПФ

ДПФ використовується у важливих прикладаннях завдяки тому, що існують ефективні алгоритми його обчислення. Наприклад, оскільки відліки ДПФ дорівнюють відлікам фур'є-перетворення, ДПФ можна використовувати для спектрального аналізу багатовимірних сигналів. ДПФ можна також застосовувати для обчислення лінійної згортки за умови запобігання просторового накладання. ДПФ також можна використовувати для моделювання та реалізації дискретних лінійних систем, що інваріантні до зсуву.

### 9.2.1. Пряме обчислення

Пряме обчислення двовимірного ДПФ – це обчислення подвійної суми

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_1}^{n_1 k_1} W_{N_2}^{n_2 k_2}, \quad 0 \leq k_1 \leq N_1 - 1, \quad 0 \leq k_2 \leq N_2 - 1, \quad (9.45)$$

де, як і раніше,  $W_N \equiv \exp\left(-i \frac{2\pi}{N}\right)$ .

Суму ДПФ в (9.45) можна записати у вигляді

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \left[ \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_2}^{n_2 k_2} \right] W_{N_1}^{n_1 k_1}. \quad (9.46)$$

Позначимо

$$G(n_1, k_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_2}^{n_2 k_2}; \quad X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} G(n_1, k_2) W_{N_1}^{n_1 k_1}. \quad (9.47)$$

Кожний стовпець послідовності  $G$  – одновимірне ДПФ відповідного стовпця  $x$ , а кожний рядок послідовності  $X$  – одновимірне ДПФ відповідного рядку  $G$ . Отже, двовимірне ДПФ можна обчислити, якщо спочатку обчислити ДПФ кожного стовпця  $x$ , записати результати у вигляді проміжного масиву, а потім обчислити ДПФ кожного рядку цього проміжного масиву. Можна також спочатку обчислити ДПФ рядку, а потім ДПФ стовпця.

$M$ -вимірне ДПФ можна виконати таким же шляхом.  
Пряме обчислення потребує

$$C_{\text{пряме}} = N_1^2 N_2^2 \dots N_M^2 \quad (9.48)$$

комплексних множень та додавань. За методом розкладання на стовпці та рядки для обчислення відповідних одновимірних ДПФ маємо

$$C_{\text{с/р пр.}} = N_1 N_2 \dots N_M (N_1 + N_2 + \dots + N_M) \quad (9.49)$$

комплексних множень та додавань. Якщо кожне із чисел  $N_i$  записується у вигляді степеня двох, щоб можна було використовувати ШПФ, то кількість комплексних множень можна ще скоротити до

$$C_{\text{с/р вПФ}} = N_1 N_2 \dots N_M \frac{1}{2} \log_2(N_1 N_2 \dots N_M) \quad (9.50)$$

Кількість комплексних додавань вдвічі більша.

Щоб одержати уявлення про економію в обчисленнях, розглянемо витрати на виконання  $(1024 \times 1024)$ -точкового двовимірного ДПФ кожним із цих підходів.  $C_{\text{пряме}} = 2^{40} = 10^{12}$  потребує комплексних множень,  $C_{\text{с/р пр.}} = 2^{31} = 2 \cdot 10^9$ ,  $C_{\text{с/р ШПФ}} = 10 \cdot 2^{20} \approx 10^7$  комплексних множень. Бачимо, що застосування одновимірного ШПФ зменшує обсяг обчислень приблизно в  $10^5$  раз. Зауважимо, що в одній добі майже  $10^5$  с.

### 9.2.2. Алгоритм швидкого перетворення Фур'є по векторній основі

У двовимірному алгоритмі ДПФ по векторній основі ДПФ розбивається на послідовно менші двовимірні ДПФ доти, доки не залишаться тривіальні двовимірні ДПФ, які й слід виконувати.

Можна одержати варіант алгоритму "проріджування" у часі, якщо виразити  $(N_1 \times N_2)$ -точкове ДПФ через 4  $(N_1/2 \times N_2/2)$ -точкові ДПФ (якщо  $N_1$  та  $N_2$  діляться на 2). З метою спрощення припустимо, що  $N_1 = N_2 = N$ . Процес підсумовування ДПФ виразу (9.45) можна розбити на 4 підсумовування: перше за відліками  $x$  для  $n_1$  та  $n_2$  парних; друге – для  $n_1$  парних, а  $n_2$  непарних; третє – для  $n_1$  непарних, а  $n_2$  парних; четверте – для  $n_1$  та  $n_2$  непарних. Це дає

$$X(k_1, k_2) = S_{00}(k_1, k_2) + S_{01}(k_1, k_2)W_N^{k_2} + S_{10}(k_1, k_2)W_N^{k_1} + S_{11}(k_1, k_2)W_N^{k_1+k_2}, \quad (9.51)$$

де

$$S_{00}(k_1, k_2) \equiv \sum_{m_1=0}^{N/2-1} \sum_{m_2=0}^{N/2-1} x(2m_1, 2m_2)W_N^{2m_1k_1+2m_2k_2}, \quad (9.52)$$

$$S_{01}(k_1, k_2) \equiv \sum_{m_1=0}^{N/2-1} \sum_{m_2=0}^{N/2-1} x(2m_1, 2m_2 + 1)W_N^{2m_1k_1+2m_2k_2}, \quad (9.53)$$

$$S_{10}(k_1, k_2) \equiv \sum_{m_1=0}^{N/2-1} \sum_{m_2=0}^{N/2-1} x(2m_1 + 1, 2m_2)W_N^{2m_1k_1+2m_2k_2}, \quad (9.54)$$

$$S_{11}(k_1, k_2) \equiv \sum_{m_1=0}^{N/2-1} \sum_{m_2=0}^{N/2-1} x(2m_1 + 1, 2m_2 + 1)W_N^{2m_1k_1+2m_2k_2}, \quad (9.55)$$

Множини  $S_{00}$ ,  $S_{01}$ ,  $S_{10}$ ,  $S_{11}$  періодичні по  $(k_1 k_2)$  з горизонтальним та вертикальним періодами  $N/2$ . Використовуючи цей факт, а також те, що  $W_N^{N/2} = -1$ , можна із виразу (9.51) отримати такі тотожності:

$$X(k_1, k_2) = S_{00}(k_1, k_2) + S_{01}(k_1, k_2)W_N^{k_2} + S_{10}(k_1, k_2)W_N^{k_1} + S_{11}(k_1, k_2)W_N^{k_1+k_2}, \quad (9.56)$$



$$X(k_1 + N/2, k_2) = S_{00}(k_1, k_2) + S_{01}(k_1, k_2)W_N^{k_2} - S_{10}(k_1, k_2)W_N^{k_1} - S_{11}(k_1, k_2)W_N^{k_1+k_2}, \quad (9.57)$$

$$X(k_1, k_2 + N/2) = S_{00}(k_1, k_2) - S_{01}(k_1, k_2)W_N^{k_2} + S_{10}(k_1, k_2)W_N^{k_1} + S_{11}(k_1, k_2)W_N^{k_1+k_2}, \quad (9.58)$$

$$X(k_1 + N/2, k_2 + N/2) = S_{00}(k_1, k_2) - S_{01}(k_1, k_2)W_N^{k_2} - S_{10}(k_1, k_2)W_N^{k_1} + S_{11}(k_1, k_2)W_N^{k_1+k_2}, \quad (9.59)$$

Ці співвідношення показують, яким чином обчислювати чотири точки ДПФ для конкретних значень  $(k_1, k_2)$  з чотирьох точок  $S_{00}(k_1, k_2)$ ,  $S_{01}(k_1, k_2)$ ,  $S_{10}(k_1, k_2)$ ,  $S_{11}(k_1, k_2)$ .

Отже, вираз (9.51) описує відлік  $(N \times N)$ -точкового ДПФ  $X(k_1, k_2)$  через чотири  $(N/2 \times N/2)$ -точкові ДПФ. За аналогією із одновимірним випадком схема обчислень за (9.56)–(9.59) називається “метеликом” (з основою  $2 \times 2$ ) (рис. 9.3).

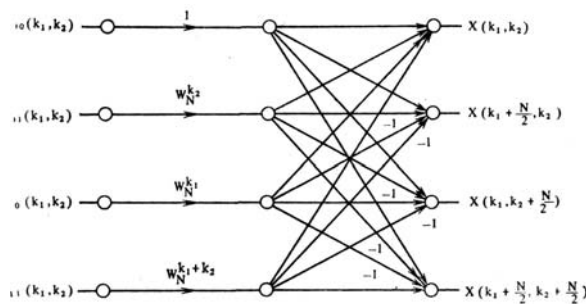


Рис. 9.3. “Метелик” з основою  $2 \times 2$

Кожний “метелик” потребує виконання трьох комплексних множень та восьми комплексних додавань, а для обчислення всіх відліків  $X$  через  $S_{00}$ ,  $S_{01}$ ,  $S_{10}$ ,  $S_{11}$  треба обчислити  $N^2/4$  “метеликів”. На рис. 9.4 представлено графічну схему послідовності цих операцій.

Якщо  $N/2$  також ділиться на 2, те ж розкладання можна застосувати для обчислення  $N/2 \times N/2$  перетворень  $S_{00}$ ,  $S_{01}$ ,  $S_{10}$ ,  $S_{11}$ . Цей процес “проріджування” у часі може продовжуватися доти, доки не залишаться тільки масиви  $2 \times 2$ , які підлягають перетворенню. Повне перетворення масиву  $4 \times 4$  по векторній основі наведено на рис. 9.5.

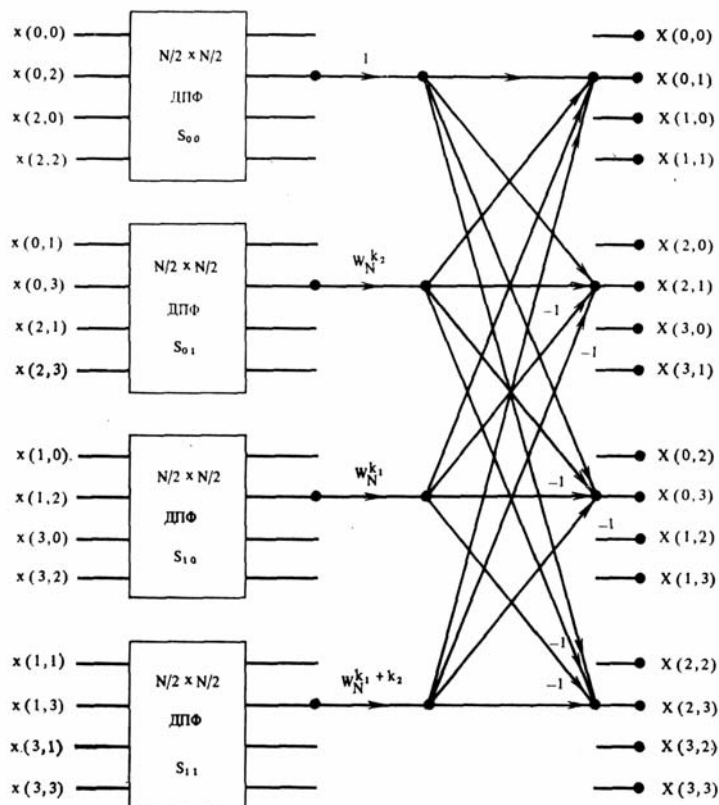
Якщо  $N$  представляється у вигляді степеня 2, то процедуру “проріджування” можна повторити  $\log_2 N$  раз. Таким чином, кількість комплексних множень під час виконання  $(N \times N)$ -точкового ШПФ за основою  $(2 \times 2)$  складає

$$C_{в.о(2 \times 2)} = \frac{2N^2}{4} \log_2 N, \quad (9.60)$$

що на 25% менше, ніж це потрібно при розподіленні на стовпці та рядки та використанні одновимірного ШПФ.

Алгоритм по векторній основі потребує також  $2N^2 \log_2 N$  комплексних додавань – стільки ж, як і алгоритм розподілення на стовпці та рядки. Схема на рис. 9.5 ілюструє операції, які необхідно здійснити під час виконання перетворення. Вона також показує порядок, у якому слід розміщувати дані.

Із-за послідовних поділів на групи із парними та непарними індексами дані у одновимірному ДПФ сприймаються в двійково-інвертованому порядку. Наприклад, для  $N = 16$  індекс  $n = 12$  при послідовному проріджуванні буде класифікуватися як парний, парний, непарний, непарний, оскільки залишками від ділення 12 на 2 будуть 0011, що є двійково-інвертованим представленням числа 12 (1100). У двовимірному випадку внаслідок послідовного розподілення  $(k_1, k_2)$  на парно-непарні, непарно-парні тощо вихідні дані будуть одержуватись у порядку із інверсією розташування бітів за обома індексами  $k_1$  та  $k_2$ . Цей порядок наведено у вигляді таблиці 9.1.

Рис. 9.4. Перша стадія проріджування ШПФ за основою  $2 \times 2$ 

ШПФ по векторній основі ( $2 \times 2$ ) представляє собою процес обчислення із заміщенням. Вихідні дані будь-якого “метелика” можна розмістити на місці вхідних даних того ж “метелика”, оскільки ці вхідні дані ніколи більше не знадобляться. Тому й вихідні дані всього ШПФ можна розмістити на місці вхідних. Операція інвертування двійкових чисел також є операцією із заміщенням.

### 9.2.3. Алгоритм ШПФ із гексагональною дискретизацією

Поряд із прямокутно-дискретизованими сигналами найбільш важливим є клас сигналів із гексагональною дискретизацією. ДПФ, яке зв’язує сигнали із гексагональною дискретизацією з гексагональними відліками описується виразом

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{3N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x(n_1, n_2) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{3N} [(2n_1 - n_2)k_1 + 3n_2k_2] \right]. \quad (9.61)$$

Він відповідає матриці періодичності

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2N & N \\ N & 2N \end{bmatrix}. \quad (9.62)$$

Якщо двовимірний дискретний сигнал одержано шляхом дискретизації функції з обмеженою смугою  $x_a(t_1, t_2)$  за допомогою гексагональної матриці дискретизації

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} T_1 & T_1 \\ T_2 & -T_2 \end{bmatrix}, \quad (9.63)$$

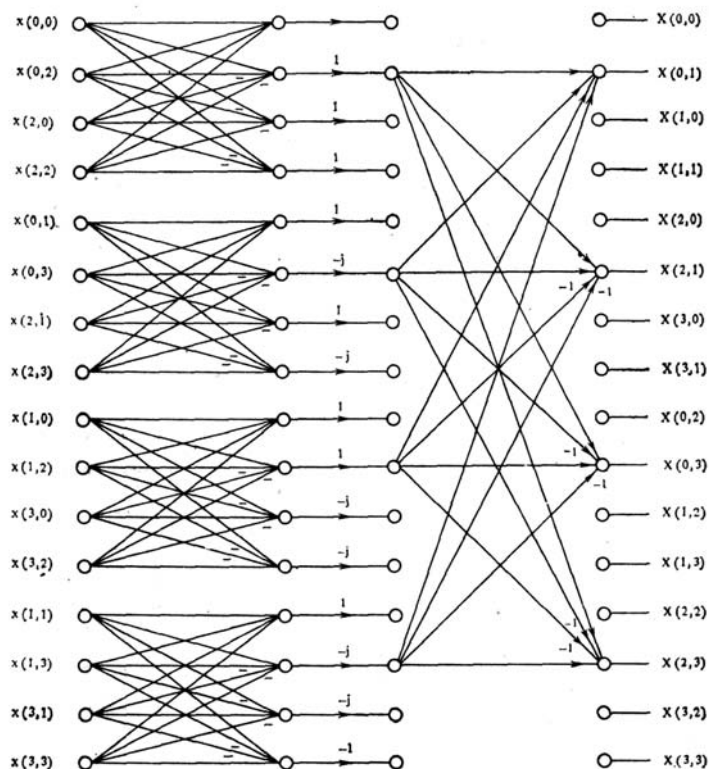


Рис. 9.5. Повне  $(4 \times 4)$ -точкове ДПФ за основою  $2 \times 2$

матриця  $\mathbf{S}$ , яка зв'язує  $X(k_1, k_2)$  та  $X_a(\Omega_1, \Omega_2)$ , описується виразом

$$\mathbf{S} = 2\pi[(VN)^T]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3NT_1} & \frac{\pi}{3NT_1} \\ \frac{\pi}{NT_2} & \frac{-\pi}{NT_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_1 \\ S_2 & -S_2 \end{bmatrix}. \quad (9.64)$$

Матрицю періодичності можна розкласти так:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & N/2 \\ N/2 & N \end{bmatrix}, \quad (9.65)$$

Це розкладання призводить до алгоритму типу алгоритма по векторній основі для гексагонального ДПФ. Повна схема алгоритму показана на рис.

Якщо  $N$  є степенем 2, то можна одержати більш повне розкладання:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (9.66)$$

“Метелики” для всіх етапів, за винятком першого, аналогічні один одному і містять чотири входи та чотири виходи. Перший етап – “метелик” із трьома входами та трьома виходами (рис. 9.6b).

(0,7)	(4,7)	(2,7)	(6,7)	(1,7)	(5,7)	(3,7)	(7,7)
(0,3)	(4,3)	(2,3)	(6,3)	(1,3)	(5,3)	(3,3)	(7,3)
(0,5)	(4,5)	(2,5)	(6,5)	(1,5)	(5,5)	(3,5)	(7,5)
(0,1)	(4,1)	(2,1)	(6,1)	(1,1)	(5,1)	(3,1)	(7,1)
(0,6)	(4,6)	(2,6)	(6,6)	(1,6)	(5,6)	(3,6)	(7,6)
(0,2)	(4,2)	(2,2)	(6,2)	(1,2)	(5,2)	(3,2)	(7,2)
(0,4)	(4,4)	(2,4)	(6,4)	(1,4)	(5,4)	(3,4)	(7,4)
(0,0)	(4,0)	(2,0)	(6,0)	(1,0)	(5,0)	(3,0)	(7,0)

Табл. 9.1. Двовимірна послідовність із двійково-інвертованим порядком розташування відліків для  $N = 8$

Матрицю  $\mathbf{N}$  можна також представити у вигляді співмножників:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad (9.67)$$

що призводить до алгоритму із поділом за рядками та стовпцями (рис. 9.7). Три  $(N \times N)$ -точкових ДПФ, що є ідентичні прямокутним ДПФ, виконуються після того, як дані просортовані на три групи та перепозначені.

Різниця між гексагональним ДПФ та прямокутним ДПФ полягає у кількості відліків в їхніх опорних областях. Гексагональне ДПФ є перетворення по  $3N^2$  комплексних значень відліків в кожній частотній або просторовій області. Ці опорні області можна вибрати таким чином, щоб вони мали гексагональну форму із радіусом  $N$  відліків. Прямокутне ДПФ із порівняним частотним розрізненням потребує  $4N^2$  комплексних значень відліків. Отже, перевага гексагонального ДПФ перед прямокутним полягає у тому, що воно потребує на 25% менше обсягу пам'яті. Воно також потребує менше обчислювальних операцій. В гексагональному ШПФ по векторній основі загальна кількість дійсних множень складає  $9N^2 \log_2 N + 8N^2$  на протипагу прямокутному алгоритму, який потребує  $12N^2 \log_2 N + 12N^2$  множень.

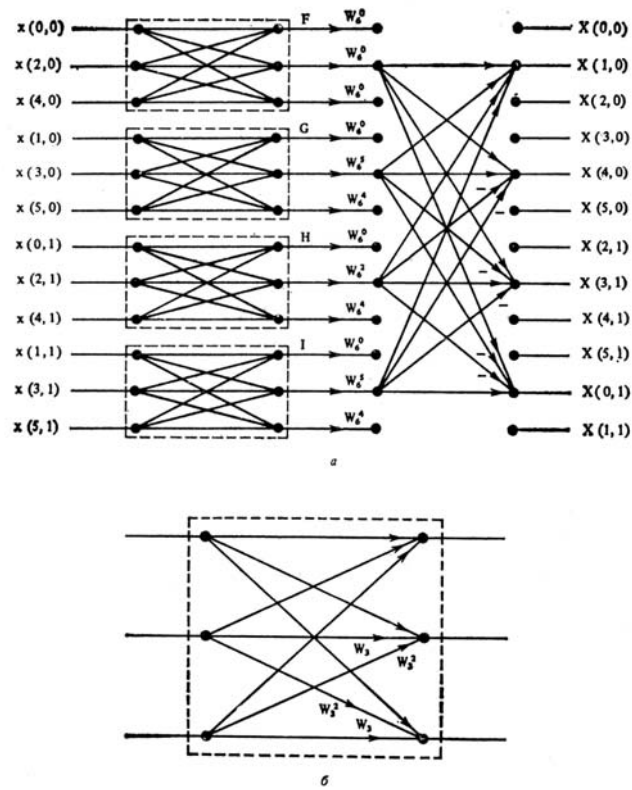


Рис. 9.6. Повна графічна схема гексагонального ШПФ для  $N = 2$

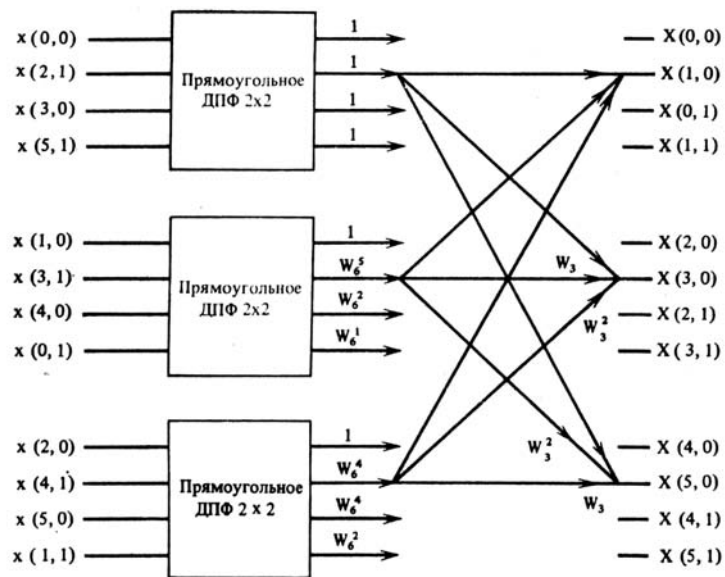


Рис. 9.7. Граф гексагонального ШПФ для  $N = 2$  та (9.66)

---

## Синтез та реалізація двовимірних СІХ-фільтрів

---

Синтез двовимірних цифрових фільтрів суттєво відрізняється від синтезу одновимірних. У одновимірному випадку задачі синтезу фільтру та його реалізації чітко розділяються. Спочатку виконується синтез фільтру, а потім за допомогою відповідних перетворень передаточної функції визначаються коефіцієнти, що необхідні для побудови конкретної схемної реалізації. У двовимірному випадку ситуація зовсім інша, оскільки багатовимірні поліноми у загальному випадку не можна розкласти на множники. Це означає, що немає можливості у загальному випадку змінювати форму довільної передаточної функції з метою узгодження її з вимогами схемної реалізації. Ця обставина ускладнює задачу проектування фільтрів й скорочує число практично прийнятних реалізацій.

СІХ-фільтр (фільтр зі скінченою імпульсною характеристикою), або нерекурсивний фільтр, це фільтр, імпульсний відгук якого містить лише скінченну кількість ненульових відліків. Такий імпульсний відгук завжди є абсолютно підсумовуваний, тож СІХ-фільтр завжди стійкий. Однією з важливих переваг СІХ-фільтрів порівняно із НІХ-фільтрами є можливість синтезу та практичної реалізації СІХ-фільтрів з дійсними частотними відгуками. Такі фільтри називаються фільтрами із *нульовою фазою*. У частотній області умову нульової фази можна виразити таким чином:

$$H(\omega_1, \omega_2) = H^*(\omega_1, \omega_2). \quad (10.1)$$

Виконавши обернене перетворення Фур'є, для імпульсного відгуку фільтра з нульовою фазою одержимо вимогу симетрії у просторовій області

$$h(n_1, n_2) = H^*(-n_1, -n_2). \quad (10.2)$$

Вочевидь, що СІХ-фільтр може задовольнити цю умову, якщо центр його опорної області співпадає з початком координат.

Фільтри із нульовою фазою важливі для багатьох прикладань цифрової обробки багатовимірних сингалів. Так, при обробці зображень фільтри з ненульовою фазою можуть призвести до руйнування ліній та меж. Це обумовлено тим, що нелінійний фазовий відгук призводить до розсіювання строго узгоджених синусоїдальних компонент сигналу, які складають контрастні точки, лінії та межі. Фільтри із нульовою фазою мають й інші переваги. В силу того, що частотний відгук є дійсний, спрощується синтез фільтру, Симетрію імпульсного відгуку фільтра можна використати при його реалізації для зменшення необхідної кількості операцій множення.

## 10.1. Реалізація СІХ-фільтрів

### 10.1.1. Пряма згортка

Вихідний сигнал лінійного інваріантного до зсуву фільтра (ЛІЗ-фільтр) можна одержати із вхідного сигналу за допомогою згортки за формулою ковзного сумування

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} h(k_1, k_2)x(n_1 - k_1, n_2 - k_2). \quad (10.3)$$

При обчисленні  $y(n_1, n_2)$  використовуються значення вхідних відліків із  $N_1 - 1$  попередніх стовпців та  $N_2 - 1$  попередніх рядків. Якщо вхідні відліки надходять рядок за рядком, то потрібна пам'ять, достатня для збереження  $N_2$  рядків вхідної послідовності.

Фільтр із нульовою фазою із дійсним імпульсним відгуком задовольняє умову  $h(n_1, n_2) = h(-n_1, -n_2)$ , тобто кожному відліку відповідає парний до нього відлік із тим же значенням. У цьому разі, скориставшись властивістю дистрибутивності додавання, можна поміняти місцями деякі операції множення та додавання з метою їхнього зменшення, але кількість мнотень, необхідних для реалізації фільтра, все ще залишається пропорційною порядку фільтра. Якщо, наприклад, опорна область фільтра прямокутна й її центр міститься у початку координат, то

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \sum_{k_2=-N_2}^{N_2} h(k_1, k_2)x(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) = & \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \sum_{k_2=-1}^{N_2} h(k_1, k_2)[x(n_1 - k_1, n_2 - k_2) + x(n_1 + k_1, n_2 + k_2)] + \\ & + \sum_{k_1=1}^{N_1} h(k_1, 0)[x(n_1 - k_1, n_2) + x(n_1 + k_1, n_2)] + h(0, 0)x(n_1, n_2). \end{aligned} \quad (10.5)$$

Реалізація СІХ-фільтрів на основі виразу (10.5) потребує приблизно удвічі менше операцій множення, ніж (10.4), хоча в обох випадках виконується одна й та ж кількість операцій додавання.

### 10.1.2. Реалізація СІХ-фільтрів за допомогою дискретного перетворення Фур'є (ДПФ)

Нехай  $w(n_1, n_2)$  – лінійна згортка послідовності скінченної довжини  $x(n_1, n_2)$  із імпульсним відгуком  $h(n_1, n_2)$  СІХ-фільтра

$$w(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) * h(n_1, n_2). \quad (10.6)$$

Перетворення Фур'є дасть

$$W(\omega_1, \omega_2) = X(\omega_1, \omega_2)H(\omega_1, \omega_2). \quad (10.7)$$

Для прямокутного растра обсягом  $N_1 \times N_2$

$$W(k_1, k_2) = W(\omega_1, \omega_2) \Big|_{\omega_i=2\pi k_i/N_i}. \quad (10.8)$$

Тоді

$$W(k_1, k_2) = X(k_1 - 1, k_2)H(k_1, k_2). \quad (10.9)$$

Будемо вважати, що послідовність  $y(n_1, n_2)$  є результатом оберненого ДПФ-добутку  $H(k_1, k_2)X(k_1, k_2)$ .

У цьому разі  $y(n_1, n_2)$  являє собою циклічну згортку  $h(n_1, n_2)$  та  $x(n_1, n_2)$ . Якщо  $N_1$  та  $N_2$  вибрано досить великими, то  $y(n_1, n_2) = w(n_1, n_2)$ . Для виконання  $(N_1 \times N_2)$ -точкових перетворень Фур'є послідовностей  $x$  та  $h$  опорні області обох цих послідовностей мають бути розширені й доповнені відліками із нульовими значеннями.

Реалізація СІХ-фільтрів за допомогою ДПФ є ефективна з точки зору обчислень, але вимагає значних обсягів пам'яті. Крім того, треба ще запам'ятовувати відліки відгуку фільтра  $H(k_1, k_2)$ , що подвоює обсяг пам'яті. При безпосередньому обчисленні згортки кількість вхідних рядків, які треба зберігати в пам'яті, залежить від порядку фільтра. Реалізація за допомогою ДПФ вимагає збереження усієї вхідної послідовності незалежно від порядку фільтра.

Якщо використовувати алгоритм розбивання на рядки та стовпці із урахуванням того, що значення  $x(n_1, n_2)$  та  $y(n_1, n_2)$  є дійсні, то загальна кількість операцій множення для обчислення  $y(n_1, n_2)$  складає

$$2N_1N_2(\log_2 N_1N_2 + 1) \quad (10.10)$$

за припущення, що  $N_1$  та  $N_2$  є степені числа 2. Для опорної області лінійної згортки  $w(n_1, n_2)$ , що являє собою прямокутник розміру  $M_1 \times M_2$  відліків, знадобиться

$$\frac{2N_1N_2(\log_2 N_1N_2 + 1)}{M_1M_2}$$

операцій множення на кожний відлік імпульсного відгуку фільтра.

## 10.2. Синтез СІХ-фільтрів із використанням вікон

Метод вікон, що використовується при синтезі багатовимірних СІХ-фільтрів, принципово не відрізняється від свого одновимірного аналогу. Цей метод спрямовано на апроксимацію не ідеального частотного, а ідеального імпульсного відгуку. Нехай  $i(n_1, n_2)$  та  $I(\omega_1, \omega_2)$  – імпульсний та частотний відгуки ідеального фільтра, а  $h(n_1, n_2)$  та  $H(\omega_1, \omega_2)$  – імпульсний та частотний відгуки синтезованого фільтра. Ненульові відліки  $h(n_1, n_2)$  розташовано в деякій опорній області скінченної протяжності  $R$ . При застосуванні методу вікон коефіцієнти  $h(n_1, n_2)$  визначаються співвідношенням

$$h(n_1, n_2) = i(n_1, n_2)w(n_1, n_2). \quad (10.11)$$

Послідовність  $w(n_1, n_2)$  має назву *функції вікна*, або *функції ваги*. Обмеження функції  $w(n_1, n_2)$  опорною областю  $R$  також обмежує цією областю функцію  $h(n_1, n_2)$ . Зважаючи на (10.11) частотний відгук  $H(\omega_1, \omega_2)$  зв'язаний з  $I(\omega_1, \omega_2)$  співвідношенням згортки в частотній області

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\Omega_1, \Omega_2)W(\omega_1 - \Omega_1, \omega_2 - \Omega_2)d\Omega_1d\Omega_2, \quad (10.12)$$

де  $W(\omega_1, \omega_2)$  – фур'є-перетворення функції вікна. Частотний відгук  $H(\omega_1, \omega_2)$  являє собою згладжений ідеальний частотний відгук, причому функцією, що згладжує, є фур'є-перетворення функції вікна.

Часто під час синтезу фільтру його потрібні властивості описуються за допомогою  $I(\omega_1, \omega_2)$ , а не  $i(n_1, n_2)$ . У цьому разі треба або обчислити  $i(n_1, n_2)$  аналітично, або апроксимувати шляхом дискретизації  $I(\omega_1, \omega_2)$  та виконати обернене ДПФ. Оскільки опорна область  $i(n_1, n_2)$  у загальному випадку має нескінченну протяжність, це призводить до викривлень функції  $i(n_1, n_2)$  внаслідок просторового накладення. З метою зменшення похибки накладень необхідно, щоб розмір опорної області оберненого ДПФ у декілька раз перевищував опорну область  $R$ .



### 10.2.1. Вибір функції вікна

Вибір функції вікна обумовлюється трьома вимогами. По перше, вікно повинно мати опорну область  $R$ . По друге, для того, щоб відгук  $H(\omega_1, \omega_2)$  гарно апроксимував  $I(\omega_1, \omega_2)$ , функція  $W(\omega_1, \omega_2)$  має апроксимувати двовимірну імпульсну функцію. Крім того, якщо необхідно одержати відгук  $h(n_1, n_2)$  із нульовою фазою, вікно має задовольняти умову нульової фази

$$w(n_1, n_2) = w^*(-n_1, -n_2). \quad (10.13)$$

Усі ці вимоги не відрізняються від вимог до одновимірного вікна, тому одновимірні вікна часто слугують основою для вибору двовимірних вікон. Зазвичай для цього використовується один із двох способів. У першому двовимірне вікно з квадратною або прямокутною опорною областю формується як прямий добуток двох одновимірних вікон:

$$w_R(n_1, n_2) = w_1(n_1)w_2(n_2). \quad (10.14)$$

Другий спосіб, запропонований Хуангом [1], передбачає формування двовимірного вікна за допомогою дискретизації поверхні, яка утворюється обертанням навколо своєї осі одновимірної функції вікна

$$w_C(n_1, n_2) = w\left(\sqrt{n_1^2 + n_2^2}\right). \quad (10.15)$$

Двовимірні вікна, що сформовано у такий спосіб, характеризуються майже круговою опорною областю.

Фур'є-спектр функції  $w_R(n_1, n_2)$  дорівнює добутку фур'є-спектру функцій  $w_1(n_1)$  та  $w_2(n_2)$ :

$$W_R(\omega_1, \omega_2) = W_1(\omega_1)W_2(\omega_2). \quad (10.16)$$

Фур'є-спектр функції  $w_C(n_1, n_2)$  схожий на поверхню, що одержано обертанням навколо своєї осі одновимірного фур'є-спектру функції  $w(t)$ .

Практично можна використовувати цілу низку одновимірних вікон, але найбільш популярними є:

прямокутне вікно

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{коли } |t| < \tau, \\ 0 & \text{в решті випадків} \end{cases} \quad (10.17)$$

вікно Хеннінга

$$w(t) = \begin{cases} 1/2(1 + \cos \pi f/\tau) & \text{коли } |t| < \tau, \\ 0 & \text{в решті випадків} \end{cases} \quad (10.18)$$

вікно Кайзера [1]

$$w(t) = \begin{cases} \frac{I_0(\alpha\sqrt{1 - (t/\tau)^2})}{I_0(\alpha)} & \text{коли } |t| < \tau, \\ 0 & \text{в решті випадків,} \end{cases} \quad (10.19)$$

де  $I_0(\alpha)$  – модифікована функція Бесселя нульового порядку. Усі ці вікна є неперервні із опорним інтервалом  $[-\tau, \tau]$ .

На рис. наведено Фур'є-спектр типового одновимірного вікна, який нормовано до одиничної площі у частотній області. Видно, що значна частина енергії вікна зосереджена у низькочастотній області; на високих частотах спостерігаються пульсації. На цьому рисунку  $\Delta$  – ширина головного низькочастотного пелюстка,  $b$  – висота максимального з бокових пелюстків. Чим менше ці величини, тим краща якість вікна й тим точніше функція  $H(\omega_1, \omega_2)$  апроксимує відгук  $I(\omega_1, \omega_2)$ . Але для вікна із фіксованою

опорною областю зменшення однієї з цих величин призводить до збільшення іншої. Єдиний спосіб покращення обох характеристик вікна полягає у збільшенні кількості відліків в області  $R$ . Параметр  $\alpha$  у виразі для вікна Кайзера слугує для вибору компромісного співвідношення між  $\Delta$  та  $b$ . Наявність цього параметру робить вікно Кайзера практично універсальним.

### 10.2.2. Приклад синтезу

У якості простого прикладу розглянемо синтез  $(11 \times 11)$  точкового СІХ-фільтра, який апроксимує ідеальний частотний відгук:

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{коли } \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq (0,4\pi)^2, \\ 0 & \text{в решті випадків в області } -\pi \leq \omega_1, \omega_2 \leq \pi. \end{cases} \quad (10.20)$$

Оскільки ідеальний відгук є чисто дійсний, слід синтезувати фільтр із нульовою фазою. Це означає, що початок координат має бути центром симетрії області  $R$ . Візьмемо у якості  $R$  множину точок

$$R = \{(n_1, n_2) : -5 \leq n_1, n_2 \leq 5\}.$$

Синтезуємо фільтр з використанням обох способів формування двовимірного вікна, обравши у якості прототипу одновимірне вікно Кайзера. Для вікна, що отримано оберненням, опорною областю буде кругова підобласть із  $R$ .

Ідеальний імпульсний відгук  $i(n_1, n_2)$  можна знайти, виконавши обернене перетворення Фур'є функції  $I(\omega_1, \omega_2)$ . Обчислення інтегралу дає

$$i(n_1, n_2) = \frac{0,2J_1(0,4\pi\sqrt{n_1^2 + n_2^2})}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}. \quad (10.21)$$

Тут  $J_1(x)$  – функція Бесселя першого порядку. Вирази для вікон матимуть вигляд

$$w_R(n_1, n_2) = \begin{cases} \frac{I_0[\alpha\sqrt{1 - (n_1/5)^2}]I_0[\alpha\sqrt{1 - (n_2/5)^2}]}{I_0^2(\alpha)} & \text{коли } |n_1| \leq 5, |n_2| \leq 5, \\ 0 & \text{у решті випадків.} \end{cases} \quad (10.22)$$

$$w_C(n_1, n_2) = \begin{cases} \frac{I_0[\alpha\sqrt{1 - (n_1^2 + n_2^2)/25}]}{I_0(\alpha)} & \text{коли } n_1^2 + n_2^2 \leq 25, \\ 0 & \text{у решті випадків.} \end{cases} \quad (10.23)$$

Після множення (10.22) або (10.23) на (10.21) одержимо обидва шуканих фільтри.

Частотні відгуки фільтрів зображено на рис. для випадку  $\alpha = 0,1$ .

Фільтр, що синтезовано з використанням вікна  $w_R$ , характеризується максимальною похибкою апроксимації у смузі пропускання 0,2914, а у смузі затримування – 0,1341. Максимальна похибка фільтра, що синтезовано з використанням вікна  $w_C$ , складає у смузі пропускання 0,1468, а у смузі затримування – 0,1105.

Частотні відгуки цих фільтрів відрізняються від ідеального відгуку з двох причин. Відгук не є плоским ані в смузі пропускання, ані в смузі затримування, а зріз фільтра не абсолютно гострий. Перший недолік обумовлений наявністю бокових пелюстків в фур'є-спектрі функції вікна, а другий – скінченною шириною головного пелюстка фур'є-спектру. Змінювання параметра  $\alpha$  у виразі для вікна Кайзера дозволяє знаходити компромісне рішення для гостроти зрізу та гладкості частотного відгуку у смугах пропускання та непропускання.

Параметр  $\alpha$  можна оцінити, виходячи з потрібного коефіцієнту ослаблення фільтра  $\alpha_T \triangleq -20 \lg \sqrt{\delta_p \delta_s}$ ,  $\delta_p$  – максимальна похибка апроксимації у смузі пропускання,  $\delta_s$  – максимальна похибка апроксимації у смузі затримування.

Для методики із добутком вікон експериментально одержано такий вираз для  $\alpha$ :

$$\alpha \approx \begin{cases} 0,42(\alpha_T - 19,3)^{0,4} + 0,089(\alpha_T - 19,3) & \text{коли } 20 < \alpha_T < 60, \\ 0 & \text{коли } \alpha_T < 20. \end{cases} \quad (10.24)$$

Для методики з обертанням вікна параметр  $\alpha$  наближено дорівнює

$$\alpha \approx \begin{cases} 0,56(\alpha_T - 20,2)^{0,4} + 0,083(\alpha_T - 20,2) & \text{коли } 20 < \alpha_T < 60, \\ 0 & \text{коли } \alpha_T < 20. \end{cases} \quad (10.25)$$

### 10.3. Синтез оптимальних СІХ-фільтрів

Частотні відгуки фільтрів із скінченною опорною областю можуть тільки наближено відповідати потрібним частотним характеристикам. Зазвичай реальний частотний відгук відрізняється від заданого на величину похибки

$$E(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1, \omega_2) - I(\omega_1, \omega_2). \quad (10.26)$$

Одним з підходів до синтезу фільтра полягає у такому виборі коефіцієнтів фільтра, коли мінімізується деякий функціонал цієї похибки, наприклад її  $L_2$ -норма (середньо-квадратичне значення)

$$E_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2. \quad (10.27)$$

або норма Чебишова ( $L_\infty$ )

$$E_\infty = \max_{\omega_1, \omega_2} |E(\omega_1, \omega_2)|.$$

Частотний відгук СІХ-фільтра із опорною областю  $R$  має вигляд

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{(n_1, n_2) \in R} \sum h(n_1, n_2) e^{-i\omega_1 n_1 - i\omega_2 n_2}. \quad (10.28)$$

Для фільтра із нульовою фазою  $h(n_1, n_2) = h(-n_1, -n_2)$ , тому рівняння (10.28) набуває вигляду

$$H(\omega_1, \omega_2) = h(0, 0) + \sum_{(n_1, n_2) \in R'} 2h(n_1, n_2) \cos(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2). \quad (10.29)$$

Тут  $R'$  містить приблизно вдвічі менше відліків, ніж  $R$ . Щоб можна було виконувати лінійну апроксимацію, спростимо рівняння (10.29):

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=1}^F a(i) \varphi_i(\omega_1, \omega_2), \quad (10.30)$$

де  $i$  – індекс, що визначає порядок відліків  $(n_1, n_2)$  в  $R'$ , а  $F$  – число незалежних відліків в імпульсному відгуку, тобто число ступенів свободи апроксимації. Коефіцієнти  $a(i)$  – значення імпульсного відгуку, які потрібно знайти

$$a(i) = h(n_1, n_2), \quad (10.31)$$

а функції  $\{\varphi_i(\omega_1, \omega_2)\}$  – базисні функції апроксимації, що визначаються як

$$\varphi_i(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 2 \cos(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2) & \text{коли } (n_1, n_2) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{коли } (n_1, n_2) = (0, 0). \end{cases} \quad (10.32)$$

Такий запис дозволяє накладати лінійні обмеження на коефіцієнти імпульсного відгуку. Наприклад, якщо ми бажаємо накласти обмеження  $a(i) = a(j)$ , то ми заміщуємо  $\varphi_i(\omega_1, \omega_2)$  на  $\varphi_i(\omega_1, \omega_2) + \varphi_j(\omega_1, \omega_2)$  і відкидаємо член, що містить  $a(j)$ . Це рівнозначно зменшенню числа ступенів свободи на 1. Точно також можна запровадити обмеження  $a(j) = k$  шляхом заміщення  $I(\omega_1, \omega_2)$  на  $I(\omega_1, \omega_2) - k\varphi_i(\omega_1, \omega_2)$  та відкидання члену  $a(i)$  у сумі, яка визначає  $H(\omega_1, \omega_2)$ . Це також призводить до зменшення числа ступенів свободи на 1.

У якості прикладу розглянемо  $[(2N + 1) \times (2N + 1)]$ -точковий СІХ-фільтр із 8-кратною симетрією. Її можна забезпечити накладанням умови

$$h(n_1, n_2) = h(\pm n_1, \pm n_2) = h(\pm n_2, \pm n_1). \quad (10.33)$$

Частотний відгук такого фільтра запишеться у вигляді (10.30), причому

$$i = \frac{1}{2}(n_1(n_1 + 1)) + n_2 + 1 \text{ коли } 0 \leq n_1 \leq N, \quad 0 \leq n_2 \leq n_1, \quad F = \frac{(N + 1)(N + 2)}{2},$$

$$\varphi_i(\omega_1, \omega_2) = \cos \omega_1 n_1 \cos \omega_2 n_2 + \cos \omega_1 n_2 \cos \omega_2 n_1. \quad (10.34)$$

### 10.3.1. Синтез за методом найменших квадратів

Будемо вибирати  $h(n_1, n_2)$  за умови мінімізації похибки  $E_2$ .

Коефіцієнти фільтра, що мінімізують  $E_2$ , можна отримати за допомогою методу вікон, якщо обрати функцію вікна сталу в  $R$ . Визначимо

$$E_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2. \quad (10.35)$$

Використовуючи рівність Парсевалля, можна виразити  $E_2$  через величини, що визначені у просторовій області

$$E_2 = \sum_{n_1} \sum_{n_2} [h(n_1, n_2) - i(n_1, n_2)]^2 = \sum_{(n_1, n_2) \in R} [h(n_1, n_2) - i(n_1, n_2)]^2 + \sum_{(n_1, n_2) \notin R} [h(n_1, n_2) - i(n_1, n_2)]^2;$$

$$E_2 = \sum_{(n_1, n_2) \in R} [h(n_1, n_2) - i(n_1, n_2)]^2 + \sum_{(n_1, n_2) \notin R} i^2(n_1, n_2). \quad (10.36)$$

У цьому виразі враховано, що відгук  $h(n_1, n_2)$  дорівнює нулю за будь-яких  $(n_1, n_2)$  поза областю  $R$ . Оскільки обидві суми у виразі (10.38) додатні і тільки першу можна змінювати шляхом підбору коефіцієнтів фільтра  $h(n_1, n_2)$ , то  $E_2$  досягає мінімуму коли

$$h(n_1, n_2) = \begin{cases} i(n_1, n_2) & \text{для } (n_1, n_2) \in R, \\ 0 & \text{для } (n_1, n_2) \notin R, \end{cases} \quad (10.37)$$

тобто для фільтра, який одержується при використанні методу вікон зі сталою функцією вікна в області  $R$ .

У більш загальному випадку, коли на фільтр накладено лінійні обмеження та частотний відгук фільтра описується виразом (10.30), маємо

$$E_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \sum_{i=1}^F a(i) \varphi_i(\omega_1, \omega_2) - I(\omega_1, \omega_2) \right]^2 d\omega_1 d\omega_2. \quad (10.38)$$

Для мінімізації  $E_2$  знайдемо похідні цього виразу по кожному з  $a(k)$ , прирівняємо їх до нуля й розв'яжемо одержані рівняння. Оскільки частинні похідні  $\partial E_2 / \partial a(k)$  є лінійні функції невідомих коефіцієнтів, маємо  $F$  лінійних рівнянь

$$\sum_{i=1}^F a(i) \varphi_{ik} = I_k, \quad k = \overline{1, F}, \quad (10.39)$$

де

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_i(\omega_1, \omega_2) \varphi_k(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (10.40)$$

$$I_k = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\omega_1, \omega_2) \varphi_k(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (10.41)$$

Для випадку ортогональної системи функцій  $\{\varphi_i(\omega_1, \omega_2)\}$  розв'язком системи рівнянь (10.39) буде просто  $a(i) = I_i/\varphi_{ii}$ .

### 10.3.2. Синтез СІХ-фільтрів із нульовою фазою та рівновеликими пульсаціями

Ми вже підкреслювали, що ширина перехідної смуги фільтру та величина похибки апроксимації у смугах пропускання та затримування задані таким чином, що покращення одного параметру призводить до погіршення іншого. При заданій конфігурації смуг пропускання та затримування найменші пульсації в цих областях досягаються при синтезі фільтру із рівновеликими пульсаціями. Синтез виконується із мінімізацією критерію похибки Чебишова

$$E_{\infty} = \max_{(\omega_1, \omega_2) \in K} |H(\omega_1, \omega_2) - I(\omega_1, \omega_2)|. \quad (10.42)$$

Тут  $K$  являє собою компактну область частотної площини, яка зазвичай вибирається так, щоб вона містила в собі смуги як пропускання, так і затримування фільтру (разом із їхніми межами). Як і раніше, розглядається КІХ-фільтр із нульовою фазою

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{(n_1, n_2) \in R} h(n_1, n_2) e^{-i(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}. \quad (10.43)$$

Фільтри із мінімізацією критерію похибки Чебишова називають *мінімаксними*, оскільки для них є мінімальним максимальне значення похибки. Їх також називають фільтрами із рівновеликими пульсаціями, оскільки функція похибки  $E = H - I$  містить багато піків, або пульсацій, однакової величини. На рис. наведено приклад фільтра із рівновеликими пульсаціями з  $(11 \times 11)$ -точковим імпульсним відгуком. Смуга пропускання цього фільтру являє собою диск радіусу  $0, 4\pi$ , а смуга непропускання – простір навкруги диску радіусом  $0, 6\pi$ . Максимальна похибка дорівнює  $0,057$ , а номінальний коефіцієнт передачі в смузі пропускання дорівнює  $1$ .

Задачу оптимізації можна вирішувати за допомогою ітераційних алгоритмів, які забезпечують збіжність за скінченну кількість кроків. У одновимірному випадку розв'язок (алгоритм Ремеза) є єдиним, а алгоритм забезпечує швидку збіжність.

*Екстремальна точка* – це точка  $\omega = (\omega_1, \omega_2)^T \in K$ , в якій функція похибки  $|H - I|$  приймає максимальне значення. Множина усіх екстремальних точок містить  $F + 1$  членів. Ця множина є *критичною множиною*, якщо похибки у точках множини задовольняють визначені умови. Вільні параметри  $|a(i)|$ , які мінімізують  $E_{\infty}$ , сповна визначаються критичною множиною, а оптимальне значення  $E_{\infty}$  дорівнює значенню похибки у кожній точці цієї множини.

Якщо область апроксимації  $K$  містить скінченну кількість частотних відліків, то апроксимація може полягати у пошуку критичної множини. Цей пошук полегшується з урахуванням двох положень. По перше, якщо  $H(\omega)$  – найкраща апроксимація до  $I(\omega)$  на  $R$ , а  $C$  – критична множина, що відповідає похибці  $H - I$ , то  $H$  – найкраща апроксимація до  $I$  на  $C$ . По друге, якщо  $C$  містить  $F + 1$  точку, то  $H$  – апроксимація, яка мінімізує *максимальну похибку* серед усіх найкращих апроксимацій до  $I$  на підмножинах  $K$ , що містять  $F + 1$  точок.

Ці два положення складають основу алгоритму *підняття*, який є еквівалент симплексного методу лінійного програмування. Алгоритм підняття полягає у багатовимірному відшуванні найкращих апроксимацій на множинах  $F + 1$  точок. У кожному наступному наближенні множина точок  $F + 1$  вибирається так, щоб похибка Чебишова була на ньому більше за попереднє наближення. Найкраще наближення Чебишова в області  $K$  досягається, коли ця норма досягає свого максимального значення.

Алгоритм підняття вимагає значної кількості ітерацій, причому на кожній ітерації потрібно обчислювати функцію похибки по усій області  $K$ .

### 10.3.3. Синтез СІХ-фільтрів із використанням трансформацій

Ідея полягає у перетворенні одновимірного СІХ-фільтру із нульовою фазою у багатовимірний за допомогою заміни змінних. При цьому спрощується реалізація, одновимірні фільтри легше трактувати, використання оптимальних одновимірних фільтрів дозволяє синтезувати оптимальні багатовимірні фільтри.

Метод синтезу запропоновано Мак-Клелланом [1]. Застосування цього методу ускладнюється тим, що заміна змінних, яка використовується у цьому методі, не є очевидна.

Тому розглянемо спочатку одновимірні фільтри із нульовою фазою. Імпульсний відгук  $h(n)$  одновимірного фільтру є симетричний.

$$h(n) = h^*(-n). \quad (10.44)$$

Тоді опорна область – це інтервал  $-N \leq n \leq N$ . Будемо також вважати, що усі відліки  $h(n)$  є дійсні, а їх фур'є-перетворення є  $H(\omega)$ . Тоді можна записати

$$H(\omega) = h(0) + \sum_{n=1}^N h(n)[e^{-i\omega n} + e^{i\omega n}] = \sum_{n=0}^N a(n) \cos(\omega n). \quad (10.45)$$

$$a(n) = \begin{cases} h(0) & \text{коли } n = 0, \\ 2h(n) & \text{коли } n > 0. \end{cases} \quad (10.46)$$

Функцію  $\cos(\omega n)$  можна виразити у вигляді поліному степеня  $n$  від змінної  $\cos \omega$ . Цим поліномом буде поліном Чебишова  $T_n[\cdot]$ . Отже, маємо

$$\cos \omega n = T_n[\cos \omega]. \quad (10.47)$$

Тоді замість (10.45) будемо мати

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^N a(n) T_n[\cos \omega]. \quad (10.48)$$

Тепер можна виконати заміну

$$F(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \cos \omega. \quad (10.49)$$

Це дає двовимірний відгук

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n=0}^N a(n) T_n[F(\omega_1, \omega_2)]. \quad (10.50)$$

Функція  $F(\omega_1, \omega_2)$  зветься *трансформуючою функцією*.

Функція  $F(\omega_1, \omega_2)$  сама має бути частотним відгуком двовимірного СІХ-фільтра, тоді і функція  $H(\omega_1, \omega_2)$  буде частотним відгуком двовимірного фільтру. Далі, треба, якщо відомі характеристики  $H(\omega)$  та  $F(\omega_1, \omega_2)$ , щоб можна було передбачити характеристики  $H(\omega_1, \omega_2)$ . Крім того, має існувати якась процедура вибору конкретних

функцій  $H(\omega)$  та  $F(\omega_1, \omega - 2)$ , яка призводить до отримання потрібної частотної характеристики  $H(\omega_1, \omega_2)$ . Виконання усіх цих умов неможливе без накладання деяких обмежень на клас допустимих трансформаційних функцій.

У найпростішому випадку у якості  $F(\omega_1, \omega_2)$  можна взяти частотний відгук  $(3 \times 3)$ -точкового фільтру із нульовою фазою. У цьому разі можна записати

$$F(\omega_1, \omega_2) = A + B \cos \omega_1 + C \cos \omega_2 + D \cos(\omega_1 - \omega_2) + E \cos(\omega_1 + \omega_2), \quad (10.51)$$

де  $A, B, C, D, E$  – вільні параметри. Оскільки  $T_n[x]$  – поліном від  $x$  степеню  $n$ , то  $H(\omega_1, \omega_2)$  буде поліномом від  $F$  степеню  $N$ . Звідси витікає, що фільтр із частотним відгуком  $H(\omega_1, \omega_2)$  можна представити у вигляді

$$H(\omega_1, \omega_2) = T_2[F(\omega_1, \omega_2)] + 4T_1[F(\omega_1, \omega_2)] + 2T_0[F(\omega_1, \omega_2)] = 2F^2(\omega_1, \omega_2) + 4F(\omega_1, \omega_2) + 1. \quad (10.52)$$

У просторовій області множення на  $F(\omega_1, \omega_2)$  відповідає згортка із функцією  $f(n_1, n_2)$ , яка є обернене перетворення Фур'є функції  $F(\omega_1, \omega_2)$ . Якщо опорна область містить  $(2P+1) \times (2P+1)$  відліків і центр області співпадає із початком координат, то  $N$ -кратна згортка функції  $f(n_1, n_2)$  із самою собою буде мати  $(2NP+1) \times (2NP+1)$ -точкову опорну область. Такою ж буде і опорна область фільтру  $h(n_1, n_2)$ . Звідси витікає, що якщо  $f(n_1, n_2)$  – імпульсний відгук СІХ-фільтру, то й  $h(n_1, n_2)$  буде відповідати СІХ-фільтру.

У якості прикладу розглянемо трансформацію першого порядку (10.51) із значеннями параметрів  $A = -0,5$ ,  $B = C = 0,5$ ,  $D = E = 0,25$ . Якраз таку трансформуючу функцію запропонував Мак-Клеллан.

$$F(\omega_1, \omega_2) = 0,5(-1 + \cos \omega_1 + \cos \omega_2 + \cos \omega_1 \cos \omega_2).$$

$$F(\omega_1, 0) = \cos \omega_1; \quad H(\omega_1, 0) = H(\omega_1).$$

Для такої трансформуючої функції частотний відгук-прототип стає поперечним перерізом двовимірного частотного відгуку. Тому одновимірний фільтр нижніх частот перетворюється у двовимірний фільтр нижніх частот; одновимірний смугастий фільтр перетворюється у двовимірний фільтр із "кільцевою" смугою пропускання.

## 10.4. Вправи

- Нехай є масив даних обсягом  $340 \times 340$  точок. Треба пропустити цей масив через СІХ-фільтр із нульовою фазою протяжністю  $(2N+1) \times (2N+1)$  точок.
  - Скільки треба виконати операцій комплексного множення і який потрібен обсяг пам'яті для реалізації фільтру за допомогою ДПФ при  $N = 50$ ?
  - Скільки потрібно операцій та обсягу пам'яті за умови нульової фази, якщо фільтр реалізується методом прямої згортки?
- Нехай треба синтезувати двовимірний СІХ-фільтр із використанням вікна Кайзера, що обертається, частотний відгук якого складає (наближено)

$$H(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1, 0 \pm 0, 1 & \text{при } \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq (0, 4\pi)^2, \\ 0, 0 \pm 0, 1 & \text{при } \omega_1^2 + \omega_2^2 > (0, 6\pi)^2. \end{cases}$$

Визначити порядок фільтру; визначити значення параметру  $\alpha$  вікна Кайзера; знайти вираз для імпульсного відгуку фільтру.

- Розглянемо синтез фільтру, який апроксимує відгук, наведений на рис. за допомогою трансформації першого порядку вигляду

$$F(\omega_1, \omega_2) = A + B \cos \omega_1 + C \cos \omega_2 + D \cos \omega_1 \cos \omega_2.$$

Знайдіть підходящі значення для  $A, B, C, D$ .

Зобразіть відгук одновимірного фільтра-прототипу, який використовується з цією трансформацією.

4. Нехай треба синтезувати тривимірний сферичний фільтр нижніх частот із нульовою фазою, використовуючи метод трансформації із трансформуючою функцією першого порядку виду

$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = A + B \cos \omega_1 + C \cos \omega_2 + D \cos \omega_3 + E \cos \omega_1 \omega_2 + F \cos \omega_1 \omega_3 + G \cos \omega_2 \omega_3 + H \cos \omega_1 \omega_2 \omega_3.$$

Ця трансформація після підстановки

$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow \cos \omega$$

перетворить частотний відгук  $H(\omega)$  одновимірного фільтра-прототипу із нульовою фазою у тривимірний відгук  $H(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ .

Треба вибрати параметри трансформації так, щоб трансформація задовольняла таким властивостям:

1.  $\omega = \pi$  відображалась на  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\pi, \pi, \pi)$ .

2.

$$\begin{aligned} F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= F(\omega_1, \omega_3, \omega_2) = F(\omega_2, \omega_1, \omega_3) = \\ &= F(\omega_2, \omega_3, \omega_1) = F(\omega_3, \omega_1, \omega_2) = F(\omega_3, \omega_2, \omega_1). \end{aligned}$$

3.  $F(\omega, 0, 0) = \cos \omega$  (це забезпечить рівність відгуків по осям відгуку прототипу).

4.  $F(\omega_1, \omega_2, \pi) = -1$ .

5. Трансформуючою функцією для трансформації другого порядку є частотний відгук  $(5 \times 5)$ -точкового фільтру із нульовою фазою. Нехай ця функція використовується з  $(2N + 1) \times (2N + 1)$ -точковим одновимірним фільтром із нульовою фазою для реалізації двовимірного фільтру.

- Скільки операцій множення потрібно для обчислення значень одного відліку вихідної послідовності?
- Скільки операцій множення потрібно для обчислення одного вихідного відліку, якщо той же частотний відгук реалізовано прямою згортою?
- Який обсяг пам'яті потрібен для реалізації цього фільтра?



---

## Багатовимірні рекурсивні фільтри

---

### 11.1. Різницеві рівняння скінченного порядку

Лінійні системи, інваріантні до зсуву (ЛІС), у загальному випадку реалізуються за допомогою різницевих рівнянь.

Різницеве рівняння – це неявне співвідношення між входом  $x$  та виходом  $y$  лінійної інваріантної до зсуву системи. Воно має вигляд

$$\sum_{k_1} \sum_{k_2} b(k_1, k_2) y(n_1 - k_1, n_2 - k_2) = \sum_{l_1} \sum_{l_2} a(l_1, l_2) x(n_1 - l_1, n_2 - l_2). \quad (11.1)$$

Якщо вихідні відліки ЛІС-систем можна знайти за значеннями вхідних відліків за допомогою скінченної кількості обчислень, то межі підсумовування в (11.1) будуть скінченними, а це означає, що масиви коефіцієнтів  $a$ ,  $b$  мають скінченні розміри. У цьому разі говорять, що різницеве рівняння має скінченний порядок.

Якщо  $b(0, 0) \neq 0$ , можна нормалізувати коефіцієнти  $a$ ,  $b$ , поділивши обидві частини рівняння на  $b(0, 0)$ .

Порядок різницевого рівняння є міра протяжності опорної області масиву  $b(k_1, k_2)$ . Точного визначення порядку, на жаль, не існує, оскільки масив  $b$  може мати будь-яку протяжність. У разі коли  $b(k_1, k_2)$  має прямокутну форму, тобто

$$\sum_{k_1=0}^{N_1} \sum_{k_2=0}^{N_2} b(k_1, k_2) y(n_1 - k_1, n_2 - k_2) = \sum_{l_1} \sum_{l_2} a(l_1, l_2) x(n_1 - l_1, n_2 - l_2), \quad (11.2)$$

можна сказати, що порядок системи дорівнює  $N_1 \times N_2$ .

Важливим частковим випадком є клас різницевих рівнянь порядку “нуль на нуль”, коли масив  $b(k_1, k_2)$  складається із одного відліку у початку координат. Тоді

$$y(n_1, n_2) = \sum_{l_1} \sum_{l_2} a(l_1, l_2) x(n_1 - l_1, n_2 - l_2). \quad (11.3)$$

Вихідний сигнал (масив)  $y(n_1, n_2)$  є згортка вхідного масиву із масивом коефіцієнтів  $a(l_1, l_2)$ , який можна ототожнити із імпульсним відгуком фільтра. Оскільки  $a(l_1, l_2)$  містить тільки скінченну кількість ненульових значень, це різницеве рівняння відповідає СІХ-фільтрам. Різницеві рівняння скінченного порядку, який відрізняється від нуля, відповідають НІХ-фільтрам (фільтрам із нескінченною імпульсною характеристикою).

Різницеві рівняння визначають алгоритми обчислень при реалізації цих систем. Запишемо вираз (11.1) у такому вигляді:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{l_1} \sum_{l_2} a(l_1, l_2) x(n_1 - l_1, n_2 - l_2) - \sum_{k_1} \sum_{k_2} b(k_1, k_2) y(n_1 - k_1, n_2 - k_2). \quad (11.4)$$

В такій формі запису різницеве рівняння описує алгоритм обчислення відліку  $y$  у точці  $(n_1, n_2)$  за умови, що у наявності вже є необхідні вхідні відліки, а також усі відліки  $y$ , що з'являються в правій частині (11.4), або обчислені заздалегідь, або визначені як початкові умови.

Системи, для яких вихідні відліки можна обчислити у такий спосіб, являються такими, що *рекурсивно обчислюються*. Ця властивість залежить від опорної області масиву коефіцієнтів  $b(k_1, k_2)$ , а також від розташування відліків вихідного масиву, які задано як початкові умови, та порядку, за яким треба обчислювати вихідні відліки.

*Вхідна маска*, або вікно скінченої площини, форма якої визначена масивом  $a(l_1, l_2)$ , накладається на вхідну множину в точці  $(n_1, n_2)$ . Відліки  $x$ , які накрито маскою, помножуються на відповідні коефіцієнти  $a(l_1, l_2)$  і відповідні значення підсумовуються. Аналогічно і синхронно *вихідна маска*, що визначається масивом  $b(k_1, k_2)$ , переміщується над вихідним масивом. Усі вихідні відліки, що накрито цією маскою, за винятком одного при  $(n_1, n_2)$ , помножуються на  $b(k_1, k_2)$ , підсумовуються і віднімаються із першої суми. В результаті одержується відлік  $y(n_1, n_2)$ . Це значення заноситься у вихідний масив і обидві маски переміщуються у нове положення. Для обчислення значень конкретного вихідного відліку вихідна маска має накривати тільки *відомі значення вихідних відліків*.

Якщо не існує способу упорядкування, який дозволяє обчислювати вихідні дані за набором початкових умов, система не являється такою, що рекурсивно обчислюється.

Найпростішим прикладом двовимірної вихідної маски, яка дозволяє виконати рекурсивне обчислення вихідних даних, є фільтр першого квадранту, або "каузальний" фільтр. У цьому разі коефіцієнти  $b(k_1, k_2)$  мають ненульові значення в скінченній області  $\{0 \leq k_1 \leq N_1, 0 \leq k_2 \leq N_2\}$ .

## 11.2. Класичні схеми двовимірних НІХ-фільтрів

НІХ-фільтр можна реалізувати у прямій формі. Для фільтра першого квадранту вхідний сигнал  $x(n_1, n_2)$  зв'язаний із вихідним сигналом  $y(n_1, n_2)$  співвідношенням

$$y(n_1, n_2) = \sum_{l_1=0}^{L_1-1} \sum_{l_2=0}^{L_2-1} a(l_1, l_2)x(n_1-l_1, n_2-l_2) - \sum_{k_1=0}^{K_1-1} \sum_{k_2=0}^{K_2-1} b(k_1, k_2)y(n_1-k_1, n_2-k_2). \quad (11.5)$$

Оскільки відгук фільтра на імпульс  $\delta(n_1, n_2)$  за визначенням дорівнює імпульсному відгуку  $h(n_1, n_2)$ , то

$$h(n_1, n_2) = a(n_1, n_2) - \sum_{k_1=0}^{K_1-1} \sum_{k_2=0}^{K_2-1} b(k_1, k_2)y(n_1-k_1, n_2-k_2). \quad (11.6)$$

Виконаємо двовимірне  $z$ -перетворення:

$$H_z(z_1, z_2) = \frac{\sum_{l_1=0}^{L_1-1} \sum_{l_2=0}^{L_2-1} a(l_1, l_2)z_1^{-l_1}z_2^{-l_2}}{\sum_{k_1=0}^{K_1-1} \sum_{k_2=0}^{K_2-1} a(k_1, k_2)z_1^{-k_1}z_2^{-k_2}} = \frac{A_z(z_1, z_2)}{B_z(z_1, z_2)}. \quad (11.7)$$

Можна вважати, що це співвідношення описує каскад з двох фільтрів: СІХ-фільтра з передаточною функцією  $A_z(z_1, z_2)$  та чисто рекурсивного фільтра з передаточною функцією  $1/B_z(z_1, z_2)$ . Нехай розмір вхідної маски дорівнює  $L_1 \times L_2$  точкам, обробка виконується по стовпцям і у кожному стовпці бажано одержати  $N_2$  вихідних точок. У цьому разі треба зберігати  $(L_1 - 1)N_2 + L_2 - 1$  вхідних відліків. Цей обсяг пам'яті якраз є необхідний для розташування вхідної маски, яка відповідає СІХ-ступеню означеного каскаду. Друга ступінь каскаду являє собою НІХ-фільтр із сталим чисельником. Якщо

його вихідна маска містить  $K_1 \times K_2$  точок та має отвір у правому верхньому куті, то при фільтрації стовпець за стовпцем знадобиться  $(K_1 - 1)N_2 + K_2 - 1$  чарунок пам'яті. Тож сумарний обсяг потрібної пам'яті складе  $(L_1 + K_1 - 2)N_2 + L_2 + K_2 - 2$  відліків.

Оскільки ми розглядаємо  $H_Z(z_1, z_2)$  як передаточну функцію каскаду з двох ЛПС-фільтрів, можна змінити порядок слідування фільтрів. Позначимо вихід НІХ-фільтру каскаду через  $w(n_1, n_2)$ :

$$w(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) - \sum_{k_1=0}^{K_1-1} \sum_{k_2=0}^{K_2-1} b(k_1, k_2)w(n_1 - k_1, n_2 - k_2). \quad (11.8)$$

Далі, вихідний сигнал  $y(n_1, n_2)$  каскаду формується шляхом фільтрації  $w(n_1, n_2)$  СІХ-фільтром з передаточною функцією  $A_z(z_1, z_2)$ :

$$y(n_1, n_2) = \sum_{l_1=0}^{L_1-1} \sum_{l_2=0}^{L_2-1} a(l_1, l_2)w(n_1 - l_1, n_2 - l_2). \quad (11.9)$$

Ця форма реалізації зветься *другою прямою формою*. При цьому в пам'яті має знаходитись тільки та частка масиву  $w(n_1, n_2)$ , яка необхідна для обчислення наступних значень  $w(n_1, n_2)$  та  $y(n_1, n_2)$  відповідно до формул (11.8), (11.9).

### 11.3. Ітераційні методи реалізації двовимірних НІХ-фільтрів

Розглянемо інший підхід до вирішення проблеми реалізації двовимірного цифрового фільтру із раціональною передаточною функцією. В багатьох прикладаннях, наприклад, в обробці зображень, у наявності є усі відліки сигналу одночасно, тобто увесь сигнал зберігається в пам'яті ЕОМ і може сповна використовуватись у процесі обчислень. (Під час обробки одновимірних сигналів реального часу в обчисленнях можуть бути задіяні тільки ті значення відліків, які стосуються минулого). У такому разі з метою формування нової ітерації вихідного сигналу слушно обробляти вихідний сигнал разом із вхідним. Така ітераційна реалізація використовує відому концепцію оберненого зв'язку для послідовного формування все кращих і кращих апроксимацій потрібного вихідного сигналу.

#### 11.3.1. Базова ітераційна схема

Однією з причин використання принципу ітерації є бажання одержати НІХ-фільтри із імпульсними відгуками, які не можна реалізувати у рекурсивній формі. У одновимірному випадку передаточну функцію НІХ-фільтру можна розкласти на множники так, що в ній виділяються каузальна та антикаузальна частини, які можна реалізувати окремо за допомогою різницевих рівнянь. Відсутність у випадку двох і більше вимірювань основної теореми алгебри про розкладання на множники утруднює використання такого підходу. Ітераційна реалізація надає іншу можливість і, крім того, надає засіб урахування межових умов.

Опишемо ітераційну реалізацію за допомогою частотного відгуку НІХ-фільтру  $H(\omega_1, \omega_2)$ , а не його передаточної функції  $H_z(z_1, z_2)$ . Взагалі  $H(\omega_1, \omega_2)$  можна представити як

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{A(\omega_1, \omega_2)}{B(\omega_1, \omega_2)} = \frac{\sum_{l_1} \sum_{l_2} a(l_1, l_2) e^{-i\omega_1 l_1 - i\omega_2 l_2}}{\sum_{k_1} \sum_{k_2} b(k_1, k_2) e^{-i\omega_1 k_1 - i\omega_2 k_2}}, \quad (11.10)$$

де  $a(l_1, l_2)$  та  $b(k_1, k_2)$  є послідовності скінченної протяжності. Як завжди, будемо вважати, що відношення нормалізовано ( $b(0, 0) = 1$ ).

Визначимо новий тригонометричний поліном  $C(\omega_1, \omega_2)$ :

$$C(\omega_1, \omega_2) = 1 - B(\omega_1, \omega_2). \quad (11.11)$$

Тоді можна записати

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{A(\omega_1, \omega_2)}{1 - C(\omega_1, \omega_2)}. \quad (11.12)$$

Якщо вважати, що  $X(\omega_1, \omega_2)$  – спектр вхідного сигналу  $x(n_1, n_2)$ ,  $Y(\omega_1, \omega_2)$  – спектр вихідного сигналу  $y(n_1, n_2)$ , і що  $|X(\omega_1, \omega_2)|$  та  $|Y(\omega_1, \omega_2)|$  обмежені, то

$$Y(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1, \omega_2)X(\omega_1, \omega_2) = \frac{A(\omega_1, \omega_2)X(\omega_1, \omega_2)}{1 - C(\omega_1, \omega_2)}. \quad (11.13)$$

Цей вираз можна записати у еквівалентній формі

$$Y(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2)X(\omega_1, \omega_2) + C(\omega_1, \omega_2)Y(\omega_1, \omega_2). \quad (11.14)$$

У просторовій області цей вираз набуває вигляду

$$y(n_1, n_2) = a(n_1, n_2) * x(n_1, n_2) + c(n_1, n_2) * y(n_1, n_2). \quad (11.15)$$

Вирази (11.14), (11.15) визначають неявне співвідношення між вхідним та вихідним сигналами та коефіцієнтами НІХ-фільтру. Припустимо, що у нас є у наявності гарна оцінка вихідного сигналу. Якщо підставити її у праву частину виразу (11.15), можна одержати кращу оцінку вихідного сигналу. Нехай  $y^{(i-1)}(n_1, n_2)$  є  $(i-1)$ -е наближення до істинного вихідного сигналу  $y(n_1, n_2)$ .

$$y^{(i)}(n_1, n_2) = a(n_1, n_2) * x(n_1, n_2) + c(n_1, n_2) * y^{(i-1)}(n_1, n_2). \quad (11.16)$$

У частотній області цьому співвідношенню відповідає

$$Y^{(i)}(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2)X(\omega_1, \omega_2) + C(\omega_1, \omega_2)Y^{(i-1)}(\omega_1, \omega_2). \quad (11.17)$$

Ця послідовність наближень  $\{y^{(i)}(n_1, n_2)\}$  має збігатись до  $y(n_1, n_2)$ . Для перевірки збіжності розглянемо  $(Y^{-1}(\omega_1, \omega_2) = 0)$   $Y^{(0)}(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2)X(\omega_1, \omega_2)$ .

$$Y^{(1)}(\omega_1, \omega_2) = [A(\omega_1, \omega_2) + C(\omega_1, \omega_2)A(\omega_1, \omega_2)]X(\omega_1, \omega_2).$$

На  $l$ -й ітерації маємо

$$Y^{(l)}(\omega_1, \omega_2) = \left[ A(\omega_1, \omega_2) \sum_{i=0}^l C^i(\omega_1, \omega_2) \right] X(\omega_1, \omega_2).$$

Оскільки

$$\sum_{i=0}^l C^i(\omega_1, \omega_2) = \frac{1 - C^{(l+1)}(\omega_1, \omega_2)}{1 - C(\omega_1, \omega_2)},$$

то, якщо

$$|C(\omega_1, \omega_2)| < 1, \quad (11.18)$$

то

$$\lim_{l \rightarrow \infty} Y^{(l)}(\omega_1, \omega_2) = \frac{A(\omega_1, \omega_2)X(\omega_1, \omega_2)}{1 - C(\omega_1, \omega_2)} = Y(\omega_1, \omega_2).$$

Оскільки  $a(n_1, n_2)$  та  $b(n_1, n_2)$  – масиви скінченної протяжності, обчислення, що виконуються на кожній ітерації, є операції СІХ-фільтрації. Таким чином, раціональний частотний відгук  $H(\omega_1, \omega_2)$  двовимірного НІХ-фільтра можна отримати за допомогою нескінченного числа операцій СІХ-фільтрації.

Умова збіжності ітерацій (11.18) є занадто сильне обмеження, не всі стійкі двовимірні НІХ-фільтри задовольняють це обмеження.

Виконання нескінченної кількості ітерацій потребує нескінченного обсягу обчислень. На практиці обмежуються скінченною кількістю ітерацій, внаслідок чого сигнал  $y^{(l)}(n_1, n_2)$  виявляється лише апроксимацією потрібного сигналу  $y(n_1, n_2)$ . Розглянемо величину похибки апроксимації. Фур'є-спектри сигналів  $y^{(l)}(n_1, n_2)$  та  $y(n_1, n_2)$  зв'язано формулою

$$Y^{(l)}(\omega_1, \omega_2) = Y(\omega_1, \omega_2)[1 - C^{(l+1)}(\omega_1, \omega_2)]. \quad (11.19)$$

Оскільки частка комплексних функцій  $Y^{(l)}(\omega_1, \omega_2)/Y(\omega_1, \omega_2)$  має (в ідеалі) дорівнювати одиниці, то у якості міри похибки внаслідок обмеження обчислень  $l$  ітераціями, можна вибрати спектральну похибку

$$E(\omega_1, \omega_2) = \left| \frac{Y^{(l)}(\omega_1, \omega_2)}{Y(\omega_1, \omega_2)} - 1 \right| = |C(\omega_1, \omega_2)|^{l+1}. \quad (11.20)$$

Якщо задати тепер допустимий рівень спектральної похибки у деякій смузі частот  $\Omega$

$$E(\omega_1, \omega_2) < \varepsilon, \quad (\omega_1, \omega_2) \in \Omega, \quad (11.21)$$

то за (11.20) можна визначити необхідну кількість ітерацій для досягнення заданої похибки.

$$H^{(l)}(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2) \sum_{i=0}^l C^{(i)}(\omega_1, \omega_2), \quad (11.22)$$

що відповідає частотному відгуку СІХ-фільтра, який апроксимує частотний відгук  $H(\omega_1, \omega_2)$ .

### 11.3.2. Узагальнення ітераційної схеми

Якщо стійкий НІХ-фільтр не задовольняє умову збіжності, такий фільтр не можна реалізувати за допомогою ітераційної процедури. Розглянемо деякі узагальнення, які дозволяють виконувати ітераційну реалізацію будь-якого стійкого НІХ-фільтра. Для спрощення викладок розглянемо частковий випадок, коли  $B(\omega_1, \omega_2)$  є чисто дійсна і строго додатна функція.

Потрібний частотний відгук НІХ-фільтру можна записати так:

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{\lambda A(\omega_1, \omega_2)}{\lambda B(\omega_1, \omega_2)}, \quad (11.23)$$

де  $\lambda$  – невизначений параметр. Визначимо тепер

$$C(\omega_1, \omega_2) = 1 - \lambda B(\omega_1, \omega_2). \quad (11.24)$$

Як і вище, побудуємо вираз для частотного відгуку

$$Y^{(l)}(\omega_1, \omega_2) = \lambda A(\omega_1, \omega_2) X(\omega_1, \omega_2) + C(\omega_1, \omega_2) Y^{(l-1)}(\omega_1, \omega_2). \quad (11.25)$$

Умова збіжності залишилась тією ж, але тепер функція  $C(\omega_1, \omega_2)$  містить вільний параметр  $\lambda$ . Оскільки функція  $B(\omega_1, \omega_2) > 0$ , то для збіжності має виконуватись умова  $C(\omega_1, \omega_2) > -1$ . Цього можна досягти, якщо вибрати сталу  $\lambda$  в інтервалі

$$0 < \lambda < \frac{2}{\max_{(\omega_1, \omega_2)} B(\omega_1, \omega_2)}. \quad (11.26)$$

Випадок, коли функція  $B(\omega_1, \omega_2)$  дійсна та додатна, являє практичну цінність, оскільки він містить у собі деякі симетричні двовимірні НІХ-фільтри, які використовують у обробці зображень.

У більш загальному випадку  $B(\omega_1, \omega_2)$  являє собою комплексну тригонометричну поліноміальну функцію, яка для стійкого двовимірного НІХ-фільтра задовольняє умову

$$B(\omega_1, \omega_2) \neq 0. \quad (11.27)$$

Для цього загального випадку відгук  $H(\omega_1, \omega_2)$  можна записати у вигляді

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{A(\omega_1, \omega_2)}{B(\omega_1, \omega_2)} = \frac{\lambda B^*(\omega_1, \omega_2) A(\omega_1, \omega_2)}{\lambda |B(\omega_1, \omega_2)|^2}. \quad (11.28)$$

Тут у дільнику міститься дійсна і додатна функція  $|B(\omega_1, \omega_2)|^2$ , що надає можливість повторити викладки, що наведено вище. Знову визначимо функцію  $C(\omega_1, \omega_2)$  таким чином:

$$C(\omega_1, \omega_2) = 1 - \lambda |B(\omega_1, \omega_2)|^2. \quad (11.29)$$

Отримуємо новий ітераційний вираз

$$Y^{(l)}(\omega_1, \omega_2) = \lambda B^*(\omega_1, \omega_2) A(\omega_1, \omega_2) X(\omega_1, \omega_2) + C(\omega_1, \omega_2) Y^{(l-1)}(\omega_1, \omega_2). \quad (11.30)$$

Як і раніше, функція  $C(\omega_1, \omega_2)$  має задовольняти умову збіжності  $|C(\omega_1, \omega_2)| < 1$ . Це забезпечується вибором  $\lambda$  в інтервалі

$$0 < \lambda < \frac{2}{\max_{(\omega_1, \omega_2)} |B(\omega_1, \omega_2)|^2}. \quad (11.31)$$

Ітераційний вираз (11.30) дозволяє реалізувати будь-який стійкий двовимірний раціональний частотний відгук. Крім того, йому притаманні ще деякі цікаві властивості. Наприклад, фаза спектру збігається до потрібного значення вже після першої ітерації.

$$\varphi[Y(\omega_1, \omega_2)] = \varphi[Y^{(i)}(\omega_1, \omega_2)], \quad i \geq 0. \quad (11.32)$$

Цей факт пояснюється тим, що фаза  $B^*(\omega_1, \omega_2)$  співпадає із фазою  $1/B(\omega_1, \omega_2)$ . Тому

$$\begin{aligned} \varphi[Y^{(0)}(\omega_1, \omega_2)] &= \varphi[A(\omega_1, \omega_2)] + \varphi[B^*(\omega_1, \omega_2)] + \varphi[X(\omega_1, \omega_2)] = \\ &= \varphi[A(\omega_1, \omega_2)] - \varphi[B(\omega_1, \omega_2)] + \varphi[X(\omega_1, \omega_2)] = \varphi[Y(\omega_1, \omega_2) \end{aligned}$$

Наступні ітерації уточнюють лише *амплітуду* спектра.

Ітераційний вираз (11.30) дозволяє реалізувати більш широкий клас частотних відгуків. Але він потребує більшого обсягу обчислень. Вхідний сигнал  $x(n_1, n_2)$  має підпорядковуватись фільтрації послідовно з'єднаними фільтрами  $\lambda B^*(\omega_1, \omega_2)$  та  $A(\omega_1, \omega_2)$ , а не тільки  $A(\omega_1, \omega_2)$ . СІХ-фільтр, що відповідає функції  $C(\omega_1, \omega_2)$ , також виявляється більш складним; він потребує вдвічі більше обчислень порівняно із прямою згорткою.

#### 11.4. Синтез в просторовій області

Розглянемо питання синтезу двовимірних НІХ-фільтрів, що ґрунтуються на мінімізації функціоналу похибки у просторовій області. У загальному випадку мета полягає у визначенні коефіцієнтів  $a(n_1, n_2)$  та  $b(n_1, n_2)$  двовимірного рекурсивного фільтру так, щоб відгук фільтру  $y(n_1, n_2)$  на визначений вхідний сигнал  $x(n_1, n_2)$  виявився гарною апроксимацією деякого визначеного потрібного вихідного сигналу  $d(n_1, n_2)$ . Зазвичай у якості визначеного вхідного сигналу береться дельта-функція  $x(n_1, n_2) = \delta(n_1, n_2)$ , так що  $d(n_1, n_2)$  є потрібний імпульсний відгук.

При апроксимації у просторовій області найчастіше використовується середньоквадратична норма похибки.

$$e_2 = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} [y(n_1, n_2) - d(n_1, n_2)]^2. \quad (11.33)$$

Ця похибка співпадає із середньоквадратичною похибкою у частотній області

$$e_2 = E_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [Y(\omega_1, \omega_2) - D(\omega_1, \omega_2)]^2 d\omega_1 d\omega_2. \quad (11.34)$$

Важливість цього співвідношення полягає у тому, що залежність функції  $y$  від параметрів фільтру  $a(n_1, n_2)$  та  $b(n_1, n_2)$  легше описати у частотній області

$$Y(\omega_1, \omega_2) = \frac{A(\omega_1, \omega_2)X(\omega_1, \omega_2)}{B(\omega_1, \omega_2)}, \quad (11.35)$$

де

$$A(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} a(n_1, n_2) e^{-i\omega_1 n_1 - i\omega_2 n_2}, \quad (11.36)$$

$$B(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} b(n_1, n_2) e^{-i\omega_1 n_1 - i\omega_2 n_2}, \quad (11.37)$$

У більшості алгоритмів синтезу передбачається, що опорною областю для функцій є перший квадрант.

Теоретичний мінімум похибки  $e_2$  можна знайти, прирівнявши до нуля частинні похідні по параметрам  $\{a(n_1, n_2), b(n_1, n_2)\}$ . Якщо виразити  $y(n_1, n_2)$  за допомогою рекурсивного співвідношення

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) = & \sum_{p_1=0}^{N_1-1} \sum_{p_2=0}^{N_2-1} a(p_1, p_2) x(n_1 - p_1, n_2 - p_2) - \\ & - \sum_{q_1=0}^{M_1-1} \sum_{q_2=0}^{M_2-1} b(q_1, q_2) y(n_1 - q_1, n_2 - q_2) \quad (b(0, 0) = 1), \end{aligned} \quad (11.38)$$

то можна одержати рекурсивні співвідношення для похідних

$$\frac{\partial y(n_1, n_2)}{\partial a(p_1, p_2)} = x(n_1 - p_1, n_2 - p_2) - \sum_{m_1=0}^{M_1-1} \sum_{m_2=0}^{M_2-1} b(m_1, m_2) \frac{\partial y(n_1 - m_1, n_2 - m_2)}{\partial a(p_1, p_2)}, \quad (11.39)$$

$$\frac{\partial y(n_1, n_2)}{\partial b(q_1, q_2)} = y(n_1 - q_1, n_2 - q_2) - \sum_{m_1=0}^{M_1-1} \sum_{m_2=0}^{M_2-1} b(m_1, m_2) \frac{\partial y(n_1 - m_1, n_2 - m_2)}{\partial b(q_1, q_2)}, \quad (11.40)$$

Ці рекурсивні обчислення починаються із нульовими початковими умовами. Крім того, можна показати, що частинні похідні зв'язані співвідношеннями

$$\frac{\partial y(n_1, n_2)}{\partial a(p_1, p_2)} = \frac{\partial y(n_1 - p_1, n_2 - p_2)}{\partial a(0, 0)}, \quad (11.41)$$

та

$$\frac{\partial y(n_1, n_2)}{\partial b(q_1, q_2)} = \frac{\partial y(n_1 - q_1 + 1, n_2 - q_2)}{\partial b(1, 0)} = \frac{\partial y(n_1 - q_1, n_2 - q_2 + 1)}{\partial b(0, 1)}. \quad (11.42)$$

Аналітичний розв'язок рівнянь для відшукування значень коефіцієнтів  $\{a(p_1, p_2), b(q_1, q_2)\}$ , які мінімізують  $e_2$ , у загальному випадку неможливий. Тому розглянемо алгоритмічні методи мінімізації  $e_2$ .

### 11.4.1. Метод Шенкса

Один із перших методів проектування двовимірних НІХ-фільтрів запропоновано Шенксом та ін. [1]. З метою запобігання труднощів, пов'язаних із нелінійністю, автори мінімізували модифіковану функцію похибки.

$$E'(\omega_1, \omega_2) = E(\omega_1, \omega_2)B(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2)X(\omega_1, \omega_2) - B(\omega_1, \omega_2)D(\omega_1, \omega_2), \quad (11.43)$$

що відповідає сигналу похибки

$$e'(n_1, n_2) = a(n_1, n_2) * x(n_1, n_2) - b(n_1, n_2) * d(n_1, n_2). \quad (11.44)$$

Цей сигнал є лінійним відносно коефіцієнтів фільтра  $\{a(p_1, p_2), b(q_1, q_2)\}$ . Сумарна похибка

$$e'_2 = \sum_{n_1} \sum_{n_2} [e'(n_1, n_2)]^2. \quad (11.45)$$

Похибка мінімізується таким чином. У якості вхідного сигналу вибирається  $\delta(n_1, n_2)$ . Потім, оскільки коефіцієнти  $a(n_1, n_2)$  дорівнюють нулю поза прямокутником  $0 \leq n_1 < N_1, 0 \leq n_2 < N_2$ , то вираз (11.44) приймає простий вигляд

$$e'(n_1, n_2) = - \sum_{q_1=0}^{M_1-1} \sum_{q_2=0}^{M_2-1} b(q_1, q_2)d(n_1 - q_1, n_2 - q_2) \quad (n_1 \geq N_1 \text{ або } n_2 \geq N_2). \quad (11.46)$$

Якщо тепер продиференціювати  $e'_2$  по коефіцієнтам дільника  $b(n_1, n_2)$ , то отримаємо таку систему лінійних рівнянь.

$$\sum_{m_1=0}^{M_1-1} \sum_{m_2=0}^{M_2-1} b(m_1, m_2)r(m_1, m_2; q_1, q_2) = 0, \quad \text{для } 0 \leq m_i < M_i, \text{ але } (m_1, m_2) \neq (0, 0), \quad (11.47)$$

$$r(m_1, m_2; q_1, q_2) = \sum_{(n_1, n_2) \in R} d(n_1 - m_1, n_2 - m_2)d(n_1 - q_1, n_2 - q_2). \quad (11.48)$$

Систему рівнянь можна записати у нормальному вигляді

$$\sum_{m_1=0}^{M_1-1} \sum_{m_2=0}^{M_2-1} b(m_1, m_2)r(m_1, m_2; q_1, q_2) = -r(0, 0; q_1, q_2), \quad \text{для } 0 \leq q_i < M_i, \text{ але } (q_1, q_2) \neq (0, 0), \quad (11.49)$$

Розв'язок цієї системи дає коефіцієнти дільника  $\{b(n_1, n_2)\}$ . Щоб знайти коефіцієнти чисельника  $\{a(n_1, n_2)\}$ , можна скористатись тим, що

$$a(n_1, n_2) * x(n_1, n_2) = b(n_1, n_2) * y(n_1, n_2), \quad (11.50)$$

а також тим, що  $x(n_1, n_2) = \delta(n_1, n_2)$  та  $y(n_1, n_2) \approx d(n_1, n_2)$ . Тоді маємо

$$a(n_1, n_2) \approx b(n_1, n_2) * d(n_1, n_2). \quad (11.51)$$

Перевагою методу Шенкса є те, що для відшукування коефіцієнтів прямої форми реалізації треба лише розв'язати систему лінійних рівнянь. З іншого боку, цей спосіб мінімізує не істинне значення різниці  $y(n_1, n_2) - d(n_1, n_2)$ , а його модифіковане середньоквадратичне значення. Більш того, НІХ-фільтри, що синтезовано у такий спосіб, можуть виявитись нестійкими.



### 11.4.2. Ітеративний метод синтезу із попередньою фільтрацією

Інший метод синтезу БІХ-фільтрів за критерієм мінімуму середньоквадратичної похибки запропоновано Шоу та Мерсеро [ ]. Він є розвинення методу ідентифікації одновимірних систем і полягає у тому, що норма похибки записується у формі системи лінійних рівнянь, які розв'язуються на кожній ітерації відносно параметрів фільтра  $\{a(n_1, n_2), b(n_1, n_2)\}$ .

Позначимо

$$G(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{B(\omega_1, \omega_2)}. \quad (11.52)$$

У просторовій області

$$e_2 = \sum_{n_1} \sum_{n_2} e^2(n_1, n_2), \quad (11.53)$$

причому

$$e(n_1, n_2) = g(n_1, n_2) * [a(n_1, n_2) * x(n_1, n_2) - d(n_1, n_2) * b(n_1, n_2)]. \quad (11.54)$$

За ітераційною оптимізацією для обчислення послідовності  $g(n_1, n_2)$  на поточній ітерації можна використати  $b(n_1, n_2)$  із попередньої ітерації. Після цього можна розв'язати систему лінійних рівнянь і одержати нові значення  $\{a(n_1, n_2), b(n_1, n_2)\}$ . Прирівняємо до нуля частинні похідні виразу (11.53). Отримаємо

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} e(n_1, n_2) \frac{\partial e(n_1, n_2)}{\partial a(p_1, p_2)} = 0, \quad (11.55)$$

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} e(n_1, n_2) \frac{\partial e(n_1, n_2)}{\partial b(q_1, q_2)} = 0, \quad (11.56)$$

Неважко перевірити, що частинні похідні виразу (11.54), які використовуються в (11.55), мають вигляд

$$\frac{\partial e(n_1, n_2)}{\partial a(p_1, p_2)} = g(n_1 - p_1, n_2 - p_2) * x(n_1 - p_1, n_2 - p_2), \quad (11.57)$$

$$\frac{\partial e(n_1, n_2)}{\partial b(q_1, q_2)} = -g(n_1 - q_1, n_2 - q_2) * d(n_1 - q_1, n_2 - q_2), \quad (11.58)$$

послідовність  $g(n_1, n_2)$  не змінюється під час поточної ітерації. Вона відшукується з  $b^{(i-1)}(n_1, n_2)$  із використанням рекурсивного виразу

$$g^{(i)}(n_1, n_2) = \delta(n_1, n_2) - \sum_{n_1=0}^{M_1-1} \sum_{n_2=0}^{M_2-1} b^{(i-1)}(n_1, n_2) g^{(i)}(n_1 - q_1, n_2 - q_2). \quad (11.59)$$

Істинні частинні похідні від  $e(n_1, n_2)$  по  $b(n_1, n_2)$  мають вигляд

$$\frac{\partial e(n_1, n_2)}{\partial b(n_1, n_2)} = v(n_1 - q_1, n_2 - q_2), \quad (11.60)$$

де  $v(n_1, n_2)$  – результат оберненого перетворення Фур'є функції

$$V(\omega_1, \omega_2) = \frac{-A(\omega_1, \omega_2)X(\omega_1, \omega_2)}{B^2(\omega_1, \omega_2)}.$$

Після того, як ітеративні обчислення, що ґрунтуються на виразах (11.55), (11.56), (11.57), (11.58) збіглися, можна використати результуючі параметри фільтра у якості початкового наближення для повторних ітеративних обчислень із використанням виразу (11.60). Рівняння, що розв'язуються на кожній ітерації, будуть знову лінійними.

Ітеративний метод із попередньою фільтрацією на практиці збігається значно швидше, ніж більш загальні методи оптимізації, наприклад, метод Флетчера - Пауела [ ].

### 11.5. Синтез у частотній області

Методи синтезу у частотній області є популярні з двох причин. По перше, апроксимуючу функцію  $Y(\omega_1, \omega_2)$  легко записати у вигляді функції від параметрів фільтру, що дозволяє легко обчислювати будь-які похідні. По друге, часто трапляється, що задано не всі характеристики потрібного відгуку. Наприклад, нас може цікавити тільки отримання необхідної амплітуди відгуку, а його фазові характеристики несуттєві. Такому частковому опису легше задовольнитися у частотній області.

Загальні методи мінімізації, які розглядалися раніше, можна використати і для мінімізації похибки в частотній області. Зазвичай підсумовування похибки виконується за скінченною кількістю відліків в частотній області замість інтегрування по квадрату  $-\pi \leq \omega_1, \omega_2 < \pi$ . Далі, зазвичай відліки розподілено рівномірно, тому для обчислення  $Y(\omega_1, \omega_2)$  можна використати двовимірне БПФ. Для випадку середньоквадратичної похибки задача зводиться до мінімізації функціоналу похибки апроксимації

$$J_a = \sum_k W(\omega_{1k}, \omega_{2k}) \left[ \frac{A(\omega_{1k}, \omega_{2k})}{B(\omega_{1k}, \omega_{2k})} - D(\omega_{1k}, \omega_{2k}) \right]^2. \quad (11.61)$$

де  $W(\omega_1, \omega_2)$  – вагова функція;  $(\omega_{1k}, \omega_{2k})$  – значення частот, для яких має бути виконана мінімізація, й як і раніше,  $X(\omega_1, \omega_2) = 1$ .

#### 11.5.1. Алгоритм синтезу по амплітуді та квадрату амплітуди

Функціонал (11.61) є міра відхилення потрібної функції відгуку  $D(\omega_1, \omega_2)$  від фактичного відгуку фільтру  $Y(\omega_1, \omega_2)$ . Якщо нам треба забезпечити тільки відповідність амплітуди (або квадрату амплітуди) відгуку фільтру характеристикам потрібного дійсного відгуку  $D(\omega_1, \omega_2)$ , то нас не цікавить фазова характеристика, або характеристика групової затримки, або ми бажано використати реалізацію із нульовою фазою.

У загальному випадку можна визначити деяку функцію від  $Y(\omega_1, \omega_2)$ , яка має апроксимувати потрібний відгук  $D(\omega_1, \omega_2)$ . Тоді задача оптимізації зводиться до мінімізації деякого функціоналу різниці  $f(Y) - D$ . Мірою похибки буде

$$J_a = \sum_k W(\omega_{1k}, \omega_{2k}) \left[ f \left( \frac{A(\omega_{1k}, \omega_{2k})}{B(\omega_{1k}, \omega_{2k})} \right) - D(\omega_{1k}, \omega_{2k}) \right]^2. \quad (11.62)$$

Тепер для відшукування коефіцієнтів фільтру  $\{a(n_1, n_2), b(n_1, n_2)\}$ , що мінімізують функціонал, можна скористатися загальними алгоритмами оптимізації, такими як алгоритми Флетчера–Пауела або Левенберга–Марквардта [ ], або методами лінеаризації. Але фільтр, що синтезовано у такий спосіб, може виявитись нестійким.

#### 11.5.2. Синтез НІХ-фільтра із нульовою фазою в частотній області

Часто (особливо при обробці зображень) потрібна фільтрація сигналу фільтром із симетричним імпульсним відгуком. Такі фільтри мають частотний відгук із дійсними значеннями, або із нульовою фазою.

Частотний відгук двовимірного НІХ-фільтра із нульовою фазою можна записати у вигляді

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{A(\omega_1, \omega_2)}{B(\omega_1, \omega_2)} = \frac{\sum_{n_1=-N_1}^{N_1} \sum_{n_2=-N_2}^{N_2} a(n_1, n_2) e^{-i\omega_1 n_1 - i\omega_2 n_2}}{\sum_{m_1=-M_1}^{M_1} \sum_{m_2=-M_2}^{M_2} b(m_1, m_2) e^{-i\omega_1 m_1 - i\omega_2 m_2}} \quad (11.63)$$

Оскільки  $a(n_1, n_2) = a(-n_1, -n_2)$ ,  $b(n_1, n_2) = a(-n_1, -n_2)$ , функції  $A(\omega_1, \omega_2)$  та  $B(\omega_1, \omega_2)$

можна записати у вигляді

$$A(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} a'(n_1, n_2) \cos(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2), \quad (11.64)$$

$$B(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m_1} \sum_{m_2} b'(m_1, m_2) \cos(\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2), \quad (11.65)$$

де

$$a'(0, 0) = a(0, 0), \quad a'(n_1, n_2) = 2a(n_1, n_2) \text{ для } (n_1, n_2) \neq 0;$$

$$b'(0, 0) = b(0, 0) = 1, \quad b'(m_1, m_2) = 2b(m_1, m_2) \text{ для } (m_1, m_2) \neq 0.$$

Синтез двовимірних НІХ-фільтрів із нульовою фазою можна виконати за допомогою перетворення Мак-Клеллана, що застосовується до поліномів у чисельнику та дільнику одновимірного НІХ-фільтра із нульовою фазою.

Нехай, наприклад,

$$H(\omega) = \frac{A(\omega)}{B(\omega)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} a'(n) \cos(\omega n)}{\sum_{m=0}^{M-1} b'(m) \cos(\omega m)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} a'(n) T_n[\cos \omega]}{\sum_{m=0}^{M-1} b'(m) T_m[\cos \omega]}, \quad (11.66)$$

де  $T_n[x]$  –  $n$ -й поліном Чебишова. Тоді можна, замінюючи  $\cos \omega$  двовимірним тригонометричним поліномом малого порядку із нульовою фазою  $F(\omega_1, \omega_2)$  отримати двовимірний частотний відгук

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} a'(n) T_n[F(\omega_1, \omega_2)]}{\sum_{m=0}^{M-1} b'(m) T_m[F(\omega_1, \omega_2)]} = \frac{A(\omega_1, \omega_2)}{B(\omega_1, \omega_2)}. \quad (11.67)$$

Наприклад, у якості відгуку симетричного одновимірного фільтра можна вибрати квадрат амплітудної характеристики одновимірного цифрового фільтра Баттерворта нижніх частот. Цей частотний відгук описується функцією

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{\operatorname{tg}(\omega/2)}{\operatorname{tg}(\omega_c/2)} \right]^{2N}}, \quad (11.68)$$

де  $\omega_c$  – частота зрізу. Використовуючи тригонометричні тотожності, можна виразити  $H(\omega)$  як функцію  $\cos \omega$ :

$$H(\omega) = \frac{(1 + \cos \omega)^N}{(1 + \cos \omega)^N + \alpha(1 - \cos \omega)^N}, \quad (11.69)$$

де

$$\alpha = \operatorname{ctg}^{2N}(\omega_c/2) = \left( \frac{1 + \cos \omega_c}{1 - \cos \omega_c} \right)^N.$$

Тепер можна підставити замість  $\cos \omega$  двовимірну функцію

$$F(\omega_1, \omega_2) = 0,5[-1 + \cos \omega_1 + \cos \omega_2 + \cos \omega_1 \cos \omega_2] \quad (11.70)$$

і отримати частотний відгук майже кругового симетричного НІХ-фільтра нижніх частот.

На кожному кроці ітераційної реалізації необхідно фільтрувати сигнал фільтром із частотним відгуком вигляду

$$C(\omega_1, \omega_2) = 1 - \lambda B(\omega_1, \omega_2). \quad (11.71)$$

### 11.6. Вправи

1. Нехай є каскадний двовимірний НІХ-фільтр з передаточною функцією

$$H_z(z_1, z_2) = \frac{\alpha}{B_z(z_1, z_2)C_z(z_1, z_2)},$$

де  $\alpha$  – дійсне число. Передбачається, що коефіцієнти  $\{b(n_1, n_2), c(n_1, n_2)\}$  також дійсні. Складіть систему з двох різницевих рівнянь, яку можна використати для відшукування вихідного сигналу каскаду з двох фільтрів із результуючою передаточною функцією  $H_z(z_1, z_2)$  із вхідним сигналом  $x(n_1, n_2)$ .

2. Нехай  $H_z(z_1, z_2) = 1/(1 - 0,25z_1^{-1} - 0,5z_2^{-1})$ . Знайдіть відповідну ітераційну реалізацію у просторі сигналу.

а) Знайдіть множину  $c(n_1, n_2)$ ;

б) Нехай  $y_i(n_1, n_2)$  означає вихідний сигнал після  $i$ -ї ітерації та  $y_0(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) = \delta(n_1, n_2)$ . Знайдіть  $y_1(n_1, n_2)$  та  $y_3(n_1, n_2)$ .

---

## Бібліографія

---

- [1] *Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов. – М.: Мир, 1976.– 755 с.
- [2] *Ахмед Н., Рао К.Р.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов.– М.: Связь, 1980.– 248 с.
- [3] *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. – М.: Мир, 1974–Вып.1.– 406 с.– Вып.2.– 198 с.
- [4] *Голд Б., Рэйдер Ч.* Цифровая обработка сигналов.– М.: Сов. радио, 1973.– 368 с.
- [5] *Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н.* Цифровая обработка сигналов: Справочник.– М.: Радио и связь, 1985.– 312 с.
- [6] *Даджион Д., Мерсеро Р.* Цифровая обработка многомерных сигналов.– М.: Мир, 1988.– 488 с.
- [7] *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования.– М.: Наука, 1971.– 288 с.
- [8] *Дженкинс Г., Ваттс Д.* Спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1971.–Вып.1.– 316 с., Вып.2.– 287 с.
- [9] *Зеленський К.Х., Игнатенко В.М., Коц О.П.* Комп'ютерні методи прикладної математики. – Київ: Академперіодика, 2002.– 480 с.
- [10] *Зеленский К.Х., Игнатенко В.Н., Коц А.П.* Компьютерные методы прикладной математики. Реализация. – К.: Український літопис, Т2, 2001.– 208 с.
- [11] *Лем Г.* Аналоговые и цифровые фильтры. Расчет и применение. – М.: Мир, 1982.– 592 с.
- [12] *Оппенгейм А.В., Шафер Р.В.* Цифровая обработка сигналов. – М.: Связь, 1979.– 416 с.
- [13] *Под ред. Э. Оппенгейма* Применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1980.– 550 с.
- [14] *Под ред. Темеша Г., Митры С.* Современная теория фильтров и их проектирование. – М.: Мир, 1977.– 560 с.
- [15] *Рабинер Л., Голд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978.– 848 с.