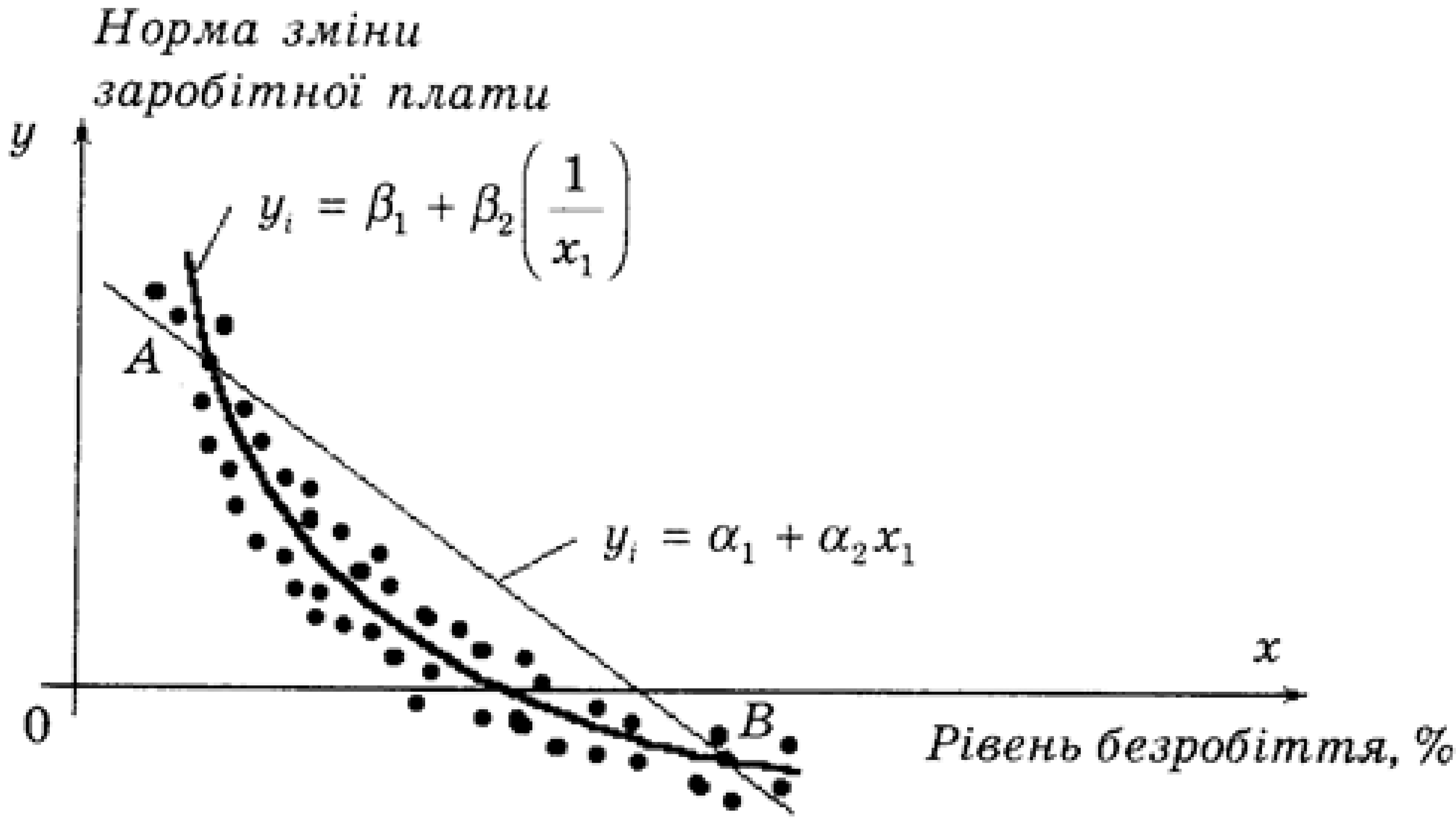
Тема 1.4.
НЕЛІНІЙНІ ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ

План

1. Загальні поняття і визначення.
2. Нелінійні економетричні моделі, які зводяться до лінійних.
3. Прогнозування та економіко-математичний аналіз на основі нелінійних економетричних моделей.


Норма зміни
заробітної плати
y
$y_i = \beta_1 + \beta_2\left(\frac{1}{x_1}\right)$
A
$y_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_1$
x
0
B
Рівень безробіття, %

Квазілінійна модель у загальному вигляді

$$y = \beta_0 + \beta_1 f(x_1) + \beta_2 f(x_2) + \cdots \beta_m (x_m) + \varepsilon \quad (1)$$

Приклади

- Модель попиту

$$Q = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 P^2$$

де **Q** – попит
P - ціна
$\boldsymbol{\beta_0}$, $\boldsymbol{\beta_1}$ і $\boldsymbol{\beta_2}$ - параметри моделі

- Модель, яка описує залежність між об'ємом надходжень до бюджету і податковою ставкою на основі кривої Лаффера:

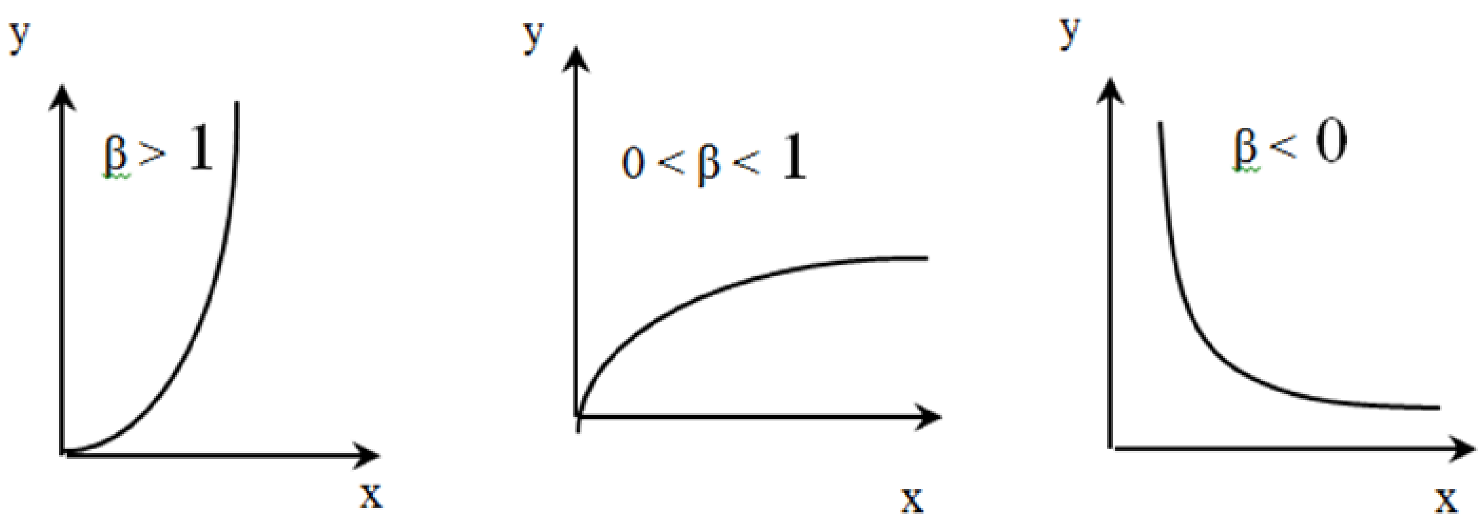
$$Y = a \cdot e^{b(x-c)^2}$$

де **Y** – податкові надходження
x – податкова ставка
a, **b** і **c** – параметри моделі

СТЕПЕНЕВА МОДЕЛЬ

$$y = \alpha \cdot x^{\beta} \qquad (2)$$

де **α, β** – параметри моделі



а) прискорене зростання

б) уповільнене зростання

в) спад

Рис. 1. Графіки степеневої функції

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ СТЕПЕНЕВОЇ ФУНКЦІЇ

Крок 1. Логарифмування лівої і правої частини виразу (2):

$$\ln y = \ln \alpha + \beta \cdot \ln x \tag{3}$$

Крок 2. Вводиться заміна змінних:

$$y_1 = \ln y,\ \beta_0 = \ln \alpha,\ \beta_1 = \beta,\ x_1 = \ln x \tag{4}$$

і нелінійна функція (2) зводиться до лінійної форми:

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 \tag{5}$$

МУЛЬТИПЛІКАТИВНА ФУНКЦІЯ

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} \tag{6}$$

<u>Зауваження 1.</u> Степеневу модель називають **log-linear** моделлю, оскільки в процесі лінеаризації після логарифмування функція регресії має як логарифм залежної змінної так і незалежної.

<u>Зауваження 2.</u> Слід зазначити, що параметр β у степеневій моделі характеризує еластичність змінної Y за змінною X, тобто цей параметр фактично дорівнює коефіцієнту еластичності Y за X. Тому часто степеневу модель ще називають **моделлю постійної еластичності**, що вказує на можливі напрямки її застосування.

<u>Зауваження 3.</u> Для отримання якісних оцінок (BLUE–оцінок) параметрів лінеаризованої моделі стохастична складова лінійної форма повинна задовольняти усім припущенням класичного лінійного регресійного аналізу.

$$\ln y = \ln \alpha + \beta \cdot \ln x + \varepsilon \tag{7}$$

До вихідної нелінійної форми (2) стохастична складова повинна входити як мультиплікативна складова наступним чином:

$$y = \alpha \cdot x^{\beta} \cdot e^{\varepsilon} \tag{8}$$

ПОКАЗНИКОВА (ЕКСПОНЕНЦІЙНА) ФУНКЦІЯ

Основна

$$y = \alpha \cdot \beta^{x} \tag{9}$$

Еквівалентні

$$y = \alpha \cdot e^{\beta x}$$

$$y = \alpha(1 - r)^{x}$$

$$y = e^{\beta_0 + \beta_1 x}$$

де $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta_0}$, $\boldsymbol{\beta_1}$, $\mathbf{r}$, – параметри моделей

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ПОКАЗНИКОВОЇ ФУНКЦІЇ

$$\left.\begin{aligned} &y = \alpha \cdot \beta^x \rightarrow \ln y = \ln\alpha + \ln\beta x \\ &y = \alpha \cdot e^{\beta x} \rightarrow \ln y = \ln\alpha + \beta \cdot x \\ &y = \alpha(1-r)^x \rightarrow \ln y = \ln\alpha + \ln(1-r)\cdot x \\ &y = e^{\beta_0 + \beta_1 x} \rightarrow \ln y = \beta_0 + \beta_1 x \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 \qquad (10)$$

<u>Зауваження 4</u>. Показникова модель називають **log-lin** моделлю, оскільки в процесі лінеаризації після логарифмування вона має тільки логарифм залежної змінної у лівій частині лінійної форми, а незалежна змінна залишається без логарифмічних перетворень.

<u>Зауваження 5</u>. Для отримання якісних оцінок (BLUE – оцінок) параметрів лінеаризованої моделі стохастична складова лінійної форми повинна задовольняти усім припущенням класичного лінійного регресійного аналізу.

$$\ln y = \ln \alpha + \ln \beta \cdot x + \varepsilon \qquad (11)$$

До вихідної нелінійної форми (9) стохастична складова повинна входити як мультиплікативна складова наступним чином:

$$y = \alpha \cdot \beta^{x} \cdot e^{\varepsilon} \qquad (12)$$

ЗВОРОТНА МОДЕЛЬ

Зворотна функція регресії

$$y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x} \tag{13}$$

Зворотна модель

$$y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x} + \varepsilon \tag{14}$$

де $\boldsymbol{\beta_0}$ і $\boldsymbol{\beta_1}$ – параметри моделі

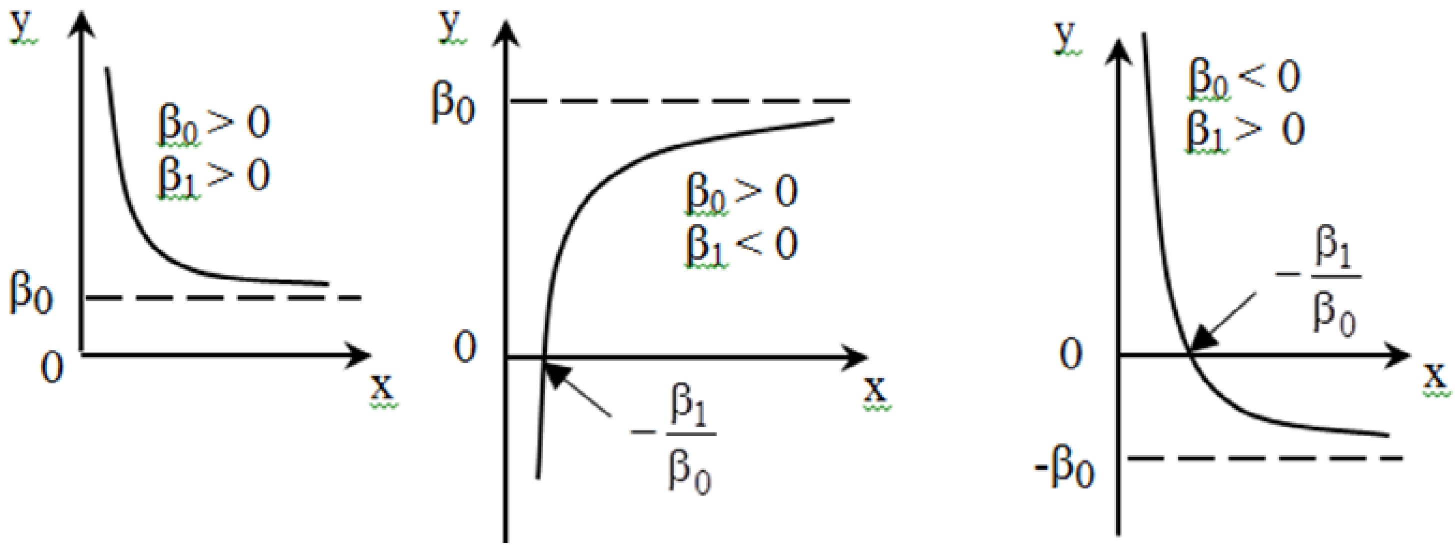


Рис. 2. Графіки зворотної функції

При $x \to \infty$ залежна змінна моделі **y** прямує до свого граничного значення $\boldsymbol{\beta_0}$, тобто функція (13) має асимптоту $\boldsymbol{\beta_0}$.

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ЗВОРОТНОЇ МОДЕЛІ

Крок 1. Здійснюється простою заміною змінної

$$z = \frac{1}{x}$$

і зворотна модель (14) зводиться до лінійної форми

$$y = \beta_0 + \beta_1 z + \varepsilon \qquad (15)$$

КВАДРАТИЧНА МОДЕЛЬ

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon \qquad (16)$$

де $\boldsymbol{\beta_0}$, $\boldsymbol{\beta_1}$ і $\boldsymbol{\beta_2}$ – параметри моделі.

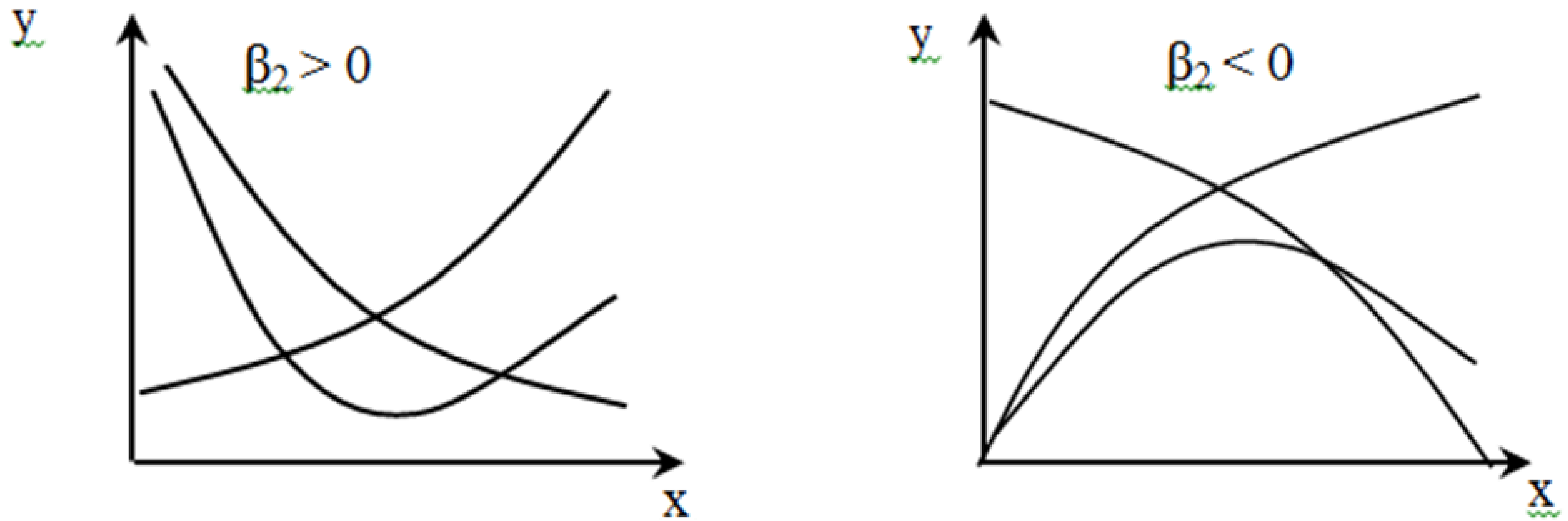


Рис. 3. Графіки квадратичної функції

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ КВАДРАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

<u>Крок 1.</u> Здійснюється простою заміною змінної

$$z_1 = x$$

$$z_2 = x^2$$

і квадратична модель (16) зводиться до багатофакторної лінійної форми

$$y = \beta_0 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \varepsilon \qquad (17)$$

ЕКОНОМІКО - МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ НА ОСНОВІ НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

- показники середньої ефективності впливу пояснюючих змінних на залежну

$$A_j = \frac{\bar{\hat{y}}}{\bar{x}_j}, (j = \overline{1, m}) \tag{18}$$

- показники граничної ефективності впливу пояснюючих змінних на залежну

$$M_j = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_j}, (j = \overline{1, m}) \tag{19}$$

- показники відносного впливу пояснюючих змінних на залежну – коефіцієнти еластичності.

$$\bar{E}_{y/x_j} = \frac{M_j}{A_j}, \left(j = \overline{1, m}\right) \tag{20}$$

ОСНОВНІ ПОКАЗНИКИ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Тип моделі	Загальний вигляд вибіркової лінійної форми	M	E
log - linear	$\ln y = b_0 + b_1 \cdot \ln x$	$b_1 \cdot \left(\frac{\bar{\hat{y}}}{\bar{x}} \right)$	b_1
log – lin	$\ln y = b_0 + b_1 x$	$b_1 \cdot \bar{\hat{y}}$	$b_1 \cdot \bar{x}$
Зворотна	$y = b_0 + b_1 \frac{1}{x}$	$- b_1 \cdot \left(\frac{1}{\bar{x}^2} \right)$	$- b_1 \cdot \left(\frac{1}{\bar{x}\,\bar{\hat{y}}} \right)$
Квадратична	$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$	$b_1 + 2 b_2 \bar{x}$	$\frac{b_1 \bar{x} + 2 b_2 \bar{x}^2}{\bar{\hat{y}}}$