Тема 1.5.
УЗАГАЛЬНЕНІ ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ

План

1. Мультиколінеарність

1.1. Визначення мультиколінеарності, її природа, причини виникнення і наслідки

1.2. Тестування наявності мультиколінеарності.

1.3. Шляхи і засоби усунення мультиколінеарності.

2. Гетероскедастичність

2.1. Визначення гетероскедастичності, її природа та наслідки.

2.2. Тестування наявності гетероскедастичності.

2.3. Оцінювання параметрів моделі у разі гетероскедастичності.

3. Автокореляція залишків

3.1. Визначення автокореляції залишків, її природа, причини виникнення і наслідки.

3.2. Тестування наявності автокореляції залишків.

3.3 Оцінювання параметрів економетричних моделей у разі наявності автокореляції залишків.

Тема 5. Узагальнені економетричні моделі Лабораторна робота 4. Мультиколінеарність Самостійна робота 1. Автокореляція залишків			
Результати навчання: **РН 1, РН 2, РН 3, РН 4, РН 5, РН 6**	Кількість годин: лекції – 2 лаб. – 4 сам. – 8	Література: [5, стор. 78–134] [7, стор. 82–102]	Лінк на MOODLE: https://goo.su/3T5j https://goo.su/3T5M https://goo.su/3t5n
Опис теми	*Поняття узагальненої економетричної моделі. Основні випадки порушення положень(припущень) класичного лінійного регресійного аналізу – мультиколінеарність, гетероскедастичність і автокореляція залишків. Мультиколінеарність, її природа і причини виникнення. Наслідки мультиколінеарності. Тестування наявності мультиколінеарності. Шляхи і засоби усунення мультиколінеарності. Оцінювання параметрів економетричної моделі у випадку мультиколінеарності. Гетероскедастичність залишків, її природа і причини виникнення. Наслідки гетероскедастичності. Тестування наявності гетероскедастичності. Оцінювання параметрів економетричної моделі при наявності гетероскедастичності. Верифікація узагальненої економетричної моделі у випадку гетероскедастичності. Прогнозування у випадку гетероскедастичності. Автокореляція залишків, її природа і причини виникнення. Види автокореляції залишків. Наслідки автокореляції залишків. Тестування автокореляції залишків. Оцінювання параметрів економетричної моделі при наявності автокореляції залишків. Прогнозування та аналіз у випадку автокореляції залишків*		

- **Припущення 1.** *Математичне сподівання стохастичної складової моделі д…*
  нулю для всіх спостережень

Тема 3
ЛІНІЙНІ ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ

❖**Припущення 1.** ***Математичне сподівання стохастичної складової моделі дорівнює нулю для всіх спостережень***

$$M(\varepsilon_i) = 0, \; i = 1,2,\ldots,n$$

❖**Припущення 2.** ***Гомоскедастичність***

$$\operatorname{var}(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 = \text{const}, \; i = 1,2,\ldots,n$$

❖**Припущення 3.** ***Відсутність автокореляції залишків***

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \;\; \text{для} \;\; i \neq j$$

❖**Припущення 4.** ***Незалежні (пояснюючи) змінні не пов'язані із стохастичною складовою моделі***

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, x_{ji}) = 0 \;\; \text{для} \;\; i = 1,2,\ldots,n; \; j = 1,2,\ldots,m$$

❖**Припущення 5.** ***Матриця спостережень X не є стохастичною***

❖**Припущення 6.** ***Відсутність мультиколіарності***

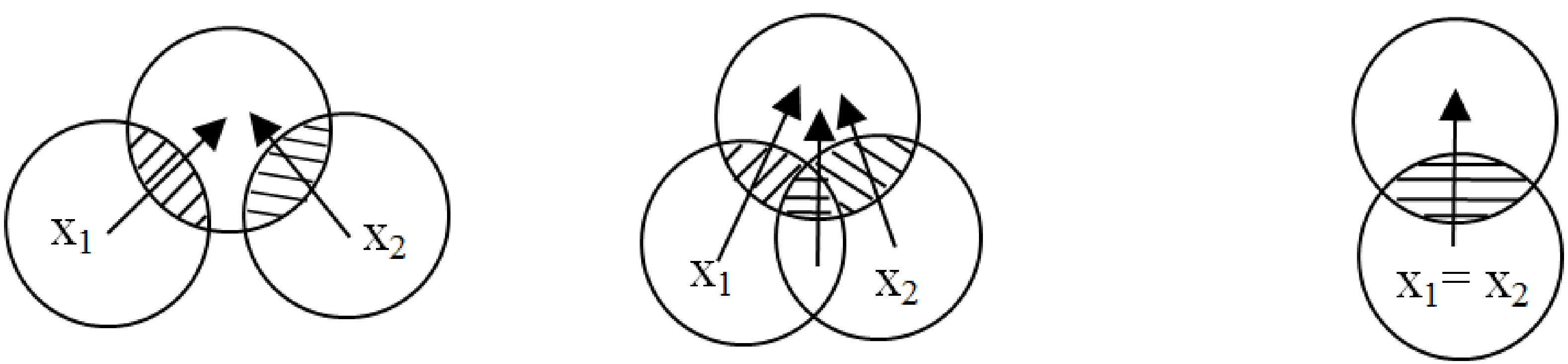
❖**Припущення 7.** ***Випадкова величина $\varepsilon_i, i = 1,2,\ldots,n$ має нормальний закон розподілу з математичним сподіванням 0 і сталою дисперсією***

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Наприклад, мультиколінеарність може мати місце для такої економетричної моделі:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + e,$$

де y – ціна акції,
x_1 – дивіденди на акцію,
x_2 – зароблений прибуток на акцію,
оскільки в даному випадку дивіденди та зароблений прибуток мають високий рівень кореляції.



а) мультиколінеарність відсутня

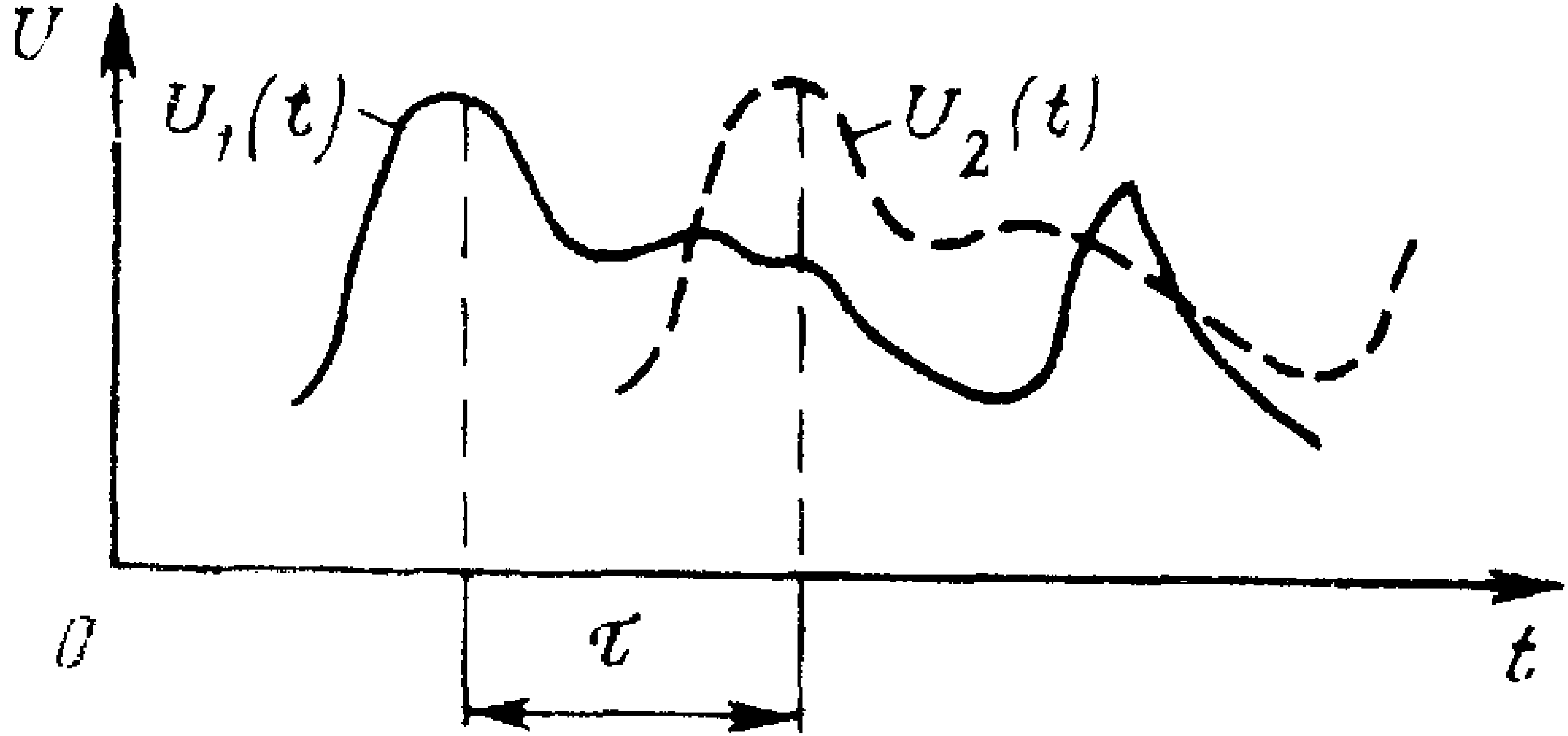
б) неповна мультиколінеарність

в) повна мультиколінеарність

Матриця незалежних змінних

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

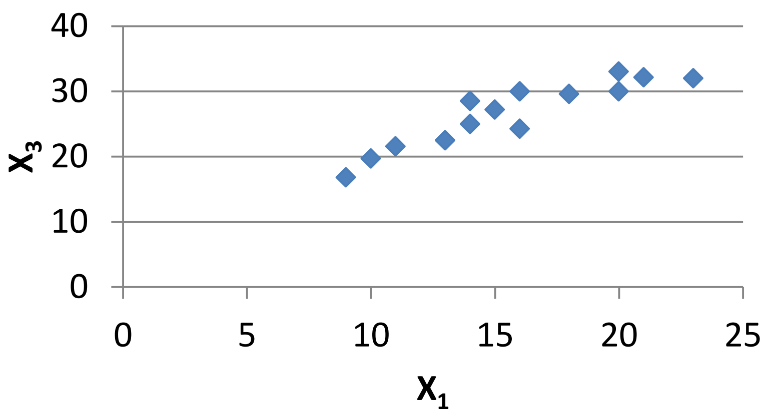
У випадку повної мультиколінеарності $\det(X'X) = 0$



U
$U_1(t)$
$U_2(t)$
0
τ
t

$$\hat{y} = -4{,}90 + 0{,}63x_1 + 1{,}84x_2 - 0{,}14x_3$$

$$t_{13} = 2{,}98$$



	A	B	C	D	E
1		реальне споживання населення (в млн. грошових одиниць)	купівлі та оплати товарів і послуг (в млн. грошових одиниць)	заощаджень (в % від загального доходу)	заробітної плати (в млн. грошових одиниць)
2	i	y	x_1	x_2	x_3
3	1	14	9	7,9	16,78
4	2	16	10	9,04	19,68
5	3	15	11	9,95	21,56
6	4	14	13	9,22	22,46
7	5	20	13	11,12	22,5
8	6	19	15	13,47	27,2
9	7	22	14	13,46	28,52
10	8	27	16	12,57	30
11	9	29	18	12,4	29,56
12	10	29	16	13,2	24,23
13	11	30	14	13,5	25
14	12	30	20	14,52	30
15	13	31	21	14	32,15
16	14	28	23	15	32
17	15	31	20	14,5	33

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,876325483
R-квадрат	0,767946352
Нормированный R-квадрат	0,704658994
Стандартная ошибка	3,655224283
Наблюдения	15

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	3	486,3660232	162,1220077	12,13427723	0,000819898
Остаток	11	146,9673102	13,36066456		
Итого	14	633,3333333			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*Нижние 95,0%*	*Верхние 95,0%*
Y-пересечение	-4,900917947	6,377407001	-0,768481288	0,458382689	-18,93749612	9,135660222	-18,93749612	9,135660222
Переменная X 1	0,626463847	0,613597053	1,020969451	0,329198577	-0,724054161	1,976981855	-0,724054161	1,976981855
Переменная X 2	1,835315226	0,994333822	1,845773708	0,091988693	-0,35319876	4,023829212	-0,35319876	4,023829212
Переменная X 3	-0,139050809	0,576708145	-0,241111229	0,81390414	-1,408376877	1,130275259	-1,408376877	1,130275259

Початковий варіант:

$$\hat{y} = -4,90 + 0,63x_1 + 1,84x_2 - 0,14x_3$$

Скорегований варіант:

$$\hat{y} = -5,59 + 0,53x_1 + 1,72x_2$$

	реальне споживання населення (в млн. грошових одиниць)	купівлі та оплати товарів і послуг (в млн. грошових одиниць)	заощаджень (в % від загального доходу)
i	y	x_1	x_2
1	14	9	7,9
2	16	10	9,04
3	15	11	9,95
4	14	13	9,22
5	20	13	11,12
6	19	15	13,47
7	22	14	13,46
8	27	16	12,57
9	29	18	12,4
10	29	16	13,2
11	30	14	13,5
12	30	20	14,52
13	31	21	14
14	28	23	15
15	31	20	14,5

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,875625466
R-квадрат	0,766719957
Нормированный R-квадрат	0,72783995
Стандартная ошибка	3,508846289
Наблюдения	15

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	2	485,5893059	242,794653	19,72015984	0,000161163
Остаток	12	147,7440274	12,31200228		
Итого	14	633,3333333			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*Нижние 95,0%*	*Верхние 95,0%*
Y-пересечение	-5,587558337	5,477734084	-1,020049212	0,327830235	-17,52251564	6,347398963	-17,52251564	6,347398963
Переменная X 1	0,530052679	0,446777671	1,186390262	0,258426413	-0,443392244	1,503497602	-0,443392244	1,503497602
Переменная X 2	1,715045422	0,825718572	2,077033847	0,059936998	-0,084040797	3,514131641	-0,084040797	3,514131641

Початковий варіант (наявна мультиколінеарність):

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,876325483
R-квадрат	0,767946352
Нормированный R-квадрат	0,704658994
Стандартная ошибка	3,655224283
Наблюдения	15

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	3	486,3660232	162,1220077	12,13427723	0,000819898
Остаток	11	146,9673102	13,36066456		
Итого	14	633,3333333			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*Нижние 95,0%*	*Верхние 95,0%*
Y-пересечение	-4,900917947	6,377407001	-0,768481288	0,458382689	-18,93749612	9,135660222	-18,93749612	9,135660222
Переменная X 1	0,626463847	0,613597053	1,020969451	0,329198577	-0,724054161	1,976981855	-0,724054161	1,976981855
Переменная X 2	1,835315226	0,994333822	1,845773708	0,091988693	-0,35319876	4,023829212	-0,35319876	4,023829212
Переменная X 3	-0,139050809	0,576708145	-0,241111229	0,81390414	-1,408376877	1,130275259	-1,408376877	1,130275259

Скорегований варіант (відсутня мультиколінеарність):

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,875625466
R-квадрат	0,766719957
Нормированный R-квадрат	0,72783995
Стандартная ошибка	3,508846289
Наблюдения	15

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	2	485,5893059	242,794653	19,72015984	0,000161163
Остаток	12	147,7440274	12,31200228		
Итого	14	633,3333333			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*Нижние 95,0%*	*Верхние 95,0%*
Y-пересечение	-5,587558337	5,477734084	-1,020049212	0,327830235	-17,52251564	6,347398963	-17,52251564	6,347398963
Переменная X 1	0,530052679	0,446777671	1,186390262	0,258426413	-0,443392244	1,503497602	-0,443392244	1,503497602
Переменная X 2	1,715045422	0,825718572	2,077033847	0,059936998	-0,084040797	3,514131641	-0,084040797	3,514131641

Кореляційна матриця

$$r = \begin{pmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & \cdots & r_{x_1x_m} \\ r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} & \cdots & r_{x_2x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{x_mx_1} & r_{x_mx_2} & \cdots & r_{x_mx_m} \end{pmatrix}$$

	Столбец 1	*Столбец 2*	*Столбец 3*
Столбец 1	1	0,864	0,920
Столбец 2	0,864	1	0,894
Столбец 3	0,920	0,894	1

$$det(X'X) \to 0$$

Тест Фаррара-Глобера

1. Стандартизація (нормалізація) незалежних змінних

2. Визначення кореляційної матриці нормалізованих змінних

3. Визначення статистичного критерію χ^2

4. Визначення матриці похибок

5. Обчислення F-критеріїв

6. Визначення часткових коефіцієнтів кореляції

7. Обчислення t-критеріїв

ШЛЯХИ І ЗАСОБИ УСУНЕННЯ МУЛЬТИКОЛІНЕАРНОСТІ

1. Вилучення змінної (або змінних) з моделі
2. Зміна аналітичної форми економетричної моделі
3. Збільшення спостережень
4. Перетворення статистичних даних
5. Використання додаткової первинної інформації

Приклад: Нехай маємо наступну модель :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon \qquad (10)$$

де y - споживання; x_1 – дохід; x_2 – багатство.
Відомо, що доход і багатство є висококолінеарними факторами. Припустимо, додатково відомо, що зв'язок між ними є таким, що $\beta_2 = 0{,}2\beta_1$, тоді модель (10) можна переписати у вигляді:

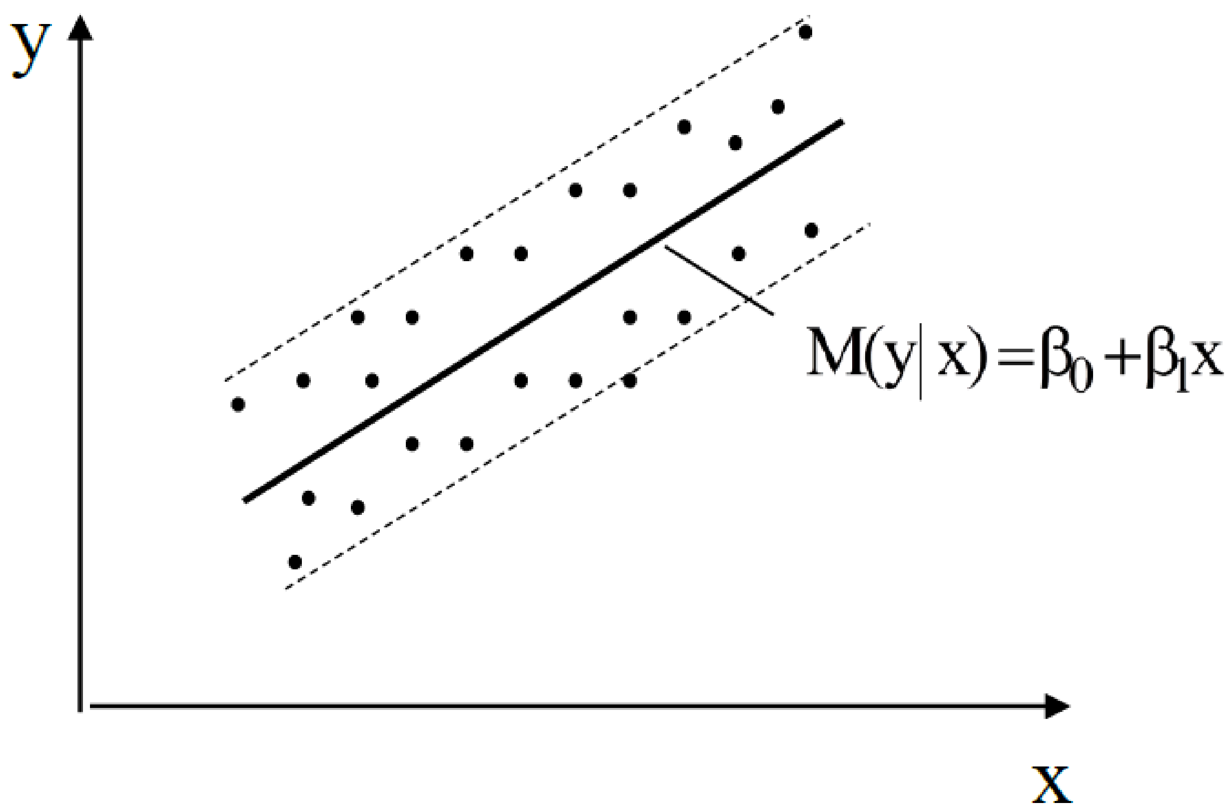
$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + 0{,}2\beta_1 x_2 + \varepsilon = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon, \qquad (11)$$

де $x = x_1 + 0{,}2x_2$. Звідси ми можемо знайти оцінку параметра β_1, а потім і β_2, виходячи з наведеної вище апріорної залежності між цими параметрами.
Як отримується апріорна інформація? Як правило, вона спирається на економічну теорію.

Якщо ж жодний з розглянутих способів не дає змоги позбутися мультиколінеарності, для оцінювання параметрів моделі застосовують такі методи, **як метод головних компонентів, факторний аналіз, гребенева регресія**

ГОМОСКЕДАСТИЧНІСТЬ

$$\sigma_{\varepsilon}^{2} \neq f\left(x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{mi}\right), \left(i = \overline{1,n}\right) \qquad (1)$$



ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНІСТЬ

$$\sigma_{\varepsilon}^{2} = f\left(x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{mi}\right), \ \left(i = \overline{1, n}\right) \qquad (4)$$

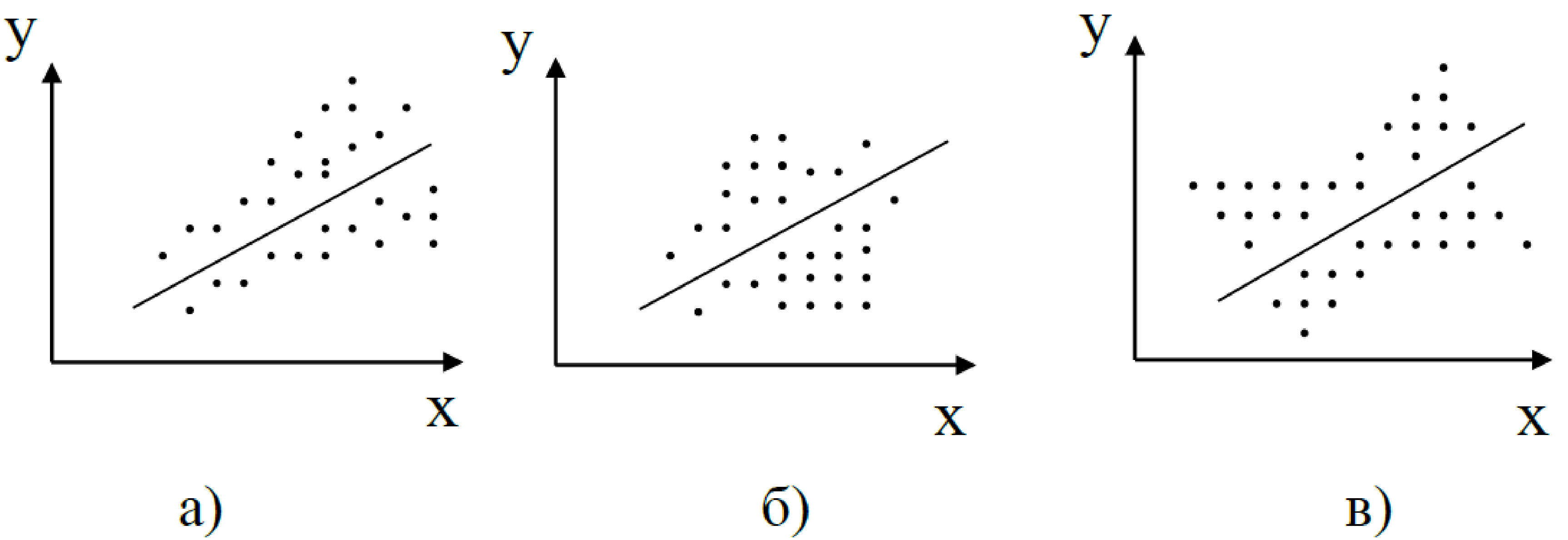


Рис. 2. Випадки гетероскедастичності

$$\operatorname{var}(\varepsilon_i) = \sigma_{\varepsilon}^{2} \neq \text{const}, \quad \left(i = \overline{1, n}\right)$$

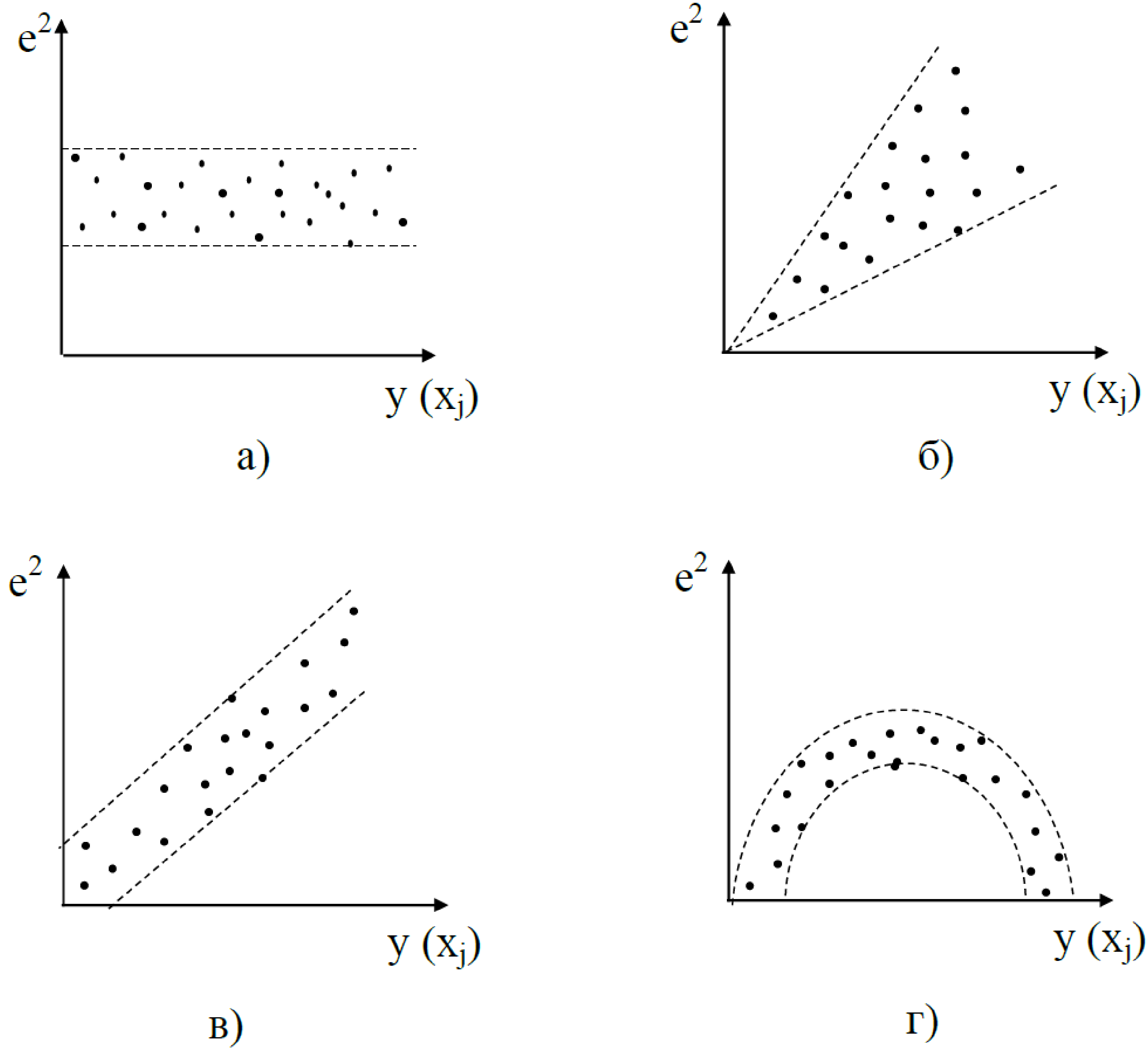
Дисперсійно–коваріаційна матриця оцінок параметрів моделі

$$\mathrm{var-cov}(b) = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^2_{b_0} & \mathrm{cov}(b_0, b_1) & \cdots & \mathrm{cov}(b_0, b_m) \\ \mathrm{cov}(b_1, b_0) & \hat{\sigma}^2_{b_1} & \cdots & \mathrm{cov}(b_1, b_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{cov}(b_m, b_0) & \mathrm{cov}(b_m, b_1) & \cdots & \hat{\sigma}^2_{b_m} \end{pmatrix} \qquad (13)$$

$$\mathrm{var-cov}(b) = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon} \left(X'X\right)^{-1} \qquad (14)$$

ТЕСТУВАННЯ НАЯВНОСТІ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНОСТІ

1) тест на основі графічного аналізу залишків
2) тест на основі М-критерію
3) тест Глейсера
4) тест на основі коефіцієнта рангової кореляції Спірмена
5) параметричний тест Голдфелда–Квондта
6) непараметричний тест Голдфелда–Квондта



e^2
$y\ (x_j)$
а)
e^2
$y\ (x_j)$
б)
e^2
$y\ (x_j)$
в)
e^2
$y\ (x_j)$
г)

Гіпотеза 1

$$\sigma^2_{\varepsilon,i} = \sigma^2 \cdot x_{ji}, (i = \overline{1, n})$$

Гіпотеза 2

$$\sigma^2_{\varepsilon,i} = \sigma^2 \cdot x^2_{ji}, (i = \overline{1, n})$$

Параметричний тест Голдфелда-Квондта

1. **Виконується впорядкування (ранжування) спостережень у статистичній вибірці в порядку зростання (або спаду) значень пояснюючої змінної Xj**
2. **З усіх спостережень впорядкованої вибірки відкидається *С* спостережень, які містяться у центрі вибірки**
3. **Для кожної підвибірки на основі 1МНК будується окрема регресійна модель**
4. **Для кожної підвибірки визначається сума квадратів залишків**
5. **Обчислюється F–статистика**

УМНК (метод Ейткена)

$$B = (X'S^{-1}X)^{-1}\,X'S^{-1}Y$$

$$S = \begin{pmatrix} {}^{1}\!/_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {}^{1}\!/_{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & {}^{1}\!/_{\lambda_n} \end{pmatrix}, \quad \dim P = n \times n$$

Гіпотеза 1 $$\sigma^2_{\varepsilon,i} = \sigma^2 \cdot x_{ji}, (i = \overline{1,n})$$

Гіпотеза 2 $$\sigma^2_{\varepsilon,i} = \sigma^2 \cdot x^2_{ji}, (i = \overline{1,n})$$

Гіпотеза 1. Дисперсія залишків пропорційна до зміни пояснюючої змінної $\mathbf{x_j}$ - $\sigma^2_{\varepsilon,i} = \sigma^2 \cdot x_{ji}, (i = \overline{1,n})$. Тоді величини $\boldsymbol{\lambda_i}$ визначається як:

$$\lambda_i = \frac{1}{x_{ij}}. \qquad (13)$$

Гіпотеза 2. Дисперсія залишків пропорційна до зміни квадрату пояснюючої змінної $\mathbf{x_j}$ – $\sigma^2_{\varepsilon,i} = \sigma^2 \cdot x^2_{ji}, (i = \overline{1,n})$. Величини $\boldsymbol{\lambda_i}$ визначається для цієї гіпотези як:

$$\lambda_i = \frac{1}{x^2_{ji}}. \qquad (14)$$

$$\operatorname{var-cov}(b) = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\,(X'S^{-1}X)^{-1}$$

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{e'S^{-1}e}{n-k}$$

$$\hat{y}_{pr} = X'_{pr}\,B + \lambda_{n}\,e_{n}$$

$$M(y_{pr}) = \hat{y}_{pr} \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\varepsilon}\sqrt{X'_{pr}\left(X'S^{-1}X\right)^{-1}X_{pr}}$$

$$y_{pr} = \hat{y}_{pr} \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\varepsilon}\sqrt{1 + X'_{pr}\left(X'S^{-1}X\right)^{-1}X_{pr}}$$

1 МНК

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k}$$

$$e_i = y_i - \hat{y}_i \,, \quad \left(i = \overline{1, n}\right)$$

	A	B	C
1	Рік	Заощадження (млн. грошових одиниць)	Доход на душу населення (млн. грошових одиниць)
2	1	2,3	15
3	2	2,2	15
4	3	2,08	16
5	4	2,2	17
6	5	2,1	17
7	6	2,32	18
8	7	2,45	19
9	8	2,5	20
10	9	2,2	20
11	10	2,5	22
12	11	3,1	64
13	12	2,5	68
14	13	2,82	72
15	14	3,04	80
16	15	2,7	85
17	16	3,94	90
18	17	3,1	95
19	18	3,99	100

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,8500
R-квадрат	0,7225
Нормированный R-квадрат	0,7051
Стандартная ошибка	$\boxed{0,3121}$
Наблюдения	18

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	1	4,057193367	4,057193367	41,65537941	7,96267E-06
Остаток	16	1,55838441	0,097399026		
Итого	17	5,615577778			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*Нижние 95,0%*	*Верхние 95,0%*
Y-пересечение	1,99891	0,12723	15,71133	0,00000	1,72920	2,26862	1,72920	2,26862
Переменная X 1	0,01448	0,00224	6,45410	0,00001	0,00972	0,01923	0,00972	0,01923

УМНК

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{\mathrm{e}'\mathrm{S}^{-1}\mathrm{e}}{\mathrm{n}-\mathrm{k}}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{18} \end{pmatrix}, \; dim\, S^{-1} = 18 \times 18$$

$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{\mathrm{e}'\mathrm{S}^{-1}\mathrm{e}}{\mathrm{n}-\mathrm{k}}$	0,001598

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon(1MHK)}^{2} = 0{,}3121$$

1 МНК

$$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon(1MHK)} = 0{,}3121$$

$\hat{y}_{pr} = X'_{pr} \cdot B$	=	3,48	
$M(y_{pr}) = \hat{y}_{pr} \pm \hat{\sigma}_\varepsilon \cdot t_{\alpha/2} \sqrt{X'_{pr}(X'X)^{-1}X_{pr}}$		3,1733	3,7923
$y_{pr} = \hat{y}_{pr} \pm \hat{\sigma}_\varepsilon \cdot t_{\alpha/2} \sqrt{1 + X'_{pr}(X'X)^{-1}X_{pr}}$		2,7524	4,2132

УМНК

$$\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{e'S^{-1}e}{n-k} \quad 0{,}001598$$

$\hat{y}_{pr} = X'_{pr} B + \lambda_n e_n$	=	3,49	
$M(y_{pr}) = \hat{y}_{pr} \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{X'_{pr}\left(X'S^{-1}X\right)^{-1}X_{pr}}$		3,4739	3,5026
$y_{pr} = \hat{y}_{pr} \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{1 + X'_{pr}\left(X'S^{-1}X\right)^{-1}X_{pr}}$		3,4735	3,5030

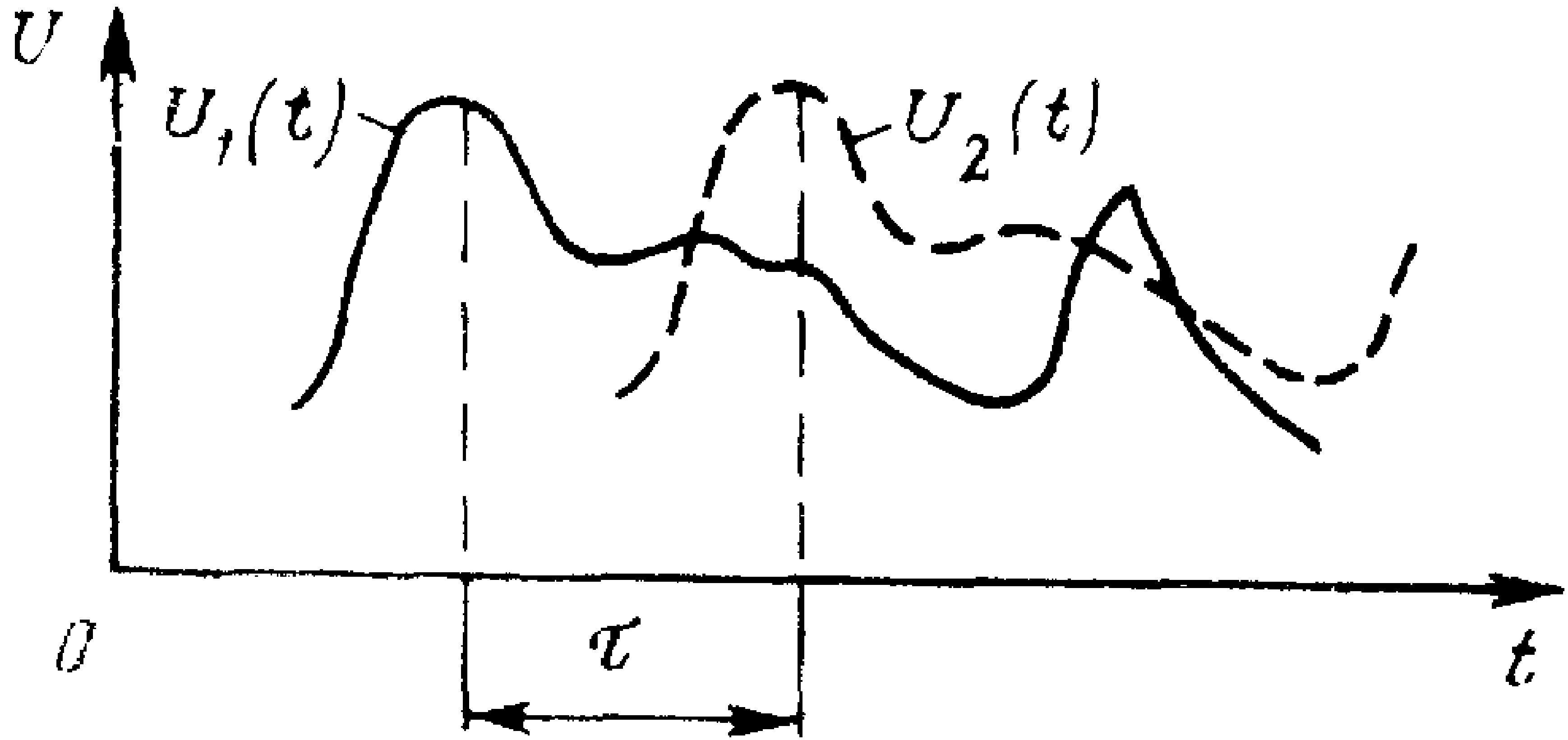
АВТОКОРЕЛЯЦІЯ ЗАЛИШКІВ

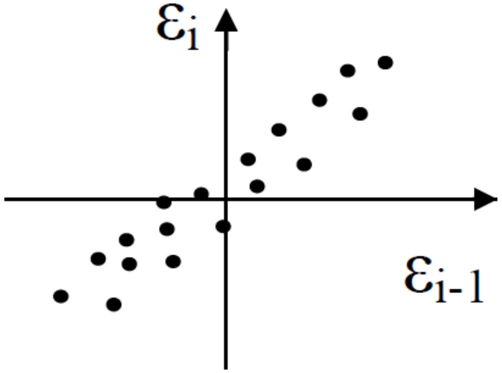
$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad i \neq j \tag{1}$$

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0, \quad i \neq j \tag{2}$$

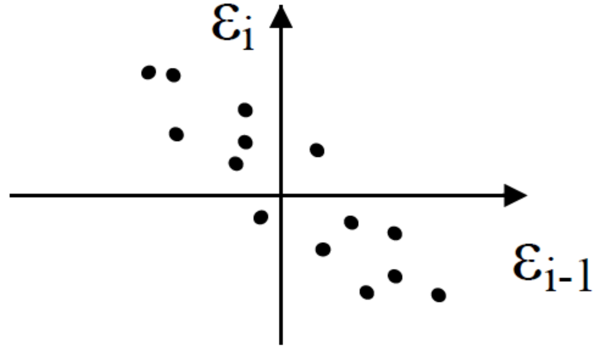
$$\varepsilon_i = \rho_1 \varepsilon_{i-1} + \rho_2 \varepsilon_{i-2} + \cdots + \rho_s \varepsilon_{i-s} + u_i \tag{4}$$

$$\varepsilon_i = \rho_1 \varepsilon_{i-1} + u_i, \quad (-1 \leq \rho \leq 1) \tag{5}$$

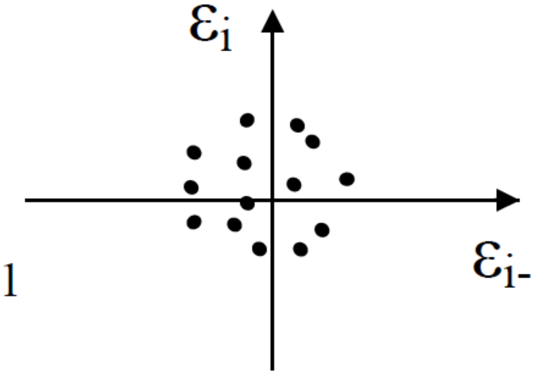

U
$U_1(t)$
$U_2(t)$
0
τ
t



а) позитивна автокореляція залишків



б) негативна автокореляція залишків



в) автокореляція залишків відсутня

$$\widehat{\rho} = \frac{\operatorname{cov}(e_{i-1}, e_i)}{\operatorname{var}(e_{i-1})} \approx \frac{\sum\limits_{i=2}^{n} e_{i-1} \cdot e_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} e_i^2}$$

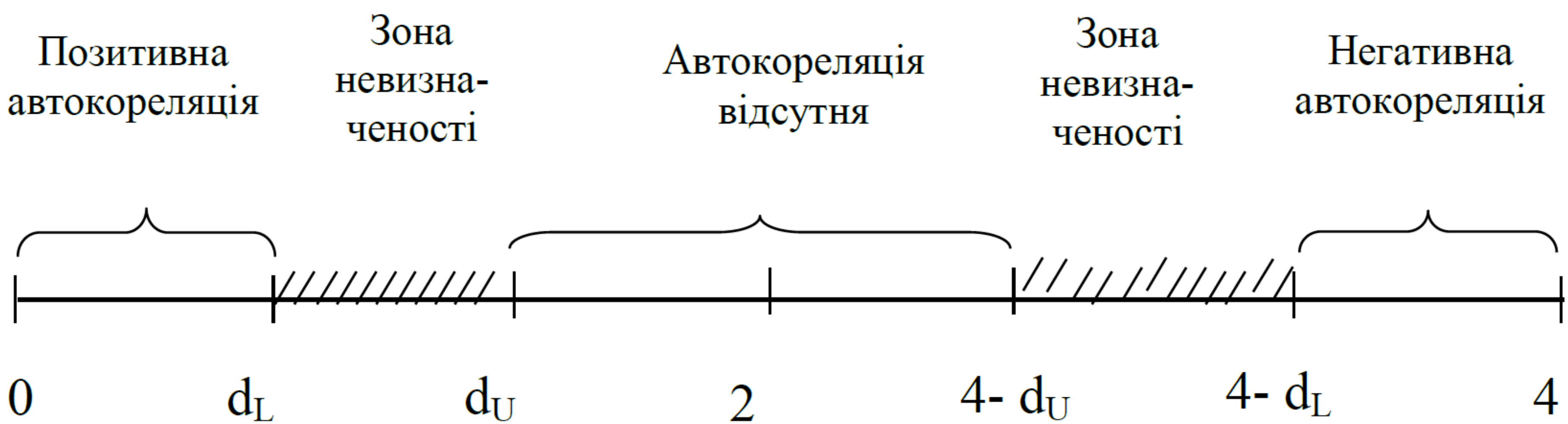
$$\widehat{\rho} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=2}^{n} e_{i-1} \cdot e_i}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} e_i^2} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum\limits_{i=2}^{n} e_{i-1} \cdot e_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} e_i^2}$$

ТЕСТУВАННЯ НАЯВНОСТІ АВТОКОРЕЛЯЦІЇ ЗАЛИШКІВ

1) тест Дарбіна - Уотсона
2) тест фон Неймана
3) тест на основі нециклічного коефіцієнта автокореляції
4) тест на основі циклічного коефіцієнта автокореляції

Тест Дарбіна - Уотсона

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{n} \left(e_i - e_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}$$



УМНК (метод Ейткена)

$$B = (X'S^{-1}X)^{-1} X'S^{-1}Y$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \cdots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & \cdots & \rho^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \dim S = n \times n$$

$$S^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \dim S = n \times n$$

$$r_{скор} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=2}^{n} e_i \cdot e_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2} + \frac{m+1}{n}$$

$$\rho \approx r_{скор}$$

$$\mathrm{var-cov}(b) = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\,(X'S^{-1}X)^{-1}$$

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{e'S^{-1}e}{n-k}$$

$$\hat{y}_{pr} = X'_{pr}\,B + \rho\,\hat{e}_{n}$$

$$M(y_{pr}) = \hat{y}_{pr} \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\varepsilon}\sqrt{X'_{pr}\left(X'S^{-1}X\right)^{-1}X_{pr}}$$

$$y_{pr} = \hat{y}_{pr} \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\varepsilon}\sqrt{1 + X'_{pr}\left(X'S^{-1}X\right)^{-1}X_{pr}}$$