Змістовий модуль 2.
ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

Тема 7–8. Оптимізаційні економіко-математичні моделі. Задача лінійного програмування та методи її розв’язування

<u>План</u>

1. Принцип оптимальності в економіці. Загальна задача математичного програмування.
2. Класифікація задач математичного програмування.
3. Економічний приклад задачі лінійного програмування (ЗЛП).
4. Форми представлення та запису задачі лінійного програмування.
5. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування.
6. Основні властивості розв’язків задачі лінійного програмування.
7. Загальні характеристика методів розв’язання задачі лінійного програмування.
   7.1. Графічний метод.
   7.2. Симплексний метод.
8. Розв’язання ЗЛП на ПЕОМ.

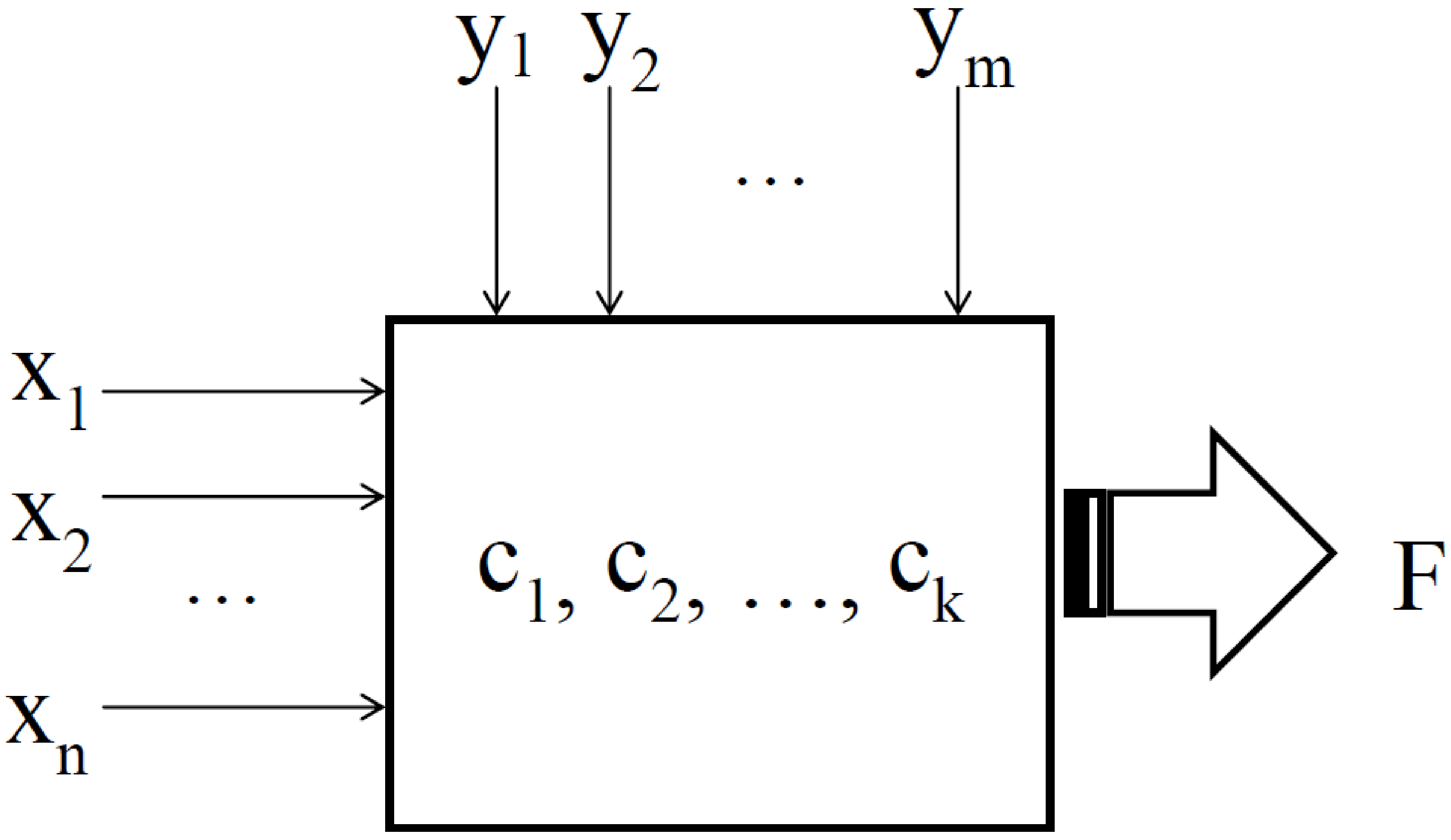
Оптимізаційні методи та моделі виникли як інструмент розв’язування реальних задач найбільш ефективного планування та управління в економіці. Тобто поява цих методів і моделей викликана практичною потребою наукового обґрунтування найбільш ефективних рішень у сфері планування та управління підприємствами, фірмами, корпораціями і т.п.

Необхідною умовою використання оптимального підходу в економіці є гнучкість і **багатоваріантність** виробничо-господарських ситуації в умовах яких доводиться приймати управлінські рішення.

У зв’язку з цим, в економічних, виробничих, технологічних процесах різних галузей національної економіки постійно виникають так звані оптимізаційні задачі, які, **по-перше**, є подібними за постановкою, **по-друге**, мають ряд спільних ознак і, **по-третє**, розв’язуються подібними методами.

Типова постановка оптимізаційної задачі є наступною: деякий економічний процес (або система) може розвиватися за **різними варіантами**, кожний з яких має свої переваги та недоліки. Необхідно з усіх можливих варіантів вибрати **найкращий**, тобто **оптимальний**.

СХЕМА ЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ



ФОРМАЛІЗАЦІЯ ПРИНЦИПУ ОПТИМАЛЬНОСТІ

$$F(X) \rightarrow max\ (min) \qquad (1)$$

$$X \in D \qquad (2)$$

Керовані параметри – це такі параметри, значення яких можна змінювати в процесі управління ($x_1, x_2, \dots, x_i$). Керовані параметри завжди розглядаються як змінні економічної системи, значення яких потрібно визначити в процесі розв’язування відповідної оптимізаційної задачі.

Некеровані параметри – це параметри, значення яких не можна змінювати в процесі управління економічною системою (явищем, процесом).

Некеровані параметри поділяються на дві групи: внутрішні ($c_1, c_2, \dots, c_k$) і зовнішні ($y_1, y_2, \dots, y_j$).

Оптимальне рішення – рішення із множини альтернативних рішень, яке у певному розумінні краще або не гірше за будь-яке із решти рішень.

В означенні оптимального рішення передбачається можливість порівнювати між собою будь-які два рішення із множини альтернативних рішень. Після кожного такого порівняння повинно бути визначено, що одне із двох порівнюваних рішень краще, або, що ці **рішення еквівалентні**, тобто очікувані (прогнозовані) результати операції, зумовлені обома рішеннями, між собою не різняться.

Критерій ефективності рішень – кількісний показник прийнятого способу порівнювання між собою довільних альтернативних рішень.

Цільовою функцією називають функцію змінних моделі, яка характеризує якість рішення задачі, і екстремум якої потрібно знайти.

- **<u>Означення.</u>** Вектор $X(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ (з компонентами $x_1, x_2, \ldots, x_i$), який задовольняє системі обмежень називається <u>планом</u> задачі математичного програмування, або <u>допустимим розв'язком</u>.

- **<u>Означення.</u>** План $X^*(x_1, x_2, \ldots, x_i)$, який надає цільовій функції максимального (або мінімального) значення називається оптимальним планом задачі математичного програмування.

Вибір оптимальної управлінської поведінки завжди може бути зведений до відповідної оптимізаційної задачі.

Будь-яка задача прийняття ефективного рішення у сфері економіки може бути зведена до відповідної задачі математичного програмування за наявності наступних умов:

1) багатоваріантність управлінського рішення;
2) в задачі повинен бути чітко сформульований і кількісно визначений критерій оптимальності;
3) наявність особливих умов і обмежень на керовані параметри (шукані невідомі задачі).

✔ **Означення.** Задачею лінійного програмування називається задача математичного програмування, у якій цільова функція і обмеження на керуючі параметри об’єкту управління є лінійними функціями відносно керуючих параметрів.

ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО (МАТЕМАТИЧНОГО) ПРОГРАМУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ МАТЕМАТИЧНИХ ФОРМ

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to max\ (min), \qquad (3)$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\ \{\le, =, \ge\}\ b_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\ \{\le, =, \ge\}\ b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)\ \{\le, =, \ge\}\ b_m, \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_j \ge 0, \left(j = \overline{1,n}\right) \qquad (5)$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ (ЗАДАЧА ПЛАНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО АСОРТИМЕНТУ ПРОДУКЦІЇ)

Підприємство, яке спеціалізується на виробництві меблів планує місячний випуск 2-х нових видів продукції – письмових столів і книжкових шаф. Для виготовлення цієї продукції використовується сировина двох видів: (деревина і скло), а також ручна праця і обладнання. Ці види продукції згідно маркетингових досліджень мають практично необмежений збут і їх виробництво обмежується тільки ресурсами, які використовуються для їх виготовлення – сировиною і фондом робочого часу обладнання і працівників.

Відомі норми витрат сировини та робочого часу на одиницю кожної продукції, прибуток від реалізації одиниці кожної продукції (у гр. од.) і місячні запаси ресурсів наведені у таблиці.

Вихідні дані

Ресурси	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції		Запаси ресурсів
	Стіл	Шафа	
Деревина ($м^3$)	0,3	0,6	24
Скло ($м^2$)	-	2,0	40
Ручна праця (люд.–год.)	7,2	3,0	290
Обладнання (маш.–год.)	2	1	80
Прибуток від реалізації одиниці продукції (гр. од.)	30	20	

Скласти такий місячний план випуску продукції, який при відомих обмеженнях на ресурси, забезпечить максимальний сумарний прибуток від реалізації виготовленої продукції.

Некеровані внутрішні параметри

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ (ЗАДАЧА ПЛАНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО АСОРТИМЕНТУ ПРОДУКЦІЇ)

Підприємство, яке спеціалізується на виробництві меблів планує місячний випуск 2-х нових видів продукції – письмових столів і книжкових шаф. Для виготовлення цієї продукції використовується сировина двох видів: (деревина і скло), а також ручна праця і обладнання. Ці види продукції згідно маркетингових досліджень мають практично необмежений збут і їх виробництво обмежується тільки ресурсами, які використовуються для їх виготовлення – сировиною і фондом робочого часу обладнання і працівників.

Відомі норми витрат сировини та робочого часу на одиницю кожної продукції, прибуток від реалізації одиниці кожної продукції (у гр. од.) і місячні запаси ресурсів наведені у таблиці.

Вихідні дані

Ресурси	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції		Запаси ресурсів
	Стіл	Шафа	
Деревина ($м^3$)	0,3	0,6	24
Скло ($м^2$)	-	2,0	40
Ручна праця (люд.–год.)	7,2	3,0	290
Обладнання (маш.–год.)	2	1	80
Прибуток від реалізації одиниці продукції (гр. од.)	30	20	

Скласти такий місячний план випуску продукції, який при відомих обмеженнях на ресурси, забезпечить максимальний сумарний прибуток від реалізації виготовленої продукції.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ (ЗАДАЧА ПЛАНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО АСОРТИМЕНТУ ПРОДУКЦІЇ)

Підприємство, яке спеціалізується на виробництві меблів планує місячний випуск 2-х нових видів продукції – письмових столів і книжкових шаф. Для виготовлення цієї продукції використовується сировина двох видів: (деревина і скло), а також ручна праця і обладнання. Ці види продукції згідно маркетингових досліджень мають практично необмежений збут і їх виробництво обмежується тільки ресурсами, які використовуються для їх виготовлення – сировиною і фондом робочого часу обладнання і працівників.

Відомі норми витрат сировини та робочого часу на одиницю кожної продукції, прибуток від реалізації одиниці кожної продукції (у гр. од.) і місячні запаси ресурсів наведені у таблиці.

Вихідні дані

Ресурси	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції		Запаси ресурсів
	Стіл	Шафа	
Деревина ($м^3$)	0,3	0,6	24
Скло ($м^2$)	-	2,0	40
Ручна праця (люд.–год.)	7,2	3,0	290
Обладнання (маш.–год.)	2	1	80
Прибуток від реалізації одиниці продукції (гр. од.)	30	20	

Некеровані зовнішні параметри

Скласти такий місячний план випуску продукції, який при відомих обмеженнях на ресурси, забезпечить максимальний сумарний прибуток від реалізації виготовленої продукції.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ (ЗАДАЧА ПЛАНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО АСОРТИМЕНТУ ПРОДУКЦІЇ)

Підприємство, яке спеціалізується на виробництві меблів планує місячний випуск 2-х нових видів продукції – письмових столів і книжкових шаф. Для виготовлення цієї продукції використовується сировина двох видів: (деревина і скло), а також ручна праця і обладнання. Ці ви
маркетингових досліджень мають практично необме
виробництво обмежується тільки ресурсами, які викори
виготовлення – сировиною і фондом робочого часу облад

Відомі норми витрат сировини та робочого часу н
продукції, прибуток від реалізації одиниці
(у гр. од.) і місячні запаси ресурсів наведені у таблиці.

Керовані параметри:
X1 – кількість столів;
X2 – кількість шаф.

Вихідні дані

Ресурси	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції		Запаси ресурсів
	Стіл	Шафа	
Деревина ($м^3$)	0,3	0,6	24
Скло ($м^2$)	-	2,0	40
Ручна праця (люд.–год.)	7,2	3,0	290
Обладнання (маш.–год.)	2	1	80
Прибуток від реалізації одиниці продукції (гр. од.)	30	20	

Скласти такий місячний план випуску продукції, який при відомих обмеженнях на ресурси, забезпечить максимальний сумарний прибуток від реалізації виготовленої продукції.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ

$$F = 30x_1 + 20x_2 \to max,$$

$$\begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}6x_2 \le 24, \\ 2x_2 \le 40, \\ 7{,}2x_1 + 3x_2 \le 290, \\ 2x_1 + x_2 \le 80, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ

$$\boxed{F = 30x_1 + 20x_2 \to max,}$$

Загальний прибуток

$$\ldots x_1 + 0,6x_2 \le 24,$$

$$\ldots \le 40,$$

$$7,2x_1 + 3x_2 \le 290,$$

$$2x_1 + x_2 \le 80,$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0.$$

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ

$$F = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow max\,,$$

$$\begin{cases} \boxed{0{,}3x_1 + 0{,}6x_2 \le 24\,,} \\ 2x_2 \le 40\,, \\ 7{,}2x_1 + 3x_2 \le 290\,, \\ 2x_1 + x_2 \le 80\,, \end{cases}$$

Деревина

$$x_1 \ge 0\,, \;\; x_2 \ge 0.$$

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ

$$F = 30x_1 + 20x_2 \to max,$$

$$\begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}6x_2 \le 24, \\ \boxed{2x_2 \le 40,} \\ 7{,}2x_1 + 3x_2 \le 290, \\ 2x_1 + x_2 \le 80, \end{cases}$$

Скло

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ

$$F = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow max,$$

$$\begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}6x_2 \le 24, \\ 2x_2 \le 40, \\ \boxed{7{,}2x_1 + 3x_2 \le 290,} \\ 2x_1 + x_2 \le 80, \end{cases}$$

Ручна праця

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ

$$F = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow max\,,$$

$$\begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}6x_2 \le 24\,, \\ 2x_2 \le 40\,, \\ 7{,}2x_1 + 3x_2 \le 290\,, \\ 2x_1 + x_2 \le 80\,, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0\,,\;\; x_2 \ge 0.$$

Обладнання

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ

$$F = 30x_1 + 20x_2 \to max\,,$$

$$\begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}6x_2 \le 24\,, \\ 2x_2 \le 40\,, \\ \ldots + 3x_2 \le 290\,, \\ \ldots x_2 \le 80\,, \end{cases}$$

Умова невід'ємності

$$\boxed{x_1 \ge 0\,, \;\; x_2 \ge 0.}$$

Таблична модель повинна, як правило, має наступні складові:

1 – блок клітинок з вихідними даними задачі (коефіцієнти при невідомих змінних у цільовій функції і у лівих частинах обмежень задачі, значення правих частин обмежень);

2 – порожній блок клітинок, відведений для шуканих змінних задачі;

3 – клітинка з формулою для обчислення значення цільової функції (цільова клітинка);

4 – блок клітинок, у яких введено формули для обчислення лівих частин обмежень задачі.

ТАБЛИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ДО ЇЇ РОЗВ’ЯЗАННЯ

Вихідні дані

Ресурси	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції		Запаси ресурсів	Фактичне використання ресурсів
	Стіл	Шафа		
Деревина (м^3)	0,3	0,6	24	0
Скло (м^2)		2	40	0
Ручна праця (люд.–год.)	7,2	3	290	0
Обладнання (маш.–год.)	2	1	80	0
Прибуток від реалізації одиниці продукції (гр. од.)	30	20		

Результати розв'язку задачі

x_1	x_2	F
		0

ТАБЛИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ДО ЇЇ РОЗВ’ЯЗАННЯ

Вихідні дані

Ресурси	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції		Запаси ресурсів	Фактичне використання ресурсів
	Стіл	Шафа		
Деревина ($м^3$)	0,3	0,6	24	0
Скло ($м^2$)		2	40	0
Ручна праця (люд.–год.)	7,2	3	290	0
Обладнання (маш.–год.)	2	1	80	0
Прибуток від реалізації одиниці продукції (гр. од.)	30	20		

1

Результати розв'язку задачі

x_1	x_2	F
		0

ТАБЛИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ДО ЇЇ РОЗВ’ЯЗАННЯ

Вихідні дані

Ресурси	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції		Запаси ресурсів	Фактичне використання ресурсів
	Стіл	Шафа		
Деревина (м^3)	0,3	0,6	24	0
Скло (м^2)		2	40	0
Ручна праця (люд.–год.)	7,2	3	290	0
Обладнання (маш.–год.)	2	1	80	0
Прибуток від реалізації одиниці продукції (гр. од.)	30	20		

Результати розв'язку задачі

2

x_1	x_2	F
		0

ТАБЛИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ДО ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

	A	B	C	D	E
1	**Вихідні дані**				
2–3	Ресурси	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції		Запаси ресурсів	Фактичне використання ресурсів
4		Стіл	Шафа		
5	Деревина ($м^3$)	0,3	0,6	24	0
6	Скло ($м^2$)		2	40	0
7	Ручна праця (люд.–год.)	7,2	3	290	0
8	Обладнання (маш.–год.)	2	1	80	0
9	Прибуток від реалізації одиниці продукції (гр. од.)	30	20		
10					
11					
12	**Результати розв'язку задачі**				
13					
14		x_1	x_2	F	
15				0	
16					

3

ТАБЛИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ДО ЇЇ РОЗВ’ЯЗАННЯ

Вихідні дані

Ресурси	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції		Запаси ресурсів	Фактичне використання ресурсів
	Стіл	Шафа		
Деревина (м^3)	0,3	0,6	24	0
Скло (м^2)		2	40	0
Ручна праця (люд.–год.)	7,2	3	290	0
Обладнання (маш.–год.)	2	1	80	0
Прибуток від реалізації одиниці продукції (гр. од.)	30	20		

4

Результати розв'язку задачі

x_1	x_2	F
		0

КЛАСИФІКАЦІЯ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Усі відомі економіко-математичні моделі класифікують за наступними ознаками.

1. В залежності від способу опису зв'язків між параметрами і змінними моделі розрізняють наступні економіко-математичні моделі:

- **структурні**, які відтворюють внутрішню організацію об'єкту;
- **функціональні**, які описують поведінку об'єкта без знання його внутрішньої структури.

2. За рівнем моделювання:

- **мікромоделі**;
- **макромоделі**.

3. За способом побудови економіко-математичні моделі поділяються на:

- **теоретичні**;
- **прикладні**.

Теоретичні моделі дозволяють вивчати загальні властивості економічних систем за допомогою дедукції на основі формальних вихідних посилок і носять достатньо абстрактний і узагальнений характер. Параметри таких моделей мають тільки загальне позначення і не мають конкретних числових значень.

Прикладні моделі базуються на фактичному, статистичному матеріалі і дають можливість **кількісно** оцінити характеристики **конкретного економічного процесу** і сформулювати рекомендації для прийняття практичних рішень.

4. В залежності від мети економіко-математичні моделі поділяються на:

- **дескриптивні** (описувальні);
- **оптимізаційні**.

5. В залежності від врахування фактору часу економіко-математичні моделі поділяються на:

- **статичні**, в яких не враховується фактор часу;
- **динамічні**, в яких враховується фактор часу.

6. В залежності від врахування випадкових величин економіко-математичні моделі поділяються на:

- **детерміновані**;
- **стохастичні**.

Детерміновані моделі припускають тільки жорсткі функціональні зв'язки між змінними (параметрами) моделі.

Стохастичні моделі припускають наявність випадкових впливів на показники, що досліджуються і використовують інструментарій теорії ймовірності і математичної статистики. У таких моделях зв'язки між змінними – **кореляційно-регресійні**.

ФОРМАЛЬНИЙ ЗАПИС ЗАГАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to max(min), \qquad (6)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ \{\leq, =, \geq\}\ b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ \{\leq, =, \geq\}\ b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ \{\leq, =, \geq\}\ b_m, \end{cases} \qquad (7)$$

$$x_j \geq 0, \left(j = \overline{1,n}\right) \qquad (8)$$

✔ **Означення.** Вектор $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, який задовольняє системі обмежень і умовам називається **допустимим розв'язком (або планом) задачі лінійного програмування.**

✔ **Означення.** Допустимий план $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається **опорним планом** задачі лінійного програмування, якщо він задовольняє не менше, ніж **m** лінійно незалежних обмежень системи у вигляді рівностей, а також умовам невід'ємності змінних.

✔ **Означення.** Опорний план $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається **невиродженим**, якщо він містить точно **m** додатних змінних, інакше він **вироджений.**

✔ **Означення.** Опорний план $X^*=\left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\right)$ при якому цільова функція приймає своє максимальне (або мінімальне) значення називається **оптимальним планом (оптимальним розв'язком) задачі лінійного програмування.**

Стандартна (симетрична) задача лінійного програмування

$\leq$ або $\geq$

Канонічна (основна) задача лінійного програмування

$=$

✔ **<u>Означення.</u> Стандартною** (або **симетричною) задачею лінійного програмування** називається задача знаходження екстремуму цільової функції, якщо обмеження задані у формі нерівностей (“$\le$” або “$\ge$”).

✔ **<u>Означення.</u> Канонічною** (або **основною**) **задачею лінійного програмування** називається задача знаходження екстремуму цільової функції, якщо обмеження задані у формі рівнянь (=), а праві частини $b_i, \left(i = \overline{1,m}\right)$ є невід'ємними числами.

<u>Теорема 1</u> Всякому розв'язку $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ \dots \ , x_n^*\right)$ нерівності

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$ відповідає єдиний розв'язок $Y^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ \dots \ , x_n^*, x_{n+1}^*\right)$

рівняння $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$, у якому $x_{n+1} \ge 0$, і навпаки.

ФОРМИ ЗАПИСУ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1) векторна форма запису

$$F = C \cdot X \to max\ (min), \tag{9}$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = B, \;\; X \geq 0, \tag{10}$$

де

$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \qquad A_n = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

2) матрична форма запису

$$F = C \cdot X \rightarrow max\ (min), \qquad (11)$$

$$A \cdot X = B,\ \ X \geq 0, \qquad (12)$$

де

$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$A = (a_{ij}),\ (i = \overline{1, m}),\ (j = \overline{1, n})$$

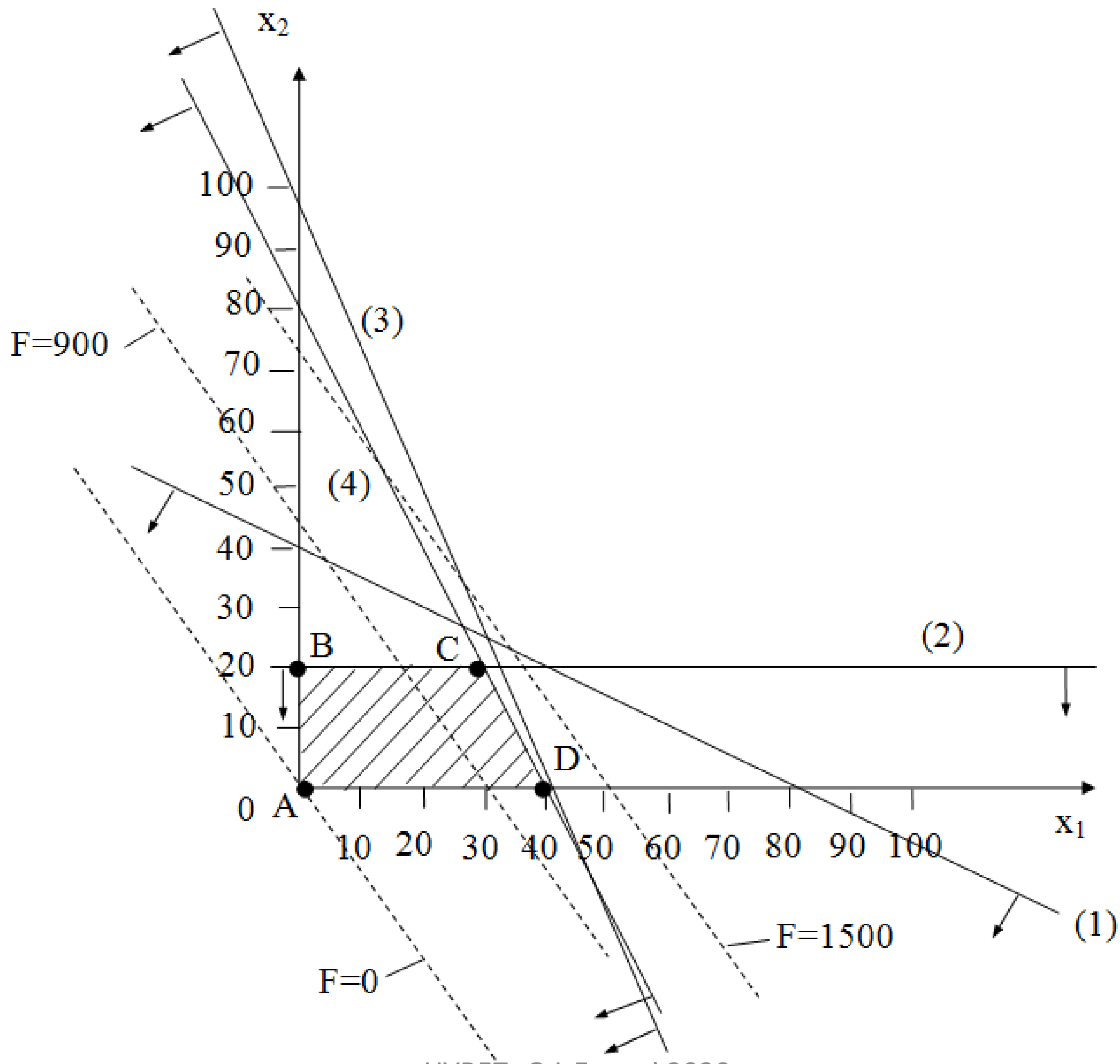
3) з використанням знаків сумування

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max\ (min), \qquad (13)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_j,\ \left(i = \overline{1,m}\right), \qquad (14)$$

$$x_j \geq 0,\ \left(j = \overline{1,n}\right) \qquad (15)$$

ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ



Таким чином, розглянувши даний приклад і узагальнюючі його на випадок **n** змінних, можна зробити наступні висновки:

1. Система обмежень ЗЛП для випадку двох змінних представляє собою опуклий багатокутник. Цей багатокутник визначає область допустимих розв'язків ЗЛП (планів ЗЛП) і називається **багатокутником розв'язків**. Це може бути точка (єдиний розв'язок), відрізок, промінь, багатокутник, необмежена багатокутна область. Для випадку n змінних, якщо система обмежень сумісна, вона утворює спільну частину в n-вимірному просторі — опуклий **багатогранник розв'язків**. Він може бути точкою, відрізком, променем, багатокутником, багатогранником, багатогранною необмеженою областю.
2. Цільову функцію задачі лінійного програмування у 2-вимірному просторі можна представити як сім'ю паралельних прямих – ліній рівня, положення кожної з яких визначається значенням параметра F, а у довільному n-вимірному просторі основних змінних – як сімейство паралельних гіперплощин, положення кожної з яких визначається значенням параметра F.
3. Геометрично задача лінійного програмування являє собою задачу відшукання координат такої точки багатогранника розв'язків, при підстановці яких у цільову лінійну функцію остання набирає максимального (мінімального) значення, причому допустимими розв'язками є усі точки багатогранника розв'язків.

Теорема 2. Множина всіх допустимих розв'язків (планів) канонічної ЗЛП є опуклою. Ця множина представляє собою опуклий багатогранник або опуклу багатогранну область у n вимірному просторі, яку називають **багатогранником розв'язків**.

Теорема 3. Якщо канонічна (основна) ЗЛП має оптимальний план, то екстремальне значення цільова функція приймає в одній з кутових точок (в одному з кутів) багатогранника розв'язків. Якщо цільова функція приймає екстремальне значення більш ніж в одній кутовій точці, то вона приймає його в будь-якій точці, яка представляє собою опуклу лінійну комбінацію цих точок (відрізок).

Зауваження. *Для використання цієї теореми необхідно, щоб багатогранник розв'язків був обмеженим.*

Теорема 4. Кожному опорному плану канонічної ЗЛП відповідає кутова точка багатогранника розв'язків і навпаки, кожній кутовій точці багатогранника розв'язків відповідає допустимий базисний розв'язок (опорний план) канонічної ЗЛП.

Всі методи розв'язання задачі лінійного програмування поділяються на :

- графічні методи;
- аналітичні методи;
- наближені (числові) методи.

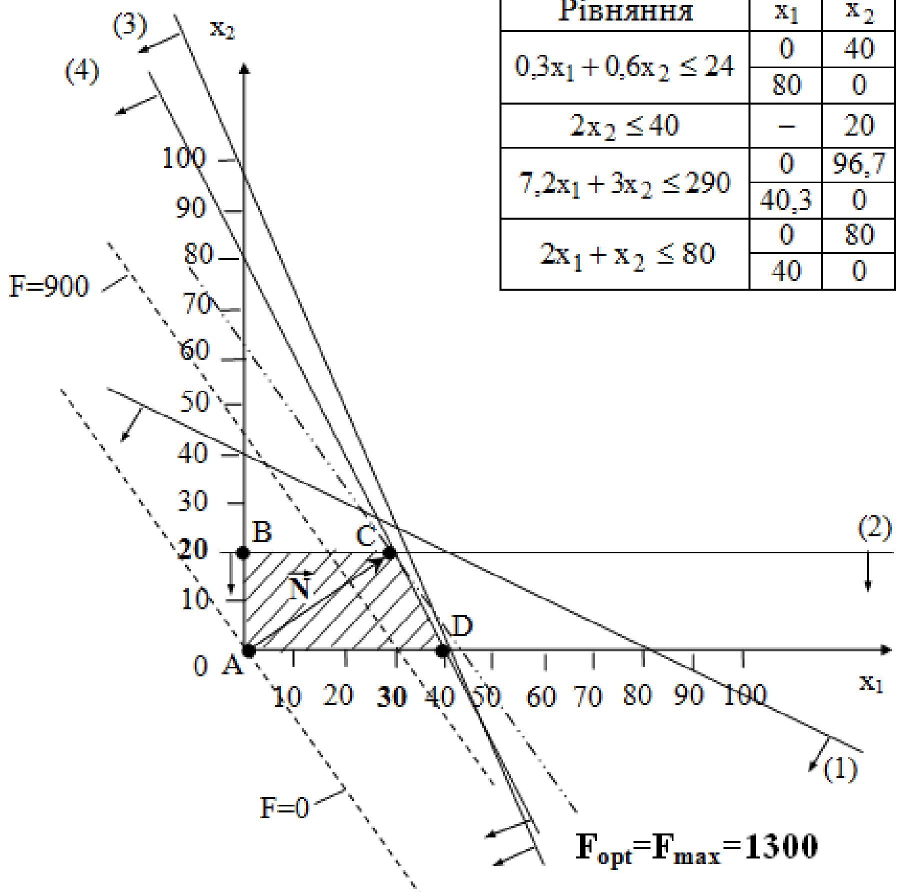
Графічні методи мають обмежене використання, коли кількість невідомих ЗЛП **n=2**.

Аналітичні методи є основними методами розв'язання ЗЛП і поділяються на *універсальні* і *спеціальні* методи. Універсальні методи використовуються для розв'язання будь-якої ЗЛП. До універсальних методів відносяться такі методи як симплекс-метод, метод штучного базису, модифікований симплекс-метод тощо. Спеціальні методи є більш ефективними для розв'язання спеціальних ЗЛП і до таких методів відноситься метод потенціалів, метод Гоморі, угорський метод і т.і.

Наближені методи дають можливість отримати наближений розв'язок ЗЛП на основі відповідних алгоритмів. До наближених методів належить метод апроксимації Фогеля, індексний метод і т.і.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ

Рівняння	x_1	x_2
$0{,}3x_1 + 0{,}6x_2 \le 24$	0	40
	80	0
$2x_2 \le 40$	–	20
$7{,}2x_1 + 3x_2 \le 290$	0	96,7
	40,3	0
$2x_1 + x_2 \le 80$	0	80
	40	0



Розв'язок задачі:

$$X^* = (30,\ 20),\ F = 1300$$

Алгоритм графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування складається з таких кроків:

1. Будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі знаків нерівностей на знаки рівностей.

2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.

3. Знаходимо багатокутник розв'язків задачі лінійного програмування.

4. Будуємо вектор $\vec{N}=(c_1; c_2)$, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі.

5. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, перпендикулярну до вектора $\vec{N}$.

6. Рухаючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2=\text{const}$ в напрямку вектора $\vec{N}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв'язків, де цільова функція набирає екстремального значення.

7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

У разі застосування графічного методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки:

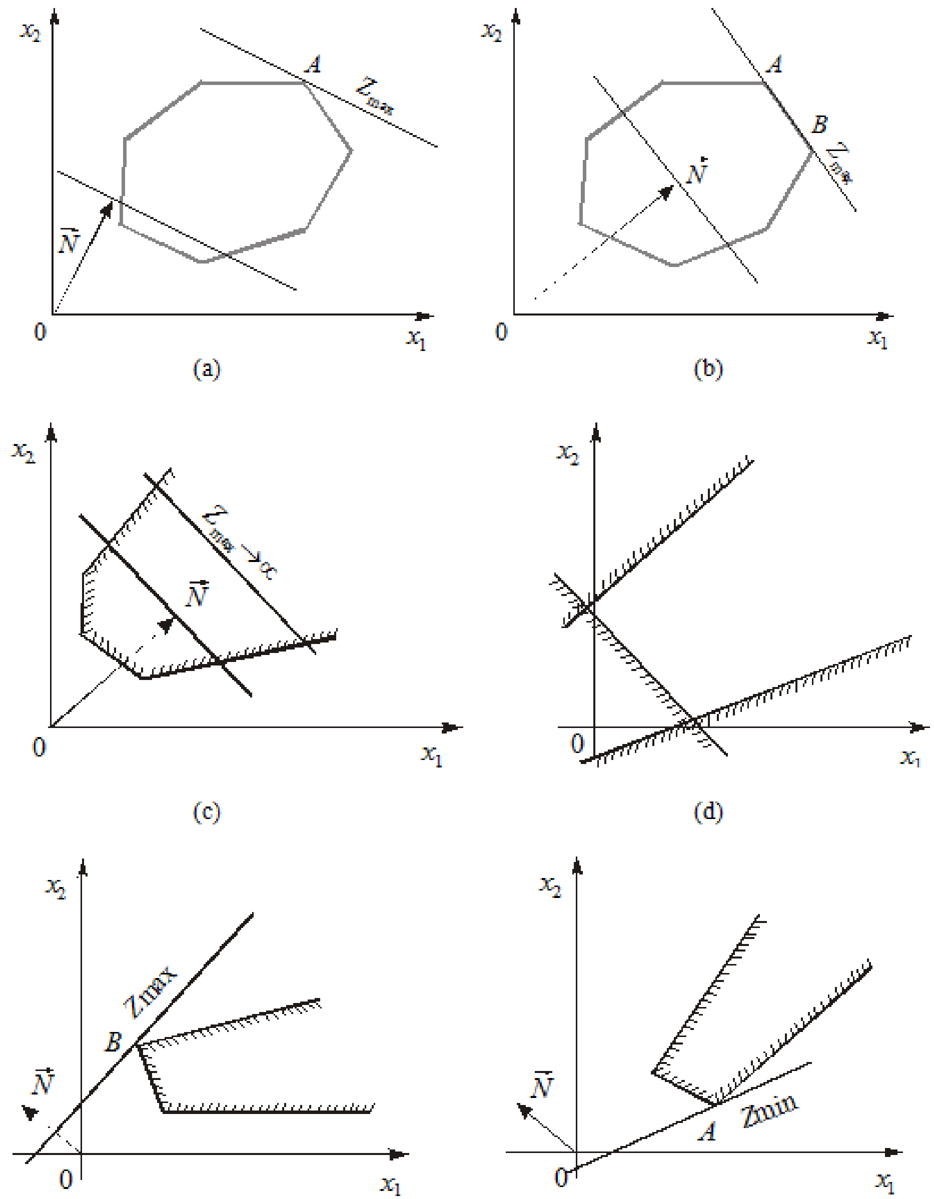
1. Цільова функція набирає максимального значення в єдиній вершині A багатокутника розв'язків.

2. Максимального значення цільова функція досягає в будь-якій точці відрізка AB. Тоді задача лінійного програмування має альтернативні оптимальні плани.

3. Задача лінійного програмування не має оптимальних планів: якщо цільова функція необмежена згори або система обмежень задачі несумісна.

4. Задача лінійного програмування має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв'язків. У точці B маємо максимум, у точці A — мінімум, на рис. зображено, як у разі необмеженої області допустимих планів цільова функція може набирати максимального чи мінімального значення у будь-якій точці променя.

МОЖЛИВІ ВИПАДКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ



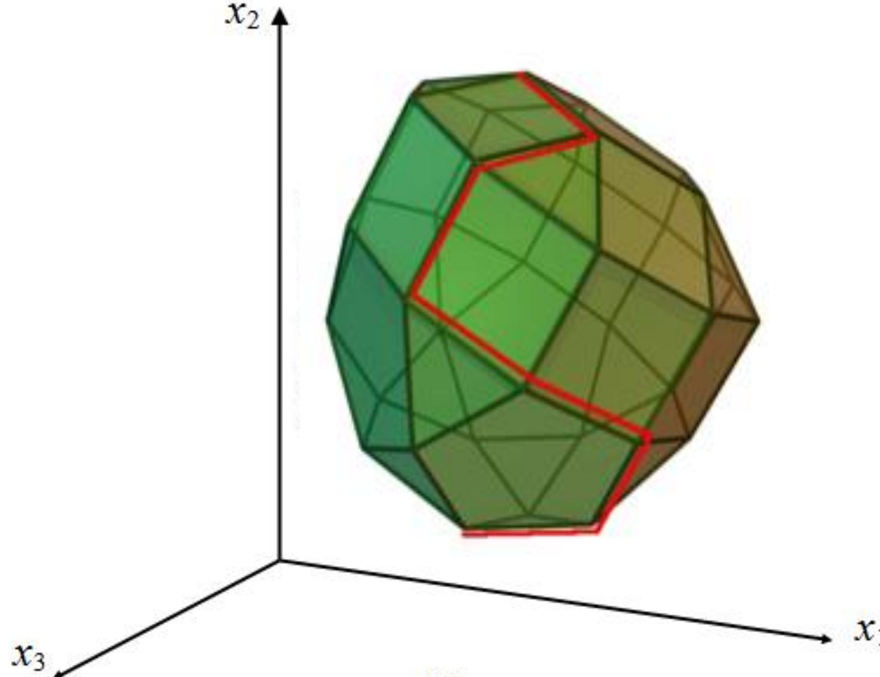
(e) (f)

Ідея симплекс-методу При великих значеннях числа обмежень **m** і невідомих **n** знайти оптимальний план ЗЛП простим перебором всіх опорних планів не просто і призводить до великого об'єму обчислень навіть при використанні сучасної комп'ютерної техніки. Але кількість опорних планів, які треба перебрати, можна зменшити, якщо робити цей перебір не безладно а цілеспрямовано з врахуванням зміни цільової функції таким чином, щоб кожний наступний опорний план був "краще" (у крайньому разі "не гірше") попереднього з точки зору покращення значення цільової функції. Такий підхід дозволяє значно зменшити кількість кроків для пошуку оптимального плану. Ідея послідовного покращення значення цільової функції покладена в основу симплексного методу (або симплекс-методу) розв'язання ЗЛП. Цей метод дозволяє, виходячи з деякого відомого початкового опорного плану ЗЛП за певну кінцеву кількість кроків побудувати її оптимальний план. Кожен з кроків при цьому зводиться до знаходження нового опорного плану, якому відповідає покращене значення цільової функції. Сам процес розв'язання носить ітераційний характер. Графічна (точніше геометрична) інтерпретація симплекс-методу полягає у послідовному переході від однієї вершини багатогранника розв'язків до сусідньої, у якій цільова функція приймає краще (у крайньому разі "не гірше" значення) до тих пір поки не буде знайдено вершину, у якій цільова функція приймає максимальне (або мінімальне значення).

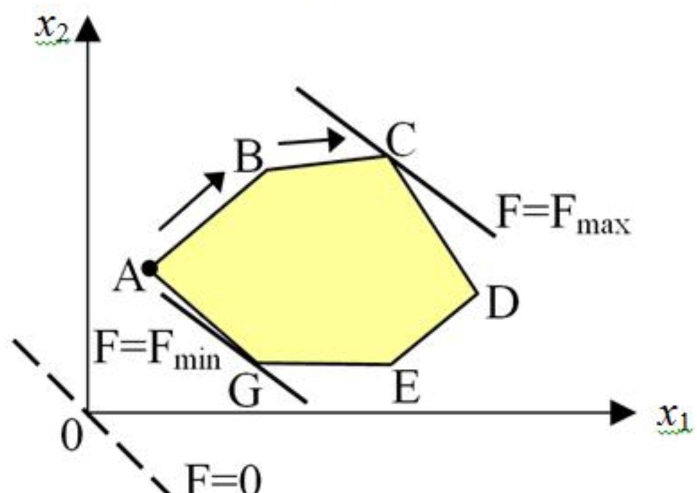
Назва методу - симплекс (simplex – простий на латині) – простий випуклий багатогранник у n - вимірному просторі з **n+1** вершинами, у якому будь-які **m** вершин лінійно незалежні. Вперше симплекс метод було запропоновано американським вченим Дж. Данцигом у 1949 р., однак ще у 1939р. ідеї методу були розроблені радянським вченим Л.В. Канторовичем. Для реалізації симплекс-методу потрібно засвоїти і втілити три основних елементи:

- спосіб визначення початкового опорного плану;
- правило (критерій) переходу до кращого опорного плану;
- критерії перевірки опорного плану на оптимальність, виродженість і обмеженість.

ГРАФІЧНА ІЛЮСТРАЦІЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДУ



(a)



(b)

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max , \qquad (16)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (17)$$

$$x_j \ge 0, \ \left(j = \overline{1,n}\right), \qquad (18)$$

$$m < n, \ b_i > 0, \left(i = \overline{1,m}\right), \ c_j > 0, \left(j = \overline{1,n}\right).$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max, \tag{19}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{20}$$

$$x_j \geq 0, \ \left(j = \overline{1, n+m}\right). \tag{21}$$

$$m < n, \ b_i > 0, \left(i = \overline{1, m}\right), \ c_j > 0, \left(j = \overline{1, n}\right).$$

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + \ldots + c_{n+m} x_{n+m} \to \max, \quad (22)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + 1 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + \ldots + 0 \cdot x_{n+m} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + 0 \cdot x_{n+1} + 1 \cdot x_{n+2} + \ldots + 0 \cdot x_{n+m} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + \ldots + 1 \cdot x_{n+m} = b_m, \end{cases} \quad (23)$$

$$x_j \geq 0, \ \left(j = \overline{1, n+m}\right), \quad (24)$$

$$c_j > 0, \left(j = \overline{1, n}\right), \ c_j = 0, \left(j = \overline{n+1, n+m}\right).$$

СИМПЛЕКС-ТАБЛИЦЯ ДЛЯ ПОЧАТКОВОГО ОПОРНОГО ПЛАНУ

Базис	c_i	План	c_1	c_2	…	c_p	…	c_n	c_{n+1}	…	c_k	…	c_{n+m}	Θ_{ij}
			x_1	x_2	…	x_p	…	x_n	x_{n+1}	…	x_k	…	x_{n+m}	
x_{n+1}	c_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1p}	…	a_{1n}	1	…	0	…	0	b_1/a_{1p}
x_{n+2}	c_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2p}	…	a_{2n}	0	…	0	…	0	b_2/a_{2p}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_k	c_k	b_k	a_{k1}	a_{k2}	…	$\boxed{a_{kp}}$	…	a_{kn}	0	…	1	…	0	b_k/a_{kp}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	c_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mp}	…	a_{mn}	0	…	0	…	1	b_m/a_{mp}
m+1	Δ_j	F	Δ_1	Δ_2	…	Δ_p	…	Δ_n	Δ_{n+1}	…	Δ_k	…	Δ_{n+m}	

$$\Delta_j = Z_j - c_j$$

$$Z_j = \sum_{i=1}^{m} c_j a_{ij}, \left(j = \overline{1, n+m}\right)$$

$$F = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ip} a_{kj}}{a_{kp}}$$

$$b'_i = b_i - \frac{a_{ip} b_k}{a_{kp}}$$

$$\Theta_{ij} = \frac{b_i}{a_{ij}}, \quad \left(i = \overline{1, m}\right)$$

Теорема 5

Опорний план

$X^*=(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_m, 0, 0, \ldots, 0)$

є оптимальним, якщо симплекс-різниці

$\Delta j \geq 0$

для всіх j $(j = \overline{1, n+m})$ для ЗЛП на максимум та

$\Delta j \leq 0$

для всіх j $(j = \overline{1, n+m})$ для ЗЛП на мінімум.

Теорема 6

Якщо для ЗЛП на максимум серед від'ємних симплекс-різниць

$$\Delta_j < 0$$

є стовпці, для яких всі елементи

$$a_{ij} < 0,$$

то цільова функція F не обмежена зверху.

Якщо для ЗЛП на мінімум серед додатних симплекс-різниць

$$\Delta_j > 0$$

є стовпці, для яких всі елементи

$$a_{ij} < 0,$$

то цільова функція F не обмежена знизу.

Теорема 7

Якщо опорний план X ЗЛП на максимум не є виродженим і існує хоча б один стовпчик, для якого симплекс-різниці

$$\Delta_j < 0$$

але серед елементів цього стовпця не всі

$$a_{ij} < 0,$$

то існує новий опорний план X', такий, що

$$F(X') > F(X).$$

Якщо опорний план X ЗЛП на мінімум не є виродженим і існує хоча б один стовпчик, для якого симплекс-різниці

$$\Delta_j > 0$$

але серед елементів цього стовпця не всі

$$a_{ij} < 0,$$

то існує новий опорний план X', такий, що

$$F(X') < F(X).$$

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Початковий опорний план

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	24	0,3	0,6	1	0	0	0	80
x_4	0	40	0	2	0	1	0	0	$+\infty$
x_5	0	290	7,2	3	0	0	1	0	40,3
x_6	0	80	2	1	0	0	0	1	40
		0	-30	-20	0	0	0	0	

$$\Theta_{ij} = \frac{b_i}{a_{ij}}, \quad \left(i = \overline{1, m}\right)$$

Ітерація № 1

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	12	0	0,45	1	0	0	-0,15	26,7
x_4	0	40	0	2	0	1	0	0	20
x_5	0	2	0	-0,6	0	0	1	-3,6	–
$\mathbf{x_1}$	30	40	1	0,5	0	0	0	0,5	80
		1200	0	-5	0	0	0	15	

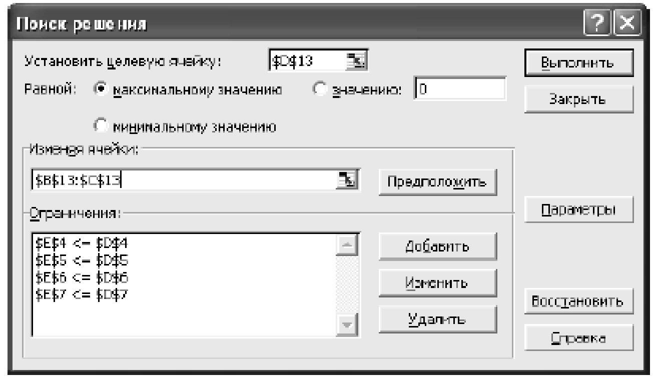
$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ip} a_{kj}}{a_{kp}}$$

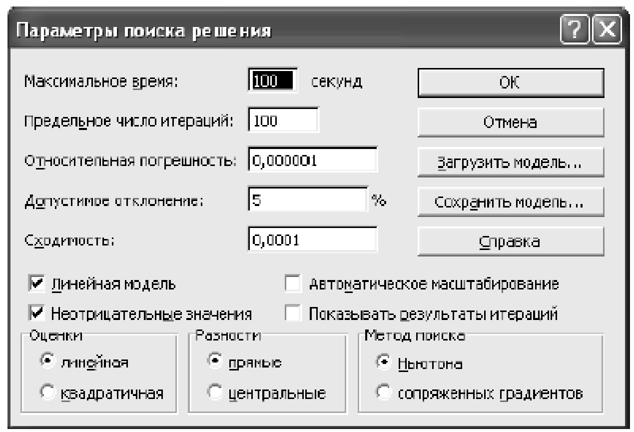
$$b'_i = b_i - \frac{a_{ip} b_k}{a_{kp}}$$

Ітерація № 2

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	3	0	0	1	-0,23	0	-0,15	
$\mathbf{x_2}$	20	**20**	0	1	0	0,5	0	0	
x_5	0	14	0	0	0	0,3	1	-3,6	
$\mathbf{x_1}$	30	**30**	1	0	0	-0,25	0	0,5	
		1300	0	0	0	2,5	0	15	

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ НА ПЕОМ





	A	B	C	D	E
1	**Вихідні дані**				
2	Ресурси	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції		Запаси ресурсів	Фактичне використання ресурсів
3		Стіл	Шафа		
4	Деревина (м^3)	0,3	0,6	24,0	21,0
5	Скло (м^2)		2	40,0	40,0
6	Робочий час (люд. год.)	7,2	3	290,0	276,0
7	Машинний час (маш. год.)	2	1	80,0	80,0
8	Прибуток від реалізації одиниці продукції (гр. од.)	30	20		
9					
10					
11		**Результати розрахунків**			
12		[illegible]	[illegible]	[illegible]	
13		30	20	1300	