

Тема 9. ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ ТА АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

План

1. Двоїста задача лінійного програмування та її економічна інтерпретація.
2. Взаємозв'язок між прямою та двоїстою задачами лінійного програмування. Основні теореми двоїстості.
3. Двоїсті оцінки, їх зміст, властивості та практичне застосування.
4. Аналіз чутливості розв'язку задачі лінійного програмування.

Пряма задача

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \leq b_4 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad (3)$$

Пряма задача

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \leq b_4 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad (3)$$

Виручка від реалізації
виготовленої продукції

Пряма задача

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \leq b_4 \end{cases} \quad (2)$$

Фактичні витрати
ресурсів

$$x_1 \geq 0, \quad (3)$$

Пряма задача

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \leq b_4 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Запаси ресурсів

Двоїста задача

$$Z = y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3 + y_4 b_4 \rightarrow \min, \quad (4)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + a_{41}y_4 \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + a_{42}y_4 \geq c_2, \end{cases} \quad (5)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0. \quad (6)$$

Двоїста задача

$$Z = y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3 + y_4 b_4 \rightarrow \min, \quad (4)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + a_{41}y_4 \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + a_{42}y_4 \geq c_2, \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 + a_{43}y_4 \geq c_3, \\ a_{14}y_1 + a_{24}y_2 + a_{34}y_3 + a_{44}y_4 \geq c_4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + a_{42}y_4 \geq c_2, \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_3 + a_{43}y_4 \geq c_3, \\ a_{14}y_1 + a_{24}y_2 + a_{34}y_3 + a_{44}y_4 \geq c_4, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$$

**Витрати на закупівлю
ресурсів**

Двоїста задача

$$Z = y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3 + y_4 b_4 \rightarrow \min, \quad (4)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + a_{41}y_4 \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + a_{42}y_4 \geq c_2, \end{cases} \quad (5)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0. \quad (6)$$

Вартість ресурсів
для виготовлення
продукції

Двоїста задача

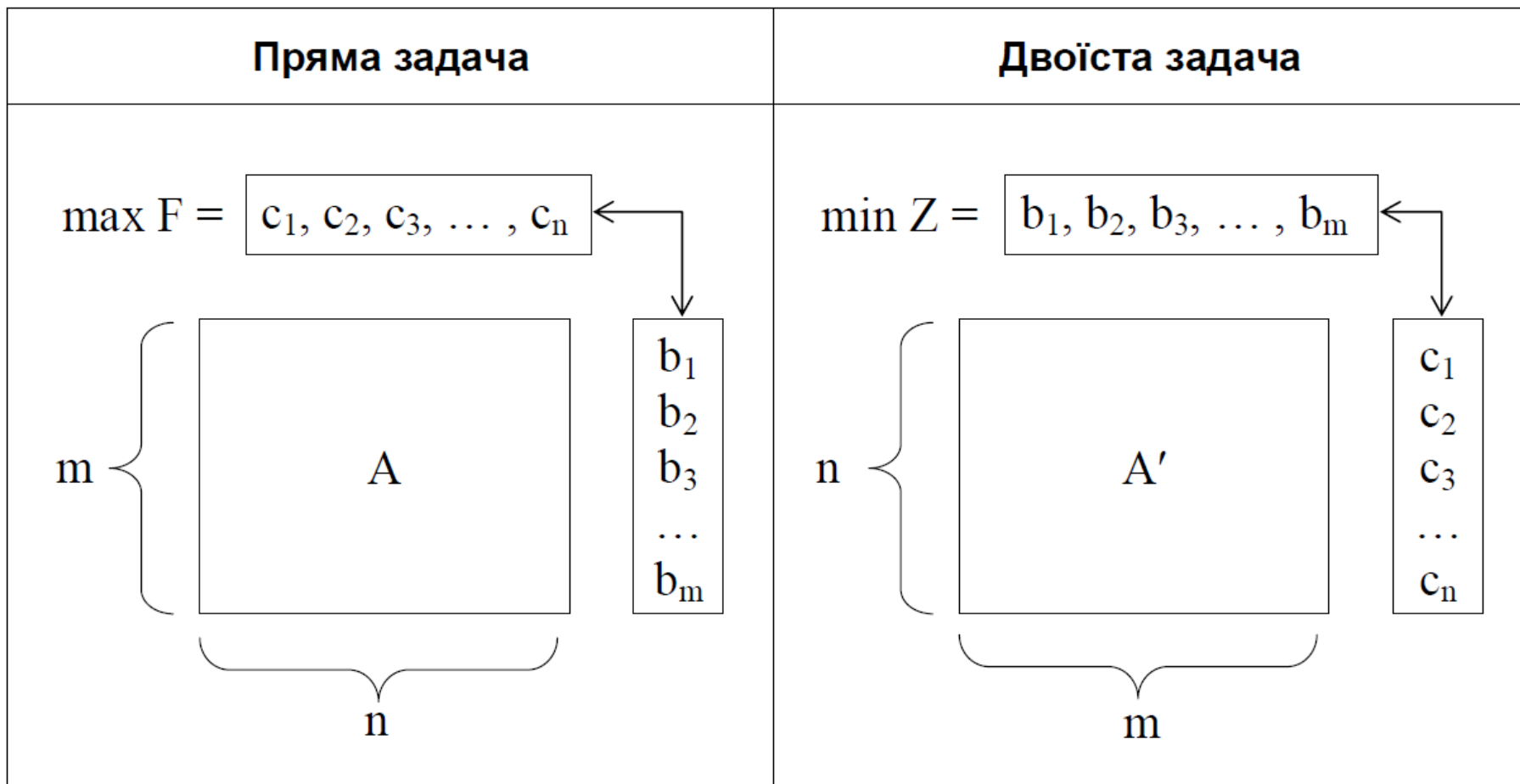
$$Z = y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3 + y_4 b_4 \rightarrow \min, \quad (4)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + a_{41}y_4 \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + a_{42}y_4 \geq c_2, \end{cases} \quad (5)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0. \quad (6)$$

Ціни реалізації
продукції

СХЕМА ПОБУДОВИ ЗАДАЧІ



$$F = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow \max ,$$

$$\begin{cases} 0,3x_1 + 0,6x_2 \leq 24, \\ 2x_2 \leq 40, \\ 7,2x_1 + 3x_2 \leq 290, \\ 2x_1 + x_2 \leq 80 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$Z = 24y_1 + 40y_2 + 290y_3 + 80y_4 \rightarrow \min ,$$

$$\begin{cases} 0,3y_1 + 7,2y_3 + 2y_4 \geq 30, \\ 0,6y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \geq 20, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0, \quad y_4 \geq 0.$$

ТЕОРЕМИ ДВОЇСТОСТІ

Перша (основна) теорема двоїстості. *Якщо одна із взаємно-двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то його має й інша задача, причому оптимальні значення їхніх цільових функцій рівні, тобто $F_{\max} = Z_{\min}$. Якщо ж цільова функція однієї із задач не обмежена, то друга не має розв'язку.*

Друга теорема двоїстості. *Компоненти оптимального плану двоїстої задачі (двоїсті оцінки) дорівнюють абсолютним значенням коефіцієнтів при неосновних змінних цільової функції прямої задачі для її оптимального плану.*

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК МІЖ ПРЯМОЮ І ДВОЇСТОЮ ЗАДАЧАМИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Пряма задача (I)

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max, \quad (7)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \dots \dots \quad \quad \quad (8) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}). \quad (9)$$

Двоїста задача (II)

$$Z = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_m b_m \rightarrow \min, \quad (10)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \dots \dots \dots \quad \quad \quad (11) \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, (i = \overline{1, m}). \quad (12)$$

Змінні прямої задачі I	
Основні (вихідні)	Додаткові
$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ y_{m+1} & y_{m+2} & \dots & y_{m+j} & \dots & y_{m+n} \end{matrix}$	$\begin{matrix} x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+j} & \dots & x_{n+m} \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ y_1 & y_2 & \dots & y_j & \dots & y_m \end{matrix}$
Додаткові	Основні (вихідні)
Змінні двоїстої задачі II	

$$F = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0,3x_1 + 0,6x_2 \leq 24 \\ 2x_2 \leq 40 \\ 7,2x_1 + 3x_2 \leq 290 \\ 2x_1 + x_2 \leq 80 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,3})$$

$$F = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0,3x_1 + 0,6x_2 + x_3 = 24 \\ 2x_2 + x_4 = 40 \\ 7,2x_1 + 3x_2 + x_5 = 290 \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 80 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,3})$$

$$F = 30x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0,3x_1 + 0,6x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 24 \\ 0x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 40 \\ 7,2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6 = 290 \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 = 80 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,3})$$

$$Z = 24y_1 + 40y_2 + 290y_3 + 80y_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 0,3y_1 + 7,2y_3 + 2y_4 \geq 30 \\ 0,6y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \geq 20 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,4})$$

$$Z = 24y_1 + 40y_2 + 290y_3 + 80y_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 0,3y_1 + 7,2y_3 + 2y_4 - y_5 = 30 \\ 0,6y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 - y_6 = 20 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,4})$$

$$Z = 24y_1 + 40y_2 + 290y_3 + 80y_4 + 0y_5 + 0y_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 0,3y_1 + 0y_2 + 7,2y_3 + 2y_4 - y_5 + 0y_6 = 30 \\ 0,6y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 + 0y_5 - y_6 = 20 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,4})$$

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Початковий опорний план

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	24	0,3	0,6	1	0	0	0	80
x_4	0	40	0	2	0	1	0	0	$+\infty$
x_5	0	290	7,2	3	0	0	1	0	40,3
x_6	0	80	2	1	0	0	0	1	40
		0	-30	-20	0	0	0	0	

Ітерація № 1

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	12	0	0,45	1	0	0	-0,15	26,7
x_4	0	40	0	2	0	1	0	0	20
x_5	0	2	0	-0,6	0	0	1	-3,6	-
x_1	30	40	1	0,5	0	0	0	0,5	80
		1200	0	-5	0	0	0	15	

Ітерація № 2

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	3	0	0	1	-0,23	0	-0,15	
x_2	20	20	0	1	0	0,5	0	0	
x_5	0	14	0	0	0	0,3	1	-3,6	
x_1	30	30	1	0	0	-0,25	0	0,5	
		1300	0	0	0	2,5	0	15	

Кількість шаф

Кількість столів

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Початковий опорний план

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	24	0,3	0,6	1	0	0	0	80
x_4	0	40	0	2	0	1	0	0	$+\infty$
x_5	0	290	7,2	3	0	0	1	0	40,3
x_6	0	80	2	1	0	0	0	1	40
		0	-30	-20	0	0	0	0	

Ітерація № 1

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	12	0	0,45	1	0	0	-0,15	26,7
x_4	0	40	0	2	0	1	0	0	20
x_5	0	2	0	-0,6	0	0	1	-3,6	-
x_1	30	40	1	0,5	0	0	0	0,5	80
		1200	0	-5	0	0	0	15	

Ітерація № 2

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	3	0	0	1	-0,23	0	-0,15	
x_2	20	20	0	1	0	0,5	0	0	
x_5	0	14	0	0	0	0,3	1	-3,6	
x_1	30	30	1	0	0	-0,25	0	0,5	
		1300	0	0	0	2,5	0	15	

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Початковий опорний план

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	24	0,3	0,6	1	0	0	0	80
x_4	0	40	0	2	0	1	0	0	$+\infty$
x_5	0	290	7,2	3	0	0	1	0	40,3
x_6	0	80	2	1	0	0	0	1	40
		0	-30	-20	0	0	0	0	

Ітерація № 1

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	12	0	0,45	1	0	0	-0,15	26,7
x_4	0	40	0	2	0	1	0	0	20
x_5	0	2	0	-0,6	0	0	1	-3,6	-
x_1	30	40	1	0,5	0	0	0	0,5	80
		1200	0	-5	0	0	0	15	

Залишки деревини

Ітерація № 2

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	3	0	0	1	-0,23	0	-0,15	
x_2	20	20	0	1	0	0,5	0	0	
x_5	0	14	0	0	0	0,3	1	-3,6	
x_1	30	30	1	0	0	-0,25	0	0,5	
		1300	0	0	0	2,5	0	15	

Залишки
(невикористана)
ручної праці

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Початковий опорний план

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	24	0,3	0,6	1	0	0	0	80
x_4	0	40	0	2	0	1	0	0	$+\infty$
x_5	0	290	7,2	3	0	0	1	0	40,3
x_6	0	80	2	1	0	0	0	1	40
		0	-30	-20	0	0	0	0	

Ітерація № 1

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	12	0	0,45	1	0	0	-0,15	26,7
x_4	0	40	0	2	0	1	0	0	20
x_5	0	2	0	-0,6	0	0	1	-3,6	-
x_1	30	40	1	0,5	0	0	0	0,5	80
		1200	0	-5	0	0	0	15	

Ітерація № 2

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	3	0	0	1	-0,23	0	-0,15	
x_2	20	20	0	1	0	0,5	0	0	
	0	14	0	0	0	0,3	1	-3,6	
x_1	30	30	1	0	0	-0,25	0	0,5	
		1300	0	0	0	2,5	0	15	

Перевищення
затрат на
ресурси над
ціною реалізації

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Початковий опорний план

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	24	0,3	0,6	1	0	0	0	80
x_4	0	40	0	2	0	1	0	0	$+\infty$
x_5	0	290	7,2	3	0	0	1	0	40,3
x_6	0	80	2	1	0	0	0	1	40
		0	-30	-20	0	0	0	0	

Ітерація № 1

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	12	0	0,45	1	0	0	-0,15	26,7
x_4	0	40	0	2	0	1	0	0	20
x_5	0	2	0	-0,6	0	0	1	-3,6	-
x_1	30	40	1	0,5	0	0	0	0,5	80
		1200	0	-5	0	0	0	15	

Ітерація № 2

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	3	0	0	1	-0,23	0	-0,15	
x_2	20	20	0	1	0	0,5	0	0	
x_5	0	14	0	0	0	0,3	1	-3,6	
x_1	30	30	1	0	0	-0,25	0	0,5	
		1300	0	0	0	2,5	0	15	

Двоїсті оцінки

Третя теорема двоїстості. Додатнім компонентам оптимального плану однієї із взаємно двоїстих задач відповідають нульові компоненти оптимального плану другої задачі, тобто для будь-яких $i = 1, 2, \dots, m$ і $j = 1, 2, \dots, n$:
якщо $x_j^* > 0$ то $y_{m+j}^* = 0$ і якщо $x_{n+j}^* > 0$ то $y_j^* = 0$ і
аналогічно, якщо $y_j^* > 0$ то $x_{n+j}^* = 0$ і якщо $y_{m+j}^* > 0$, то
 $x_j^* = 0$.

ЕКОНОМІЧНИЙ ЗМІСТ ЗМІННИХ ПРЯМОЇ ТА ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧІ (на прикладі задачі про оптимальний асортимент)

Основні змінні

Число одиниць продукції

$$\left. \begin{array}{l} x_1^* = 30 \\ x_2^* = 20 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_5^* = 0 \\ y_6^* = 0 \end{array} \right\}$$

Перевищення затрат на ресурси
над ціною реалізації

Додаткові змінні

Додаткові змінні

Залишки (резерви) ресурсів

$$\left. \begin{array}{l} x_3^* = 3 \\ x_4^* = 0 \\ x_5^* = 14 \\ x_6^* = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1^* = 0 \\ y_2^* = 2,5 \\ y_3^* = 0 \\ y_4^* = 15 \end{array} \right\}$$

Двоїсті оцінки

Основні змінні

Пряма задача

Двоїста задача

$$y_i^* > 0$$

Ресурс дефіцитний

$$y_i^* = 0$$

Ресурс недефіцитний

$$y_i^* = \frac{\Delta F}{\Delta b_i}$$

$$\Delta F = y_i^* \Delta b_i$$

РОЗВ'ЯЗОК ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Ячейки переменных						
Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$15 x1		30	0	30	10	30
\$C\$15 x2		20	0	20	1E+30	5

Ограничения						
Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$E\$5	Деревина (м3) Фактичне використання ресурсів	21	0	24	1E+30	3
\$E\$6	Скло (м2) Фактичне використання ресурсів	40	2,5	40	13,33	40
\$E\$7	Ручна праця (люд.-год.) Фактичне використання ресурсів	276	0	290	1E+30	14
\$E\$8	Обладнання (маш.-год.) Фактичне використання ресурсів	80	15	80	3,89	60

$$\Delta F_2 = y_2^* \cdot \Delta b_2 = 2,5 \cdot 1 = 2,5 \text{ гр.од.}$$

$$\Delta F_4 = y_4^* \cdot \Delta b_2 = 15 \cdot 1 = 15 \text{ гр.од.}$$

$$y_2^* > 0$$

$$y_4^* > 0$$

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Початковий опорний план

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	24	0,3	0,6	1	0	0	0	80
x_4	0	40	0	2	0	1	0	0	$+\infty$
x_5	0	290	7,2	3	0	0	1	0	40,3
x_6	0	80	2	1	0	0	0	1	40
		0	-30	-20	0	0	0	0	

Ітерація № 1

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	12	0	0,45	1	0	0	-0,15	26,7
x_4	0	40	0	2	0	1	0	0	20
x_5	0	2	0	-0,6	0	0	1	-3,6	-
x_1	30	40	1	0,5	0	0	0	0,5	80
		1200	0	-5	0	0	0	15	

Ітерація № 2

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	3	0	0	1	-0,23	0	-0,15	
x_2	20	20	0	1	0	0,5	0	0	
x_5	0	14	0	0	0	0,3	1	-3,6	
x_1	30	30	1	0	0	-0,25	0	0,5	
		1300	0	0	0	2,5	0	15	

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Початковий опорний план

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	24	0,3	0,6	1	0	0	0	80
x_4	0	40	0	2	0	1	0	0	$+\infty$
x_5	0	290	7,2	3	0	0	1	0	40,3
x_6	0	80	2	1	0	0	0	1	40
		0	-30	-20	0	0	0	0	

Ітерація № 1

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	12	0	0,45	1	0	0	-0,15	26,7
x_4	0	40	0	2	0	1	0	0	20
x_5	0	2	0	-0,6	0	0	1	-3,6	-
x_1	30	40	1	0,5	0	0	0	0,5	80
		1200	0	-5	0	0	0	15	

Ітерація № 2

Базис	c_i	План	30	20	0	0	0	0	Θ_{ij}
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	3	0	0	1	-0,23	0	-0,15	
x_2	20	20	0	1	0	0,5	0	0	
	0	14	0	0	0	0,3	1	-3,6	
x_1	30	30	1	0	0	-0,25	0	0,5	
		1300	0	0	0	2,5	0	15	

Перевищення
затрат на
ресурси над
ціною реалізації

РОЗВ'ЯЗОК ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости						
Лист: [Книга1.xlsx]Лист2						
Отчет создан: 28.09.2014 16:10:48						
Ячейки переменных						
Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$15 x1		30	0	30	10	30
\$C\$15 x2		20	0	20	1E+30	5
Ограничения						
Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$E\$5	Деревина (м3) Фактичне використання ресурсів	21	0	24	1E+30	3
\$E\$6	Скло (м2) Фактичне використання ресурсів	40	2,5	40	13,33	40
\$E\$7	Ручна праця (люд.-год.) Фактичне використання ресурсів	276	0	290	1E+30	14
\$E\$8	Обладнання (маш.-год.) Фактичне використання ресурсів	80	15	80	3,89	60

$$Z = 24y_1 + 40y_2 + 290y_3 + 80y_4 \rightarrow \min ,$$

$$\begin{cases} 0,3y_1 + 7,2y_3 + 2y_4 \geq 30, \\ 0,6y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \geq 20, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0.$$

$$B_{столи} = 0,3 \cdot 0 + 7,2 \cdot 0 + 2 \cdot 15 = 30$$

$$Ц_{столи} = 30$$

$$B_{столи} = Ц_{столи}$$

РОЗВ'ЯЗОК ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

	A	B	C	D	E	F	G	H																																			
1	Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости																																										
2	Лист: [Книга1.xlsx]Лист2																																										
3	Отчет создан: 28.09.2014 16:10:48																																										
4																																											
5																																											
6	Ячейки переменных																																										
7	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Ячейка</th> <th>Имя</th> <th>Окончательное Значение</th> <th>Приведенн. Стоимость</th> <th>Целевая функция Коэффициент</th> <th>Допустимое Увеличение</th> <th>Допустимое Уменьшение</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>\$B\$15 x1</td> <td></td> <td>30</td> <td>0</td> <td>30</td> <td>10</td> <td>30</td> </tr> <tr> <td>\$C\$15 x2</td> <td></td> <td>20</td> <td>0</td> <td>20</td> <td>1E+30</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table>								Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение	\$B\$15 x1		30	0	30	10	30	\$C\$15 x2		20	0	20	1E+30	5														
Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение																																					
\$B\$15 x1		30	0	30	10	30																																					
\$C\$15 x2		20	0	20	1E+30	5																																					
8																																											
9																																											
10																																											
11																																											
12	Ограничения																																										
13	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Ячейка</th> <th>Имя</th> <th>Окончательное Значение</th> <th>Тень Цена</th> <th>Ограничение Правая сторона</th> <th>Допустимое Увеличение</th> <th>Допустимое Уменьшение</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>\$E\$5</td> <td>Деревина (м3) Фактичне використання ресурсів</td> <td>21</td> <td>0</td> <td>24</td> <td>1E+30</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>\$E\$6</td> <td>Скло (м2) Фактичне використання ресурсів</td> <td>40</td> <td>2,5</td> <td>40</td> <td>13,33</td> <td>40</td> </tr> <tr> <td>\$E\$7</td> <td>Ручна праця (люд.-год.) Фактичне використання ресурсів</td> <td>276</td> <td>0</td> <td>290</td> <td>1E+30</td> <td>14</td> </tr> <tr> <td>\$E\$8</td> <td>Обладнання (маш.-год.) Фактичне використання ресурсів</td> <td>80</td> <td>15</td> <td>80</td> <td>3,89</td> <td>60</td> </tr> </tbody> </table>								Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение	\$E\$5	Деревина (м3) Фактичне використання ресурсів	21	0	24	1E+30	3	\$E\$6	Скло (м2) Фактичне використання ресурсів	40	2,5	40	13,33	40	\$E\$7	Ручна праця (люд.-год.) Фактичне використання ресурсів	276	0	290	1E+30	14	\$E\$8	Обладнання (маш.-год.) Фактичне використання ресурсів	80	15	80	3,89	60
Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение																																					
\$E\$5	Деревина (м3) Фактичне використання ресурсів	21	0	24	1E+30	3																																					
\$E\$6	Скло (м2) Фактичне використання ресурсів	40	2,5	40	13,33	40																																					
\$E\$7	Ручна праця (люд.-год.) Фактичне використання ресурсів	276	0	290	1E+30	14																																					
\$E\$8	Обладнання (маш.-год.) Фактичне використання ресурсів	80	15	80	3,89	60																																					
14																																											
15																																											
16																																											
17																																											
18																																											
19																																											

$$Z = 24y_1 + 40y_2 + 290y_3 + 80y_4 \rightarrow \min ,$$

$$\begin{cases} 0,3y_1 + 7,2y_3 + 2y_4 \geq 30, \\ 0,6y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \geq 20, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,3y_1 + 7,2y_3 + 2y_4 \geq 30, \\ 0,6y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \geq 20, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0.$$

$$B_{шафи} = 0,6 \cdot 0 + 2 \cdot 2,5 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 15 = 20$$

$$Ц_{шафи} = 20$$

$$B_{шафи} = Ц_{шафи}$$

$$\Delta \mathbf{b}_r = \frac{y_s^*}{y_r^*} \Delta \mathbf{b}_s$$

АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗЛП

1-а задача аналізу на чутливість

РОЗВ'ЯЗОК ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости							
2	Лист: [Книга1.xlsx]Лист2							
3	Отчет создан: 28.09.2014 16:10:48							
4								
5								
6	Ячейки переменных							
7				Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое
8	Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Кoeffициент	Увеличение	Уменьшение	
9	\$B\$15 x1		30	0	30	10	30	
10	\$C\$15 x2		20	0	20	1E+30	5	
11								
12	Ограничения							
13			Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое	
14	Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение	
15	\$E\$5	Древина (м3) Фактичне використання ресурсів	21	0	24	1E+30	3	
16	\$E\$6	Скло (м2) Фактичне використання ресурсів	40	2,5	40	13,33	40	
17	\$E\$7	Ручна праця (люд.-год.) Фактичне використання ресурсів	276	0	290	1E+30	14	
18	\$E\$8	Обладнання (маш.-год.) Фактичне використання ресурсів	80	15	80	3,89	60	
19								

$$0 < c_1 < 40$$

$$15 < c_2 < +\infty$$

АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗЛП

2-а задача аналізу на чутливість

РОЗВ'ЯЗОК ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости							
2	Лист: [Книга1.xlsx]Лист2							
3	Отчет создан: 28.09.2014 16:10:48							
4								
5								
6	Ячейки переменных							
7				Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое
8	Ячейка	Имя		Значение	Стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
9	\$B\$15 x1			30	0	30	10	30
10	\$C\$15 x2			20	0	20	1E+30	5
11								
12	Ограничения							
13				Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое
14	Ячейка	Имя		Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение
15	\$E\$5	Древина (м3) Фактичне використання ресурсів		21	0	24	1E+30	3
16	\$E\$6	Скло (м2) Фактичне використання ресурсів		40	2,5	40	13,33	40
17	\$E\$7	Ручна праця (люд.-год.) Фактичне використання ресурсів		276	0	290	1E+30	14
18	\$E\$8	Обладнання (маш.-год.) Фактичне використання ресурсів		80	15	80	3,89	60
19								

$$21 < b_1 < +\infty$$

$$0 < b_2 < 53,33$$

$$276 < b_3 < +\infty$$

$$20 < b_4 < 83,89$$

$$0 < b_2 < 53,33$$

$$20 < b_4 < 83,89$$

АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗЛП

3-я задача аналізу на чутливість

ТАБЛИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ДО ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

	A	B	C	D	E
1	Вихідні дані				
2	Ресурси	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції		Запаси ресурсів	Фактичне використання ресурсів
3		Стіл	Шафа		
4	Деревина (м ³)	0,3	0,6	24	0
5	Скло (м ²)		2	40	0
6	Ручна праця (люд.-год.)	7,2	3	290	0
7	Обладнання (маш.-год.)	2	1	80	0
8	Прибуток від реалізації одиниці продукції (гр. од.)	30	20		
9					
10					
11					
12	Результати розв'язку задачі				
13					
14		x ₁	x ₂	F	
15				0	
16					

$$F = 508x_1 + 527x_2 + 548x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 \leq 62, \\ 0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \leq 45, \\ 0,1x_2 + 0,1x_3 \leq 22, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

	A	B	C	D	E	F
1	ВИХІДНІ ДАНІ					
2						
4	Продукція	Норми витрат сировини (т) на виготовлення 1 т камелі			Місячні запаси сировини (т)	Фактично використано сировини (т)
5		Сировина	A	B	C	
6	Цукор-пісок	0,8	0,5	0,6	62	0,0
7	Патока	0,4	0,4	0,3	45	0,0
8	Фруктове пюре	0	0,1	0,1	22	0,0
9	Ціна реалізації 1 т продукції (грошові одиниці)	508	527	548		
10						
11	РОЗВ'ЯЗОК					
12		x ₁	x ₂	x ₃	F	
13					0,0	

$$F = 2x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33} \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 400, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 300, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 280, \\ 30x_{11} + 20x_{21} + 60x_{31} \geq 6000, \\ 20x_{12} + 30x_{22} + 40x_{32} \geq 5000, \\ 40x_{13} + 50x_{23} + 20x_{33} \geq 8000, \end{cases}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	ВИХІДНІ ДАНІ ЗАДАЧІ							
2	Обмеження							
3								
4	Обмеження	Коефіцієнти при невідомих			Ліва частина	Знак	Права частина	
5	1	1	1	1	0,0	<=	400	
6	2	1	1	1	0,0	<=	300	
7	3	1	1	1	0,0	<=	280	
8	4	30	20	40	0,0	>=	6000	
9	5	20	30	50	0,0	>=	5000	
10	6	60	40	20	0,0	>=	8000	
11								
12	Коефіцієнти цільової функції c _{ij}							
13	i	j						
14		1	2	3				
15	1	2	4	3				
16	2	3	2	5				
17	3	5	3	6				
18								
19	РОЗВ'ЯЗОК							
20	Невідомі задачі x _{ij}							
21	i	j						
22		1	2	3				
23	1							
24	2							
25	3							
26								

F = 0,0