Тема 2.4. ЦІЛОЧИСЛОВЕ ПРОГРАМУВАННЯ

<u>План</u>

1. Задача цілочислового програмування та її особливості.
2. Геометрична інтерпретація задачі цілочислового програмування.
3. Методи розв’язання цілочислових задач лінійного програмування.
   3.1. Загальна характеристика методів розв’язання цілочислових задач лінійного програмування.
   3.2. Методи відтинання. Метод Гоморі.
   3.3. Комбінаторні методи. Метод гілок та меж.
4. Розв’язання задач цілочислового програмування на ПЕОМ.

Тема 11. Цілочислове програмування Лабораторна робота 9. Задача оптимального розкрою однорідного матеріалу			
Результати навчання: **РН 1, РН 2, РН 3, РН 4, РН 5, РН 6**	Кількість годин: лекції – 2 лаб. – 2 сам. – 10	Література: [6, стор. 170–185] [7, стор. 196–211]	Лінк на MOODLE: https://goo.su/5g68
Опис теми	Задача цілочислового програмування та її особливості. Економічна та геометрична інтерпретація задачі цілочислового програмування. Методи розв’язання задачі цілочислового програмування. Використання програмних засобів для розв’язання задач цілочислового програмування		

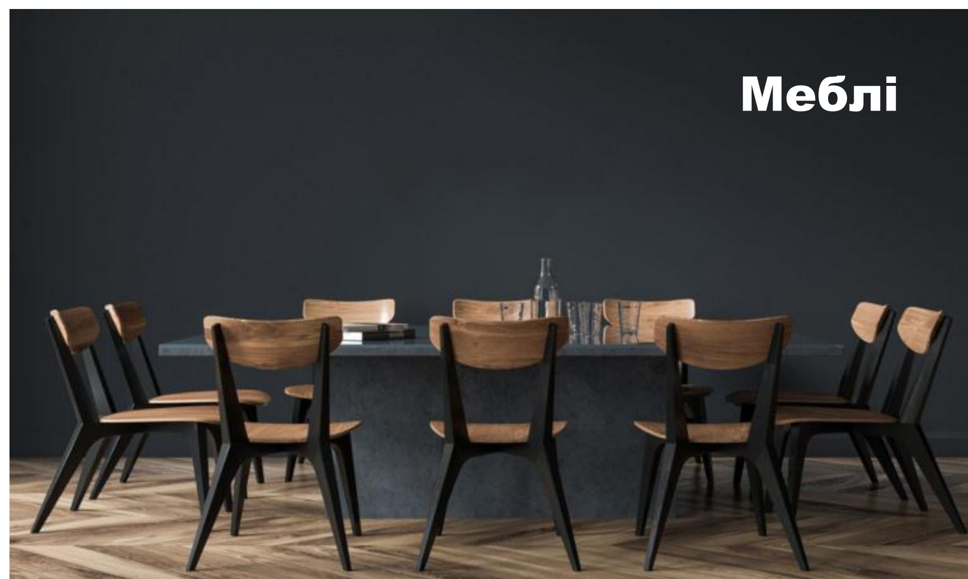
Інформаційні ресурси	**БАЗОВА ЛІТЕРАТУРА** 1. *Вітлінський В.В. Моделювання економіки: Навч. посібник. К.: КНЕУ, 2003. 408 с.* 2. *Лук’яненко І.Г., Краснікова Л.І., Економетрика: підручник. К.: товариство “Знання”, КОО, 1998. 494 с.* 3. *Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П. Економетрія: підручник. К.: КНЕУ, 2000. 296 с.* 4. *Толбатов Ю.А. Економетрика: підручник для студентів екон. спеціальностей вищого навчального закладу. К.: Четверта хвиля, 1997. 320 с.* 5. *Курс лекцій з дисципліни „Економетрія” для студентів напряму підготовки „Економіка і підприємництво”. / В.І. Бредюк. Рівне: НУВГП, 2006. 154 с.* 6. *Економіко-математичне моделювання: навчальний посібник / За ред. О. Т. Іващука. Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. 704 с.* 7. *Економіко-математичне моделювання в середовищі табличного процесора MS Excel: навч. посіб. / В. І. Бредюк, О. І. Джоші. Рівне : НУВГП, 2015. 242 с. http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/2944*

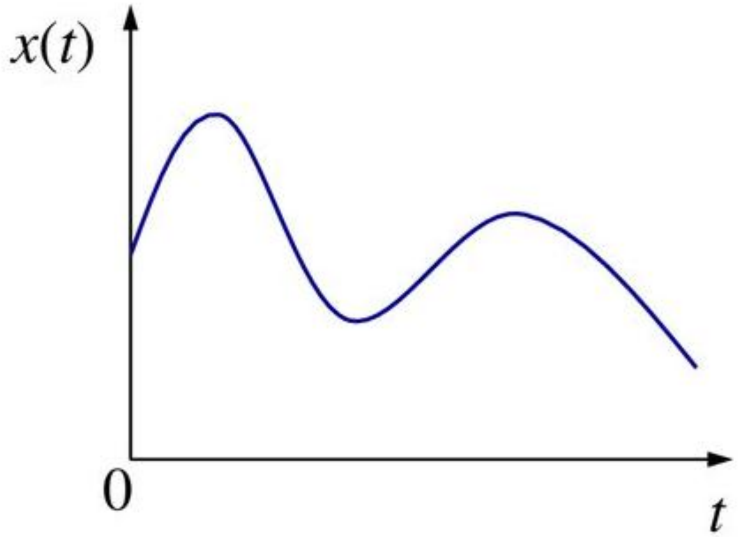
Будівельні матеріали (незлічені):
пісок, гравій, цемент...

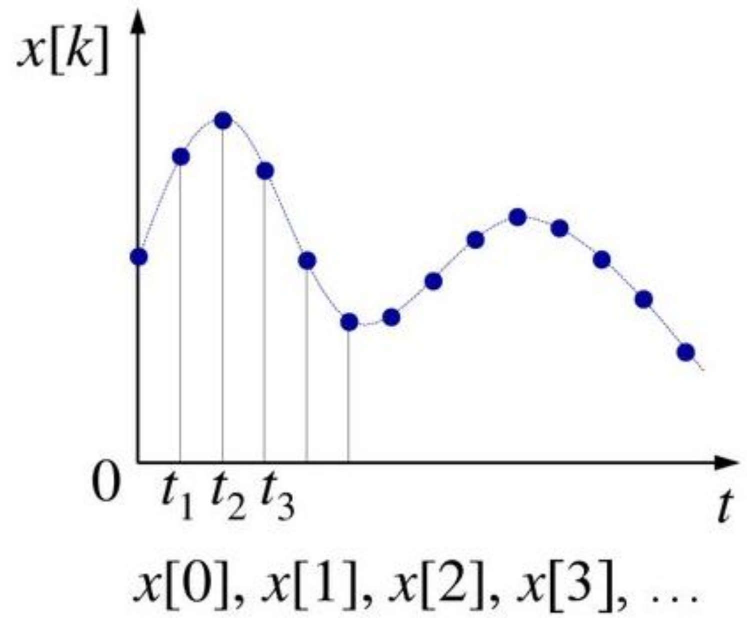
Електроенергія,
вода, газ...

Продукти харчування

Будівельні матеріали (злічені): цегла, труби, плити…







Неперервна випадкова величина – випадкова величина, яка приймає всі можливі значення з певного скінченого або нескінченого проміжку.

Дискретна випадкова величина – випадкова величина, яка приймає окремі, ізольовані можливі значення з певними ймовірностями.

- **задача цілочислового програмування** – задача математичного програмування, змінні якої мають набувати тільки цілих значень;
- **задача частково цілочислового програмування** – задача математичного програмування в якій цілочислових значень набувають не всі, а одна чи декілька змінних;
- **задача цілочислового програмування з бінарними (або альтернативними) змінними** – задача математичного програмування, в яких змінні набувають лише двох значень (0 або 1).

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max(\min), \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i, \quad \left(i = \overline{1, m}\right), \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0, \quad \left(j = \overline{1, n}\right), \qquad (3)$$

$$x_j \text{ — цілі числа}, \quad \left(j = \overline{1, n}\right). \qquad (4)$$

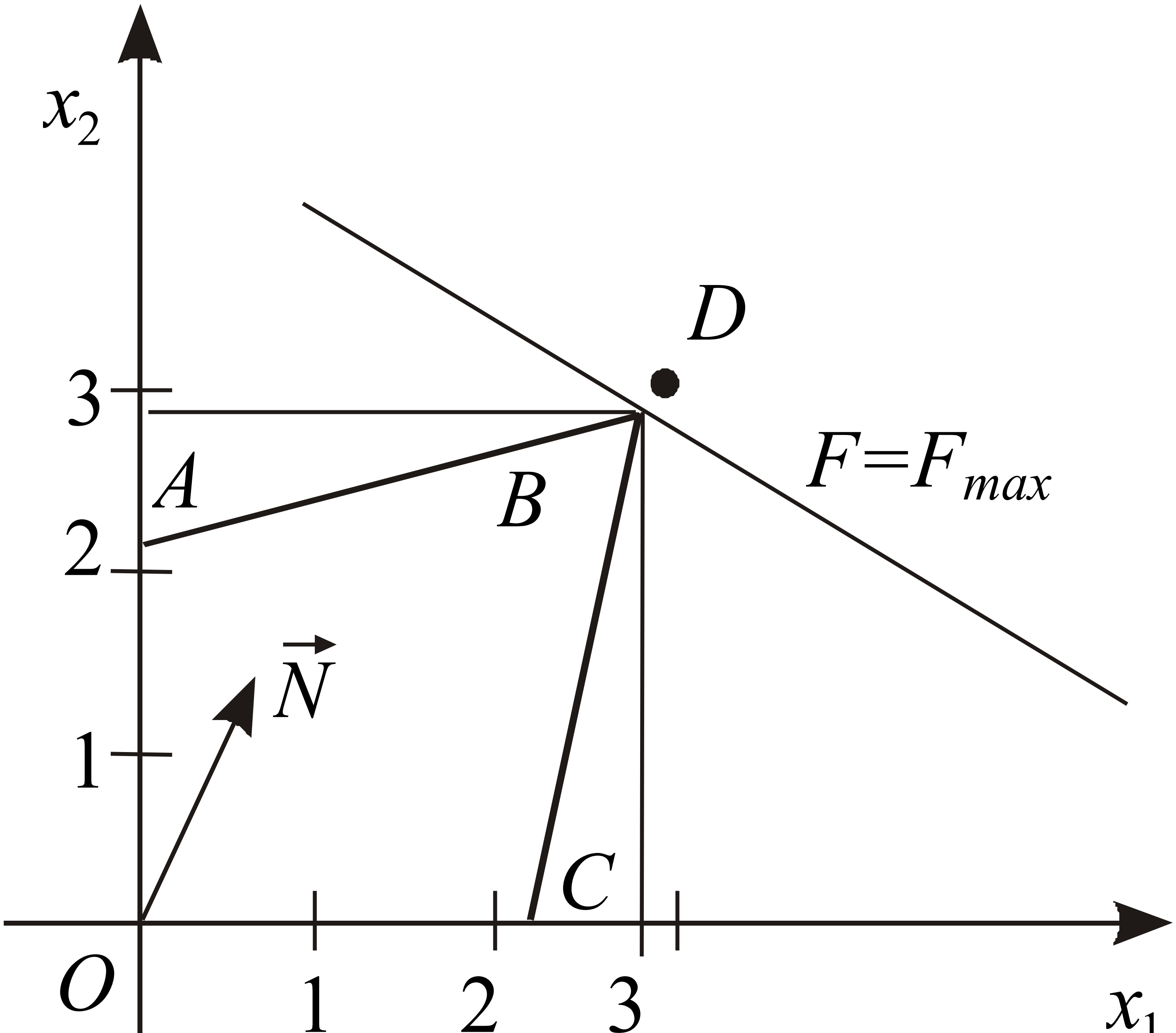
ЦІЛОЧИСЛОВА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З БІНАРНИМИ ЗМІННИМИ

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \tag{5}$$

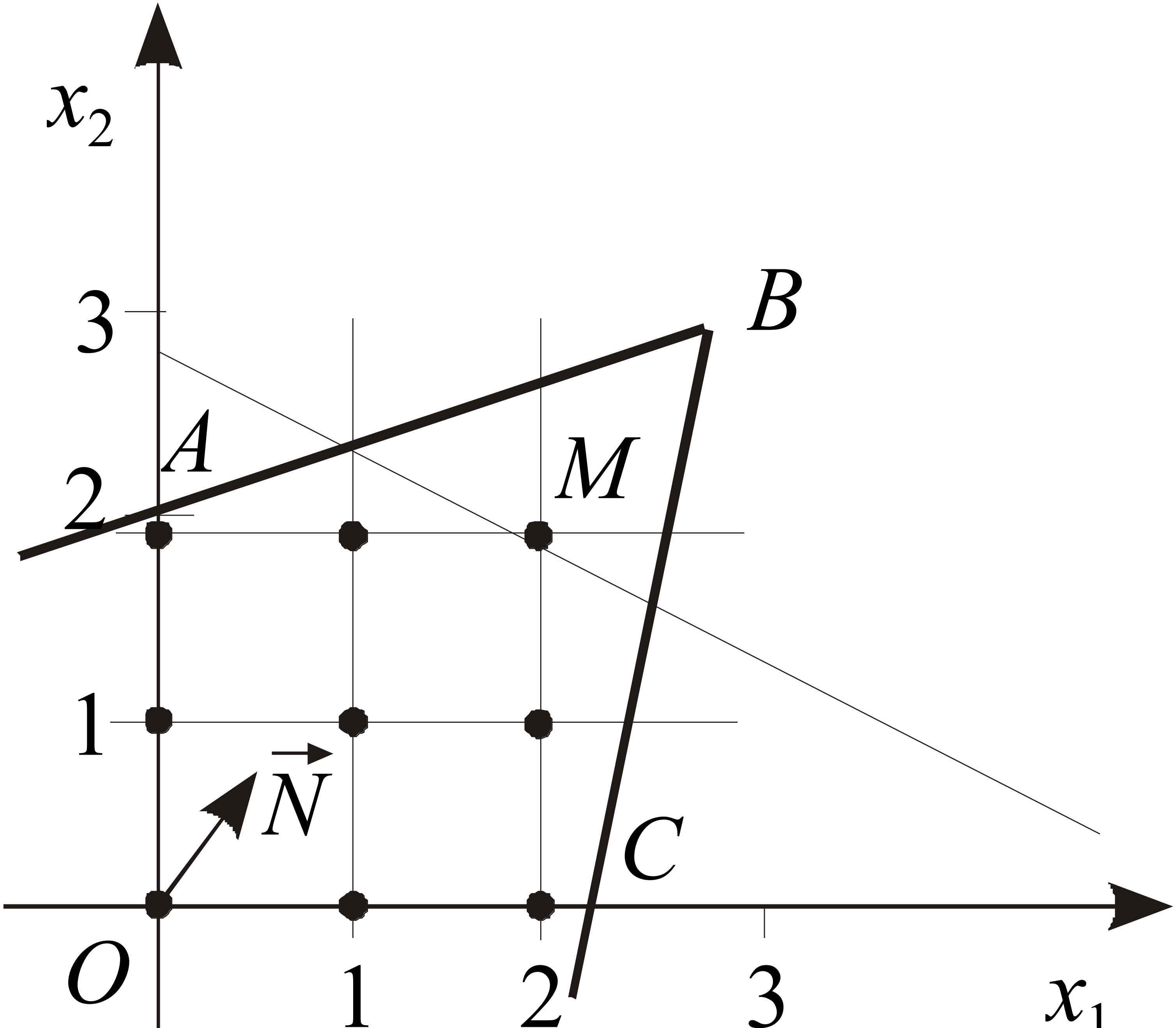
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i, \quad \left(i = \overline{1, m}\right) \tag{6}$$

$$x_j \ge 0, \quad \left(j = \overline{1, n}\right) \tag{7}$$

$$x_j = 0 \text{ або } 1 \quad \left(j = \overline{1, n}\right) \tag{8}$$



x_2
3
2
1
A
B
C
D
$F = F_{max}$
$\vec{N}$
O
1
2
3
x_1



x_2
3
2
1
A
B
M
C
$\vec{N}$
O
1
2
3
x_1

Оптимальна партія поставки одягу – 12345,6 одиниць

≈ 12346

Оптимальний канцелярський набір

Методи розв'язування задач:

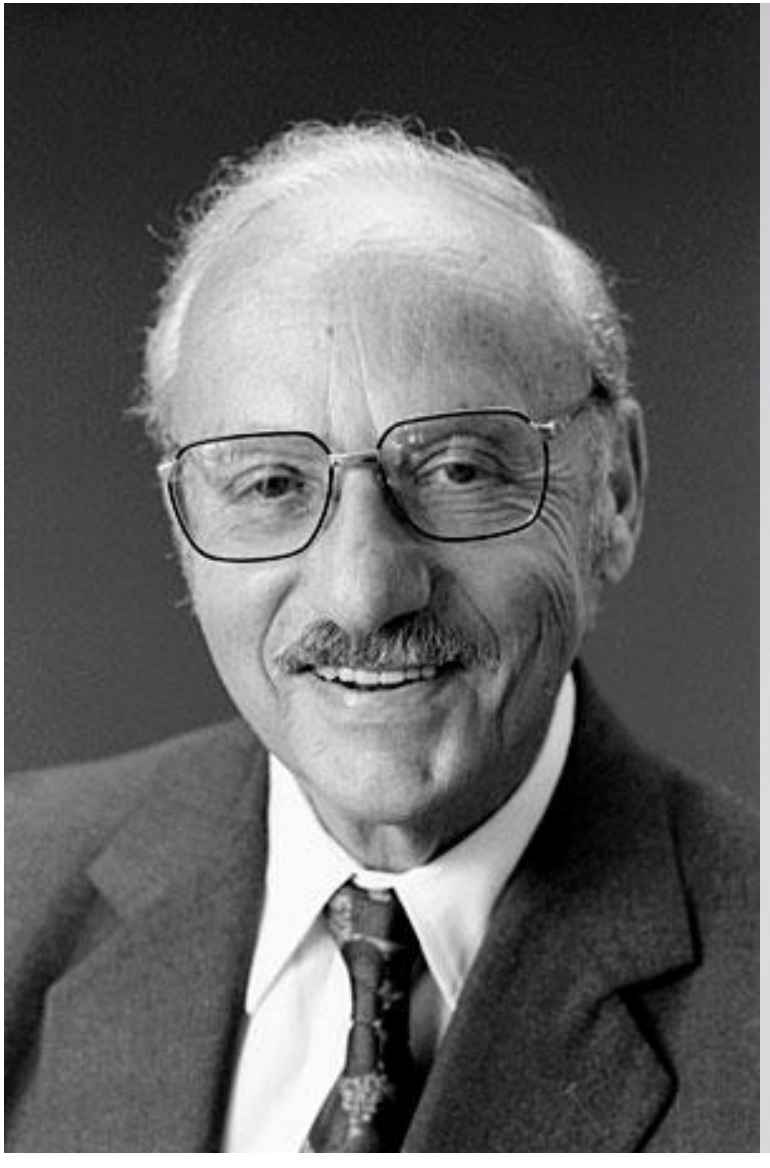
1) **точні методи**:

- ***методи відтинання*** (методи розв’язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі); методи розв’язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування));
- ***комбінаторні методи*** (метод гілок і меж);

2) **наближені методи** (метод локальної оптимізації (метод вектора спаду); модифікації точних методів; методи випадкового пошуку та ін.).

$$\Delta = F(X^*) - F(X_1) \quad \textbf{(9)}$$

$$\delta = \frac{\left| F(X^*) - F(X_1) \right|}{\left| F(X^*) \right|} \quad \textbf{(10)}$$



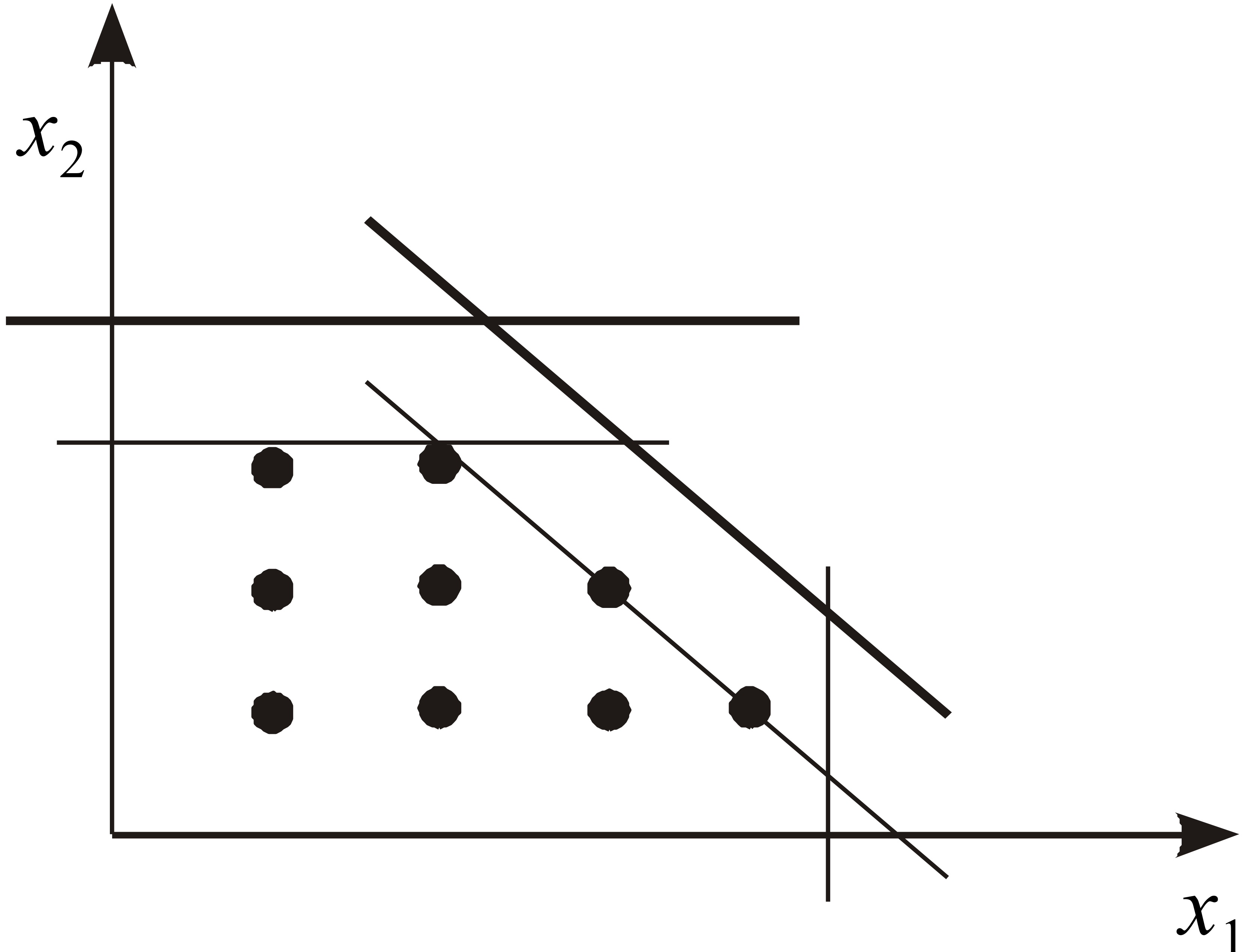
Джордж Бернард Данціг
(1914-2005)

Ральф Едвард Гоморі
(1929 р.н.)
http://www.ralphgomory.com/

В основу методів відтинання покладено ідею **Данціга**. Сутність цієї ідеї полягає у тому, що спочатку задача розв'язується без врахування умови цілочисельності, тобто як звичайна задача лінійного програмування. Якщо у результаті розв'язання такої задачі ми отримаємо цілочисловий оптимальний план, задача розв'язана. Якщо ж оптимальний план не є цілочисловим, до обмежень задачі додається нове обмеження, що має наступні властивості:

- ✓ воно повинно бути лінійним;
- ✓ воно повинно відтинати знайдений оптимальний не цілочисловий план;
- ✓ воно не повинно відтинати жодного цілочислового плану.

Таке додаткове обмеження, якому притаманні ці властивості, називається **правильним відтинанням**.



x_2
x_1

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\,, \quad i = \overline{1, m}; \tag{12}$$

$$x_j \geq 0\,, \quad j = \overline{1, n}; \tag{13}$$

$$x_j \text{ — цілі числа } \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{14}$$

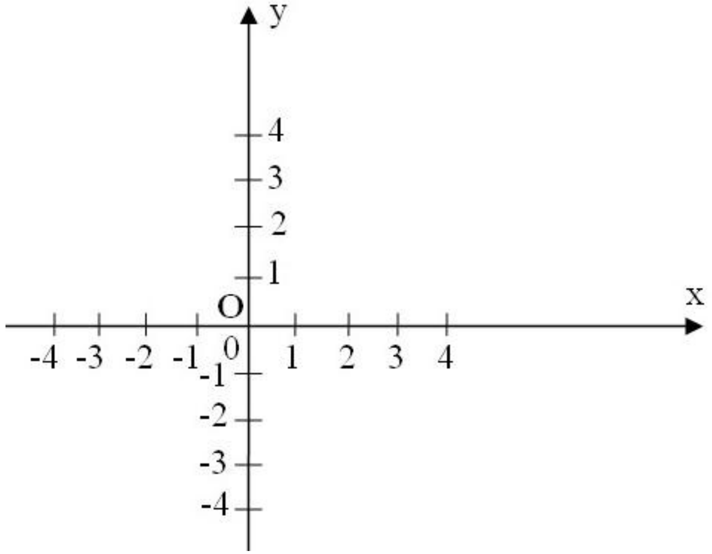
$$\{a\} = a - [a] \tag{15}$$

$$x_i = \beta_i - \alpha_{im+1} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{in} x_n = \beta_i - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j \tag{16}$$

$$x_i = [\beta_i] + \{\beta_i\} - \sum_{j=m+1}^{n} [\alpha_{ij}] x_j - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j \tag{17}$$

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j \geq \{\beta_i\} \tag{18}$$

$$\{a\} = a - [a]$$



Наприклад

$$a = 2\frac{1}{3}, \qquad [a] = 2, \qquad \{a\} = 2\frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{3}$$

$$a = -2\frac{1}{3}, \qquad [a] = -3, \qquad \{a\} = -2\frac{1}{3} - (-3) = \frac{2}{3}$$

Приклад

Підприємству для встановлення додаткового обладнання виділено 6,5 м^2 площі. На придбання обладнання підприємство може витратити 10 тис. гр. од., при цьому воно може купити обладнання двох видів. Вартість обладнання І виду – 1 тис. гр. од., а ІІ виду – 3 тис. гр. од. Придбання одного комплекту обладнання І виду дозволяє збільшити випуск продукції у зміну на 2 од., а одного комплекту ІІ виду – на 4 од. визначити такий набір додаткового обладнання, який дозволить максимально збільшити випуск продукції, за умови, що обладнання І виду потребує площі 2 м^2 , а ІІ виду – 1 м^2.

Вихідні дані

Ресурси	Тип обладнання		Запаси ресурсів
	І	ІІ	
Площа під обладнання (м^2)	2	1	6,5
Вартість обладнання (тис. гр. од.)	1	3	10
Випуск продукції (од.)	2	4	

Математична модель

$$F = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \le 6{,}5 \\ 1x_1 + 3x_2 \le 10 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \quad \left(i = \overline{1{,}2}\right)$$

$$x_i - \text{цілі}$$

Випуск

Площа

Вартість обладнання

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

$$F = 2x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 6{,}5 \\ 1x_1 + 3x_2 + 1x_4 = 10 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \;\; \left(i = \overline{1{,}4}\right)$$

$$x_i - \text{цілі}$$

Базис	C_i	План				
Δ						

Базис	C_i	План				
Δ						

$$F = 2x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \rightarrow max$$

Базис	C_i	План	2	4	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
Δ			–2	–4	0	0

Базис	C_i	План
x_3	0	6,5
x_4	0	10
Δ		

$$F = 2x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 6{,}5 \\ 1x_1 + 3x_2 + 1x_4 = 10 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1{,}4}\right)$$

$$x_i - \textit{цілі}$$

Базис	C_i	План	2	4	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	0	6,5	2	1		
x_4	0	10	1	3		
Δ			–2	–4	0	0

Базис	c_i	План	2	4	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	0	6,5	2	1	1	0
x_4	0	10	1	3	0	1
		0	–2	–4	0	0

Базис	C_i	План	2	4	0	0	Θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	6,5	2	1	1	0	6,5
x_4	0	10	1	3	0	1	3,33
Δ			–2	–4	0	0	

$$\Theta_1 = \frac{b_i}{a_{ip}} = \frac{6,5}{1} = 6,5$$

$$\Theta_2 = \frac{b_i}{a_{ip}} = \frac{10}{3} = 3,33$$

Базис	C_i	План	2	4	0	0	Θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	6,5	2	1	1	0	6,5
x_4	0	10	1	3	0	1	3,33
Δ			–2	–4	0	0	

Базис	C_i	План	2	4	0	0	Θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0						
x_2	4						
Δ							

Базис	C_i	План	2	4	0	0	Θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	6,5	2	1	1	0	6,5
x_4	0	10	1	3	0	1	3,33
Δ			–2	–4	0	0	

Базис	C_i	План	2	4	0	0	Θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	3,17	1,67	0	0	0,67	
x_2	4	3,33	0,33	1	0,33	0	
Δ		13,33	-0,67	0	1,33	0	

$$\frac{10}{3} = 3{,}33 \qquad \frac{1}{3} = 0{,}33 \qquad 6{,}5 - \frac{10 \cdot 1}{3} = 3{,}17 \qquad 2 - \frac{1 \cdot 1}{3} = 1{,}67 \qquad 0 - \frac{10 \cdot (-4)}{3} = 13{,}33$$

Базис	C_i	План	2	4	0	0	Θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	3,17	1,67	0	0	0,67	1,9
x_2	4	3,33	0,33	1	0,33	0	10
Δ		13,33	-0,67	0	1,33	0	

$$\Theta_1 = \frac{b_i}{a_{ip}} = \frac{3{,}17}{1{,}67} = 1{,}9$$

$$\Theta_2 = \frac{b_i}{a_{ip}} = \frac{3{,}33}{0{,}33} = 10$$

Базис	C_i	План	2	4	0	0	Θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	3,17	1,67	0	0	0,67	1,9
x_2	4	3,33	0,33	1	0,33	0	10
Δ		13,33	-0,67	0	1,33	0	

Базис	C_i	План	2	4	0	0	Θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	2	1,9	1	0	0	0,4	
x_2	4	2,7	0	1	0,33	-0,13	
Δ		14,6	0	0	1,33	0,27	

$$\frac{3{,}17}{1{,}67}=1{,}9 \qquad \frac{0}{1{,}67}=0 \qquad 3{,}33-\frac{3{,}17\cdot 0{,}33}{1{,}67}=2{,}7 \qquad 1-\frac{0\cdot 0{,}33}{1{,}67}=1 \qquad 13{,}33-\frac{3{,}17\cdot(-0.67)}{1{,}67}=14{,}6$$

Початковий опорний план

Базис	c_i	План	2	4	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	0	6,5	2	1	1	0
x_4	0	10	1	3	0	1
		0	–2	–4	0	0

Оптимальний план

Базис	c_i	План	2	4	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	2	1,9	1	0	0	0,4
x_2	4	2,7	0	1	0,33	-0,13
		14,6	0	0	1,33	0,27

Розв'язок задачі: $X^* = (1{,}9\ ;\ 2{,}7),\ F = 14{,}6$

$$1{,}9 = 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0{,}4x_4$$

$$\{1{,}9 - 1\} \le \{1 - 1\}x_1 + \{0 - 0\}x_2 + \{0 - 0\}x_3 + \{0{,}4 - 0\}x_4$$

$$0{,}9 \le 0{,}4x_4$$

$$F = 2x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 6{,}5 \\ 1x_1 + 3x_2 + 1x_4 = 10 \\ 0{,}4x_4 - 1x_5 = 0{,}9 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \ \left(i = \overline{1{,}5}\right)$$

$$x_i - цілі$$

Доповнений план

Базис	c_i	План	2	4	0	0	-1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	2	1,9	1	0	0	0,4	0
x_2	4	2,7	0	1	0,33	-0,13	0
x_5	-1	–0,9	0	0	0	-0,4	1
		14,6	0	0	1,33	0,27	-1

Допустимий план

Базис	c_i	План	2	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	2	1	1	0	0	–1	1
x_2	4	3	0	1	0	0,7	–0,3
x_3	0	1,5	0	0	1	1,3	–1,7
		14	0	0	0	0,7	0,7

Розв'язок задачі: $X^* = (1\ ;\ 3),\ \ F = 14$

АЛГОРИТМ МЕТОДУ ГОМОРІ

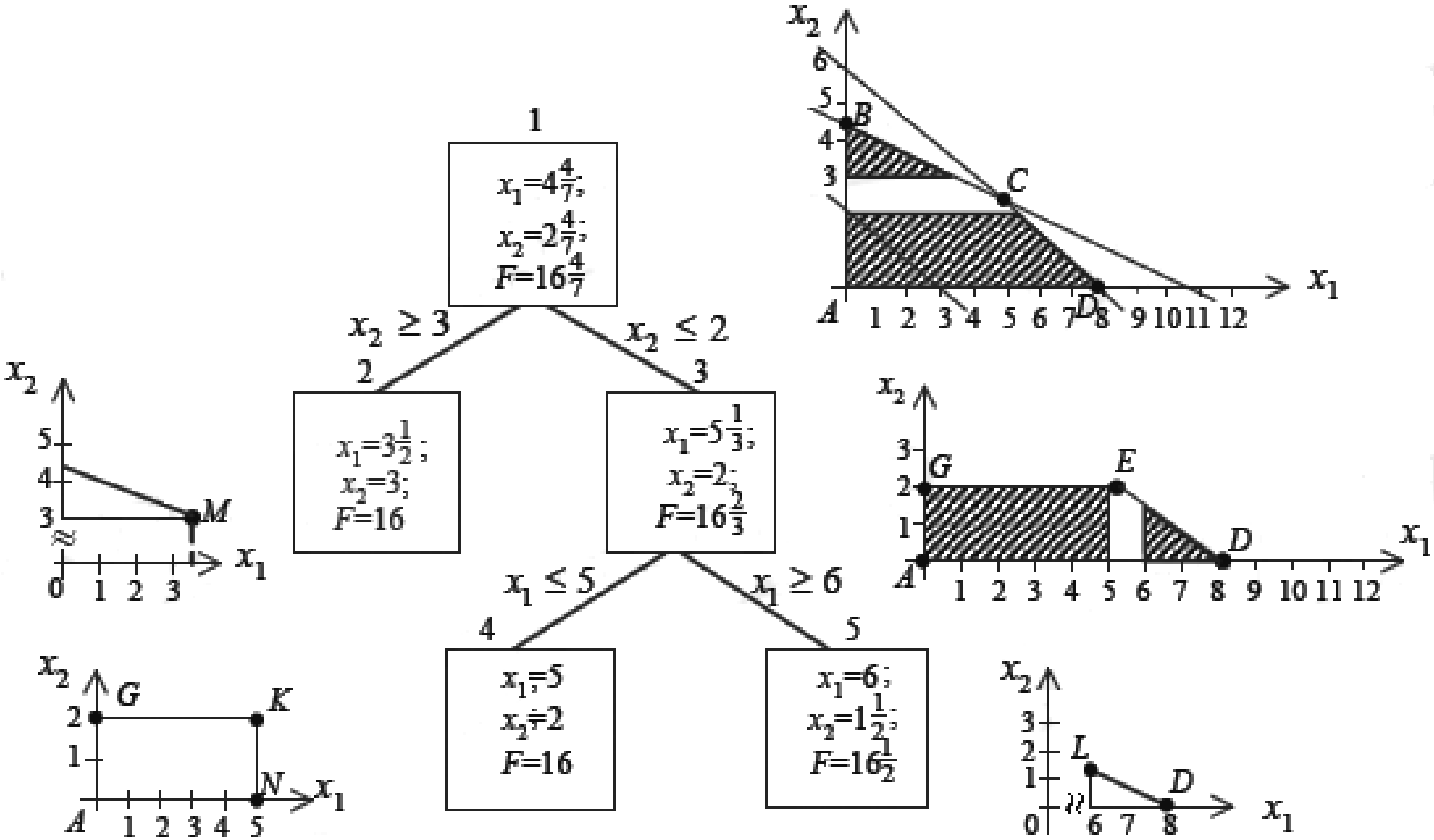
1. Симплексним методом розв’язується задача без вимог цілочисельності змінних:

- Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей план є розв’язком задачі цілочислового програмування.
- Якщо задача не має розв’язку (цільова функція необмежена, або система обмежень несумісна), то задача також не має розв’язку.

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирається змінна, яка має <u>найбільшу дробову частину</u>. На базі цієї змінної (елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому вона міститься) будується додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j \geq \{\beta_i\}$$

3. Додаткове обмеження після зведення його до канонічного вигляду і введення базисного елемента приєднується до останньої симплексної таблиці, яка містить умовно-оптимальний план. Отриману розширену задачу розв’язують і перевіряють її розв’язок на цілочисельність. Якщо він не цілочисловий, то процедуру повторюють, повертаючись до п. 2. Так діють доти, доки не буде знайдено цілочислового розв’язку або доведено, що задача не має допустимих розв’язків на множині цілих чисел.



1
$x_1=4\frac{4}{7}$;
$x_2=2\frac{4}{7}$;
$F=16\frac{4}{7}$
$x_2 \geq 3$
$x_2 \leq 2$
2
$x_1=3\frac{1}{2}$;
$x_2=3$;
$F=16$
3
$x_1=5\frac{1}{3}$;
$x_2=2$;
$F=16\frac{2}{3}$
$x_1 \leq 5$
$x_1 \geq 6$
4
$x_1=5$
$x_2=2$
$F=16$
5
$x_1=6$;
$x_2=1\frac{1}{2}$;
$F=16\frac{1}{2}$
B
C
D
A
E
G
M
K
N
L
x_1
x_2

$$x_j \le [x'_j]$$

або

$$x_j \ge [x'_j]+1$$

Перша задача:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i, \ \left(i = \overline{1, m}\right),$$

$$x_j \ge 0 \ , \left(j = \overline{1, n}\right),$$

$$x_j \text{ — цілі числа, } \ j = \overline{1, n} \ ,$$

$$x_j \le \left\lfloor x'_j \right\rfloor,$$

Друга задача

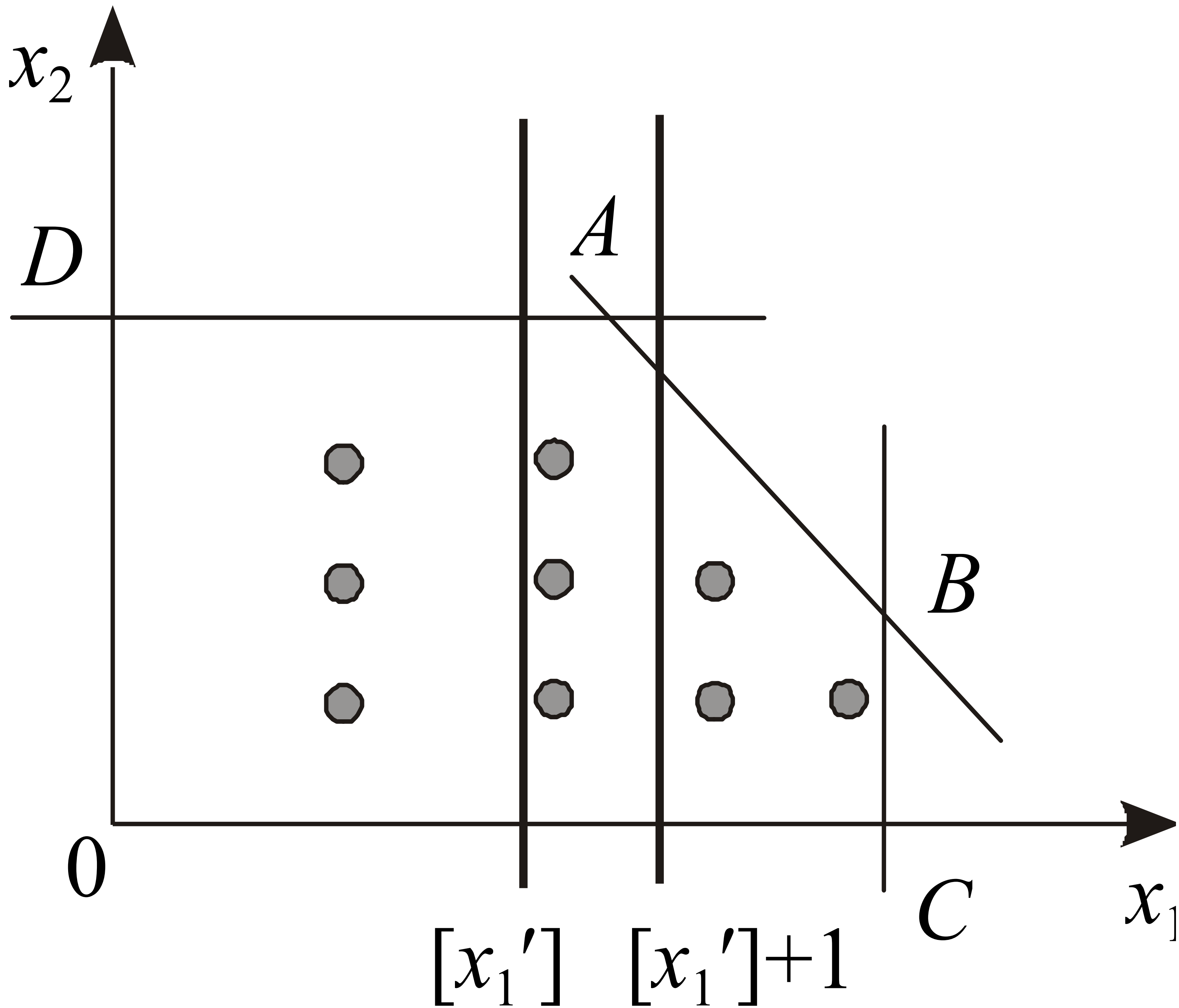
$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i, \ \left(i = \overline{1, m}\right),$$

$$x_j \ge 0, \left(j = \overline{1, n}\right),$$

$$x_j \text{ — цілі числа } \left(j = \overline{1, n}\right),$$

$$x_j \ge \lfloor x'_j \rfloor + 1,$$



x_2
D
A
B
0
C
x_1
$[x_1']$
$[x_1']+1$

АЛГОРИТМ МЕТОДУ ГІЛОК ТА МЕЖ

1. Симплексним методом розв'язують задачу (без вимог цілочисельності змінних).

- Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей розв'язок є оптимальним планом задачі цілочислового програмування;
- Якщо задача з послабленими обмеженнями не має розв'язку (цільова функція необмежена, або система обмежень несумісна), то цілочислова задача також не має розв'язку.

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирають одну з нецілочислових змінних x_i і визначають її цілу частину.

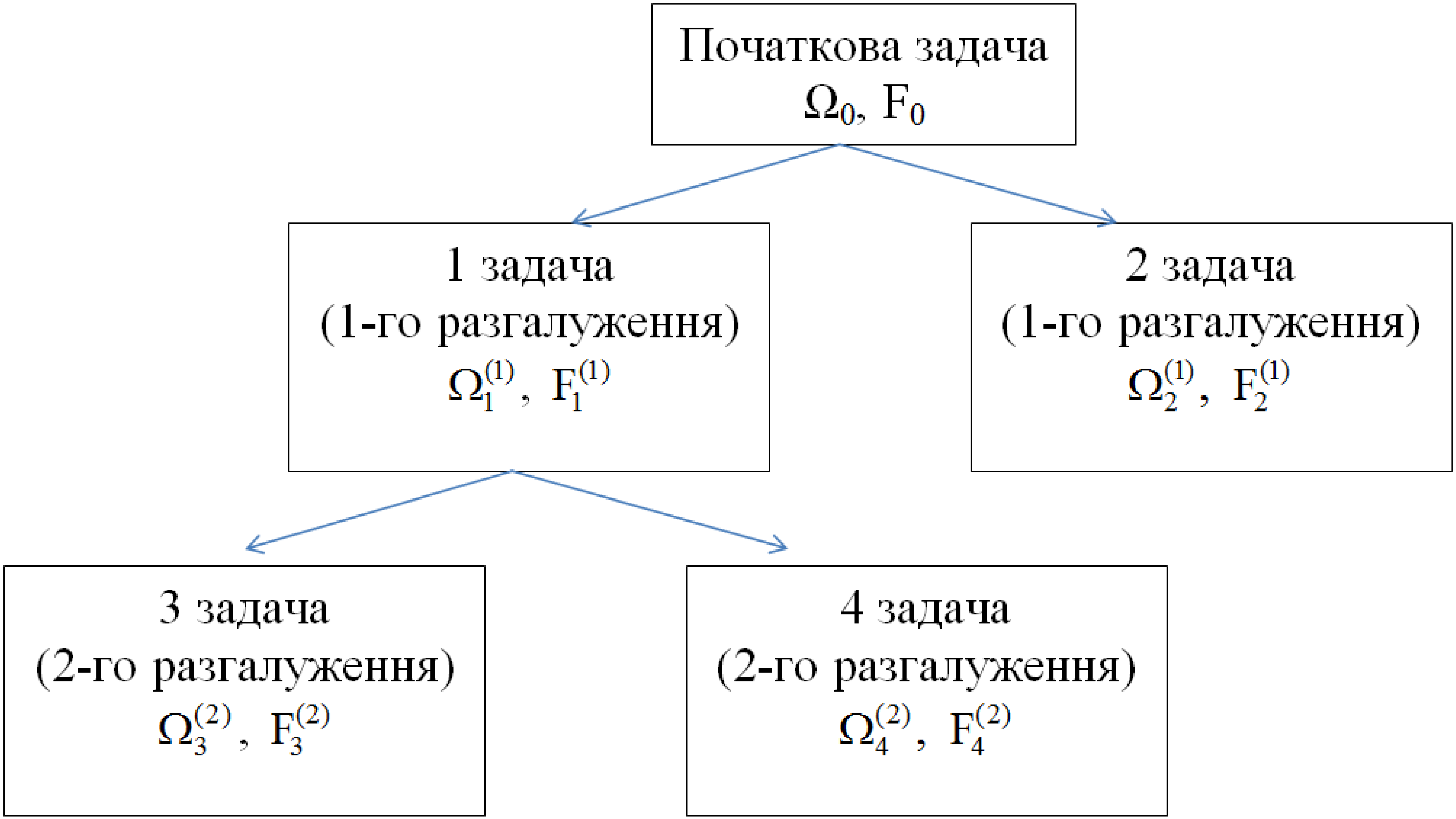
3. Записують два обмеження, що відтинають нецілочислові розв'язки

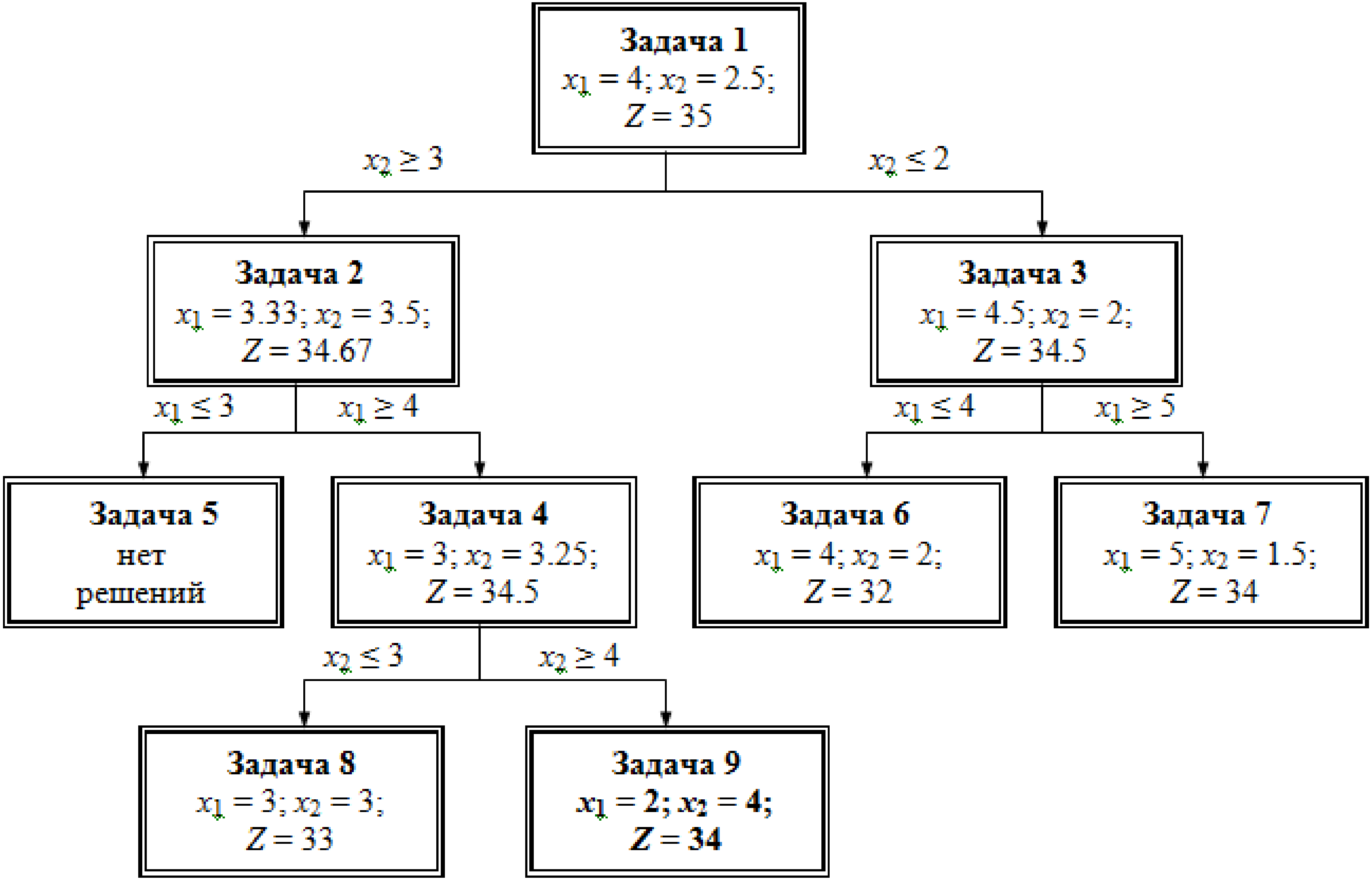
$$x_j \le \lfloor x'_j \rfloor$$

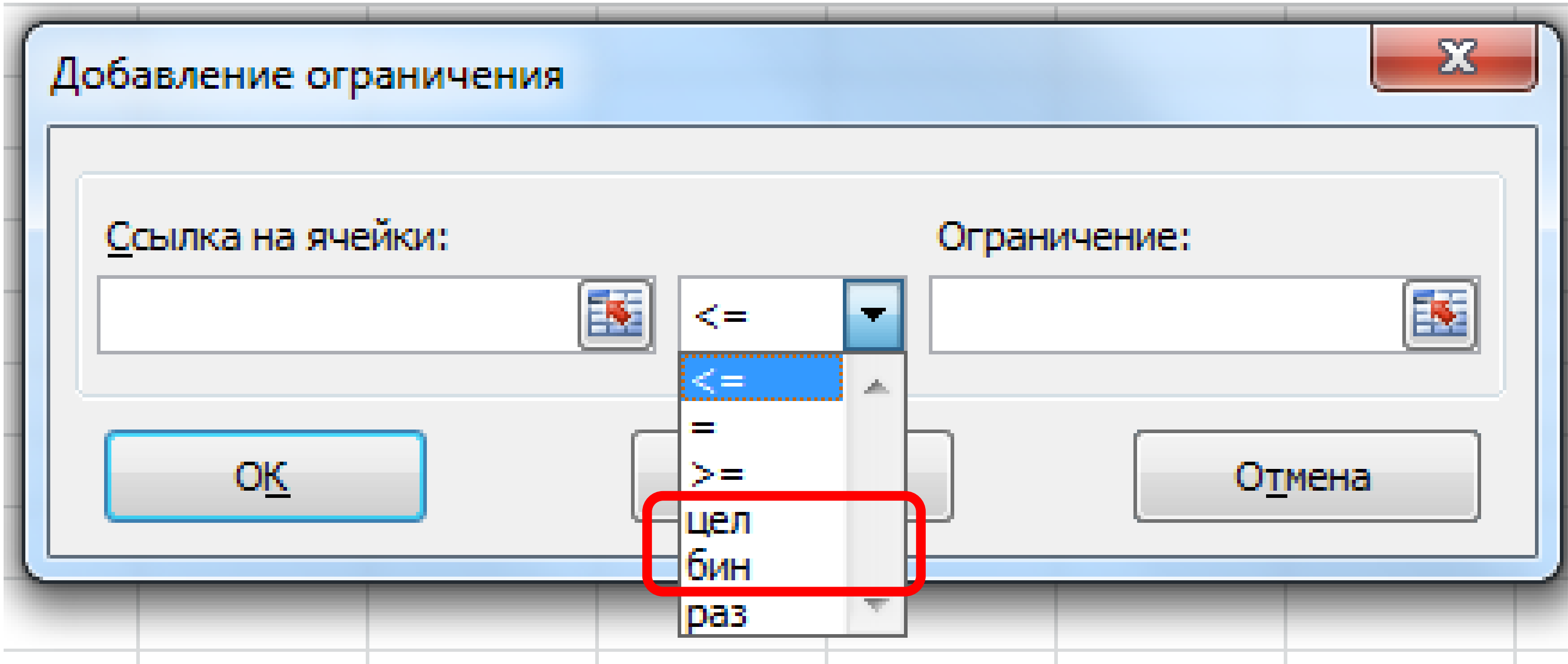
$$x_j \ge \lfloor x'_j \rfloor + 1$$

4. Кожну з одержаних нерівностей приєднують до обмежень початкової задачі. В результаті отримують дві нові цілочислові задачі лінійного програмування.

5. У будь-якій послідовності розв'язують обидві задачі. У разі, коли отримано цілочисловий розв'язок хоча б однієї із задач, значення цільової функції цієї задачі зіставляють з початковим значенням. Якщо різниця не більша від заданого числа ε, то процес розв'язування може бути закінчено. У разі, коли цілочисловий розв'язок одержано в обох задачах, то з розв'язком початкової зіставляється той, який дає краще значення цільової функції. Якщо ж в обох задачах одержано нецілочислові розв'язки, то для дальшого гілкування вибирають ту задачу, для якої здобуто краще значення цільової функції і здійснюють перехід до кроку 2.


Початкова задача
Ω_0, F_0
1 задача
(1-го разгалуження)
$\Omega_1^{(1)}$, $F_1^{(1)}$
2 задача
(1-го разгалуження)
$\Omega_2^{(1)}$, $F_2^{(1)}$
3 задача
(2-го разгалуження)
$\Omega_3^{(2)}$, $F_3^{(2)}$
4 задача
(2-го разгалуження)
$\Omega_4^{(2)}$, $F_4^{(2)}$


Задача 1
$x_1 = 4; x_2 = 2.5;$
$Z = 35$
$x_2 \geq 3$
$x_2 \leq 2$
Задача 2
$x_1 = 3.33; x_2 = 3.5;$
$Z = 34.67$
Задача 3
$x_1 = 4.5; x_2 = 2;$
$Z = 34.5$
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
$x_1 \leq 4$
$x_1 \geq 5$
Задача 5
нет
решений
Задача 4
$x_1 = 3; x_2 = 3.25;$
$Z = 34.5$
Задача 6
$x_1 = 4; x_2 = 2;$
$Z = 32$
Задача 7
$x_1 = 5; x_2 = 1.5;$
$Z = 34$
$x_2 \leq 3$
$x_2 \geq 4$
Задача 8
$x_1 = 3; x_2 = 3;$
$Z = 33$
Задача 9
$x_1 = 2; x_2 = 4;$
$Z = 34$


Добавление ограничения
Ссылка на ячейки:
Ограничение:
<=
<=
=
>=
цел
бин
раз
ОК
Отмена

Задача про оптимальне призначення

Керівнику підрозділу деякого підприємства потрібно призначити на чотири роботи чотирьох робітників. Кожний з робітників може виконувати кожну з чотирьох робіт, при цьому кожний робітник може бути призначений тільки на одну роботу, а кожна з чотирьох робіт повинна виконуватися тільки одним робітником. Вартість оплати праці кожного робітника при виконанні кожної з чотирьох робіт у грошових одиницях задана у вигляді наступної матриці C :

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 15 & 5 \\ 8 & 12 & 20 & 25 \\ 22 & 18 & 18 & 14 \\ 30 & 30 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Визначити такий план призначення робітників на роботи, при якому загальна вартість виконання усіх робіт буде мінімальною.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i - \text{й працівник призначається на } j - \text{ту роботу;} \\ 0, & \text{якщо } i - \text{й працівник не призначається на } j - \text{ту роботу.} \end{cases}$$

$$F = 20x_{11} + 30x_{12} + 15x_{13} + 5x_{14} + 8x_{21} + 12x_{22} + 20x_{23} +$$
$$+ 25x_{24} + 22x_{31} + 18x_{32} + 18x_{33} + 14x_{34} + 30x_{41} + 30x_{42} +$$
$$+ 8x_{43} + 12x_{44} \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1, \end{cases}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ або } 1, \; x_{ij} - \text{цілі}, \; \left(i = \overline{1,4}\right), \; \left(j = \overline{1,4}\right).$$

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Вихідні дані					
3							
4	Робота	Вартість 1-ї години роботи робітників, грошові одиниці					
5	Робітник	1	2	3	4		
6	1	20	30	15	5		
7	2	8	12	20	25		
8	3	22	18	18	14		
9	4	30	30	8	12		
10							
11		Матриця призначень					
12							
13						0	
14						0	
15						0	
16						0	
17		0	0	0	0		
18							
19							
20	F =	**0**					
21							

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$F = 39$

Несиметрична задача про оптимальне призначення

Служба зайнятості має чотири вакантні посади за різними спеціальностями, на які претендують шість осіб. Проведено тестування претендентів, результати якого у вигляді балів наведено у наступній матриці:

$$N = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 & 7 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 6 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 4 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розподілити претендентів на вакантні посади таким чином, щоб на кожну посаду була призначена особа із найбільшою кількістю балів за тестуванням.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i-й \text{ працівник призначається на } j-ту \text{ роботу;} \\ 0, & \text{якщо } i-й \text{ працівник не призначається на } j-ту \text{ роботу.} \end{cases}$$

$$F = 8x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 7x_{14} + 5x_{15} + 6x_{16} + 4x_{21} + 7x_{22} + 6x_{23} + 6x_{24} + 4x_{25} + 6x_{26}$$
$$+ 6x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33} + 5x_{34} + 3x_{35} + 7x_{36} + 4x_{41} + 5x_{42} + 4x_{43} + 8x_{44} + 6x_{45} + 5x_{46} \to max$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \le 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \le 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \le 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} \le 1 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} \le 1 \\ x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} \le 1 \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0, \ \left(i = \overline{1,4}\right) \left(j = \overline{1,6}\right)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Вакантні посади	Претенденти на посади						
2		1	2	3	4	5	6	
3	1	8	5	6	7	5	6	
4	2	4	7	6	6	4	6	
5	3	6	3	6	5	3	7	
6	4	4	5	4	8	6	5	
7								
8								
9								
10		1	0	0	0	0	0	=СУММ(B10:G10)
11		0	1	0	0	0	0	=СУММ(B11:G11)
12		0	0	0	0	0	1	=СУММ(B12:G12)
13		0	0	0	1	0	0	=СУММ(B13:G13)
14		=СУММ(B10:B13)	=СУММ(C10:C13)	=СУММ(D10:D13)	=СУММ(E10:E13)	=СУММ(F10:F13)	=СУММ(G10:G13)	
15								
16								
17		F	=СУММПРОИЗВ(B3:G6;B10:G13)					
18								

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Вакантні посади	Претенденти на посади						
2		1	2	3	4	5	6	
3	1	8	5	6	7	5	6	
4	2	4	7	6	6	4	6	
5	3	6	3	6	5	3	7	
6	4	4	5	4	8	6	5	
7								
8								
9								
10		1	0	0	0	0	0	1
11		0	1	0	0	0	0	1
12		0	0	0	0	0	1	1
13		0	0	0	1	0	0	1
14		1	1	0	1	0	1	
15								
16								
17		F	30					
18								