НСД і НСК

Найбільшим спільним дільником (НСД) кількох натуральних чисел називають найбільше число, на яке дані числа діляться без остачі.

Найменшим спільним кратним (НСК) кількох натуральних чисел називають найменше число, яке ділиться без остачі на кожне з даних чисел.

Дії над звичайними дробами

1. *Додавання (віднімання)*: $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ $\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}\right)$.

2. *Множення*: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

3. *Ділення*: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$.

Модуль дійсного числа

Модулем (абсолютною величиною) дійсного числа a називають це самé число, якщо воно невід'ємне ($a \geq 0$), і протилежне йому число, якщо воно від'ємне ($a < 0$), тобто:

$$|a|=\left[\begin{array}{ll} a, & a\geq 0, \\ -a, & a<0. \end{array}\right.$$

Множення і ділення додатних і від'ємних чисел

Добуток (частка) двох чисел з різними знаками є число від'ємне; модуль добутку (частки) дорівнює добутку (частці) модулів цих чисел.

Добуток (частка) двох від'ємних чисел є число додатне; модуль добутку (частки) дорівнює добутку (частці) модулів цих чисел.

Властивості дій над числами

1. Властивості додавання:

$a + b = b + a$ (переставна властивість);

$(a + b) + c = a + (b + c)$ (сполучна властивість).

2. Властивості множення:

$ab = ba$ (переставна властивість);

$(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$ (сполучна властивість);

$(a + b) \cdot c = ac + bc$ (розподільна властивість).

Пропорція

Пропорцією називають рівність двох часток (відношень): $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, або $a : b = c : d$. Числа a та d називають крайніми членами пропорції, b та c — середніми.

Основна властивість пропорції: добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку середніх її членів: $a \cdot d = b \cdot c$.

Масштаб

Масштаб — це відношення відстані на карті до відповідної відстані на місцевості.

Степінь з цілим показником

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

3. $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$.

4. $\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n$.

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Формули скороченого множення

1. $a^2 - b^2 = \left(a - b\right)\left(a + b\right)$.

2. $\left(a \pm b\right)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

3. $\left(a \pm b\right)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

4. $a^3 \pm b^3 = \left(a \pm b\right)\left(a^2 \mp ab + b^2\right)$.

Умова рівності дробу нулю

Дріб $\frac{A}{B}$ дорівнює нулю, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю, тобто $\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0; \\ B\neq 0. \end{cases}$

Раціональні вирази

1. $\sqrt{a}=b$, якщо $b^2=a,\ b\geq 0$.

2. $\left(\sqrt{a}\right)^2=a,\ a\geq 0$.

3. $\sqrt{a^2}=|a|,\ a\in R$.

Властивості арифметичного квадратного кореня

1. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, якщо $a\geq 0,\ b\geq 0$.

2. $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, якщо $a\geq 0,\ b>0$.

3. $\sqrt{a^{2n}}=|a^n|$.

4. $\sqrt{b^2a}=|b|\sqrt{a}=\begin{cases} b\sqrt{a}, \text{ якщо } b\geq 0; \\ -b\sqrt{a}, \text{ якщо } b<0. \end{cases}$

5. $b\sqrt{a}=\begin{cases} \sqrt{b^2a}, \text{ якщо } b\geq 0; \\ -\sqrt{b^2a}, \text{ якщо } b<0. \end{cases}$

Квадратне рівняння

Умова	*Корені*
$D=b^2-4ac>0$	$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$
$D=b^2-4ac=0$	$x=\frac{-b}{2a}$
$D=b^2-4ac<0$	коренів немає

Теорема Вієта. Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів — вільному члену. Тобто якщо x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$, то: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Теорема, обернена до теореми Вієта. Якщо сума і добуток чисел m і n дорівнюють відповідно $-p$ і q, то m і n — корені квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$.

Арифметична прогресія

(a_n): a_1; a_2; ...; a_n; ... — арифметична прогресія.

$a_n = a_1 + d(n-1)$ — формула n-го члена арифметичної прогресії, d — різниця.

Сума членів арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n\,; \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n\,.$$

Геометрична прогресія

(b_n): b_1; b_2; b_3; ...; b_n; ... — геометрична прогресія.

$b_n = b_1 q^{n-1}$ — формула n-го члена геометричної прогресії, q — знаменник.

Сума членів геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \textbf{ або } S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1},\ q \neq 1\,.$$

Імовірність

Імовірністю випадкової події називають відношення кількості подій, які сприяють цій події, до кількості всіх подій під час випробування. $P(A) = \dfrac{m}{n}$; $P(A)$ — імовірність появи події A, n — загальна кількість елементарних подій, m — кількість елементарних подій, які сприяють події A.

Трикутник

Будь-яка сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін і більша за їх різницю: $c - b < a < c + b$, $b < c$.

Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Суму довжин усіх сторін трикутника називають його *периметром*: $P = a + b + c$.

Сума зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

Середня лінія трикутника — це відрізок, який з'єднує середини двох його сторін. Середня лінія трикутника паралельна до однієї з його сторін і дорівнює її половині.

Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню відповідних сторін (коефіцієнту подібності): $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = k$. Відношення відповідних лінійних елементів (медіан, бісектрис, висот тощо) подібних трикутників теж дорівнює коефіцієнту подібності.

Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату відношення відповідних сторін (квадрату коефіцієнта подібності): $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = k^2$.

Теорема синусів. Сторони трикутника пропорційні до синусів протилежних кутів: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Теорема косинусів. Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін та косинуса кута між ними: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Площа трикутника. $S = \frac{1}{2}ah_a$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ —

формула Герона, де $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — півпериметр; $S = \dfrac{abc}{4R}$, $S = pr$, де R — радіус описаного кола, r — радіус вписаного кола.

Радіуси вписаного й описаного кіл. $R = \dfrac{abc}{4S}$, $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$, де R — радіус описаного кола, r — радіус вписаного кола.

Теорема Піфагора. У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів: $c^2 = a^2 + b^2$.

Теорема, обернена до теореми Піфагора. Якщо квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін, то цей трикутник — прямокутний.

Значення тригонометричних функцій для деяких кутів

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\mathrm{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0

Радіус вписаного й описаного кіл для рівностороннього трикутника. $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = 2r$, $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = 2r$.

Площа рівностороннього трикутника. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Паралелограм

Паралелограмом називають чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.

У паралелограма: 1) протилежні сторони рівні; 2) протилежні кути рівні; 3) діагоналі діляться навпіл; 4) сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°; 5) сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін; 6) кут між його висотами, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює його гострому куту, а з вершини гострого кута — тупому куту; 7) бісектриси кутів, прилеглих до однієї сторони, взаємно перпендикулярні.

Площа паралелограма. $S = ah_a$; $S = ab\sin\alpha$, де α — кут між сторонами; $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$, де φ — кут між діагоналями.

Ромб

Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні.

У ромба: 1) діагоналі перпендикулярні; 2) діагоналі є бісектрисами його кутів.

Площа ромба. $S = a^2\sin\alpha$; $S = ah$; $S = \frac{1}{2}d_1d_2$; $S = ar$, де a — сторона ромба, r — радіус вписаного кола, h — висота, d_1 і d_2 — діагоналі, α — кут між сторонами.

Прямокутник

Паралелограм, у якого всі кути прямі, називають *прямокутником.*

Діагоналі прямокутника рівні.

Площа прямокутника: $S = ab$; $S = \frac{1}{2}d^2\sin\alpha$, де α — кут між діагоналями.

Квадрат

Квадрат — це ромб, у якого всі кути прямі.

Центром вписаного й описаного кіл є точка перетину діагоналей квадрата: $r = \frac{1}{2}a$, $R = \frac{1}{2}d$, $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, де a — сторона квадрата, r — радіус вписаного кола, R — радіус описаного кола.

Площа квадрата. $S = a^2$; $S = \frac{1}{2}d^2$.

Трапеція

Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші — непаралельні.

У трапеції сума градусних мір кутів, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°. У трапецію можна вписати коло, якщо сума її основ дорівнює сумі бічних сторін. Навколо трапеції можна описати коло, якщо вона рівнобічна.

У рівнобічній трапеції: 1) кути при кожній основі рівні; 2) сума протилежних кутів дорівнює 180°; 3) діагоналі рівні.

Середня лінія трапеції паралельна до основ і дорівнює їх півсумі.

Площа трапеції. $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; $S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}$, де a і b — основи трапеції, d_1 і d_2 — діагоналі трапеції, α — кут між діагоналями, h — висота трапеції.

Коло, круг

Довжина кола дорівнює: $C = \pi d$, $C = 2\pi r$; довжина дуги кола — $l_n = \frac{\pi r}{180} \cdot n$, де $\pi \approx 3{,}1415...$, r — радіус кола, d — діаметр, n — градусна міра відповідного центрального кута.

Площу круга обчислюють за формулами: $S = \pi r^2$, $S = \frac{\pi d^2}{4}$.

Координати

Відстань d між точками $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$ обчислюють за формулою $d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Координати точки $C(x; y)$ — середини відрізка AB: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.