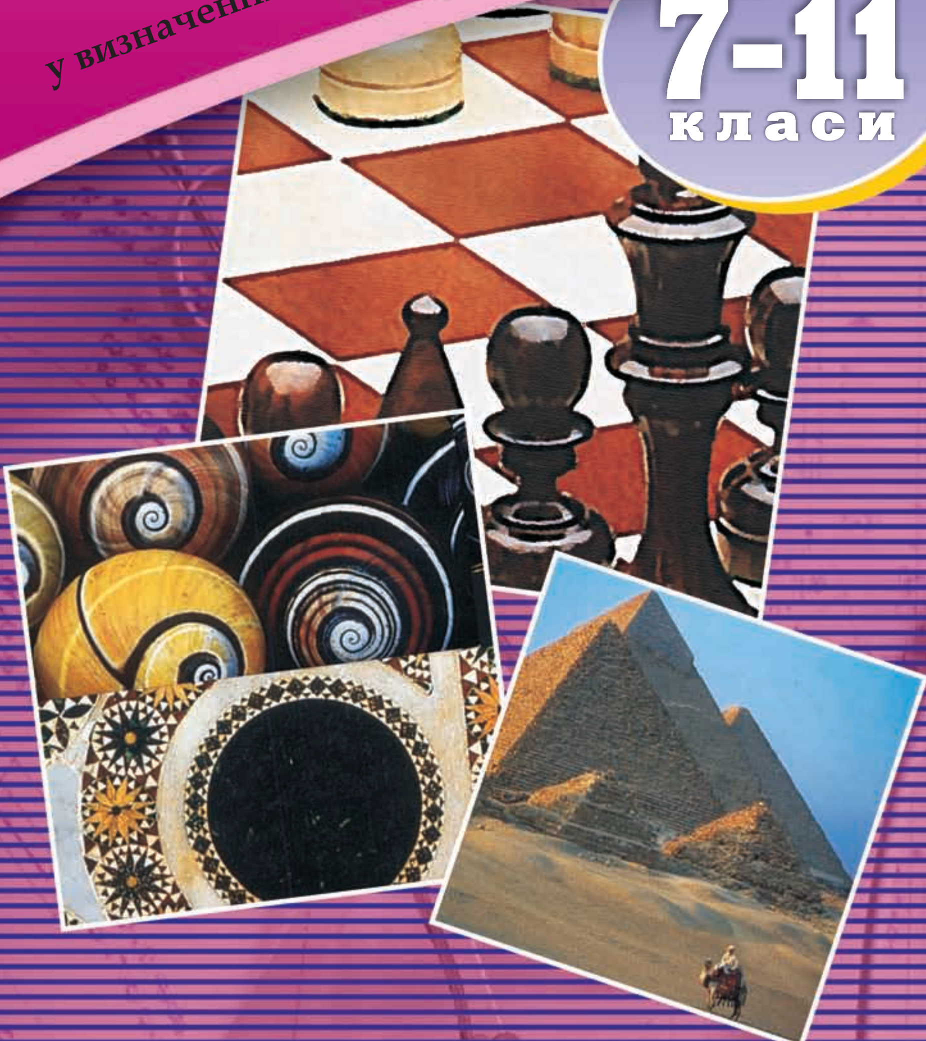
Рятівник

геометрія

у визначеннях, таблицях і схемах

7–11 класи



Серія «Рятівник» заснована в 1998 р.

Рецензенти:

В. Я. Жихарев, доктор техн. наук, проф.;

А. С. Савєлєв, канд. техн. наук, доцент;

Т. О. Міхалін, канд. фіз.-мат. наук

Видано за ліцензією ТОВ Видавництво «Ранок»

Дергачов В. А.

Д36 Геометрія у визначеннях, формулах і таблицях: Довідковий посібник для учнів 7—11 класів.— Х.: Веста: Видавництво «Ранок», 2006.— 96 с.

Посібник містить основні положення шкільного курсу геометрії. Наочна форма викладення матеріалу допоможе школярам в узагальненні та систематизації знань з геометрії, скоротить час на повторення вивченого напередодні контрольної роботи.

Призначено для учнів 7—11 класів загальноосвітніх шкіл, гімназій, ліцеїв, а також для абітурієнтів.

Навчальне видання

Серія «Рятівник»

ДЕРГАЧОВ Володимир Андрійович

ГЕОМЕТРІЯ У ВИЗНАЧЕННЯХ, ФОРМУЛАХ І ТАБЛИЦЯХ

Довідковий посібник для учнів 7—11 класів

Редактор *М. Т. Читова*

Технічний редактор *В. І. Труфен*

Коректор *О. Г. Неро*

ТОВ «Веста». Свідоцтво ДК № 2540 від 26.06.2006 р. 61064 Харків, вул. Бакуніна, 8А.

З питаннями та пропозиціями звертатися за тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.

Для листів: 61045 Харків, а/с 3355, «Ранок». E-mail: office@ranok.kharkov.ua

Адреса редакції: 61145 Харків, вул. Космічна, 21а.

З питань реалізації звертатися за тел.: у Харкові — (057) 712-91-44, 712-91-46, 712-91-47, 712-90-87; Києві — (044) 495-14-53, 417-20-80; Донецьку — (062) 304-67-02; Житомирі—(0412) 41-27-95; Дніпропетровську—(0562) 43-46-95; Львові — (032) 233-53-39; Сімферополі — (0652) 29-94-14; Тернополі — (0352) 43-42-72, 25-16-00.

e-mail: commerce@ranok.kharkov.ua

www.ranok.com.ua

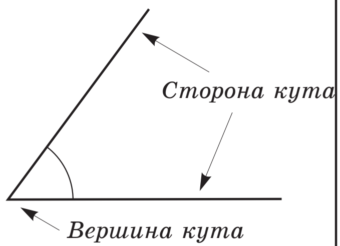
Зміст

Кути і прямі на площині

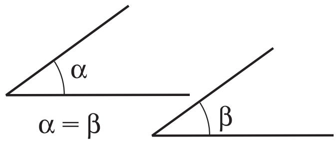
Кути

Кут — геометрична фігура, що складається з двох різноманітних променів, що виходять з однієї точки.

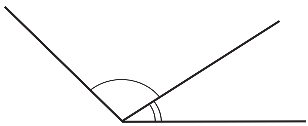
Промені називаються ***сторонами*** *кута*, а їх спільний початок — ***вершиною*** *кута*



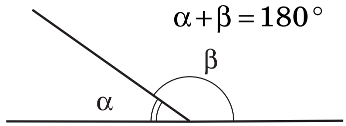
Два кути називаються ***рівними***, якщо вони можуть бути суміщені так, що збігатимуться їх відповідні сторони і вершини



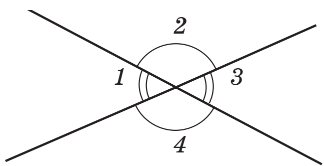
Кути, що мають спільну вершину й одну спільну сторону, називаються ***прилеглими***



Два кути називаються суміжними, якщо у них спільні вершина й одна сторона, а дві інші утворюють пряму. Сума суміжних кутів дорівнює 180°

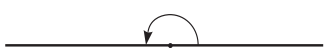


Кути називаються ***вертикальними***, якщо сторони одного є продовженнями за вершину сторін другого. Вертикальні кути рівні між собою

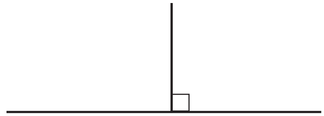


$\angle 1 = \angle 3;\ \angle 2 = \angle 4$

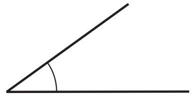
Кут, у якого сторони утворюють пряму, називається ***розгорнутим***.



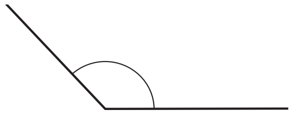
Кут, що дорівнює своєму суміжному, називається ***прямим***



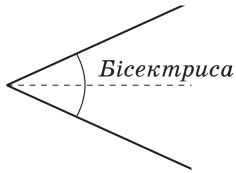
Кут, менший від прямого, називається ***гострим***



Кут, більший прямого, називається ***тупим***



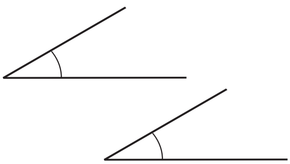
Бісектриса кута — промінь, що виходить з вершини кута, проходить між його сторонами і ділить кут пополам



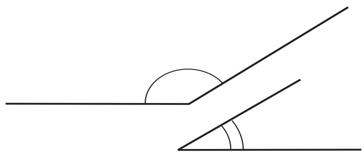
Властивості кутів

Кути з відповідно паралельними сторонами

Або рівні

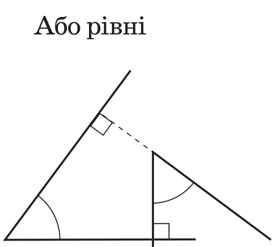


або їх сума дорівнює 180°



Кути з відповідно перпендикулярними сторонами

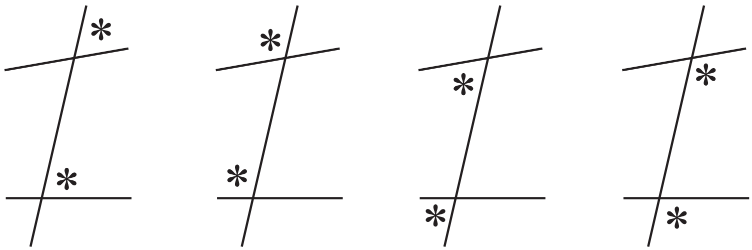
Або рівні



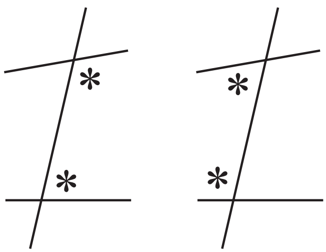
або їх сума дорівнює 180°

Кути, утворені при перетині двох прямих січною

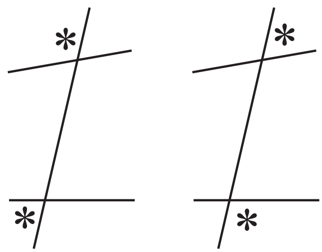
Відповідні



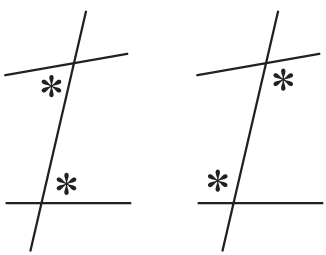
Внутрішні односторонні



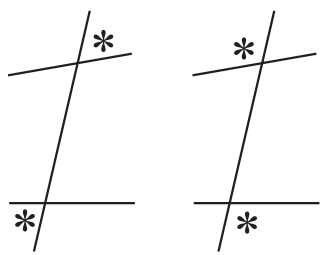
Зовнішні односторонні



Внутрішні різносторонні



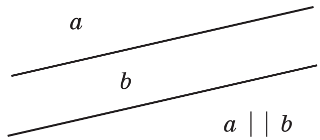
Зовнішні різносторонні



Паралельні та перпендикулярні прямі

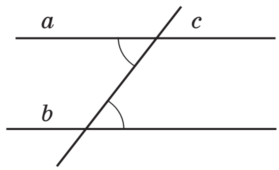
Паралельні прямі

Прямі, що лежать в одній площині і не перетинаються, називаються ***паралельними***

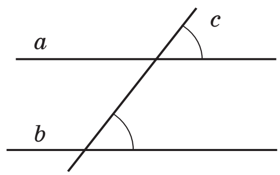


Ознаки паралельності прямих

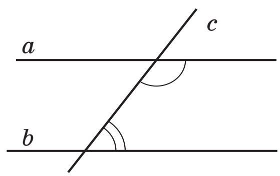
Внутрішні (зовнішні) різносторонні кути рівні



Відповідні кути рівні



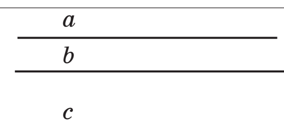
Сума внутрішніх (зовнішніх) односторонніх кутів дорівнює 180°



Властивості паралельних прямих

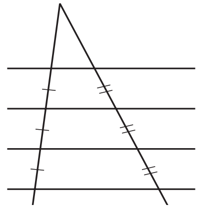
Дві прямі, що паралельні третій, паралельні

$$a \,||\, b;\ a \,||\, c \Rightarrow b \,||\, c$$



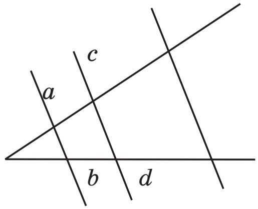
Теорема Фалеса

Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відсікають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відсікають рівні відрізки і на другій його стороні



Паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відсікають від сторін кута пропорційні відрізки

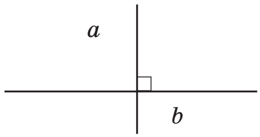
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$



Перпендикулярні прямі

Дві прямі називаються перпендикулярними, якщо вони перетинаються під прямим кутом

$$a \perp b$$

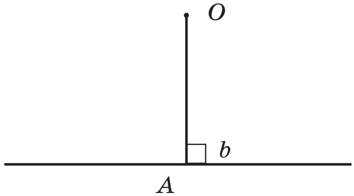


Перпендикуляр і похила

Перпендикуляром до даної прямої називається відрізок прямої, перпендикулярної до даної, від заданої точки до точки перетину цих прямих.

OA — перпендикуляр до *b*.

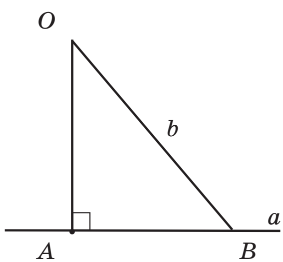
A — основа перпендикуляра



Похилою до даної прямої *a* називається відрізок прямої, що перетинає дану під кутом, відмінним від прямого, від заданої точки до точки перетину цих прямих.

Перпендикуляр коротший від похилої, яка проведена з тієї ж точки.

OB — похила



Перетворення простору

Рух

Рух — це перетворення простору, що зберігає відстань між точками.
Приклади руху: паралельне перенесення, поворот

Властивості руху

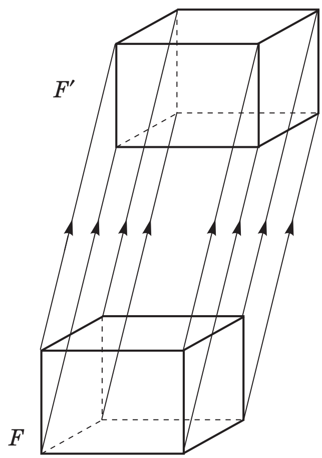
1. Два рухи, що виконуються послідовно, дають новий рух.
2. Точки, що лежать на прямій, під час руху переходять у точки, які лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.
3. Під час руху зберігаються кути між півпрямими

Паралельне перенесення

Паралельне перенесення — перетворення простору, при якому всі точки зміщуються в одному й тому ж напрямі на одну й ту ж відстань.

При паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну пряму (або у себе).

Для будь–яких двох точок M і M' існує одне і лише одне паралельне перенесення, при якому точка M переходить у точку M'

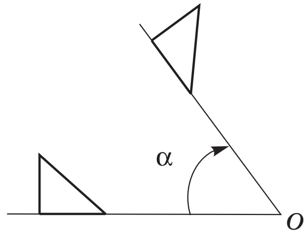


Поворот

Поворот (обертання) — вид руху, при якому принаймні одна точка простору залишається нерухомою

При повертанні на площині навколо даної точки (центра обертання) кожний промінь, що виходить з даної точки, повертається на один і той же кут в одному й тому ж напрямі.

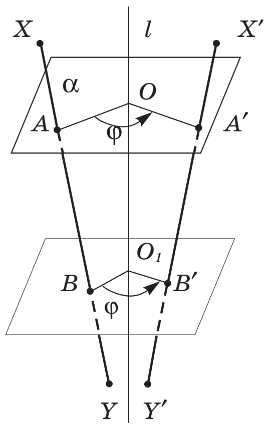
Повертання навколо точки O на кут 180° називається ***центральною симетрією*** відносно точки O (центра симетрії)



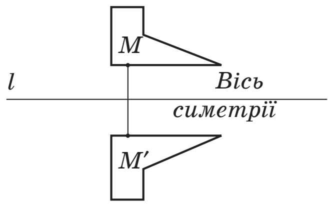
Поворот навколо осі на кут φ — це перетворення, при якому:

1) є єдина пряма l, всі точки якої переходять самі в себе (вісь обертання);

2) будь–яка точка A, що не належить l, переходить у таку точку A', причому точки A и A' лежать у площині α, яка перпендикулярна до l, і $\angle AOA' = \varphi$ є сталим за величиною і напрямом

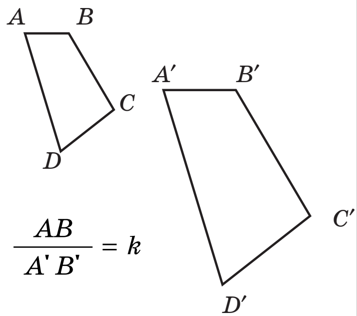


Поворот навколо осі на кут $\varphi = 180^\circ$ називається ***симетрією відносно прямої***, вісь обертання — ***віссю симетрії***, а фігура, яку отримали при перетворенні,— ***дзеркальним відбиттям***



Подібність

Дві фігури F_1 і F_2 називаються ***подібними***, якщо між їх точками можна встановити взаємно однозначну відповідність, при якій відношення відстаней між будь–якими парами відповідних точок дорівнює тій же сталій k, що зветься ***коефіцієнтом подібності***



$$\frac{AB}{A'B'} = k$$

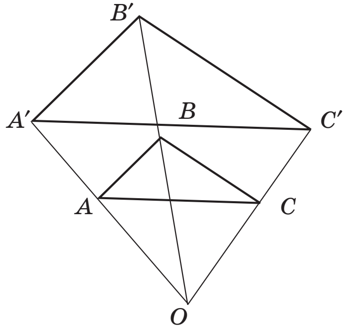
Властивості подібних фігур

1. Кути між відповідними променями рівні.
2. Площі подібних фігур відносяться як квадрати їх лінійних розмірів.
3. Об'єми подібних фігур відносяться як куби їх лінійних розмірів

Перетворення подібності

Будь–яке перетворення подібності — результат послідовного виконання гомотетії і руху.

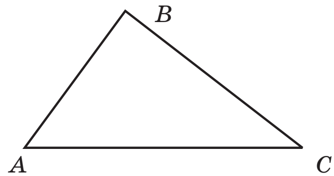
Гомотетія — перетворення простору, що ставить у відповідність кожній точці M точку M', яка лежить на прямій OM за правилом $OM' = k \cdot OM$, де k — стале, відмінне від нуля число, що називається коефіцієнтом гомотетії, O — фіксована точка, що називається центром гомотетії



Трикутники

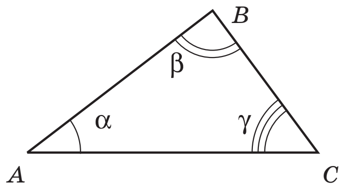
Основні означення

Трикутник — це фігура, що складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій (вершин трикутника), і трьох відрізків з кінцями у цих точках (сторін трикутника)



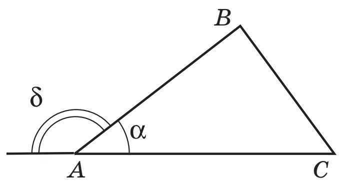
A, B, C — вершини
AB, BC, AC — сторони

Кутами (внутрішніми кутами) трикутника називаються три кути, кожний з яких утворений двома променями, що виходять з вершини трикутника і проходять через дві інші вершини



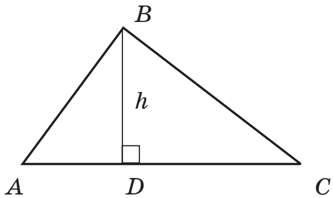
α, β, γ — *кути трикутника*

Зовнішнім кутом трикутника називається кут, суміжний внутрішньому куту трикутника

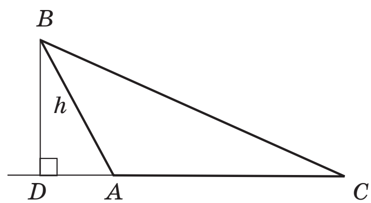


δ — *зовнішній кут*

Висотою трикутника називається перпендикуляр, опущений з будь–якої вершини трикутника на протилежну сторону або на продовження сторони

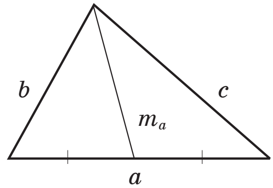


BD = h — висота, проведена на сторону AC



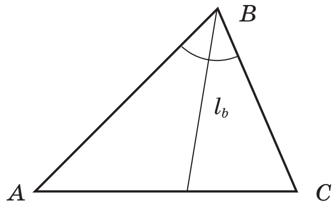
BD = h — висота, проведена на продовження сторони AC

Медіаною трикутника називається відрізок прямої, що з'єднує вершину трикутника з серединою протилежної сторони



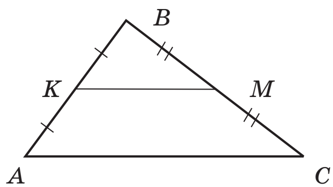
m_a — медіана сторони a

Бісектрисою трикутника називається відрізок бісектриси внутрішнього кута трикутника, що з'єднує дану вершину з точкою на протилежній стороні



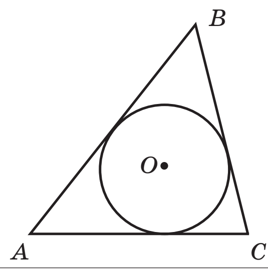
l_b — бісектриса кута B трикутника

Середньою лінією трикутника називається відрізок, що з'єднує середини двох сторін трикутника

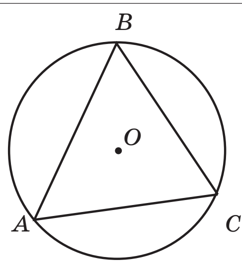


KM — середня лінія

Коло називається ***вписаним*** у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін



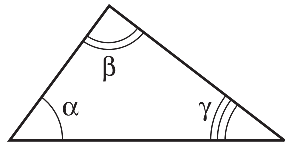
Описаним колом трикутника називається коло, що проходить через вершини трикутника



Властивості кутів і сторін трикутника

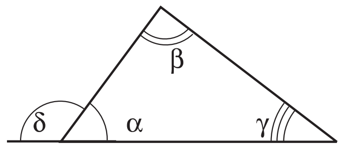
Сума кутів трикутника дорівнює 180°

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



Зовнішній кут дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, з ним не суміжних, і більший, ніж будь-який внутрішній кут, не суміжний з ним.

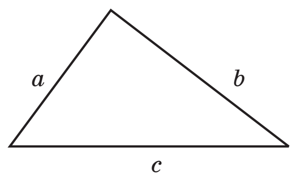
$$\delta = \beta + \gamma;\ \delta > \beta;\ \delta > \gamma$$



Нерівність трикутника

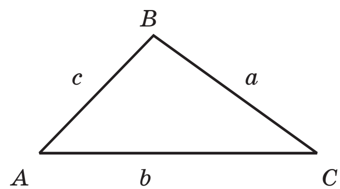
Довжина кожної сторони менша, ніж сума, і більша, ніж різниця довжин двох інших сторін

$$|a - b| < c < a + b$$



У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут (і навпаки)

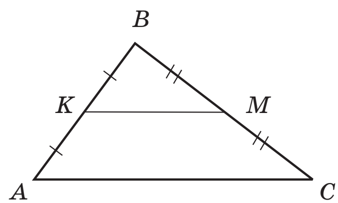
$$\angle B > \angle C \Rightarrow b > c$$



Середня лінія трикутника паралельна одній з його сторін і дорівнює її половині

$$KM \parallel AC;$$

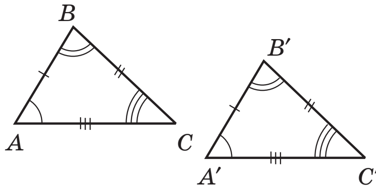
$$KM = \frac{AC}{2}$$



Рівність трикутників

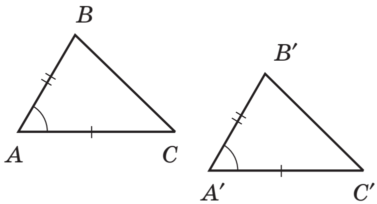
Трикутники називаються рівними, якщо у них відповідні сторони і кути рівні

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$$

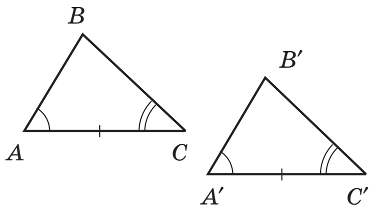


Ознаки рівності трикутників

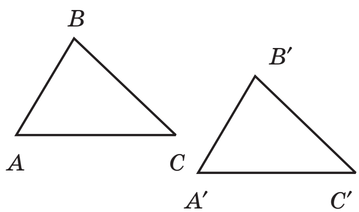
1. Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні



2. Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні



3. Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні



Властивості рівних трикутників

У рівних трикутників усі відповідні елементи рівні (сторони, кути, висоти, медіани, бісектриси).

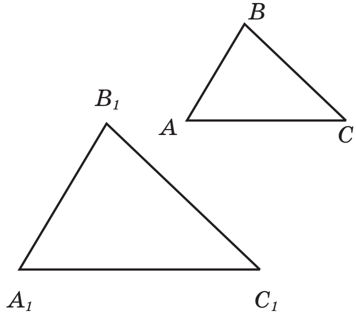
У рівних трикутників проти рівних сторін лежать рівні кути, а проти рівних кутів лежать рівні сторони

Подібність трикутників

Подібними називаються ***трикутники***, у яких відповідні сторони пропорційні.

Коефіцієнт пропорційності називається коефіцієнтом подібності

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$



$\Delta\, ABC \backsim \Delta\, A_1B_1C_1$

Ознаки подібності трикутників

Два трикутники подібні, якщо

1. Два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам іншого трикутника.
2. Дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого трикутника, і кути, утворені цими сторонами, рівні.
3. Сторони одного трикутника пропорційні сторонам іншого трикутника

Властивості подібних трикутників

У подібних трикутників відповідні кути рівні, а відповідні відрізки пропорційні

$$\angle A = \angle A_1;\ \angle B = \angle B_1;\ \angle C = \angle C_1;$$

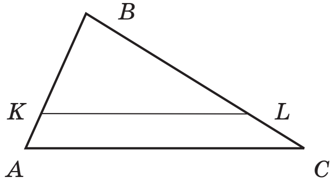
$$\frac{h_a}{h_{a_1}} = \frac{h_b}{h_{b_1}} = \frac{h_c}{h_{c_1}} = \frac{m_a}{m_{a_1}} = \ldots = \frac{l_c}{l_{c_1}} = k\ .$$

Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

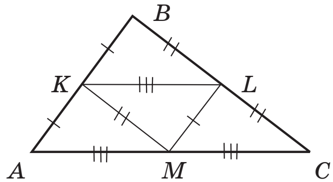
Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності

Пряма, що паралельна одній із сторін трикутника, відсікає трикутник, подібний до даного

$KL \parallel AC$; $\Delta ABC \backsim \Delta KBL$



Три середні лінії трикутника ділять його на чотири рівні трикутники, подібні до даного з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}$

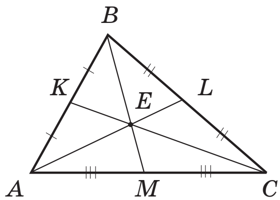


Медіани, бісектриси, висоти і середні лінії трикутника

Властивості медіан трикутника

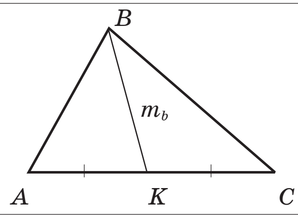
Три медіани трикутника перетинаються в одній точці, що ділить медіани у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини.

$BE : EM = 2$



Медіани ділять трикутник на рівновеликі трикутники

$S_{\Delta ABK} = S_{\Delta KBC}$

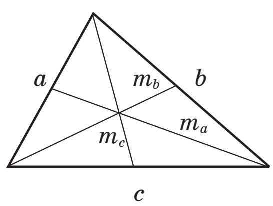


Довжина медіан до відповідних сторін трикутника:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2};$$

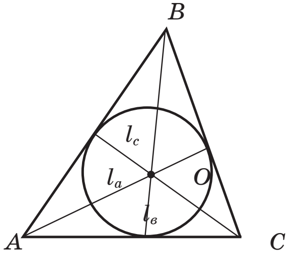
$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2};$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$



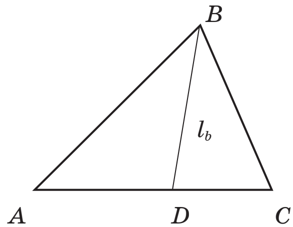
Властивості бісектрис трикутника

Бісектриси внутрішніх кутів трикутника перетинаються в одній точці, що знаходиться всередині трикутника, рівновіддалена від трьох його сторін і є центром вписаного кола



Бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну куту сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$



Бісектриси внутрішнього і суміжного з ним зовнішнього кутів перпендикулярні.

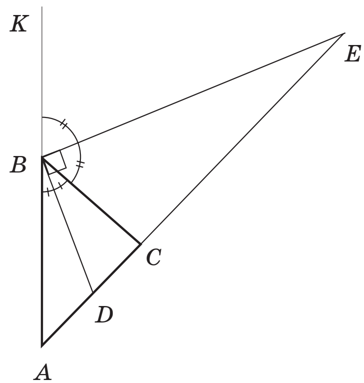
Бісектриса зовнішнього кута трикутника ділить (зовнішньо) протилежну сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам.

BD — бісектриса кута B;

BE — бісектриса зовнішнього кута

$$BD \perp BE;$$

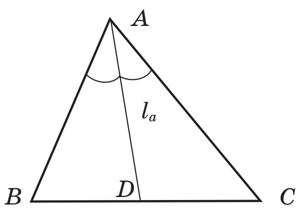
$$\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC}$$



Довжина бісектриси кута A

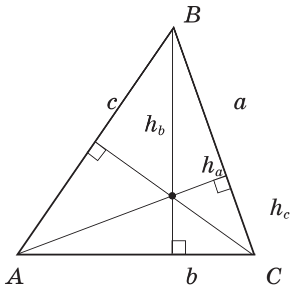
$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos\frac{A}{2}}{b+c};$$

$$l_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc\,(a+b+c)\,(b+c-a)}$$



Властивості висот трикутника

Висоти трикутника перетинаються в одній точці, яка називається ортоцентром трикутника



Висоти трикутника обернено пропорційні його сторонам

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

Довжина висоти до сторони a

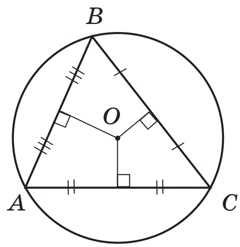
$$h_a = b \sin C = c \sin B = \frac{bc}{2R} = \frac{2S}{a},$$

де R — радіус описаного кола;
S — площа трикутника

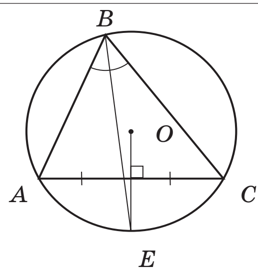
Властивості серединних перпендикулярів

Серединний перпендикуляр — це пряма, що проходить через середину сторони трикутника перпендикулярно до неї

Три серединних перпендикуляри трикутника перетинаються в одній точці, що називається центром описаного кола



Точка перетину бісектриси кута трикутника з серединним перпендикуляром протилежної сторони лежить на колі, що описане навколо даного трикутника



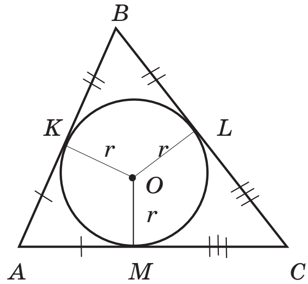
Вписане й описане кола

Радіус вписаного у трикутник ***кола*** — відстань від центра до сторін трикутника

$$r=\frac{S}{p}=4R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=$$

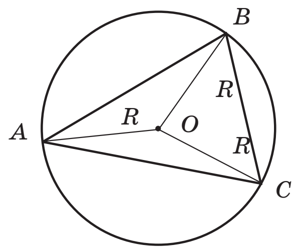
$$=(p-a)\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Точки дотику вписаного кола до сторін трикутника відсікають три пари рівних між собою відрізків



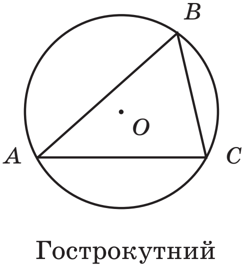
Радіус описаного кола

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}=\frac{abc}{4S}$$



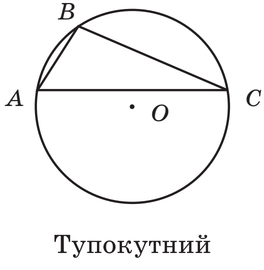
У залежності від вигляду трикутника центр описаного кола може знаходитися:

всередині трикутника



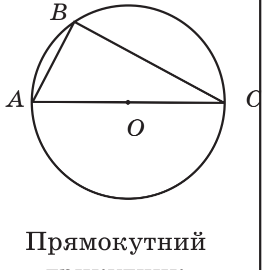
Гострокутний трикутник

зовні трикутника



Тупокутний трикутник

на середині його сторони

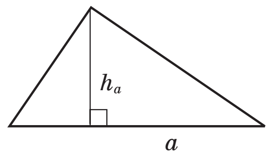


Прямокутний трикутник

Площа трикутника

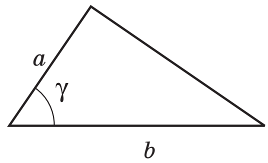
За стороною і висотою, опущеною на цю сторону,

$$S = \frac{1}{2} a h_a$$



За двома сторонами і кутом між ними

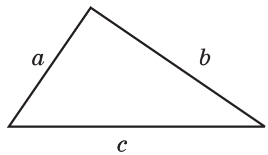
$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$$



За трьома сторонами (формула Герона)

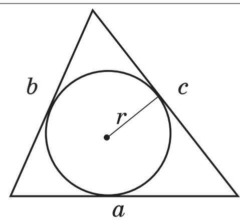
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{де } p = \frac{a+b+c}{2}$$



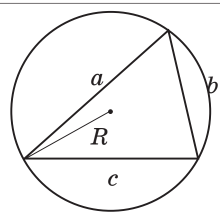
За півпериметром (p) і радіусом вписаного кола

$$S = p \cdot r$$



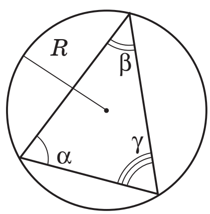
За трьома сторонами і радіусом описаного кола

$$S = \frac{abc}{4R}$$



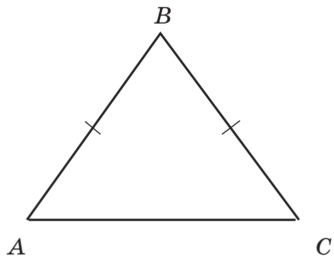
За трьома кутами і радіусом описаного кола

$$S = 2R^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$



Рівнобедрений трикутник

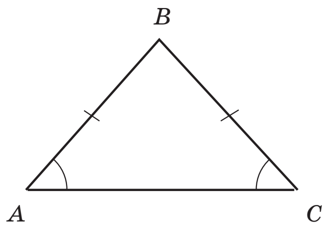
Трикутник називається ***рівнобедреним***, якщо в нього дві сторони рівні. Рівні сторони називають бічними сторонами, а третю — основою рівнобедреного трикутника



Властивості рівнобедреного трикутника

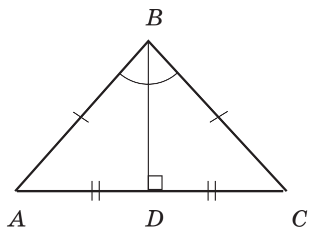
У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні

$$\angle A = \angle C$$

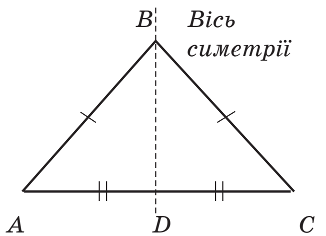


У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є бісектрисою і висотою

BD — медіана, бісектриса, висота



Рівнобедрений трикутник має одну вісь симетрії

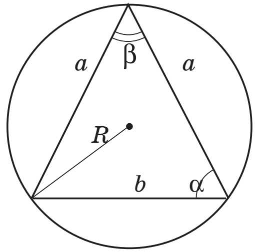


Основні формули для рівнобедреного трикутника

$$b^2 = 2a^2\,(1 - \cos\beta);\quad a = \frac{b}{2\cos\alpha};$$

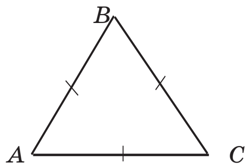
$$S = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2} = \frac{a^2}{2}\sin\beta;$$

$$S = (p-a)\sqrt{p(p-b)},\ \text{где}\quad p = a + \frac{b}{2}.$$



Рівносторонній трикутник

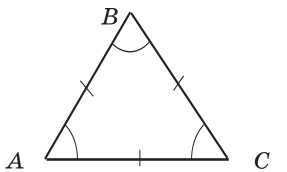
Трикутник, у якого всі сторони рівні, називається ***рівностороннім*** або правильним трикутником



Властивості рівностороннього трикутника

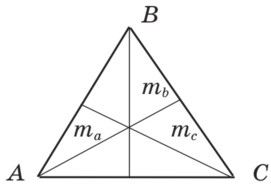
Всі кути рівні

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

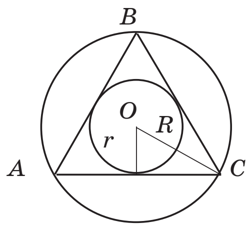


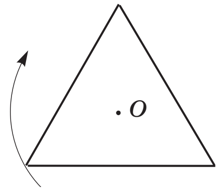
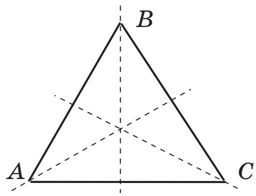
Кожна медіана збігається з бісектрисою і висотою, що проведені з тієї ж вершини

$$m_a = l_a = h_a = \ldots = h_c$$



Центри вписаного і описаного кіл збігаються



Рівносторонній трикутник має поворотну симетрію (кут повертання — 120°)	
Рівносторонній трикутник має три осі симетрії	

Основні співвідношення для рівностороннього трикутника

Позначення:

a — сторона, h — висота, P — периметр, p — півпериметр, R — радіус описаного кола, r — радіус вписаного кола, S — площа

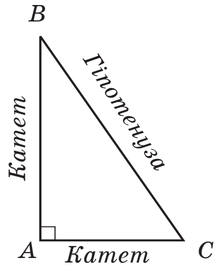
a	$\frac{2h\sqrt{3}}{3}$	$\frac{P}{3}$	$\frac{2p}{3}$	$R\sqrt{3}$	$2r\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3S\sqrt{3}}$
h	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{P\sqrt{3}}{6}$	$\frac{p\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3R}{2}$	$3r$	$\sqrt{S\sqrt{3}}$
P	$3a$	$2h\sqrt{3}$	$2p$	$3R\sqrt{3}$	$6r\sqrt{3}$	$2\sqrt{3S\sqrt{3}}$
p	$\frac{3}{2}a$	$h\sqrt{3}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{3R\sqrt{3}}{2}$	$3r\sqrt{3}$	$\sqrt{3S\sqrt{3}}$
R	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{P\sqrt{3}}{9}$	$\frac{2p\sqrt{3}}{9}$	$2r$	$\frac{2}{3}\sqrt{S\sqrt{3}}$
r	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{P\sqrt{3}}{18}$	$\frac{p\sqrt{3}}{9}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{\sqrt{S\sqrt{3}}}{3}$
S	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{h^2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{P^2\sqrt{3}}{36}$	$\frac{p^2\sqrt{3}}{9}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$	$3r^2\sqrt{3}$

Прямокутний трикутник

Трикутник називається ***прямокутним***, якщо він має прямий кут.

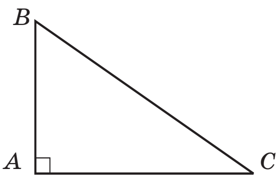
Сторони, прилеглі до прямого кута, називаються ***катетами***.

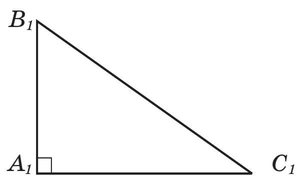
Сторона, протилежна прямому куту, називається ***гіпотенузою***.



Ознаки рівності прямокутних трикутників

$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$

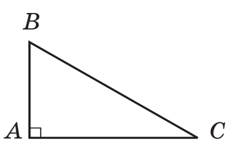


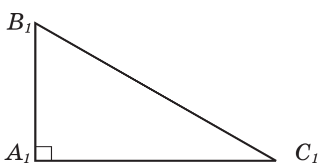


За двома катетами
За катетом і гіпотенузою
За катетом і прилеглим гострим кутом
За катетом і протилежним гострим кутом
За гіпотенузою і гострим кутом

Ознаки подібності прямокутних трикутників

$$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$$



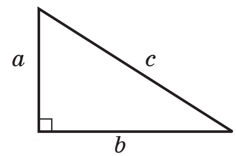


За одним гострим кутом
За пропорційністю двох катетів
За пропорційністю катета і гіпотенузи

Теорема Піфагора

У прямокутному трикутнику сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Висновки теореми Піфагора

У прямокутному трикутнику будь–який з катетів менший, ніж гіпотенуза

Якщо до прямої з однієї точки проведені перпендикуляр і похила, то похила більша, ніж перпендикуляр

Рівні похилі мають рівні проекції

З двох похилих більша та, проекція якої більша

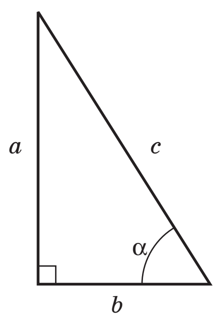
Співвідношення між елементами сторін прямокутного трикутника

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Синусом гострого кута називається відношення протилежного катета до гіпотенузи.

Тангенсом гострого кута називається відношення протилежного катета до прилеглого.

Котангенсом гострого кута називається відношення прилеглого катета до протилежного



$$\cos\alpha = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b};$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Формули зв'язку між тригонометричними функціями

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

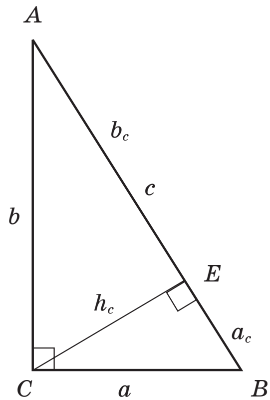
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Властивості катетів, медіан і висот прямокутного трикутника

Катет прямокутного трикутника є середнє пропорційне між гіпотенузою й проекцією цього катета на гіпотенузу

$$a = \sqrt{a_c c}; \quad b = \sqrt{b_c c}.$$



$$a_c = EB;$$
$$b_c = AE;$$
$$a_c + b_c = c$$

Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, є середнє пропорційне між проекціями катетів на гіпотенузу

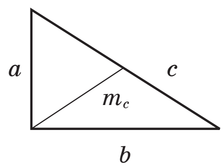
$$h_c = \sqrt{a_c b_c}.$$

Висота може бути визначена через катети та їх проекції на гіпотенузу

$$h_c = \frac{ab}{a_c + b_c}.$$

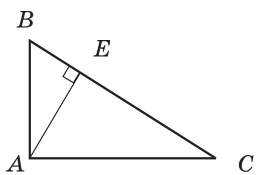
Медіана, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи

$$m_c = \frac{1}{2}c.$$



Висота, проведена з вершини прямого кута трикутника, ділить його на два трикутники, подібні до даного

$$\Delta ABE \backsim \Delta AEC \backsim \Delta ABC$$

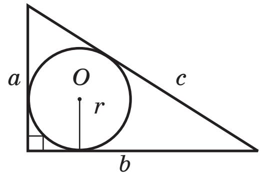


Трикутники

Коло, вписане у прямокутний трикутник

Радіус вписаного кола

$$r = \frac{ab}{a + b + c} = \frac{a + b - c}{2}$$

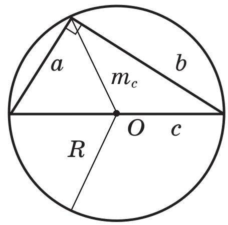


Коло, описане навколо прямокутного трикутника

Центр описаного кола збігається з серединою гіпотенузи.

Радіус описаного кола

$$R = \frac{c}{2} = m_c$$



Площа прямокутного трикутника

Площу можна визначити:

— через катети

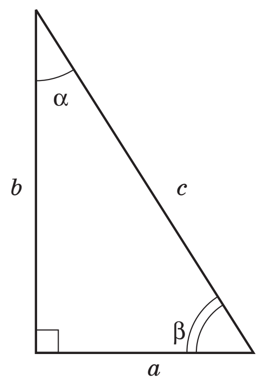
$$S = \frac{1}{2}ab;$$

— через катет і гострий кут

$$S = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{ctg}\alpha;$$

— через гіпотенузу і гострий кут

$$S = \frac{1}{4}c^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{4}c^2 \sin 2\beta$$

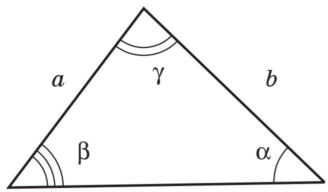


Розв'язання трикутників

Теорема косинусів

Квадрат будь–якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



Висновки:

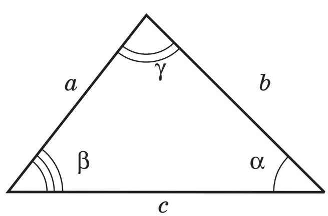
1. Якщо $c^2 > a^2 + b^2$, то кут γ — тупий ($\cos\gamma < 0$).
2. Якщо $c^2 < a^2 + b^2$, то кут γ — гострий ($\cos\gamma > 0$).
3. Якщо $c^2 = a^2 + b^2$, то кут γ — прямий.
4. У трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона, проти більшої сторони лежить більший кут

Теорема синусів

Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.

Коефіцієнт пропорційності дорівнює діаметру описаного кола.

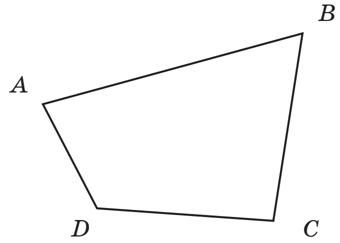
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



Чотирикутники

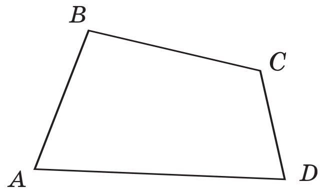
Основні означення і властивості

Чотирикутником називається фігура, яка складається з чотирьох точок (вершин) і чотирьох відрізків (сторін), що послідовно сполучають вершини. При цьому ніякі три з даних точок не повинні лежати на одній прямій, а відрізки, що їх сполучають, не повинні перетинатися



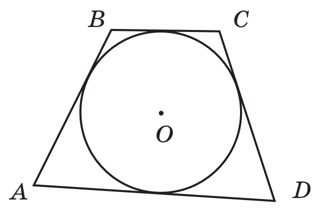
A, B, C, D — вершини; AB, BC, CD, DA — сторони

Чотирикутник називається ***опуклим***, якщо він розміщується в одній півплощині відносно прямої, що містить будь–яку його сторону

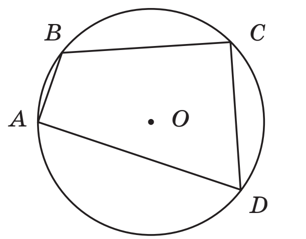


ABCD — опуклий чотирикутник

Коло, яке дотикається до всіх сторін чотирикутника, називається вписаним у цей чотирикутник. (Чотирикутник описаний навколо кола)

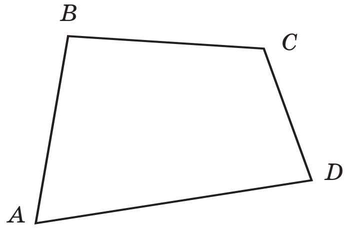


Коло, що містить усі вершини чотирикутника, називається описаним навколо цього чотирикутника. (Чотирикутник вписано в коло)



Сума кутів опуклого чотирикутника дорівнює 360°

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

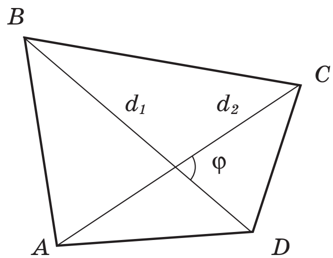


Площа довільного опуклого чотирикутника

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2},$$

де d_1, d_2 — діагоналі чотирикутника;

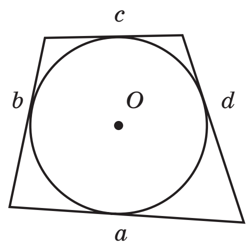
φ — кут між діагоналями



Описані чотирикутники

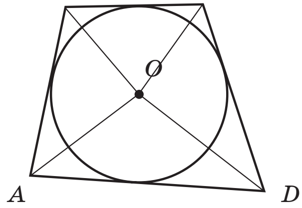
Якщо в чотирикутнику суми довжин протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло

$$a + c = b + d$$



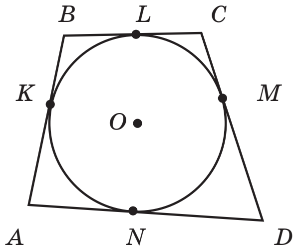
Центр вписаного у чотирикутник кола є точкою перетину всіх чотирьох бісектрис кутів цього чотирикутника.

BO, *CO*, *DO*, *AO* — бісектриси кутів



Точки дотику вписаного кола відсікають рівні відрізки від кутів чотирикутника

$$BK = BL;\ LC = CM;$$
$$MD = DN;\ KA = AN$$

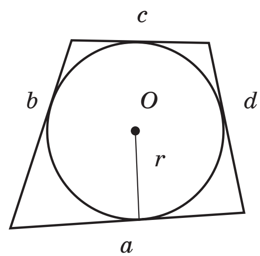


Площа описаного чотирикутника

$$S = pr,$$

де r — радіус вписаного кола;

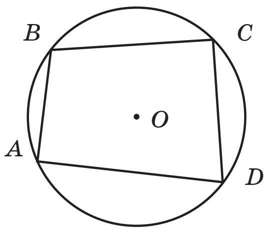
$$p = \frac{a + b + c + d}{2}$$



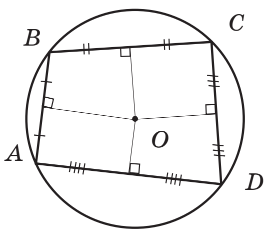
Коло, описане навкоко чотирикутника

Якщо сума протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180°, то навколо нього можна описати коло

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$$



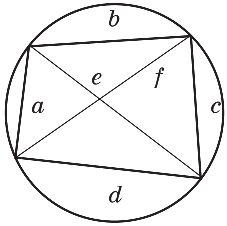
Центр описаного навколо чотирикутника кола є точкою перетину всіх чотирьох серединних перпендикулярів сторін цього чотирикутника



Теорема Птолемея:

Сума добутку протилежних сторін вписаного у коло чотирикутника дорівнює добутку його діагоналей

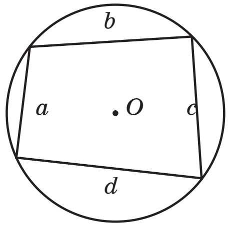
$$ac + bd = ef$$



Площа вписаного чотирикутника

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

де $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

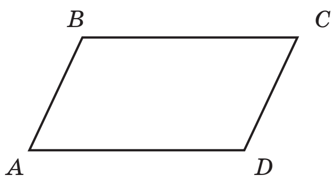


Чотирикут-
ники

Паралелограм

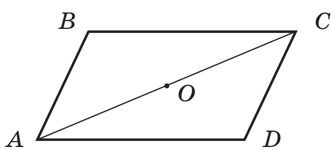
Чотирикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні, називається ***паралелограмом***

$AB \parallel CD$; $BC \parallel AD$



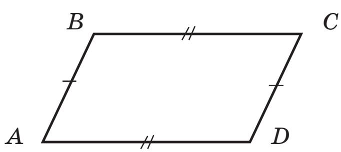
Властивості паралелограма

Середина діагоналі паралелограма є його центром симетрії



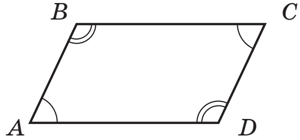
Протилежні сторони рівні

$AB = CD$; $BC = AD$



Протилежні кути рівні

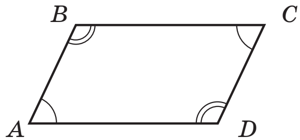
$\angle A = \angle C; \quad \angle B = \angle D$



Сума кутів, прилеглих до довільної сторони, дорівнює 180°.

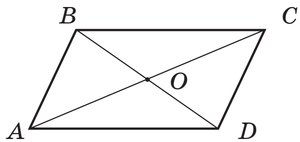
$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C =$

$= \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180^\circ$



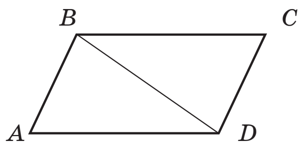
Діагоналі паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться навпіл:

$BO = OD; \quad AO = OC$



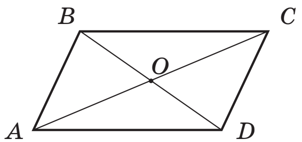
Кожна діагональ ділить паралелограм на два рівних трикутники

$\Delta ABD = \Delta BDC$



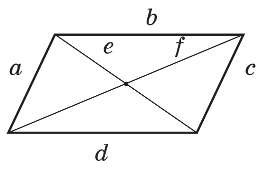
Дві діагоналі паралелограма ділять його на чотири рівновеликих трикутники

$S_{\Delta ABO} = S_{\Delta OBC} = S_{\Delta OCD} = S_{\Delta AOD}$



Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін

$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$



Ознаки паралелограма

Якщо у чотирикутнику протилежні сторони попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм

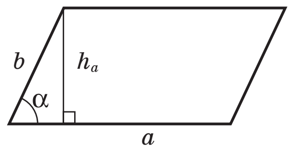
Якщо у чотирикутнику протилежні сторони рівні і паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм

Чотирикутник, діагоналі якого у точці перетину діляться навпіл,— паралелограм

Висота паралелограма

Домовимося висотою паралелограма називати перпендикуляр, проведений із вершини цього паралелограма до неприлеглої сторони

$$h_a = b \sin \alpha$$

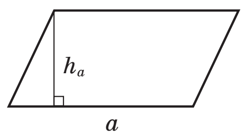


Площа паралелограма

Площу паралелограма можна визначити:

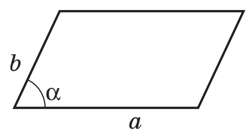
через сторону паралелограма і проведену до неї висоту

$$S = ah_a$$



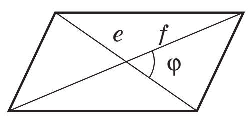
через дві сторони паралелограма і кут між ними

$$S = ab \sin \alpha$$



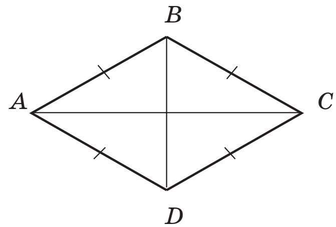
через діагоналі паралелограма і кут між ними

$$S = \frac{ef \sin \varphi}{2}$$



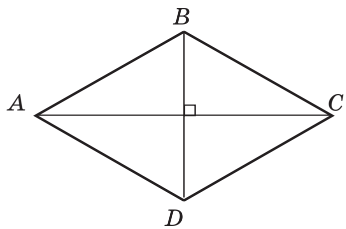
Ромб

Паралелограм, у якого всі сторони рівні, називається ***ромбом***

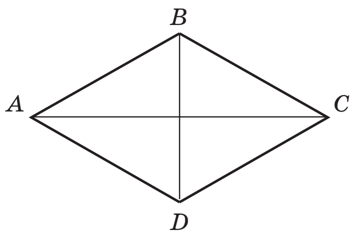


Властивості ромба

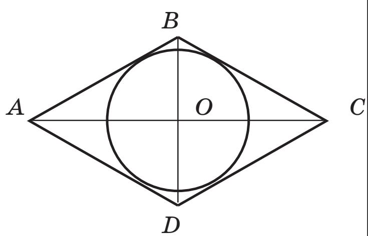
Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом



Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів



У будь–який ромб можна вписати коло з центром у точці перетину його діагоналей

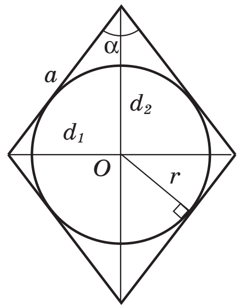


Площа ромба

Площу ромба можна визначити:

— через діагоналі

$$S = \frac{d_1 d_2}{2};$$



— через сторону і кут ромба

$$S = a^2 \sin\alpha;$$

— через сторону і висоту

$$S = ah;$$

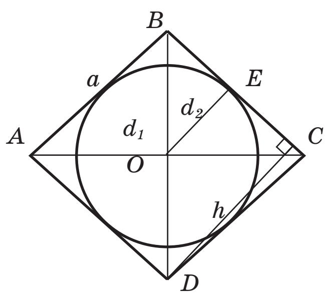
— через сторону і радіус вписаного кола $S = 2ar$

Коло, вписане в ромб

Радіус кола, вписаного у ромб, можна обчислити:

— через висоту ромба

$$r = \frac{h}{2};$$



— через діагоналі ромба і сторону

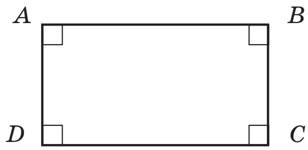
$$r = \frac{d_1 d_2}{4a};$$

— через відрізки, на які ділить сторону ромба точка дотику

$$r = \sqrt{BE \cdot EC}$$

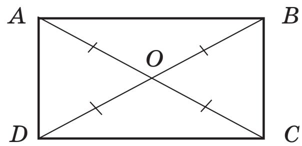
Прямокутник

Прямокутник — паралелограм, у якого всі кути прямі

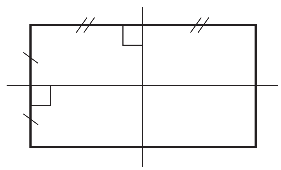


Властивості прямокутника

Діагоналі прямокутника рівні і точкою перетину діляться навпіл

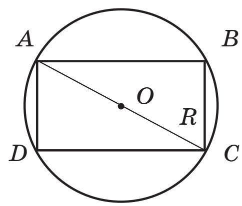


Прямокутник має дві осі симетрії, які збігаються з серединними перпендикулярами до його сторін



Навколо будь–якого прямокутника можна описати коло з центром у точці перетину діагоналей і радіусом, що дорівнює половині діагоналі

$$AC = 2R$$



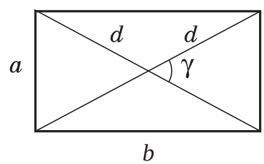
Площу прямокутника можна визначити:

— через його сторони

$$S = ab;$$

— через діагоналі і кут між ними

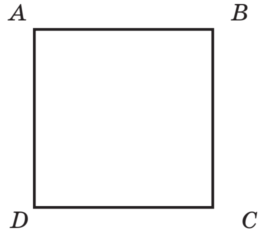
$$S = \frac{d^2 \sin\gamma}{2}$$



Квадрат

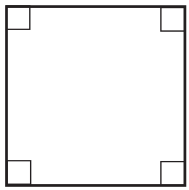
Квадрат — це прямокутник, у якого всі сторони рівні

$$AB = BC = CD = AD$$

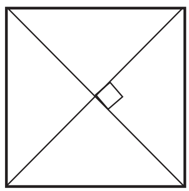


Властивості квадрата

У квадрата всі кути прямі



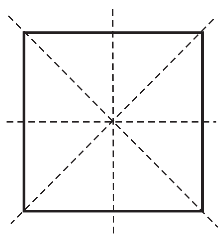
Діагоналі квадрата рівні і перетинаються під прямим кутом



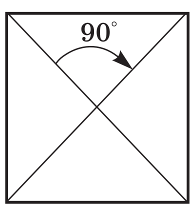
Квадрат має чотири осі симетрії — прямі, що проходять:

— через його діагоналі;

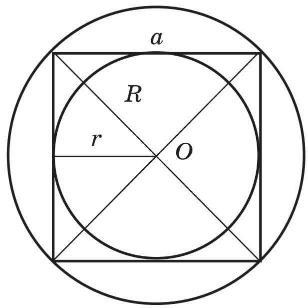
— через середини протилежних сторін



Квадрат має поворотну симетрію. Центр симетрії — точка перетину діагоналей, кут повертання 90°



У квадраті центри вписаного і описаного кіл збігаються і розташовуються у точці перетину його діагоналей.



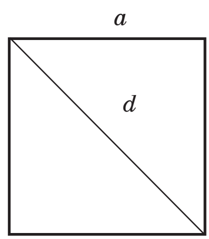
Радіус описаного кола

Радіус вписаного кола

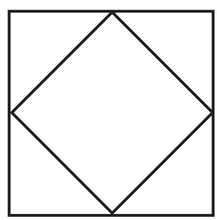
$$r = \frac{a}{2}$$

Площа квадрата

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2}$$



Послідовно з'єднані відрізками середини сусідніх сторін квадрата утворюють квадрат



Трапеція

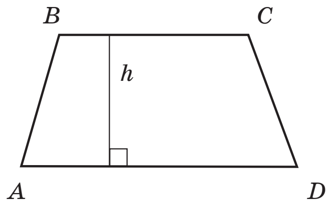
Основні означення

Трапеція — це чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.

Паралельні сторони називаються основами трапеції.

Непаралельні сторони називаються бічними сторонами.

Домовимося висотою трапеції називати перпендикуляр, опущений з довільної точки основи трапеції на другу основу

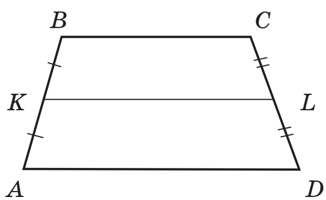


BC, AD — основа;
AB, CD — бічні сторони;
h — висота

Середня лінія трапеції — це відрізок, що з'єднує середини бічних сторін

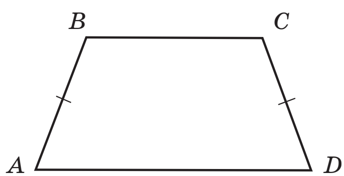
$AK = KB$; $CL = LD$;

KL — середня лінія трапеції

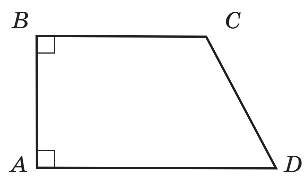


Рівнобічна (рівнобедрена) трапеція — трапеція, у якої бічні сторони рівні

$AB = CD$



Прямокутною називається трапеція, у якої одна бічна сторона перпендикулярна основам



Властивості трапеції

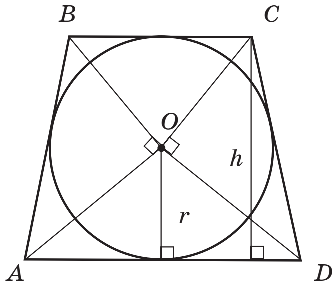
Коло можна вписати у трапецію, якщо сума її бічних сторін дорівнює сумі основ

$$AB + CD = BC + AD$$

Центр вписаного у трапецію кола — точка перетину бісектрис внутрішніх кутів.

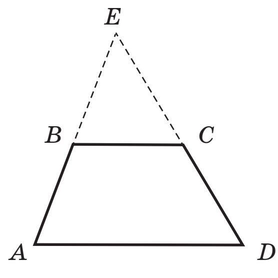
Радіус вписаного кола дорівнює половині висоти

$$r = \frac{h}{2}$$



При продовженні бічних сторін трапеції утворюються два по-дібних трикутники

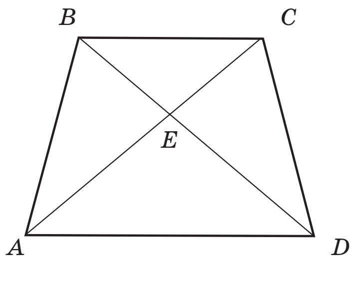
$$\Delta BEC \sim \Delta AED$$



Трикутники, утворені основами і відрізками діагоналей,— подібні. Коефіцієнт подібності дорівнює відношенню основ

$$\Delta BEC \sim \Delta DEA;$$

$$k = \frac{BC}{AD}$$

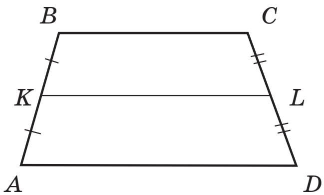


Чотирикутники

Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі

$$KL \parallel BC;\ KL \parallel AD;$$

$$KL = \frac{BC + AD}{2}$$



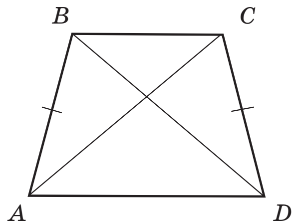
У рівнобічній трапеції:

— кути при основі рівні,

$\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle C$;

— діагоналі рівні

$BD = CA$



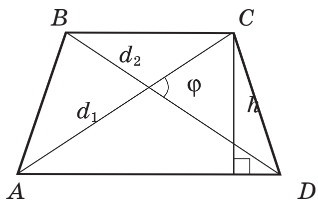
Площу трапеції можна визначити:

— через півсуму основ (середню лінію трапеції) і висоту

$$S = \frac{a + b}{2}\, h;$$

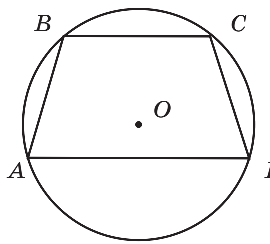
— через діагоналі і кут між ними

$$S = \frac{1}{2}\, d_1 d_2 \sin \varphi$$



Навколо будь–якої рівнобічної трапеції можна описати коло.

Якщо трапеція вписана у коло, то вона рівнобічна



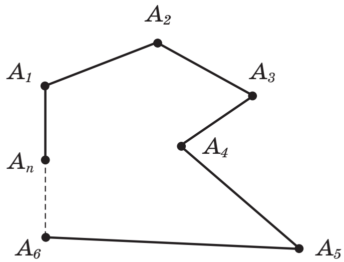
Чотирикутники

Многокутники

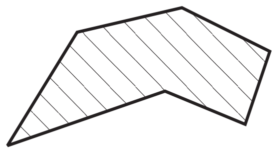
Основні означення

Многокутник — замкнена ламана лінія, яка утворюється, якщо взяти n будь–яких точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ і з'єднати прямолінійним відрізком кожну з них з наступною, а останню — з першою.

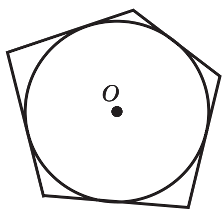
Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються вершинами многокутника, а відрізки A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 — його сторонами



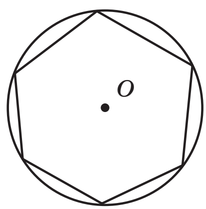
Плоским многокутником, або многокутною областю називається скінченна частина площини, обмежена многокутником



Коло, що дотикається до всіх сторін многокутника, називається вписаним у цей многокутник

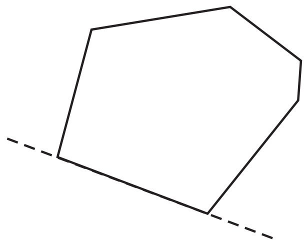


Коло, що містить усі вершини многокутника, називається описаним навколо цього многокутника



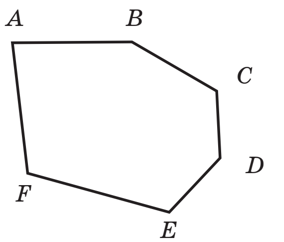
Опуклі многокутники

Многокутник називається ***опуклим***, якщо він лежить в одній півплощині відносно будь–якої прямої, що містить його сторону



Кутом опуклого многокутника при даній вершині називається кут, утворений його сторонами, що збігаються у цій вершині.

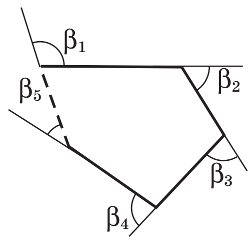
Сума кутів опуклого n–кутника дорівнює $180^\circ(n — 2)$



$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = 4 \cdot 180^\circ$

Зовнішнім кутом опуклого многокутника при даній вершині називається кут, суміжний внутрішньому куту многокутника при даній вершині.

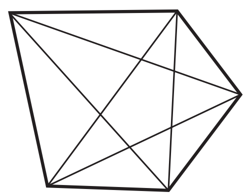
Сума зовнішніх кутів будь–якого опуклого n–кутника дорів-нює 360°



$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 360^\circ$

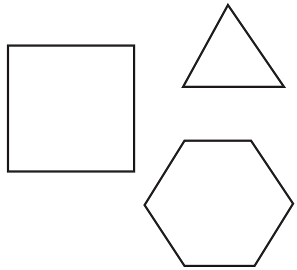
Кількість діагоналей опуклого n–кутника дорівнює

$$\frac{n(n-3)}{2}$$



Правильні многокутники

Опуклий многокутник називається правильним, якщо всі його сторони рівні і всі його внутрішні кути рівні.

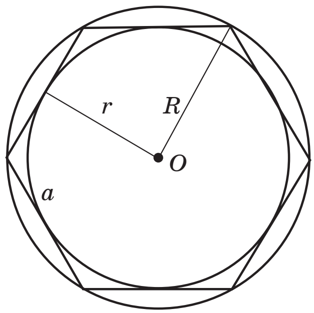


Внутрішній кут правильного n–кутника дорівнює

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$$

Центри вписаного у правильний многокутник кола і кола, описаного навколо нього, збігаються.

Радіуси описаного і вписаного кіл:



$$R = \frac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}};$$

$$r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{180^\circ}{n}}$$

Площу правильного n–кутника можна визначити:

— через сторону многокутника $S = \frac{na^2}{4}\,\mathrm{ctg}\,\frac{180^\circ}{n}$;

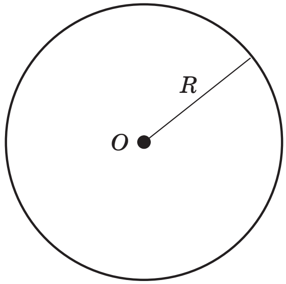
— через радіус описаного кола $S = \frac{nR^2}{2}\sin\frac{360^\circ}{n}$;

— через радіус вписаного кола $S = nr^2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}$

Основні означення

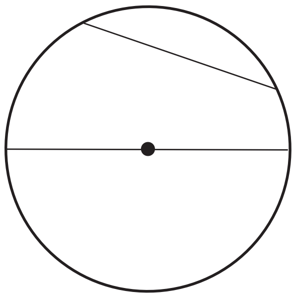
Колом називається замкнена плоска крива, всі точки якої однаково віддалені від даної точки (центра кола), що лежить у тій же площині, що й крива.

Відрізок R, що з'єднує центр кола з будь–якою його точкою (а також довжина цього від-різка), називається ***радіусом***



Відрізок, що з'єднує дві точки кола, називається ***хордою***. Хорда, що проходить через центр кола, називається діаметром.

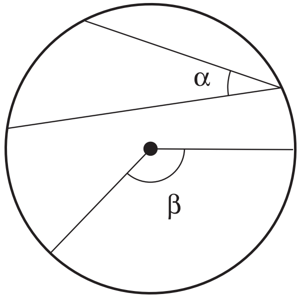
Діаметр — найбільша із хорд



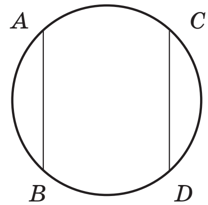
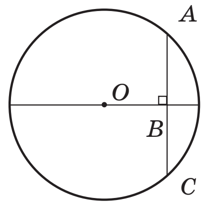
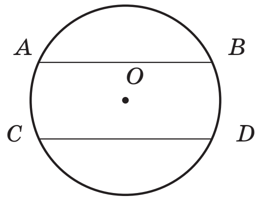
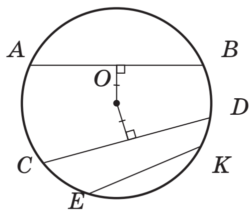
Дуга — частина кола, розміщена між двома його точками.

Вписаним кутом називається кут, утворений двома хордами, що мають спільний кінець.

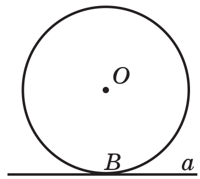
Центральним кутом називається кут, утворений двома радіусами



Властивості хорд, дотичних і січних

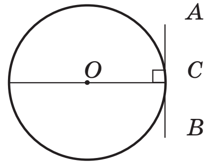
Рівні хорди стягують рівні дуги $AB = CD \Rightarrow \cup AB = \cup CD$	
Діаметр, що проходить через середину хорди, перпендикулярний до неї	
Паралельні хорди відсікають на колі рівні дуги $AB \parallel CD \Rightarrow \cup AC = \cup BD$	
Хорди, рівновіддалені від центра кола, рівні. Більша з двох хорд знаходиться ближче до центра кола	

Дотична до кола

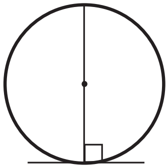
Пряма, що лежить в одній площині з колом і має з ним тільки одну спільну точку, називається ***дотичною*** до цього кола	

Властивості дотичної до кола

Пряма, що перпендикулярна до діаметра кола й проходить через його кінець, є дотичною до цього кола

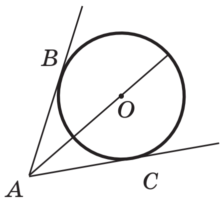


Дотична до кола перпендикулярна до діаметра, що проходить через точку дотику



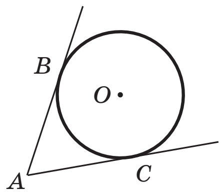
Кути, утворені дотичними, проведеними з однієї точки, і прямою, що проходить через центр кола і цю точку, рівні

$\angle BAO = \angle OAC$



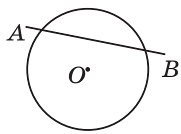
Відрізки дотичних, проведених з однієї точки, рівні:

$AB = AC$



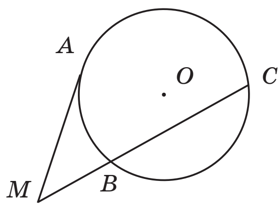
Січна кола і її властивості

Пряма, що перетинає коло у двох різних точках, називається січною



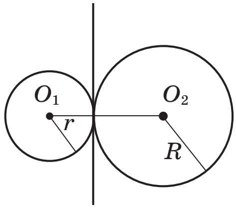
Якщо з точки M поза колом проведена січна до нього, то добуток відстаней від точки M до точок перетину з колом дорівнює квадрату довжини відрізка дотичної з точки M до кола.

$MB \cdot BC = MA^2$



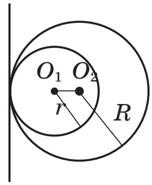
Дотик двох кіл

Зовнішній



$O_1O_2 = r + R$

Внутрішній



$O_1O_2 = R - r$

Кути у колі

Кутова величина дуги

Кутовою величиною дуги називається величина відповідного їй центрального кута

Кутова величина дуги має такі властивості.

1. Кутова величина дуги невід'ємна.
2. Рівні дуги мають однакову кутову величину.
3. Якщо дві дуги одного кола (або двох рівних кіл) мають однакову кутову величину, то вони рівні

Кругове (радіанне) вимірювання кутів

Радіан — кут, що відповідає дузі, довжина якої дорівнює її радіусу, містить приблизно $57^\circ 17' 44{,}8''$.

Радіан приймається за одиницю вимірювання кутів при так званому круговому, чи радіанному, вимірюванні кутів.

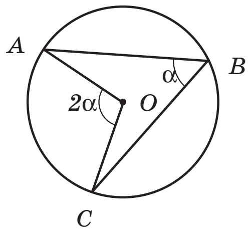
Якщо кругова міра кута дорівнює α, то кут містить $\frac{180}{\pi}\alpha$ градусів; навпаки, кут в n° має кругову міру $\frac{\pi n}{180}$.

Наприклад, кутам у 30°, 45°, 60°, 90°, 180° відповідають кути, що містять $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π радіан.

Вписані кути

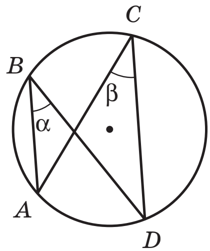
Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається, і дорівнює половині центрального кута, що спирається на ту ж дугу:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$$



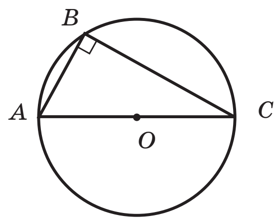
Вписані кути, що спираються на одну дугу, рівні

$$\angle\alpha = \angle\beta$$



Вписаний кут, що спирається на діаметр (півколо),— прямий

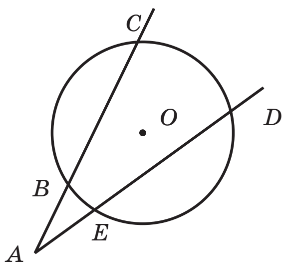
$$\angle ABC = 90^\circ$$



Кут, утворений двома січними

Кут, утворений двома січними, вимірюється піврізницею дуг, що містяться між двома його сторонами

$$\angle BAE = \frac{1}{2}(\cup CD - \cup BE)$$



Коло

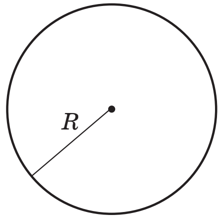
Довжина кола і дуги

Довжиною кола називається загальна границя периметрів вписаних і описаних правильних многокутників при необмеженому подвоєнні числа їх сторін.

Відношення довжини кола до його діаметра однакове для всіх кіл і позначається π.

$$\boldsymbol{\pi = 3{,}14159\ldots}\,.$$

Довжина кола радіуса R дорівнює $2\pi R$

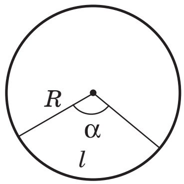


$$l = 2\pi R$$

Довжина дуги, виражена в радіанній мірі, дорівнює добутку числа її радіанів на радіус кола

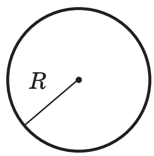
$$l = \alpha \cdot R$$

(α – кут у радіанах, який спирається на цю дугу)



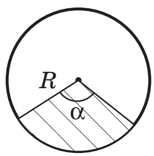
Площа круга і його частин

Площа круга



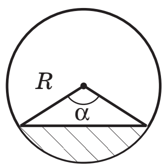
Площа сектора $S = \dfrac{1}{2}\alpha R^2$

(α – кут у радіанах)



Площа сегмента

$$S = \frac{1}{2}(\alpha - \sin\alpha)\,R^2$$

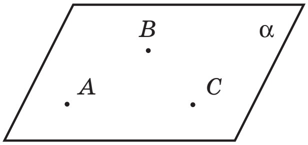


Прямі і площини у просторі

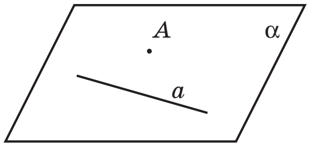
Спосіб задання площини

Площина у просторі однозначно визначається:

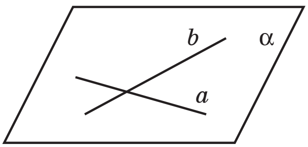
трьома точками, що не лежать на одній прямій



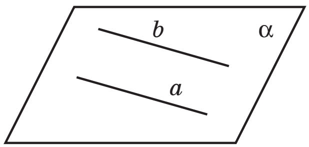
прямою і точкою, що не лежить на прямій



двома прямими, що перетинаються



двома паралельними прямими

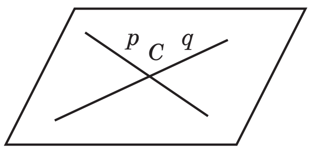


Паралельність прямих і площин

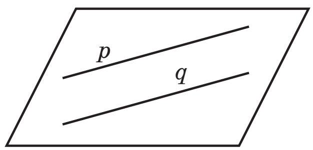
Взаємне розміщення прямих у просторі

Дві прямі у просторі перетинаються, якщо вони мають лише одну спільну точку

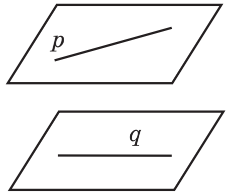
$p \cap q = C$



Дві прямі у просторі називаються ***паралельними***, якщо вони лежать в одній площині і не мають спільних точок

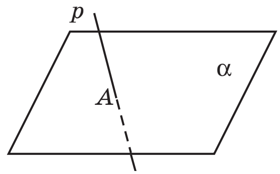


Дві прямі у просторі називаються ***мимобіжними***, якщо не існує площина, що містить ці прямі

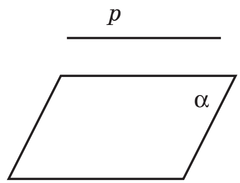


Взаємне розміщення прямої і площини у просторі

Пряма і площина перетинаються, якщо вони мають одну спільну точку:
(*A* називається слідом прямої *p* на площині α)



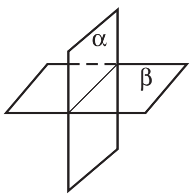
Пряма називається паралельною площині, якщо вона лежить у цій площині або не має з нею спільних точок



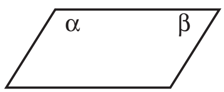
Взаємне розміщення площин у просторі

Дві площини у просторі можуть:

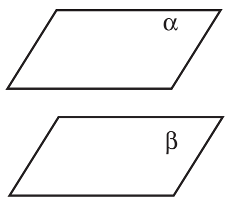
перетинатися



збігатися



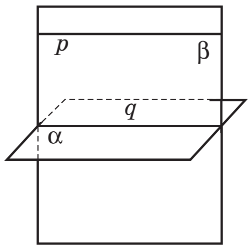
не мати спільних точок



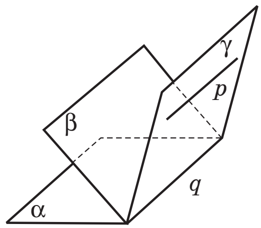
Дві площини називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок або збігаються

Ознаки паралельності прямих і площин у просторі

Для того щоб пряма p була паралельна площині α, достатньо, щоб ця пряма була паралельна хоча б одній прямій q, що лежить у площині α.



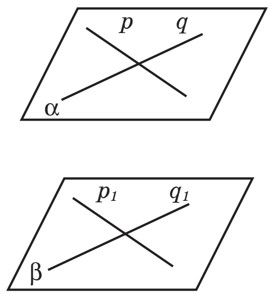
Якщо пряма p паралельна площині α, то вона паралельна лінії перетину а з будь–якою площиною β, що проходить через p



Пряма p, яка паралельна кожній з двох площин α і β, що перетинаються, паралельна їх лінії перетину q

Ознака паралельності двох площин

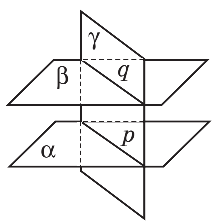
Якщо дві прямі, що перетинаються і лежать у площині α, відповідно паралельні двом прямим, які перетинаються і лежать у площині β, то ці площини паралельні



Властивості паралельних прямих у просторі

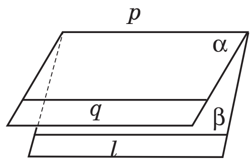
Прямі, одержані при перетині двох паралельних площин третьою, паралельні між собою

$\alpha \parallel \beta$; $q \parallel p$



Дві прямі, кожна з яких паралельна третій, паралельні між собою

$$\begin{array}{l} p \parallel q, \\ l \parallel q \end{array} \Rightarrow p \parallel l$$

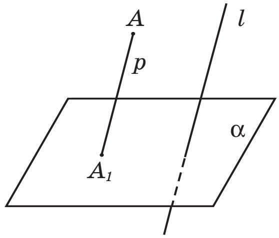


Паралельне проектування

При ***паралельному проектуванні*** задаються:
— площина проектування α,
— напрям проектування (пряма l)

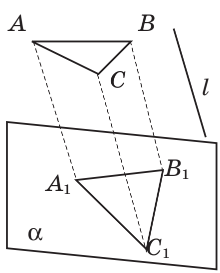
Паралельною проекцією точки A на площину α називається точка перетину прямої p, що проходить через точку A і паралельна напряму проектування, з площиною проектування α

$$A_1 = \text{пр}_\alpha A$$



Паралельна проекція на площину α всіх точок фігури $Ф$ утворює фігуру $Ф_1$, яка називається паралельною проекцією фігури $Ф$ на площину α

$$Ф_1 = \text{пр}_\alpha Ф$$



Прямі і площини у просторі

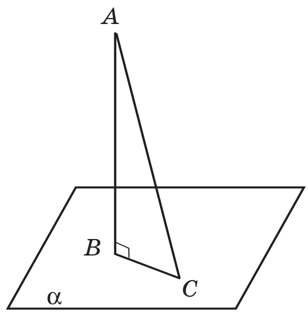
Властивості паралельних проекцій

1. Паралельна проекція прямої — це або точка, або пряма.
2. Паралельні проекції паралельних прямих p і q, що не паралельні напряму проектування l, паралельні.
3. Відношення довжин відрізків прямої дорівнює відношенню довжин їх проекцій

Перпендикулярність прямих і площин

Перпендикуляр і похила до площини

Перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину, називається відрізок, що з'єднує дану точку з точкою площини і лежить на прямій, яка перпендикулярна до площини.



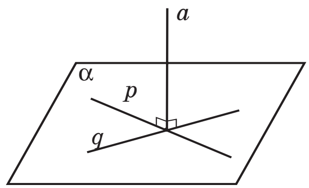
AB — перпендикуляр до площини α
AC — похила до площини α

Похилою, проведеною з даної точки до даної площини, називається будь–який відрізок, що з'єднує дану точку з точкою площини і не є перпендикуляром до цієї площини

Прямі і площини у просторі

Ознака перпендикулярності прямої і площини

Для того щоб пряма була перпендикулярна до площини, достатньо, щоб вона була перпендикулярна до двох будь–яких прямих, що перетинаються і лежать у цій площині



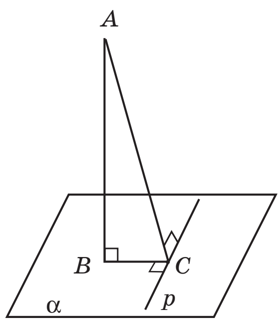
Теорема про три перпендикуляри

Пряма теорема

Пряма, що проведена на площині перпендикулярно до проекції певної похилої, перпендикулярна і до самої похилої

Обернена теорема

Пряма, що проведена на площині перпендикулярно до похилої, перпендикулярна і до ортогональної проекції цієї похилої

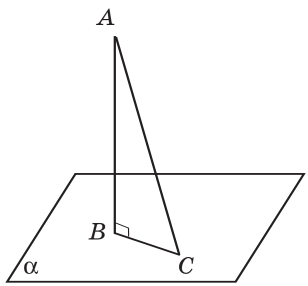


Відстань від точки до площини

Якщо з точки A, що лежить поза площиною α, провести до неї перпендикуляр і похилу, то:

1) перпендикуляр коротший за будь–яку похилу;

2) рівні похилі мають рівні проекції і рівним проекціям відповідають рівні похилі;



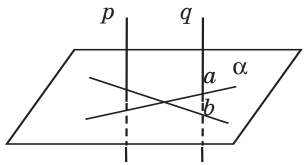
Прямі і площини у просторі

3) з двох похилих, що мають нерівні проекції, довша та, проекція якої довша

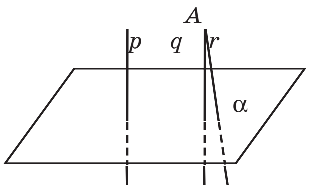
Відстань від точки до площини, що не містить цю точку, дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з даної точки на дану площину

Властивості перпендикулярів до площини

Площина, що перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, перпендикулярна і до другої прямої

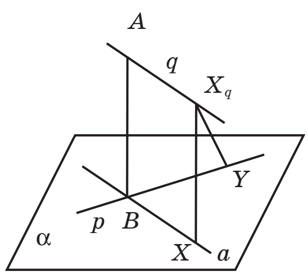


Прямі, що перпендикулярні до однієї площини, паралельні між собою



Відстань між мимобіжними прямими

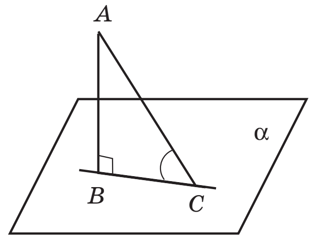
Відстань між мимобіжними прямими дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з будь–якої точки однієї прямої на площину, що проходить через другу пряму паралельно першій



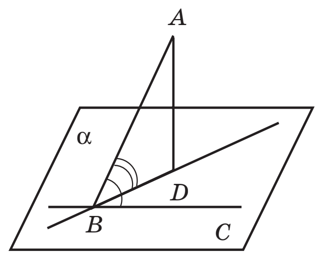
Кути у просторі

Кут між прямою і площиною

Кутом між похилою AC і площиною α називається величина кута між похилою та її ортогональною проекцією (BC) на цю площину

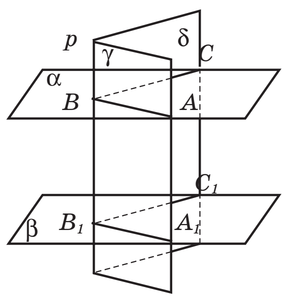


Кут між похилою та її ортогональною проекцією менший, ніж кут між похилою і будь–якою іншою прямою, що проведена у цій площині через основу похилої

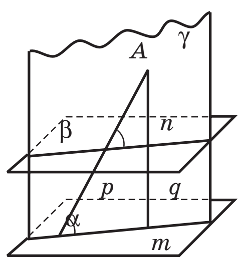


Пряма, перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, перпендикулярна і до другої

Площини α і β, перпендикулярні до однієї й тієї ж прямої p, паралельні між собою



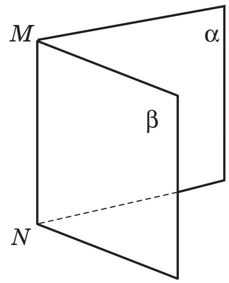
Похила до двох паралельних площин утворює з ними рівні кути



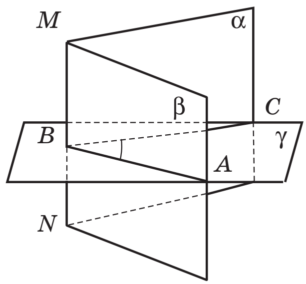
Двогранні кути

Двогранним кутом називається фігура, утворена двома півплощинами α і β із спільною прямою MN, що їх обмежує.

Півплощини α і β називаються гранями, а пряма MN — ребром двогранного кута



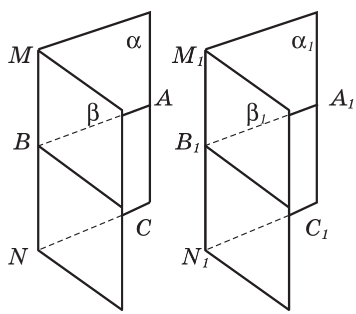
Перетинання двогранного кута з площиною, перпендикулярною до його ребра, називається ***лінійним кутом*** двогранного кута



Усі лінійні кути двогранного кута рівні

За величину двогранного кута приймають величину його лінійного кута

Лінійні кути, що відповідають рівним двогранним кутам, рівні, і навпаки, рівним лінійним кутам відповідають рівні двогранні кути



Кут між площинами. Перпендикулярні площини

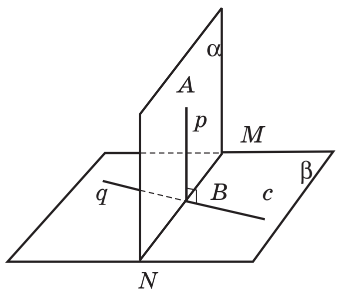
Кутом між двома площинами, що перетинаються, називається найменша з величин двогранних кутів, утворених цими площинами.

Площини α і β, кут між якими дорівнює 90°, називаються перпендикулярними ($\alpha \perp \beta$). Якщо дві площини паралельні, то кут між ними вважається рівним 0°

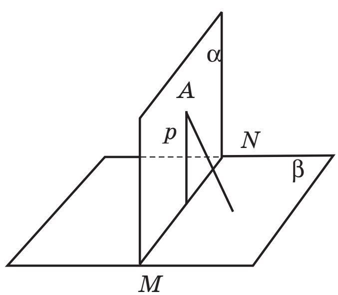
$$0^\circ \le \left(\widehat{\alpha,\beta}\right) \le 90^\circ$$

Площина α, що проходить через перпендикуляр p до другої площини β, перпендикулярна до площини β

Якщо дві площини α і β взаємно перпендикулярні, то пряма p, проведена в одній з цих площин перпендикулярно до їх лінії перетину, перпендикулярна і до другої площини



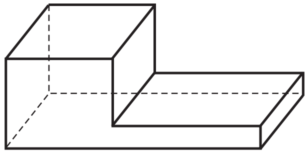
Якщо α і β — дві взаємно перпендикулярні площини і з точки A площини α опущений перпендикуляр p на площину β, то він лежить у площині α



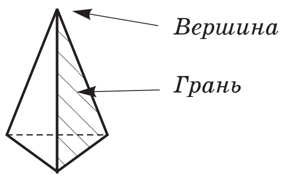
Многогранники

Основні означення

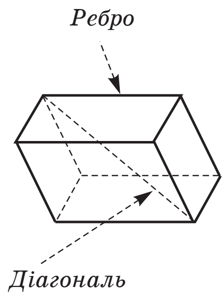
Многогранником називається геометричне тіло, поверхня якого складається із скінченного числа плоских многокутників



Многогранник називається опуклим, якщо він міститься по одну сторону площини кожного плоского многокутника на його поверхні



Многокутники, з яких складена многогранна поверхня, називаються її гранями; сторони многокутників — ребрами, а вершини — вершинами многогранника

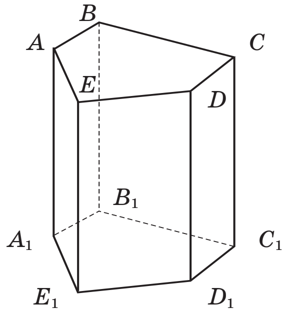


Відрізок, що з'єднує дві вершини многогранника, які не лежать на одній грані, називається діагоналлю многогранника

Призма і паралелепіпед

Призмою називається многогранник, поверхня якого є об'єднання двох рівних багатокутників, розміщених у паралельних площинах (основ призми), і паралелограмів (бічних граней), число яких дорівнює числу сторін основи

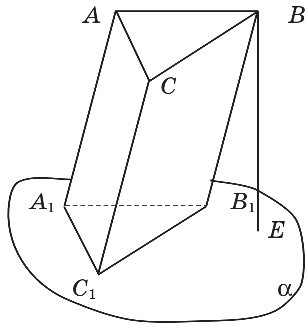
Об’єднання граней, що не є основами призми, називається її бічною поверхнею



Пряма призма

Призма називається ***прямою***, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площин основ. Бічні грані прямої призми — прямокутники

Непряма призма називається ***похилою***



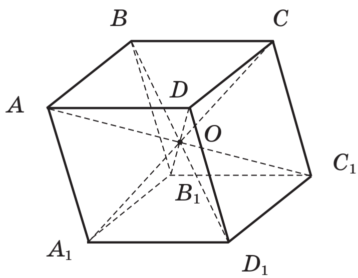
Похила призма
BE — висота призми

Висотою будь–якої призми називається перпендикуляр, опущений з будь–якої точки верхньої основи на площину нижньої основи

Паралелепіпед

Призма, в основі якої лежить паралелограм, називається ***паралелепіпедом***

Середина будь–якої діагоналі паралелепіпеда є центром його симетрії



O — центр симетрії

Протилежні грані паралелепіпеда рівні і паралельні

Усі діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і діляться нею навпіл

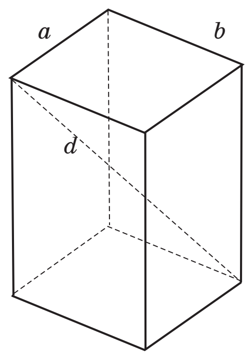
Прямокутний паралелепіпед

Прямий паралелепіпед, в основі якого лежить прямокутник, називається прямокутним

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, називаються його вимірами

Прямокутний паралелепіпед, у якого всі три виміри рівні, називається кубом

У прямокутному паралелепіпеді квадрат довжини діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів



$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Площа поверхні і об'єм призми

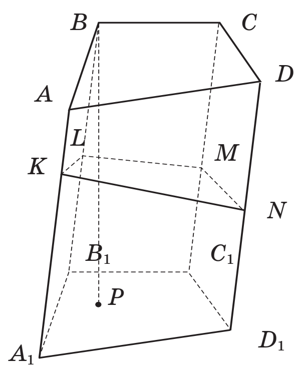
Бічна поверхня $S_{б} = p \cdot l$,
де p — периметр перпендикулярного перерізу (для прямої призми — периметр основи);
l — довжина бічного ребра.

Повна поверхня

$$S_{п} = S_{б} + 2S_{о},$$

де $S_{о}$ — площа основи.

Об'єм $V = S \cdot l$,
де S — площа перпендикулярного перерізу (для прямої призми — площа основи);
l — довжина бічного ребра



KLMN — перпендикулярний переріз,
BP — висота

Многогранники

Площа поверхні та об'єм прямокутного паралелепіпеда

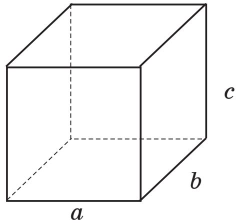
Бічна поверхня

$S_б = 2c\,(a + b).$

Повна поверхня

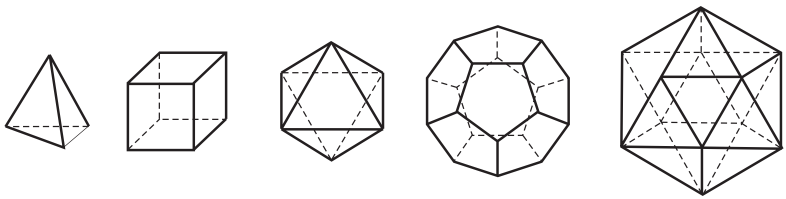
$S_п = 2\,(ac + bc + ab).$

Об'єм $V = abc$



Правильні многогранники

Опуклі многогранники, всі грані яких правильні многокутники, називаються правильними многогранниками



Тетраедр Куб Октаедр Додекаедр Ікосаедр

Многогранники

Основні формули

Правильні многогранники	Радіус описаної сфери	Радіус вписаної сфери	Об'єм
Тетраедр	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{a\sqrt{6}}{12}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Куб	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$	a^3
Октаедр	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

a — довжина ребра многогранника

Піраміда

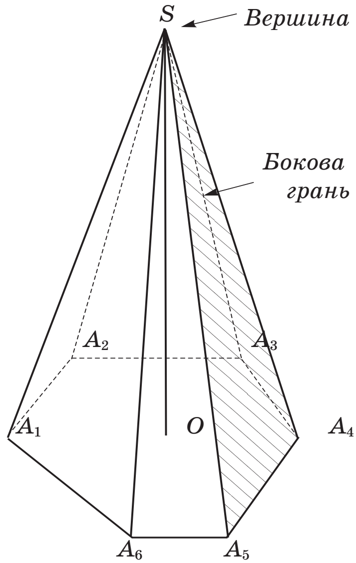
Пірамідою називається многогранник, однією з граней якого є многокутник (основа піраміди), а інші грані (бічні грані) – трикутники із спільною вершиною (вершина піраміди)

Перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину її основи, називається висотою піраміди

Об'єм піраміди

$$V = \frac{1}{3} S_o \cdot h,$$

де S_o — площа основи;
h — висота



$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — основа,
SO — висота

Повна поверхня піраміди

$$S_п = S_б + S_о,$$

де $S_б$ — площа бічних граней,
$S_о$ — площа основи

Многогранники

Зрізана піраміда

Площина, що перетинає піраміду і паралельна її основі, ділить її на дві частини: піраміду, подібну до даної ($SA_1B_1C_1D_1$), і так звану зрізану піраміду ($A_1B_1C_1D_1ABCD$).

Основи зрізаної піраміди — подібні многокутники, а бічні грані

Висота зрізаної піраміди — це відстань між площинами її основ.

Об'єм зрізаної піраміди

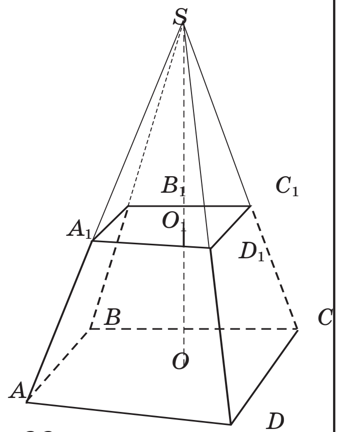
$$V = \frac{1}{3} h \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right),$$

де S_1 і S_2 — площі основ,
h — висота

Повна поверхня зрізаної піраміди

$$S_п = S_1 + S_2 + S_б,$$

де S_1 і S_2 — площі основ,
$S_б$ — площа бічних граней



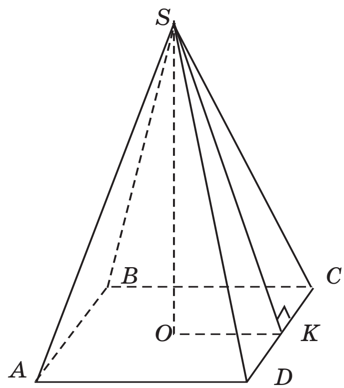
OO₁ — висота

Правильна піраміда

Піраміда називається ***правильною***, якщо в її основі лежить правильний многокутник і висота піраміди проходить через центр основи

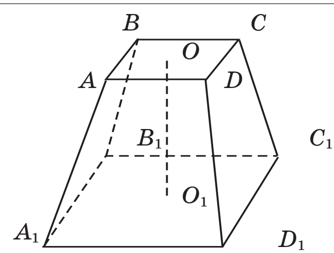
Бічні грані правильної пірамі-ди — рівні між собою рівнобедрені трикутники, висота кожного з цих трикутників називається апофемою

Бічна поверхня правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему



SK — апофема

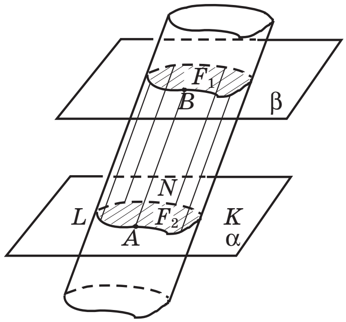
Зрізана піраміда, яка утворюється з правильної піраміди, також називається правильною



Тіла обертання

Циліндр

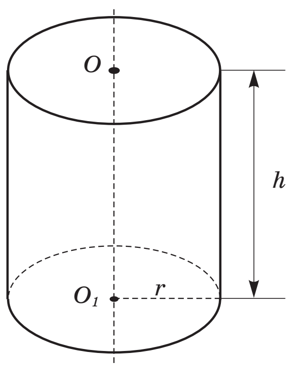
Циліндрична поверхня — це множина прямих (твірних) простору, паралельних заданому напрямку і таких, що проходять через певну лінію (напрямну).



Циліндр — це тіло, обмежене замкнутою циліндричною поверхнею і двома паралельними площинами, що перетинають її,— основами циліндра

AB — твірна,
F_1 і F_2 — основи,
AKNLA — напрямна

Циліндр, у якого основи перпендикулярні до твірної і являють собою круги, називається прямим круговим циліндром (часто називають просто циліндром).



Об'єм такого циліндра

$$V = \pi r^2 h;$$

бічна поверхня

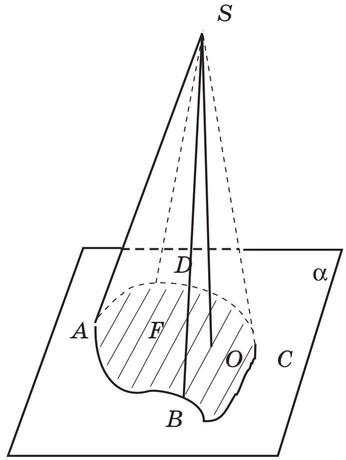
$$S = 2\pi r h,$$

де r — радіус основи,
h — висота циліндра

Тіла обертання

Конус

Конічна поверхня — це множина прямих (твірних) простору, що з'єднують всі точки певної лінії (напрямної) з даною точкою (вершиною) простору, що не лежить у площині напрямної.



Конус — це тіло, обмежене замкненою конічною поверхнею і площиною, що містить напрямну (площину основи).

Перпендикуляр, опущений з вершини конуса на площину основи, називається висотою конуса.

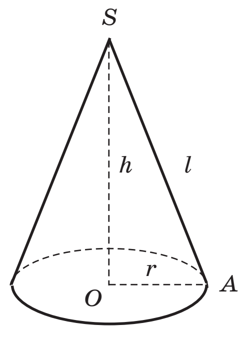
S — вершина,
F — основа,
ABCDA — напрямна,
SA, SB, SC, SD — твірні,
SO — висота

Частина конічної поверхні, що розташована між вершиною і площиною основи, називається бічною поверхнею конуса

Тіла обертання

Прямий круговий конус

Конус називається ***прямим*** круговим, якщо його напрямна — коло, а вершина ортогонально проектується в його центр. (У курсі елементарної геометрії його називають просто конус)



Основні властивості і формули

Прямий круговий конус можна утворити обертанням прямокутного трикутника навколо одного з його катетів. При цьому обертанні другий катет опише основу конуса, а гіпотенуза — бічну поверхню конуса

Довжина твірної $l = \sqrt{h^2 + r^2}$.

Об'єм $V = \dfrac{1}{3} \pi r^2 h$.

Бічна поверхня $S_б = \pi r l$.

Повна поверхня $S_п = \pi r (l + r)$,

де r — радіус кола основи,

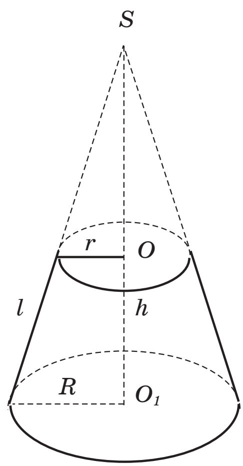
h — висота конуса

Зрізаний конус

При перетині конуса площиною, що паралельна його основі, утворюється фігура, гомотетична основі, причому центром гомотетії служить вершина конуса.

Частина конуса, обмежена його основою і січною площиною, паралельною основі, називається ***зрізаним конусом***.

Висотою зрізаного конуса називається відрізок перпендикуляра, опущеного з будь–якої точки верхньої основи на нижню



Тіла обертання

Основні властивості і формули

Площі паралельних перетинів конуса відносяться до площі його основи, як квадрати їх відстаней до вершини конуса.

Довжина твірної $l = \sqrt{(R-r)^2 + h^2}$;

об'єм $V = \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + r^2 + Rr)$;

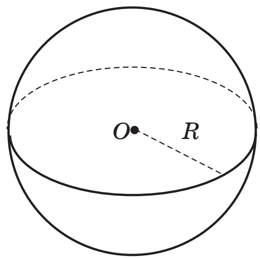
бічна поверхня $S_б = \pi\,(R + r)\,l$,

де r — радіус кола верхньої основи,
R — радіус кола нижньої основи,
h — висота зрізаного конуса

Сфера і куля

Сфера — це замкнена поверхня, що складається з усіх точок, однаково віддалених від однієї точки (центра сфери).

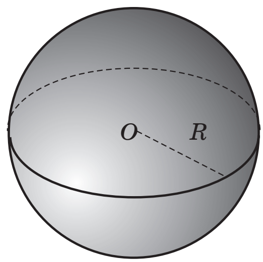
Відрізок, що з'єднує центр сфери з будь-якою її точкою, називається ***радіусом сфери***.



Площа поверхні сфери

$$S = 4\pi R^2$$

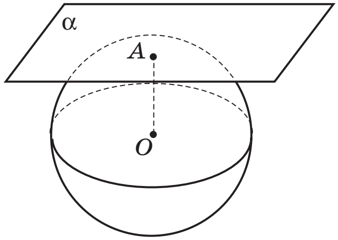
Частина простору, що обмежена сферою і містить її центр, називається ***кулею***.



Об'єм кулі $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Тіла обертення

Площина, що має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку, називається дотичною до кулі (α), а та, що має більше, ніж одну спільну точку,— січною площиною



Кульовий сегмент — це частина кулі, що відтинається січною площиною.

Об'єм кульового сегмента

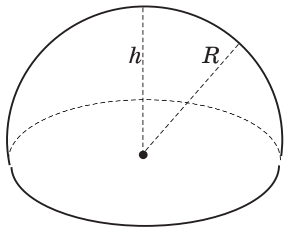
$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h);$$

бічна поверхня

$$S = 2\pi Rh,$$

де R — радіус кулі,

h — висота кульового сегмента



Кульовий шар — це частина кулі, що міститься між двома паралельними площинами, які проходять через кулю.

Об'єм кульового шару

$$V = \frac{1}{6}\pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2);$$

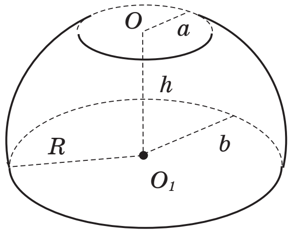
бічна поверхня

$$S = 2\pi Rh,$$

де R — радіус кулі,

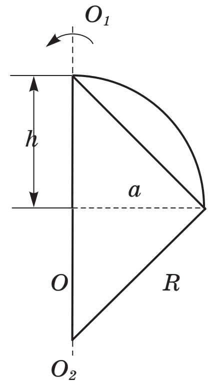
h — відстань між площинами основ,

a і b — радіуси основ



Тіла обертання

Кульовий сектор — це геометричне тіло, що утворюється при обертанні кругового сектора навколо одного з радіусів, який обмежує круговий сектор.



Об'єм кульового сектора

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h\ ;$$

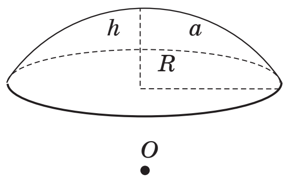
поверхня кульового сектора

$$S = \pi R\,(2h + a),$$

де R — радіус сектора,

h — проекція хорди, що стягує дугу сектора, на вісь обертання;

a — відстань від кінців хорди до осі



Взаємне розміщення двох сфер

Нехай є дві сфери з центрами відповідно O_1 і O_2 і радіусами R_1 і R_2. Тоді:

1) якщо $O_1O_2 > R_1 + R_2$ або $O_1O_2 < |R_1 - R_2|$, то ці сфери не мають спільних точок;

2) якщо $O_1O_2 = R_1 + R_2$ або $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$, то вони дотикаються;

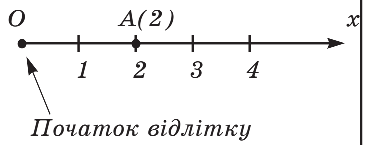
3) якщо $|R_1 - R_2| < O_1O_2 < R_1 + R_2$, то вони перетинаються по колу

Тіла обертання

Декартова система координат

Вісь — пряма лінія із зазначеним на ній напрямом

Вісь координат — вісь, на якій задано початок відліку, одиниця масштабу, і кожному дійсному числу відповідає певна точка

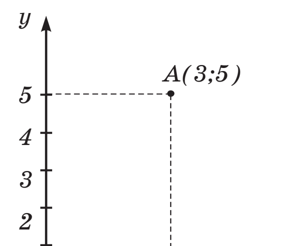


Декартові координати на площині й у просторі

На площині

Дві взаємно перпендикулярні осі координат (вісь абсцис Ox, вісь ординат Oy) із спільним початком відліку.

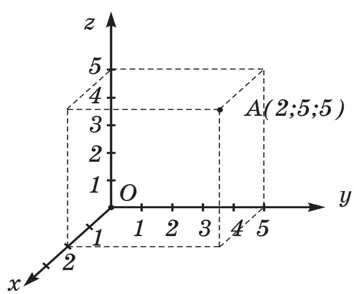
Кожній точці площини ставиться у відповідність пара чисел (x_A, y_A, z_A) — координати проекцій точки на відповідні осі координат



У просторі

Три взаємно перпендикулярні осі координат (вісь абсцис Ox, вісь ординат Oy, вісь аплікат Oz) із спільним початком відліку.

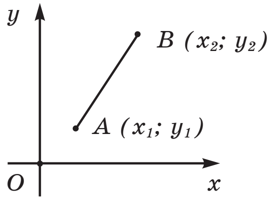
Кожній точці простору ставиться у відповідність трійка чисел (x_A, y_A, z_A) — координати проекцій точки на відповідні осі координат



Основні координатні формули

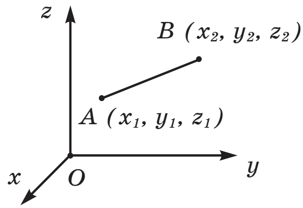
Відстань між точками

На площині



$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

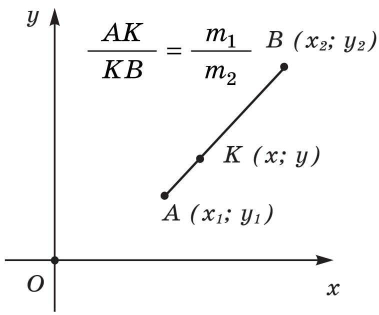
У просторі



$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Координати точки ділення відрізка у даному відношенні

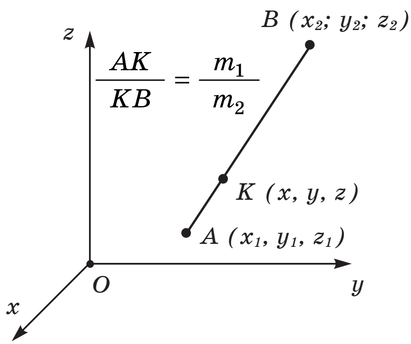
На площині



$$x=\frac{m_2x_1+m_1x_2}{m_1+m_2};$$

$$y=\frac{m_2y_1+m_1y_2}{m_1+m_2}$$

У просторі



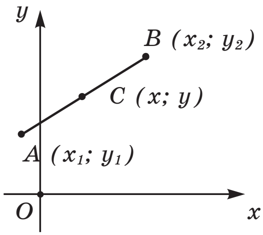
$$x=\frac{m_2x_1+m_1x_2}{m_1+m_2};$$

$$y=\frac{m_2y_1+m_1y_2}{m_1+m_2};$$

$$z=\frac{m_2z_1+m_1z_2}{m_1+m_2}$$

Координати середини відрізка

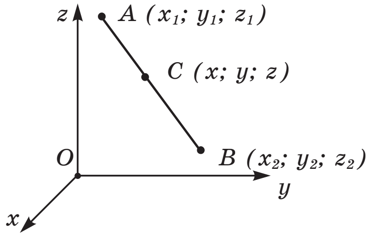
На площині



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

У просторі



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

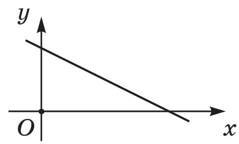
$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Рівняння прямої

Загальне рівняння прямої

$$ax + by + c = 0,$$

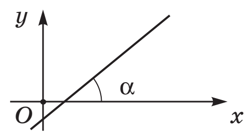
де $a \neq 0$ або $b \neq 0$



Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx + b,$$

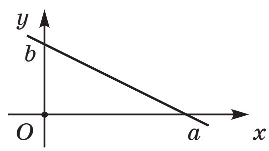
де $k = \operatorname{tg} \alpha$



Рівняння прямої у відрізках

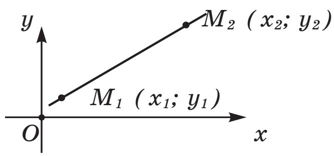
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$(a \neq 0,\ b \neq 0)$

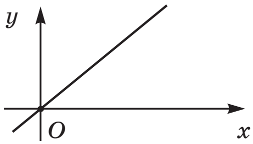
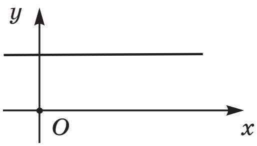
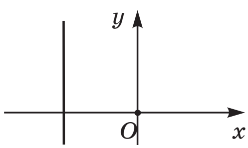


Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



Окремі випадки рівняння прямої

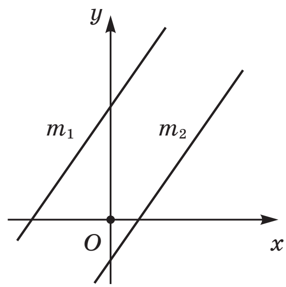
Вид прямої	Вид рівняння *прямої*	
	$ax + by + c = 0$	$y = kx + b$
Графік прямої пропорційності 	$ax + by = 0$; $y = -\dfrac{a}{b}x$; $(a \neq 0;\ b \neq 0)$	$y = kx$; $(k \neq 0)$
Пряма, паралельна осі x 	$by + c = 0$; $y = -\dfrac{c}{b}$; $(b \neq 0;\ c \neq 0)$	$y = b$; $(b \neq 0)$
Пряма, паралельна осі y 	$ax + c = 0$; $x = -\dfrac{c}{a}$; $(a \neq 0;\ c \neq 0)$	$x = m$, де m — будь-яке дійсне число, відмінне нуля
Рівняння осі x 	$by = 0$; $y = 0$; $(b \neq 0)$	$y = 0$

Умова паралельності прямих

m_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$;
m_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$;

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

m_1: $k_1x + b_1$:
m_2: $k_2x + b_2$;
$k_1 = k_2$; $(b_1 \neq b_2)$

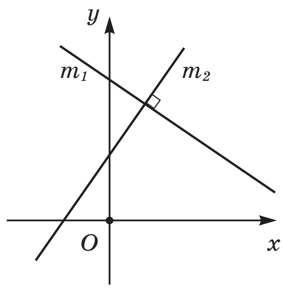


Умова перпендикулярності прямих

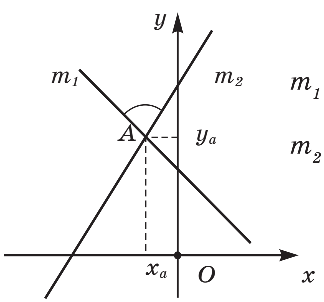
m_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$;
m_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$;

$$\frac{a_1}{b_1} = -\frac{b_2}{a_2}$$

m_1: $y = k_1x + b_1$;
m_2: $y = k_2x + b_2$;
$k_1k_2 = -1$



Перетин прямих



m_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

m_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

m_1: $y = k_1x + b_1$

m_2: $y = k_2x + b_2$

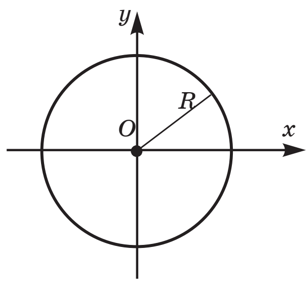
Декартова система координат

Умова перетину прямих	$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$	$k_1 \neq k_2$
Координати точки перетину	$x_A = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ $y_A = \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$	$x_A = \dfrac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}$ $y_A = \dfrac{k_1b_2 - k_2b_1}{k_1 - k_2}$
Кут між прямими, що перетинаються	$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}$	$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$

Рівняння кола

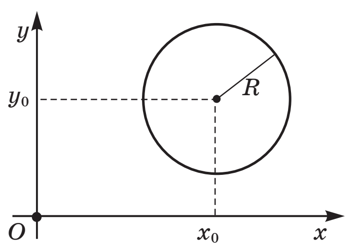
З центром на початку координат

$$x^2 + y^2 = R^2$$



З центром у точці $(x_0; y_0)$

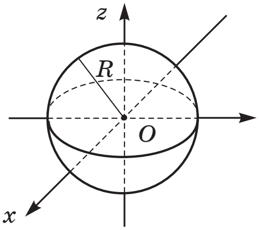
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$



Рівняння сфери

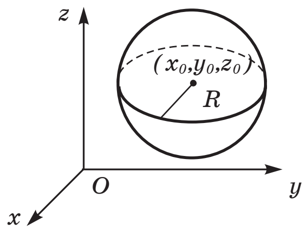
З центром на початку координат

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



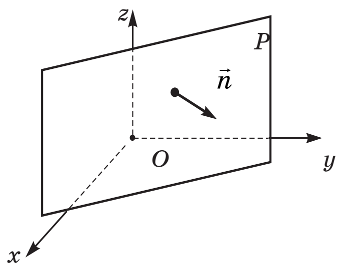
З центром у точці (x_0, y_0, z_0)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 +$$
$$+ (z - z_0)^2 = R^2$$

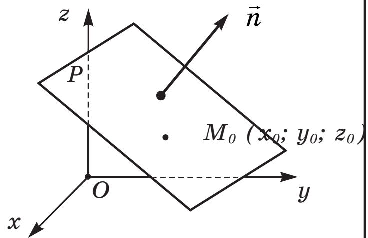


Рівняння площини

Загальне рівняння площини
$$ax + by + cz + d = 0,$$
де коефіцієнти a, b, c дорівнюють координатам вектора $\vec{n}$ $(a; b; c)$, перпендикулярного до даної площини (a, b, c не дорівнюють нулю одночасно)



Рівняння площини, що проходить через точку M_0 $(x_0; y_0; z_0)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}$ $(a; b; c)$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
або
$$ax + by + cz + d = 0,$$
де $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

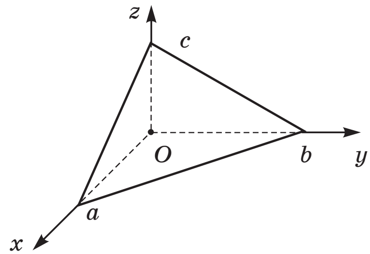


Рівняння площини у відрізках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

де a, b, c — відрізки, що відтинаються площиною на координатних осях

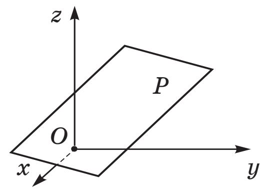
$(a \neq 0;\ b \neq 0;\ c \neq 0)$



Окремі випадки положення площини відносно системи координат

Площина проходить через початок координат

$$ax + by + cz = 0$$

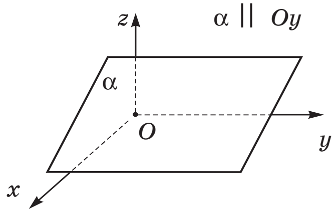


Площина паралельна координатній осі

$Oz \quad ax + by + d = 0$

$Oy \quad ax + cz + d = 0$

$Ox \quad by + cz + d = 0$

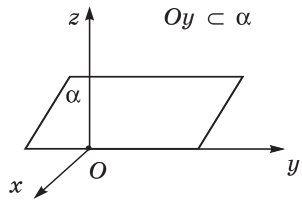


Площина проходить через координатну вісь

$Ox \quad by + cz = 0$

$Oy \quad ax + cz = 0$

$Oz \quad ax + by = 0$

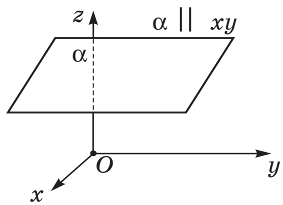


Площина паралельна координатній площині

$xy \quad cz + d = 0$

$xz \quad by + d = 0$

$yz \quad ax + d = 0$



Декартова система координат

Взаємне розміщення двох площин

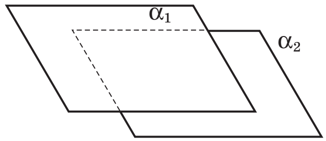
$$\alpha_1:\quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0;$$
$$\alpha_2:\quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Умова паралельності площин:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

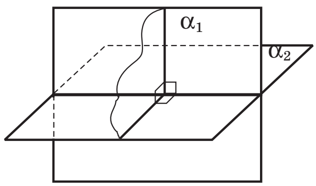
При $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

площини збігаються



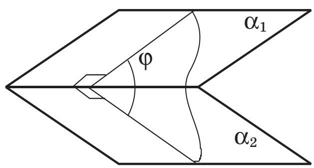
Умова перпендикулярності площин:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$



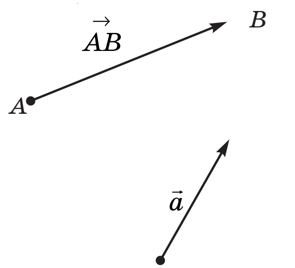
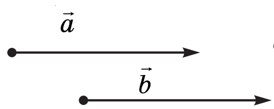
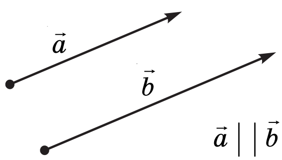
Кут між площинами (менший з двох суміжних):

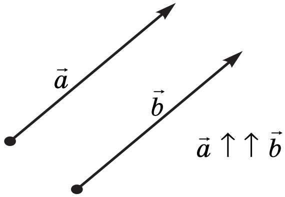
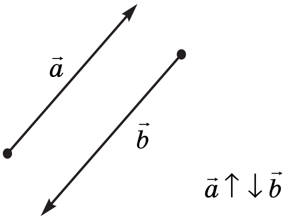
$$\cos\varphi = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$



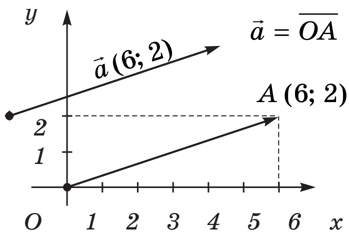
Вектори

Основні означення

Скаляр (скалярна величина) — величина, кожне значення якої можна виразити дійсним числом	*Скаляри:* $\left\{\begin{array}{l}\text{— довжина;}\\ \text{— площа;}\\ \text{— об'єм}\end{array}\right.$
Вектор — напрямлений відрізок прямої, у якого один кінець (точка A) називається ***початком вектора***, другий кінець (точка B) — ***кінцем*** вектора. Позначення вектора: $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$, $\boldsymbol{a}$, $\overline{a}$, $\vec{a}$	
Модуль вектора — скалярна величина, що дорівнює відстані між початком і кінцем вектора (довжині вектора). Позначення модуля вектора:	 $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 4$
Нульовий вектор — вектор, початок і кінець якого збігаються	 $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 0$
Два вектори називаються ***рівними***, якщо вони мають рівні модулі й однаково напрямлені	 $\vec{a} = \vec{b}$
Два вектори називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній або на паралельних прямих	 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

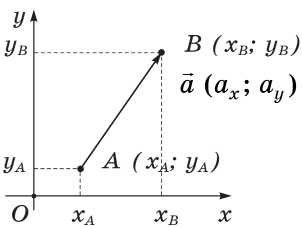
Два однаково напрямлених колінеарних вектори називаються ***співнапрямленими***	
Два неоднаково напрямлених колінеарних вектори називаються ***протилежно напрямленими***	

Координати вектора

Координатами вектора називаються координати кінця рівного йому вектора, відкладеного від початку координат	

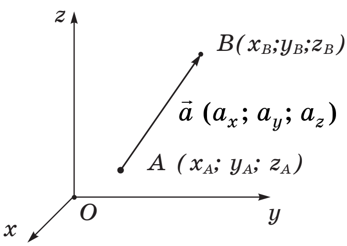
Обчислення координат і модуля вектора

На площині



$$a_x = x_B - x_A,$$
$$a_y = y_B - y_A,$$
$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

У просторі



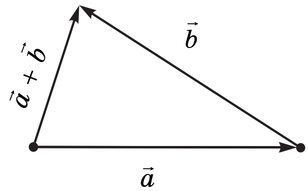
$$a_x = x_B - x_A,$$
$$a_y = y_B - y_A,$$
$$a_z = z_B - z_A,$$
$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Лінійні операції над векторами

Сума векторів

Правило трикутника

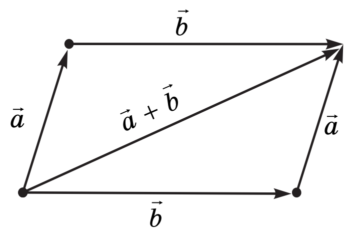
Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, проведений з початку $\vec{a}$ у кінець $\vec{b}$, якщо кінець $\vec{a}$ і початок $\vec{b}$ суміщені



$$\vec{a}(a_x; a_y) + \vec{b}(b_x; b_y) =$$
$$= \vec{c}(a_x + b_x; a_y + b_y)$$

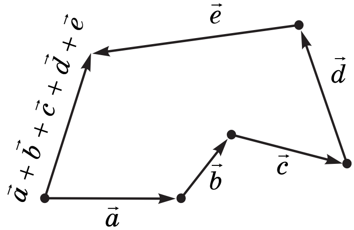
Правило паралелограма

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ прикладені до спільного початку, то їх сума є вектор, що збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$

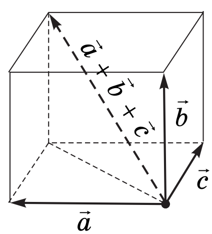


Правило многокутника

Якщо до кінця кожного доданка прикласти початок наступного, то вектор, що йде з початку першого в кінець останнього доданка, і є сумою всіх цих доданків



Правило паралелепіпеда



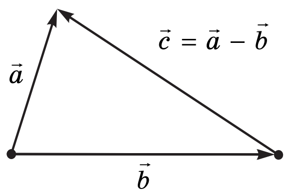
Вектори

Властивості операції додавання векторів

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переставний закон).
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$(сполучний закон).
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (наявність нульового елемента).
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=0$ (наявність протилежного елемента)

Різниця векторів

Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$ такий, що $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$



На площині:

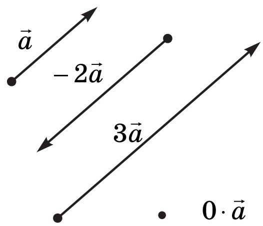
$\vec{a}(a_x;a_y)-\vec{b}\,(b_x;b_y)=\vec{c}(a_x-b_x;a_y-b_y)$.

У просторі:

$\vec{a}\,(a_x;\,a_y;\,a_z)-\vec{b}\,(b_x;\,b_y;\,b_z)=\vec{c}\,(a_x-b_x;\,a_y-b_y;\,a_z-b_z)$

Множення вектора на число

Добутком $\lambda\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число λ у разі $\lambda\neq 0,\ \vec{a}\neq\vec{0}$ називається вектор, колінеарний $\vec{a}$, модуль якого дорівнює $|\lambda||\vec{a}|$ який спрямований у той же бік, що й вектор $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і у протилежний, якщо $\lambda < 0$.



Якщо $\lambda = 0$ або $\vec{a}=\vec{0}$, то $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

На площині: $\lambda\cdot\overline{(a_x;\,a_y)}=\overline{(\lambda a_x;\,\lambda a_y)}$.

У просторі: $\lambda\cdot\overline{(a_x;\,a_y;\,a_z)}=\overline{(\lambda a_x;\,\lambda a_y;\,\lambda a_z)}$

Властивості операції множення вектора на число

1. $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (розподільний закон відносно складання векторів).

2. $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ (розподільний закон відносно складання чисел).

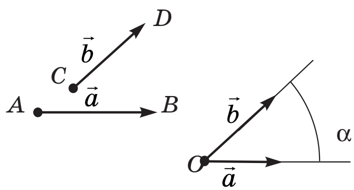
3. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ (сполучний закон).

4. $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$ (множення на одиницю)

Кут між векторами

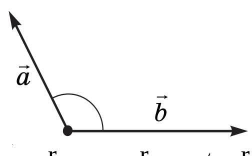
Кутом між векторами називається кут між векторами, рівними даним і такими, що мають спільний початок

$$\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = (\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$$



Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$$

На площині: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y$.

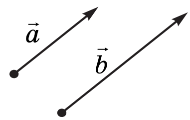
У просторі: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$

Властивості скалярного добутку

1. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$
2. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
3. $(x\vec{a})\cdot\vec{b} = x(\vec{a}\cdot\vec{b})$
4. $(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{c}\cdot\vec{b}$

Умова колінеарності векторів

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, якщо їх відповідні координати пропорційні.



$\vec{a}\,||\,\vec{b}$

$\vec{b} = k\vec{a}$

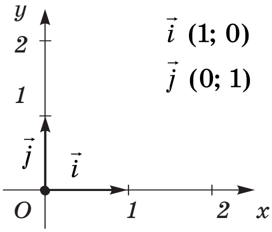
На площині: $\dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = k.$

У просторі: $\dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z} = k$

Координатні вектори

Вектор називається ***одиничним***, якщо його абсолютна величина дорівнює одиниці. Одиничні вектори, що мають напрямлення додатних координатних півосей, називаються ***координатними векторами,*** або ***ортами***. Координатні вектори осей Ox, Oy, Oz позначають $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ або $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, відповідно:

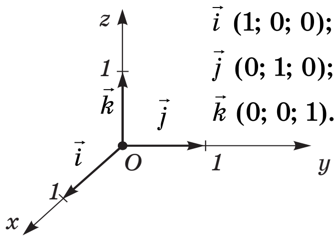
На площині:



$\vec{i}$ (1; 0)

$\vec{j}$ (0; 1)

У просторі:



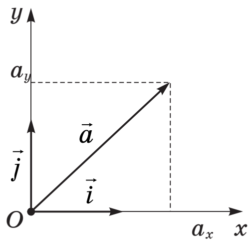
$\vec{i}$ (1; 0; 0);

$\vec{j}$ (0; 1; 0);

$\vec{k}$ (0; 0; 1).

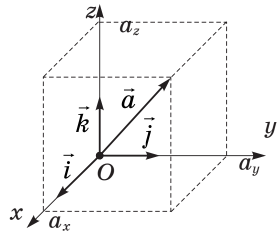
Розкладання вектора по координатних осях

На площині:



$$\vec{a}\,(a_x;\, a_y) = a_x\vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$$

У просторі:



$$\vec{a}\,(a_x;\, a_y;\, a_z) = a_x\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\vec{k}$$

Література

1. Математический энциклопедический словарь/ Гл. ред. Ю. В. Прохоров; Ред. кол.: С. И. Адян и др.— М.: Сов. Энциклопедия, 1988.— 847 с.
2. Погорелов А. В. Геометрия: Учеб. для 7—11 кл. сред. шк.— М.: Просвещение, 1992—1997.
3. Погорелов А. В. Геометрия. 10—11 кл.: Решение задач из учебника Погорелова А. В. «Геометрия. 7—11».— М.: Дрофа, 1996.—112 с.
4. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. — Львів: ВНТЛ, 1977.— Ч. II.— 78 с.
5. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Начала стереометрии —М.: Просвещение, 1981.— 224 с.
6. Бородин А. И., Евдокимов Д. К., Каменская М. В., Палант Ю. А. Математика.— К.: Выща школа, 1974.— 256 с.
7. Нелин Е. П. Геометрия в таблицах. — Харьков: Мир детства, 1997.
8. Каченовский М. И., Колягин Ю. М., Луканкин Г. Л., Яковлев Г. Н. Геометрия. — М.: Наука, 1978.— Ч. 1 — 176 с.
9. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: Справ. материалы.— М.: Просвещение, 1988.— 416 с.

Предметний покажчик