Число – це одне з найголовніших понять математики, воно найчастіше використовується для опису кількості, міри чогось. При підготовці до ЗНО слід розрізняти наступні типи чисел:
Натуральні – числа, що використовуються при лічбі – 1,2,3…. Позначаються $\mathbb{N}$.
Цілі – натуральні, їм протилежні та число нуль – -2, -1, 0, 1, 2…. Позначаються $\mathbb{Z}$.
Множина натуральних чисел включається в множину цілих чисел, тобто $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Раціональні – числа, що можна записати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m – ціле, n – натуральне, позначаються $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
Ірраціональні I – усі числа, що не можуть бути представлені у вигляді частки цілого і натурального.
Дійсні $\mathbb{R}$ – усі числа числової прямої (і раціональні, і ірраціональні).
Числові множини включаються одна в одну: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $I \subset \mathbb{R}$; $I \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.
Числа потрібно навчитися розрізняти, оскільки досить часто в задачах потрібно серед знайдених розв'язків вибрати лише натуральні, цілі, додатні.

Натуральні числа

Дії з числами: додавання (сума), віднімання (різниця), множення (добуток), ділення (частка).
Основні задачі на натуральні числа, з якими стикаємось при підготовці до ЗНО: обчислення, задачі на подільність, ділення з остачею.

Приклад (дії з натуральними числами**).** Обчислити:
$7 \cdot 450 - 8 \cdot 350 - 7 \cdot 449 + 8 \cdot 351$

Розв'язання:

Раціональний спосіб розв'язання задачі – виконати групування:
$7 \cdot 450 - 8 \cdot 350 - 7 \cdot 449 + 8 \cdot 351 = 7 \cdot 450 - 7 \cdot 449 + 8 \cdot 351 - 8 \cdot 350 =$
$= 7 \cdot (450 - 449) + 8 \cdot (351 - 350) = 7 + 8 = 15$

Розглянемо **задачі на подільність**. Натуральне число a ділиться на натуральне число b, якщо існує таке натуральне число c, що $a = bc$. Число a **кратне** числу b, а число b називають **дільником** числа a.
Корисно пам'ятати наступні ознаки подільності:

Дільник	Ознака
2	Остання цифра ділиться на 2
3	Сума цифр ділиться на 3
4	Дві останні цифри утворюють число, що ділиться на 4
5	Остання цифра числа 0 або 5
6	Число ділиться на 2 і на 3
7	Якщо потроєна кількість десятків, додана до кількості одиниць ділиться на 7
8	Три останні цифри утворюють число, що ділиться на 8
9	Сума цифр ділиться на 9
11	Сума цифр на непарних місцях мінус сума всіх цифр на парних місцях ділиться на 11

Приклад:
Яке з чисел ділиться на 6?

А	Б	В	Г	Д
122	**124**	**123**	**132**	**135**

Знайдемо числа, які діляться на 2 і на 3 одночасно. Відкидаємо непарні числа, оскільки вони не діляться на 2. Далі знайдемо число, сума цифр якого ділиться на 3. Це число – 132. Відповідь – Г.

Задачі на ділення з остачею.

Поділити натуральне число a на натуральне число b з остачею — означає подати число a у вигляді $a = bq + r$, де q і r — невід'ємні цілі числа, причому $0 \le r < b$. Число q при цьому називається *неповною часткою,* а число r — остачею від ділення a на b. **Наприклад**, при діленні числа 27 на 6 неповна частка дорівнює 4, а остача – 3: $27 = 6 \cdot 4 + 3$.

Приклад. Остача від ділення натурального числа k на 5 дорівнює 2. Вкажіть остачу від ділення на 5 числа $k + 21$.

Найпростіший спосіб розв'язання цієї задачі – вибрати довільне число, що при діленні на 5 дає остачу 2, наприклад – 7. 7+21=28. 28 при діленні на 5 дає остачу 3, оскільки $28 = 5 \cdot 5 + 3$

Приклад. Добуток двох послідовних натуральних чисел дорівнює 552. Знайти їх суму.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
43	**45**	**47**	**49**	**51**

Один із способів мислення – представити запропоновані числа у вигляді суми послідовних чисел, якщо це можливо, і шукати добутки цих чисел. При проходженні тестових завдань зручно відкинути в першу чергу відповіді, які є неможливими.

43 = 21+22

45=22+23

47=23+24

49=24+25

51=25+26

Останньою цифрою числа 552 є двійка, це означає, що добуток останніх цифр чисел-доданків повинен закінчуватися на 2. Одразу відкидаємо 22+23, 24+25, 25+26, оскільки їх останні цифри дають в добутку останні цифри 6 і 0.

$21 \cdot 22 = 462$; $23 \cdot 24 = 552$. Відповідь В.

Натуральне число p називається **простим**, якщо воно має рівно два натуральні дільники. Єдиним натуральним числом, що має єдиний дільник є число 1.

Якщо прості числа виписувати за зростанням, то початок буде такий: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, … .

Взаємно простими числами називаються числа a і b , у яких найбільший спільний дільник дорівнює 1.

Числа a та b взаємно прості тоді й тільки тоді, коли існують такі цілі числа u і v, що $au + bv = 1$.

Властивості:

Якщо кожне з чисел a і b взаємно просте з числом c, то добуток ab також взаємно простий з c.

Якщо добуток ab ділиться на c і при цьому a взаємно просте з c, то тоді на c обов'язково ділиться число b .

Числа, що мають більше двох різних дільників, називаються **складеними.** Наприклад, число 10 – складене, оскільки воно ділиться на 1, 2, 5 і 10; число 39 – складене, оскільки воно ділиться на 1, 3, 13, 39.

Одинця не відноситься ні до простих, ні до складених чисел.

Представлення складених чисел у вигляді добутку простих.

Основна теорема арифметики: кожне складене число можна представити у вигляді добутку простих чисел і притому єдиним чином (порядок множників не враховується).
Одні й ті ж множники можуть зустрічатися кілька разів. Наприклад,

$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Користуючись означенням степеня, розклад числа 360 на прості множники можна записати у вигляді: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Згадаємо про НСК і НСД.

Найменшим спільним кратним (НСК) натуральних чисел a і b називають натуральне число m з такими властивостями.

1) a є дільником m, b є дільником m, тобто m — спільне кратне чисел a і b.

2) якщо a дільник l і b дільник l, то m дільник l.

Нехай хоча б одне з чисел a і b відмінне від нуля. Виявляється, що в цьому випадку числа a і b мають такий додатний спільний дільник, який ділиться на будь-який спільник дільник цих чисел. Його називають **найбільшим спільним дільником чисел** a і b**.** Числа a і b мають тільки один найбільший спільний дільник.

Знайдемо, наприклад, НСД чисел 18,48 і 72.

Розкладемо кожне з чисел на прості множники: $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$; $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$; $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Виписуємо спільні для всіх прості множники 2 і 3, тоді $d(18;48;72) = 2 \cdot 3 = 6$.

Методи знаходження найменшого спільного кратного чисел a і b

1. Розклад чисел на прості множники.
2. За формулою $m = m(a,b) = \dfrac{a \cdot b}{d(a,b)}$, де $d(a,b)$ — найбільший спільник дільник чисел a та b, який знаходиться за алгоритмом Евкліда.

Приклад. Знайти НСК (24, 30).

$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; отже

НСК$(24,30) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Раціональні числа. Дроби

Звичайний дріб — це число виду $\dfrac{m}{n}$, де m і n — натуральні числа. Число m називається чисельником, n — знаменником дробу. Наприклад, $\dfrac{1}{17}$, $\dfrac{15}{7}$.

Серед звичайних дробів розрізняють правильні та неправильні.

Дріб $\dfrac{m}{n}$ називається **правильним**, якщо його чисельник менший знаменника, і **неправильним**, якщо його чисельник більший знаменника або дорівнює йому.

Будь-який неправильний дріб можна подати сумою натурального числа та правильного дробу (виділення цілої частини). Два дроби $\dfrac{a}{b}$ і $\dfrac{c}{d}$ називаються рівними, якщо $ad = bc$.

Основна властивість дробу:

Якщо чисельник і знаменник дробу $\dfrac{a}{b}$ помножити або поділити на одне й теж натуральне число, то дістанемо дріб, який дорівнює даному

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}.$$

Користуючись основною властивістю дробу, іноді можна замінити даний дріб іншим дробом, рівним даному, але з меншим чисельником та меншим знаменником. Таку заміну називають **скороченням**.

Арифметичні дії над звичайними дробами

1. $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$.
2. $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{b\cdot d}$.
3. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.
4. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$.
5. $\frac{a}{b}\cdot k=\frac{a\cdot k}{b}$.
6. $\frac{a}{b}:k=\frac{a}{bk}$.
7. $\frac{a}{b}\pm d=\frac{a\pm d\cdot b}{b}$.

Зведення дробів до найменшого спільного знаменника

Для зведення дробів до найменшого спільного знаменника потрібно:

1) знайти найменше спільне кратне знаменників дробів;
2) обчислити додаткові множники, поділивши найменше спільне кратне на кожний знаменник;
3) помножити чисельник й знаменник кожного дробу на відповідний додатковий множник.

Відношення та пропорції

Рівність двох відношень називають **пропорцією.**

Пропорцію можна записати так:

$$a:b=c:d,\text{ або }\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Вважатимемо, що всі члени пропорції відмінні від нуля.

У пропорції $a:b=c:d$ числа a і d називають **крайніми членами***,* а числа b і c — **середніми членами пропорції**.

Основна властивість пропорції: якщо добуток крайніх членів дорівнює добутку середніх членів, то пропорція правильна.

Пропорції $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$ і $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ називають **похідними пропорціями**.

Розглянемо пропорцію $a:x=c:d$, де x — невідома величина, a, c, d — задані числа. За основною властивістю пропорції $ad=cx$, звідки $x=ad:c$, тобто невідомий середній член пропорції дорівнює добутку крайніх членів, поділеному на відомий середній член. Аналогічно невідомий крайній член пропорції дорівнює добутку її середніх членів, поділеному на відомий крайній член.

Приклад. Знайти x з пропорції $\frac{a+x}{x-a}=\frac{b}{c}$.

Складемо похідну пропорцію виду $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$. знайдемо x:

$$\frac{(x+a)+(x-a)}{(x+a)-(x-a)}=\frac{b+c}{b-c};\;\; \frac{x}{a}=\frac{b+c}{b-c};\;\; x=\frac{(b+c)a}{b-c}.$$

Десяткові дроби

Десятковим дробом називають дріб, знаменник якого — число, що виражене одиницею з одним або кількома нулями, тобто дріб виду $n/10^k$ (n — ціле, k — натуральне число). Десяткові дроби заведено записувати без знаменників: спочатку записують цілу частину, а далі чисельник дробової частини. Цілу частину відокремлюють комою від чисельника дробової частини. При цьому чисельник дробової частини записують так, щоб у ньому було стільки цифр, скільки нулів у знаменнику. Якщо в чисельнику менше цифр, ніж нулів у знаменнику, то перед чисельником дописують відповідну кількість нулів. **Наприклад:**

$$7\frac{17}{100}=7{,}17\ ;\ \frac{7}{10}=0{,}7\ ;\ \frac{7}{100}=0{,}07.$$

Якщо до десяткового дробу приписати праворуч нуль, то дістанемо дріб, що дорівнює початковому.

Округлення десяткових дробів. У деяких випадках доводиться округляти десяткові дроби до якогось розряду. При порівнянні числа та його наближення використовують знак «≈» (наближено дорівнює). Таку дію часто доводиться виконувати при заповненні бланку відповідей.

При округленні десяткових дробів до певного розряду всі наступні за цим розрядом цифри замінюють нулями (або просто відкидають, якщо вони стоять після коми). Якщо перша з цифр (ліворуч), що відкидаються, менша за 5, то останню залишену цифру не змінюють, а якщо перша цифра, що відкидається, більша за 5 або дорівнює 5, то останню залишену цифру збільшують на одиницю. Якщо цифра, що відкидається, стояла до коми, то на її місці записують нуль.

Приклади:

$$2{,}089\approx 2{,}09;\ 0{,}9355\approx 0{,}936\ ;\ 1{,}454\approx 1{,}45\ .$$

Відсотки

Часто доводиться розглядати соті частини різних величин: грошових сум, маси продуктів, об’єму товарів і т. ін. (соту частину гривні називають копійкою, соту частину метра — сантиметром).

Відсотком (процентом) називають одну соту частину числа. Якщо слово «відсоток» («процент») стоїть після числа, записаного цифрами, то замість нього ставлять знак %. Задачі на відсотки можна розв’язувати, наприклад, за допомогою пропорцій.

Приклад. Якщо число b становить 45% від додатного числа a, то $b=?$

Складаємо пропорцію у вигляді:

$$\begin{array}{ccc} a & - & 100\% \\ b & - & 45\% \end{array}$$

або, знаходячи добутки крайніх і середніх членів пропорції, $a\cdot 45\% = b\cdot 100\%$, звідки $b=\dfrac{a\cdot 45}{100}$.

У спрощеному вигляді обчислювати відсотки можна множенням числа на $0,k$, де k – відсоток.

Приклад. У магазині за два тижні продано 150 кг нового виду цукерок. Першого тижня продали 60 % всіх цукерок Скільки кілограмів продали за другий тиждень?
Першого тижня продали 60 % всіх цукерок, а отже, другого тижня продали 40 % цукерок, що становить 150 · 0,4 = 60 (кг).

Складніші задачі на відсотки розв’язують, склавши рівняння.

Степінь і корінь

Розрізняють степінь з натуральним показником і степінь з раціональним показником (корінь).

Степенем числа a **з натуральним показником** n називають добуток n множників, кожен з яких дорівнює a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{n}$$

Основні властивості:

1) $a^0 = 1;\ a \neq 0$ (0^0 не визначене);

2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n};\ a \neq 0$;

3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;

4) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m};\ a \neq 0$;

5) $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$;

6) $\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n$;

7) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};\ b \neq 0$.

Приклад. Обчислити $\frac{2^6 \cdot 5^6}{10^5}$

Скористаємося властивістю $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$: $2^6 \cdot 5^6 = \left(2 \cdot 5\right)^6 = 10^6$.

$\frac{2^6 \cdot 5^6}{10^5} = \frac{10^6}{10^5} = 10^{6-5} = 10$.

При порівняння степенів зручно звести їх до однієї основи або одного показника!

На прикладі наступної задачі продемонструємо обидва методи.

Приклад. Запишіть числа 2^{15}, 4^{10}, 10^5 у порядку зростання.

Щоб розставити числа у порядку зростання або спадання, потрібно їх попарно порівняти (побудувати нерівності).

1) Порівняємо числа 2^{15} і 4^{10} зведенням до однієї основи, наприклад – до основи 2.

$4^{10} = \left(2^2\right)^{10} = 2^{20}$, тому $2^{15} < 2^{20}$.

2) Порівняємо числа 10^5 і 2^{15}: $10^5 = 2^5 \cdot 5^5 > 2^5 \cdot 4^5 = 2^5 \cdot 2^{10} = 2^{15}$ (складний спосіб)

3) Показники 15, 10, 5 кратні 5, тому всі числа зручно звести до показника 5:

$2^{15} = \left(2^3\right)^5 = 8^5$; $4^{10} = \left(4^2\right)^5 = 16^5$.

$8^5 < 10^5 < 16^5$, отже, $2^{15} < 10^5 < 4^{10}$.

Третій спосіб порівняння дає результат найшвидше.

Корінь з числа

Коренем n-го степеня із додатного дійсного числа a називається розв'язок рівняння $x^n = a$, $n \geq 2$, $n \in N$. Позначення: $\sqrt[n]{a}$. Степенем додатного числа a з раціональним показником $\frac{m}{n}$ називають корінь n-го степеня з числа a^m.

Основні формули:

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$;

2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$;

3) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$;

4) $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$;

5) $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$;

6) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

7) $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$;

8) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}}$;

9) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a^{k-n}};\ a \neq 0$;

10 $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$);

11) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\ b \neq 0$

12) $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$, якщо $a < b$.

Приклад. Обчислити $\sqrt{2} \cdot \sqrt{0,08}$.

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{0,08} = \sqrt{2 \cdot 0,08} = \sqrt{0,16} = 0,4$.

Іноді зручно обчислювати, переходячи до звичайних дробів:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{0,08} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{8}{100}} = \sqrt{\frac{16}{100}} = \frac{4}{10} = 0,4.$$

Приклад. Обчислити: $\dfrac{\sqrt[7]{256}}{\sqrt[7]{2}}$.

$$\frac{\sqrt[7]{256}}{\sqrt[7]{2}} = \frac{\sqrt[7]{2^8}}{\sqrt[7]{2}} = \sqrt[7]{\frac{2^8}{2}} = \sqrt[7]{2^7} = 2.$$

Приклад. Внести множник під знак кореня у виразі $2a\sqrt[5]{5a}$, де $a \geq 0$.

$$2a\sqrt[5]{5a} = \sqrt[5]{5a \cdot 2^5 \cdot a^5} = \sqrt[5]{5a^6 \cdot 32} = \sqrt[5]{160a^6}$$

Приклад.

Якому з наведених проміжків належить число $\sqrt[4]{30}$?

А	Б	В	Г	Д
$(1;2)$	$(2;3)$	$(3;4)$	$(4;5)$	$(5;6)$

Розглянемо число 30 і знайдемо найближчі до нього числа, що є четвертими степенями.
$1^4=1,\quad 2^4=16,\quad 3^4=81$.
$16<30<81$, тому $\sqrt[4]{16}<\sqrt[4]{30}<\sqrt[4]{81}$ або $2<\sqrt[4]{30}<3$. Отже, $\sqrt[4]{30}\in(2;3)$.

Приклад.

Серед чисел $a=\sqrt{5}-2$, $b=2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$, $c=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$ укажіть *усі* додатні.

А	Б	В	Г	Д
a	c	$a; b$	$a; c$	$a; b; c$

Для того, щоб встановити, чи є число додатним, нам потрібно знати яке з чисел, що присутні в різниці, більше. Порівняємо $\sqrt{5}$ і 2, для цього представимо їх в такому вигляді, щоб можна було порівняти: $2=\sqrt{2^2}=\sqrt{4}$. $\sqrt{5}>\sqrt{4}$, тому $a>0$. При перетворенні числа b скористаємося внесенням під корінь: $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{12}$; $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{18}$. $\sqrt{12}<\sqrt{18}$, тому $b<0$.

Модуль

Модулем (абсолютною величиною) дійсного числа є

$$|x|=\left[\begin{array}{l} x,\quad x\ge 0 \\ -x,\ x<0 \end{array}\right.$$

Дужка $\Bigg[$ тут і надалі означає «або» - виконання хоча б однієї з умов, перерахованих в такій дужці. Її називають сукупністю.

Дужку $\Bigg\{$ називають системою – одночасне виконання усіх умов під знаком системи.

Геометрично модуль означає відстань від точки (числа на осі) до початку координат, тому модуль – завжди невід'ємне число.

Основні властивості модуля:

1) $|x|=|-x|$;
2) $|x|\ge 0$;
3) $|x|\ge x$;
4) $-|x|\le x\le |x|$;
5) $|x|\le a \Leftrightarrow -a\le x\le a;\ a\ge 0$;
6) $|x\pm y|\le |x|+|y|$;

7) $|x-y| \geq |x|-|y|$;

8) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

9) $|x-y| = |y-x|$

10) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$.

Приклад.

Обчислити: $\left|2-\sqrt{5}\right| + \left|2+\sqrt{5}\right|$

Визначимо знак виразів під знаком модуля.

$2+\sqrt{5}>0$ як сума двох додатних чисел, тому $\left|2+\sqrt{5}\right| = 2+\sqrt{5}$

Порівняємо числа 2 і $\sqrt{5}$. $2=\sqrt{4}<\sqrt{5}$, тому $2-\sqrt{5}<0$, тому $\left|2-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5}-2$.

Отже, $\left|2-\sqrt{5}\right| + \left|2+\sqrt{5}\right| = \sqrt{5}-2+2+\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

Приклад. Спростити вираз $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-12x+36}$ при $3 \leq x \leq 6$.

Представимо вираз у вигляді $\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-6)^2}$. Оскільки при $3 \leq x \leq 6$ $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = x-3$, а $\sqrt{(x-6)^2} = |x-6| = -(x-6) = 6-x$, то $\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-6)^2} = |x-3|+|x-6| = x-3+6-x = 3$.

Логарифми

Логарифмом числа b за **основою** a називають такий показник степеня c, до якого треба піднести число a, щоб отримати b, $a^c = b$. Позначення $\log_a b = c$. Числа a та b повинні задовольняти строгим нерівностям! $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ Ці нерівності надзвичайно важливі!

Із означення логарифма одразу можна записати одну з найважливіших формул, пов'язаних з логарифмами – **основну логарифмічну тотожність**.

$$a^{\log_a b} = b$$

Основні формули (звертаю увагу – ці **формули часто корисно читати зліва направо і справа наліво**, оскільки застосовують їх і так, і так):

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$$

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \cdot \log_a b$$

$$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Перехід до іншої основи:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Наслідки з формули переходу до іншої основи:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a};\ \log_a b \cdot \log_b a = 1,\ c^{\log_a b} = b^{\log_a c}.$$

Особливої уваги заслуговують **натуральний і десятковий логарифми!**

Для них існують спеціальні позначення:

$$\ln x = \log_e x,\ e \approx 2,718281828;\ \lg x = \log_{10} x.$$

Приклади безпосереднього обчислення:

$\log_2 2 = 1$; (оскільки $2^1 = 2$)

$\log_2 1 = 0$; (оскільки $2^0 = 1$)

$\log_2 8 = 3$

$\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$

$\log_2 \frac{1}{4} = -2$

Приклади обчислення за допомогою формул і властивостей:

$$\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} \cdot \log_2 2 = \frac{3}{2}.$$

$$\frac{\log_{\sqrt[4]{5}} 16}{\log_{25} \sqrt{2}} = \frac{\log_{5^{\frac{1}{4}}} 2^4}{\log_{5^2} 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{\frac{4}{1}}{\frac{1}{4}} \log_5 2}{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{2}} \log_5 2} = \frac{16 \cdot \cancel{\log_5 2}}{\frac{1}{4} \cdot \cancel{\log_5 2}} = 64.$$

$$\log_3 2 - \log_3 54 = \log_3 \frac{2}{54} = \log_3 \frac{1}{27} = -3.$$

Розглянемо задачі, пов'язані з основною логарифмічною тотожністю.

$4^{\log_4 5} = 5$

$$2^{2\log_4 6 + 1} = 2^{2\log_4 6} \cdot 2^1 = 2^{\frac{2}{2}\log_2 6} \cdot 2 = 2^{\log_2 6} \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12$$

$$25^{\frac{1}{\log_3 5}} = 25^{\log_5 3} = 5^{2\log_5 3} = \left(5^{\log_5 3}\right)^2 = 3^2 = 9.$$